# برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

ISSN: 1735-4951

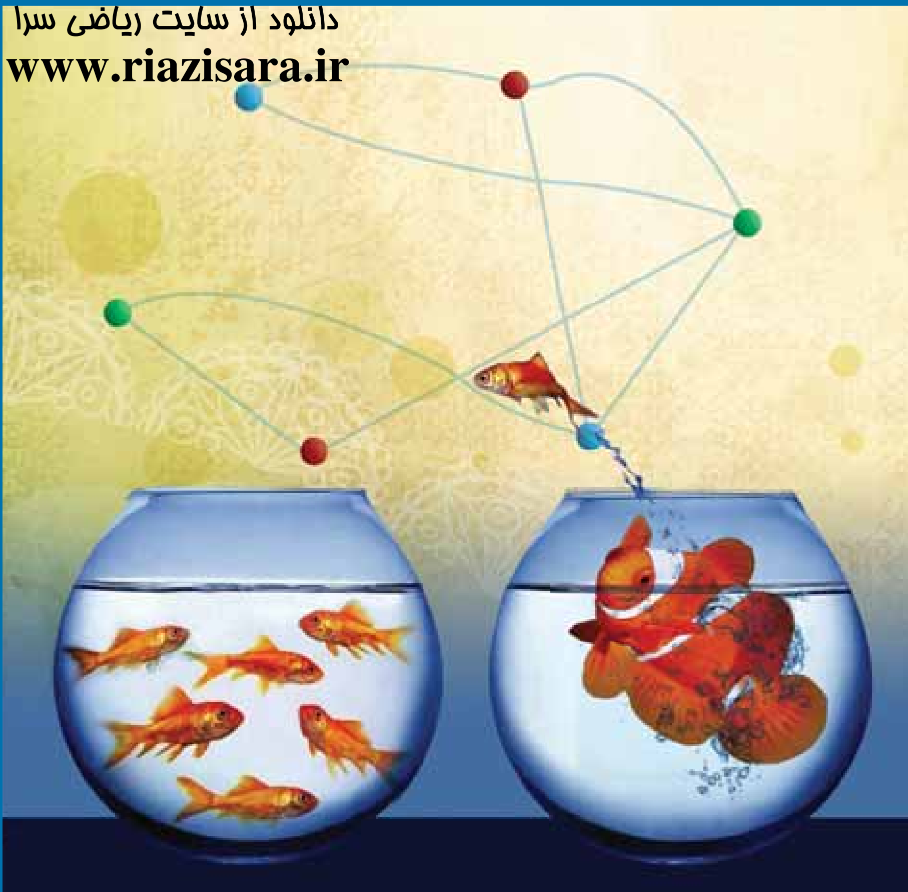
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد ۲

دورهٔ بیست و ششم
شمارهٔ ۹۶
آبان ۱۳۹۵
۴۸ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



- ماهی‌ها در گراف آکواریوم!
- اعداد فانتزی شاد!
- آموزش ترجمهٔ متون ریاضی
- الفبای ترسیم
- چند معمای تصویری، یا بازی با تصاویر!
- مسائل برای حل

نام آوران عرصهٔ ریاضی معاصر ایران

# پروفسور ابوالقاسم غفاری

## (۱۳۹۲-۱۲۸۶)

### تنها ایرانی حاضر در پروژهٔ پرواز آپولو به کرهٔ ماه

زنده‌یاد **ابوالقاسم غفاری** در ۲۵ خرداد ۱۲۸۶، در محلهٔ سرچشمهٔ تهران زاده شد. پدرش **میرزا حسین‌خان غفاری** دبیر ارشد ادارهٔ کارگزینی وزارت عدلیه (دادگستری) بود. تحصیلات ابتدایی‌اش را در دبستان «اشراف» آغاز کرد و با ادامهٔ تحصیل در دارالفنون، در سال ۱۳۰۷ خورشیدی موفق به اخذ دیپلم متوسطهٔ خود شد. سپس با شرکت در آزمون اعزام محصل به خارج از کشور و قبولی در آن، برای ادامهٔ تحصیل به فرانسه اعزام شد و در دانشگاه «نانسی» به تحصیل در رشتهٔ ریاضی پرداخت. وی در سال ۱۳۱۱ با درجهٔ کارشناسی از آنجا فارغ‌التحصیل شد و سپس به دانشگاه «سوربن» رفت و پس از دریافت سه مدرک عالی در فیزیک، نجوم و آنالیز ریاضی، به تحصیل فیزیک و ریاضی در دانشگاه «پاریس» مشغول شد.

استاد غفاری در اسفند ۱۳۱۵ به ایران بازگشت و از فروردین ۱۳۱۶ به تدریس در دانش‌سرای عالی (دانشگاه تهران) پرداخت. هم‌زمان نیز در ادارهٔ جغرافیای ارتش به‌عنوان استاد حضور می‌یافت و کارهای ماندگاری در این حوزه انجام داد. در سال ۱۳۲۵ به دعوت کالج سلطنتی لندن به آنجا رفت و در سال ۱۳۲۷ دکترای ریاضیات خود را از دانشگاه لندن دریافت کرد و ۱۲ سال در آنجا به کارهای پژوهشی در زمینهٔ ریاضیات و فیزیک پیشرفته پرداخت. در سال ۱۳۳۹ استاد غفاری به دعوت دانشگاه هاروارد به آمریکا عزیمت کرد و پژوهش‌های جامعی را در آنجا در اطراف معادلات دیفرانسیل و حل مسائل دینامیک گازی انجام داد. در همین دوران هم به عضویت «مؤسسهٔ مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون» درآمد.

در سال ۱۳۴۱، ابوالقاسم غفاری به ایران بازگشت و به تدریس معادلات دیفرانسیل در دانشگاه تهران مشغول شد. شهرت پروفسور غفاری چنان بود که در سال‌های دههٔ ۱۹۵۰ همکاری‌هایی در زمینهٔ «تئوری وحدت میدان و الکترومغناطیس» با پروفسور **اینشتین** انجام داد. در سال ۱۳۴۳ رساله‌ای را به دانشگاه واشنگتن ارائه کرد که زمینه‌ساز دعوت از او به ناسا (سازمان هوا ـ فضای آمریکا) شد. چندی بعد او به پروژهٔ عظیم آپولو پیوست که به انجام محاسباتی در زمینهٔ پرواز موفقیت‌آمیز آپولو به ماه و بازگشت آن منجر شد.

استاد غفاری در سال ۱۹۷۳ (۱۳۵۱) از ناسا بازنشسته شد و پژوهش‌های مستقلی را در زمینهٔ کنترل مأموریت‌های بین‌سیاره‌ای آغاز کرد و موفق به دریافت نشان‌های علمی متعدد از سوی مقامات ایران و آمریکا در آن زمان شد. این استاد فرزانهٔ ایرانی که با کارهای خود شهرتی جهانی یافته بود، علاوه بر نوشتن ۵۰ اثر تحقیقی در مورد ریاضیات نظری و عملی در آمریکا، انگلستان و فرانسه، سه کتاب مهم نیز تألیف کرد که به عنوان کتاب درسی در دانشگاه‌های معتبر جهان تدریس می‌شوند. در مقام و مرتبهٔ این استاد بزرگ و کم‌نظیر همین بس که دکتر **فیروز نادری**، عضو ارشد ناسا که در حال حاضر در آنجا مشغول به تحقیق و از شاگردان اسبق زنده‌یاد **پرویز شهریاری** نیز هست، در مورد او می‌گوید: «غفاری غولی در جامعهٔ علمی ایران بود.»

در سال‌های اخیر، زنده‌یاد ابوالقاسم غفاری، با وجود کهولت سن، حافظه‌ای استثنایی داشت و تمام خاطراتش را با جزئیات به‌یاد داشت که آن‌ها را در مصاحبه‌ای در اختیار خبرگزاری ایسنا قرار داد.

استاد غفاری، سه سال پیش در چنین روزهایی (۱۴ آبان ۱۳۹۲) در سن ۱۰۶ سالگی دارفانی را وداع گفت. یادش گرامی باد.

رشد
# برهان ریاضی
ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وششم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۹۶
■ آبان ۱۳۹۵
■ شمارهٔ ۲
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

**مدیرمسئول:** محمد ناصری
**سردبیر:** حمیدرضا امیری
**مدیرداخلی:** هوشنگ شرقی
**ویراستار ادبی:** بهروز راستانی
**طراح گرافیک:** شاهرخ خره‌غانی
**تصویرگر:** میثم موسوی

**هیئت تحریریه:**
محمد هاشم رستمی،
دکتر ابراهیم ریحانی،
احمد قندهاری،
میرشهرام صدر،
هوشنگ شرقی،
سید محمدرضا هاشمی موسوی،
غلامرضا یاسی‌پور،
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی،
محمدعلی قربانی،
حسین کریمی،
محمود داورزنی،
احسان یارمحمدی

**وبگاه:**
www.roshdmag.ir
**پیام‌نگار:**
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
**نشانی وبلاگ مجله:**
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
**پیام‌گیر نشریات رشد:**
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
**پیامک:**
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
**نشانی دفتر مجله:**
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
**تلفن دفتر مجله:**
۰۲۱ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
**تلفن امور مشترکین:**
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
**شمارگان:**
۱۰۰۰۰ نسخه
**چاپ:**
شرکت افست (سهامی‌عام)

**مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:**
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

**خوانندگان رشد برهان ۲:**

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

**نشانی:** تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
**تلفن:** ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



حمیدرضا امیری

# روز جبر!

«خدایی که محمد(ص) را روزگاری به پیامبری فرستاد، که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده و حق ناشناخته مانده و...؛ پیامبری که با آمدنش کوردلان بینا شدند و گمراهان از هلاکت رهایی یافتند ...، خدا بر محمد(ص) و خاندانش درود فرستد.»

این جملات را ریاضی‌دان مشهور، **محمدابن موسی خوارزمی**، در کتاب جبر و مقابلهٔ خود آورده است.

روز ۴ آبان‌ماه هر سال روز «بزرگداشت خوارزمی» (روز جبر) نام‌گذاری شده است. واژهٔ «جبر»[1] که امروزه به شاخه‌ای از ریاضیات اطلاق می‌شود، از نام همین کتاب خوارزمی گرفته شده است.

ترجمهٔ کتاب خوارزمی با نام **جمع و تفریق با عددهای هندسی** به زبان لاتین باعث شد تا دستگاه عددی در اروپا از عددنویسی رومی (که بسیار ناتوان و محدود بود.) به عددنویسی هندی ـ عربی تغییر یابد.

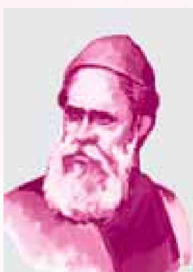
ریاضی‌دانان مسلمانی چون **خوارزمی، جمشید کاشانی، ابوریحان بیرونی، خیام، ماهانی** و... همواره در پیشرفت و تولید علم در ایران و جهان نقش بی‌بدیلی ایفا کرده‌اند و آثار و کتاب‌های ایشان همچنان مورد استفاده و تحقیق پژوهشگران قرار می‌گیرد و این خاصیتِ تولید علم است؛ همان چیزی که همواره مقام معظم رهبری بر آن تأکید داشته است. لذا بر همهٔ شما دانش‌پژوهان و دانش‌آموزان است که در این راستا کوشا باشید و درس‌های ریاضی را که جزو درس‌های پایه‌ای برای تولید هر علمی از علوم تجربی محسوب می‌شود، فرا گیرید و برای اعتلای میهن اسلامی‌مان تلاش کنید. مؤید، سالم و شاداب باشید.

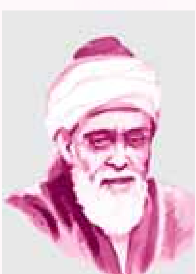
*** پی‌نوشت‌ها**

1. Algebra


جمشید کاشانی


ابوریحان بیرونی


خیام


ماهانی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

**دکتر محرم نژاد ایردموسی**، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

# ماهی‌ها در گراف آکواریوم!

**اشاره**

**جلسهٔ قبل، دبیر ریاضیات گسسته مفاهیم اولیهٔ گراف را توضیح داده و قرار بود امروز وارد موضوع جدیدی دربارهٔ گراف‌ها شویم. هر جلسهٔ درس با حل چند مسئله شروع می‌شد و بچه‌ها داوطلبانه برای حل مسئله‌ها پای تخته می‌آمدند. مسئلهٔ اول شمارشی بود:**

**مسئلهٔ ۱.** چند گراف ساده از مرتبهٔ n و با مجموعهٔ رئوس $V=\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ می‌توان تعریف کرد؟ در چندتای آن‌ها: $d(V_1)=k$؟ در چندتای آن‌ها دو رأس $V_1$ و $V_2$ مجاور هستند؟

**مهسا** در حل مسئله‌های شمارشی قوی‌تر از بقیه بود و داوطلب شد که برود پای تخته.

◆ **مهسا:** بین n رأس، $\binom{n}{2}$ یال می‌توان رسم کرد. برای هر کدام از این یال‌ها دو انتخاب داریم که در گراف باشد یا نه. پس تعداد کل گراف‌های ساده برابر است با: $N_1 = 2^{\binom{n}{2}}$. در قسمت دوم، باید ابتدا k رأس مجاور $V_1$ را مشخص کنیم که $\binom{n-1}{k}$ انتخاب وجود دارد. بعد باید ببینیم برای یال‌های بین بقیهٔ رأس‌ها چند حالت وجود دارد که مشابه قسمت قبل برابر است با: $2^{\binom{n-1}{2}}$ حالت. پس در کل جواب قسمت دوم برابر است با: $N_2 = \binom{n-1}{k}.2^{\binom{n-1}{2}}$.

جواب قسمت آخر هم برابر است با: $N_3 = 2^{\binom{n}{2}-1}$

چون ... .

معلم حرف مهسا را قطع کرد و از بچه‌ها خواست که دلیلش را خودشان در دفترشان بنویسند. معلم از مهسا تشکر کرد و برای مسئله دوم از بچه‌ها خواست که بیایند برای حل مسئله. اما صورت مسئلهٔ دوم:

**مسئلهٔ ۲.** ثابت کنید در میان هر n نفر، حداقل دو نفر وجود دارند که تعداد آشنایانشان در میان همان جمع با هم برابر است.

خیلی از بچه‌ها توانسته بودند مسئله را با مفهوم گراف، مدل‌سازی کنند، اما راه‌حلشان ناقص بود. آن‌ها حالا باید نشان می‌دادند در هر گراف ساده، دو رأس با درجهٔ یکسان وجود دارد.

**مرضیه** مســئله را حل کرده بود و دستش را بلند کرد که بیاید پای تخته. معلم پرسید: «از چه راهی حل کردی؟»

و مرضیــه کــه در گروه تئاتــر هم فعال بود، شــروع کرد به بال زدن! بچه‌ها با این حرکت آشــنا بودند (اصل لانه کبوتر!!) و در واقع خانم معلم خودش اولین‌بار ســر کلاس جبر و احتمال از این حرکت استفاده کرده بود. اما راه‌حل مرضیه:

◆ **مرضیه:** درجهٔ هر رأس عددی است (صحیح) بین صفر و n-۱ و این یعنی n حالت، اما درجهٔ صفر و درجهٔ n-۱ نمی‌توانند با هم در یک گراف اتفاق بیفتند (چرا؟). در نتیجه n-۱ حالت برای درجهٔ هر رأس وجــود دارد. اما گــراف n رأس (کبوتر) دارد. در نتیجه طبق اصل لانهٔ کبوتری دو رأس با درجهٔ برابر وجود دارند.

بنابراین اگر هر نفر را رأس یک گراف در نظر بگیریم و یال‌ها را آشنایی فرض کنیم، لااقل دو نفر هستند که تعداد آشنایانشان (تعداد یال‌ها ـ درجهٔ رأس) یکسان اســت. راه‌حل مرضیه خیلی جالب بود و بچه‌ها هنوز درگیر مســئله بودند. خانم **مریم پرور** که پارســال معلم جبر و احتمال ما هم بود، خیلی خوشــحال شــد که مرضیه توانسته بود از مطالب گذشــته استفاده کند. بعد از نشستن مرضیه معلم مسئلهٔ دیگری مطرح کرد و گفت که حل این مسئله جایزه دارد.

**مســئلهٔ ۳.** ثابت کنید که تنها دو گراف از مرتبه n وجود دارند که در آن‌هــا دقیقــاً دو رأس با درجهٔ برابر وجــود دارد و این دو گراف مکمل یکدیگر هستند.

خانــم مریم پرور بعد از مکثی کوتاه از ما خواســت که اول این دو گراف را پیدا کنیم. می‌خواســتیم برویم ســراغ تمرین بعدی که معلم نگاهی به ســاعتش کرد و از بچه‌ها خواست که ادامهٔ تمرین‌ها را بگذارند برای جلســهٔ بعد. حتماً می‌خواســت درس را شروع کند. چون نیم ساعت بیشتر از وقت کلاس نمانده بود.

◆ **معلم:** بچه‌ها امروز می‌خواهیم گراف‌ها را رنگ کنیم!

◆ **پروانه:** خانم این موضوع که تو کتاب نیست!

◆ **معلم:** بله، ولی موضوع جالبی اســت و شــاید پاســخ این سؤال شــما باشــد که نظریهٔ گراف کجاها کاربرد دارد. یکی از دوستان مــن علاقهٔ زیادی به ماهی‌هــا دارد و در خانهٔ خود انواع ماهی‌ها را نگهداری می‌کند. او به تازگی شــش نوع ماهی خریده اســت کــه آن‌ها را با حرف‌های A، B، ... و F نام‌گذاری می‌کنیم. اما او نمی‌تواند همــهٔ این ماهی‌ها را در یک آکواریوم جای دهد. چون بعضی از آن‌ها طعمهٔ دیگران خواهند شــد. در جدول ۱ مشاهده می‌کنیــد که هر ماهــی با کــدام ماهی‌ها نمی‌توانــد در یک‌جا باشد.

**جدول ۱. همزیستی ماهی‌ها**

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| B, C | A, C, E | A, B, D, E | C, F | B,C,F | D, E |

ســؤالی که برای این دوســت من مطرح است و از من خواست کمکش کنم، این بود که چند آکواریوم لازم دارد. من اول از شــما می‌خواهم که مسئله را با مفهوم گراف مدل‌سازی کنید.

◆ **کیانــا:** خانم هــر نوع ماهی را در یک آکواریــوم نگهداری کنیم؛ خلاص!

◆ **معلــم:** بله، اما این‌جوری این دوســت من بایــد همهٔ حقوقش را بدهد برای خرید آکواریوم. در نظر داشــته باشید که این دوست من هر ماه چند نوع ماهــی جدید به مجموع ماهی‌هایش اضافه می‌کند!

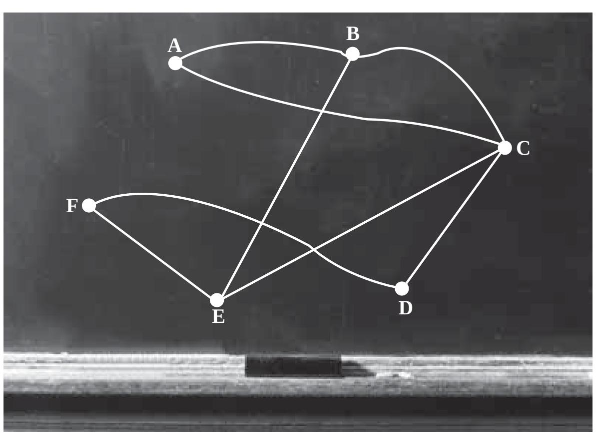
◆ **آذر:** بهتــر اســت هر نوع ماهی را با یــک رأس در گراف نمایش دهیم. خانم این گراف را با اجازهٔ شما من به نام «گراف ماهی‌ها» نام‌گذاری می‌کنم.

◆ **معلــم:** آفریــن! در جواب، رأس‌هــای گراف ماهی‌ها مشــخص می‌شود. یال‌ها چی؟

◆ **زهره:** خانم می‌توانیم هر دو ماهی را که با هم مشــکل دارند، با یک یال به هم وصل کنیم. من شــکل گراف را کشــیده‌ام. بیایم روی تخته بکشم؟

◆ **معلم:** بله، بفرمایید.

بعد زهره شــکل زیــر را روی تخته کشــید که نمــودار گراف ماهی‌هاست.



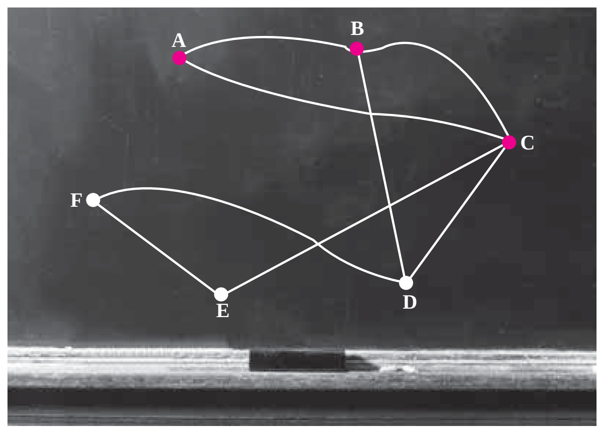
◆ **پریسا:** خانم پس آکواریوم‌ها چی شدند؟ مسئلهٔ اصلی تعداد حداقل آکواریوم‌ها برای نگهداری ماهی‌هاست که هنوز مشخص نیست.

◆ **معلم:** بله. تا اینجا ما مسئله را با یک گراف مدل‌سازی کرده‌ایم. حالا می‌توانیم مشخص کنیم که هر نوع ماهی (اینجا رأس‌ها) در چه آکواریومی باشد.

◆ **زهرا:** خانم سه نوع ماهی A، B و C در این گراف دوبه‌دو به هم وصل هستند. پس حداقل سه آکواریوم لازم داریم.

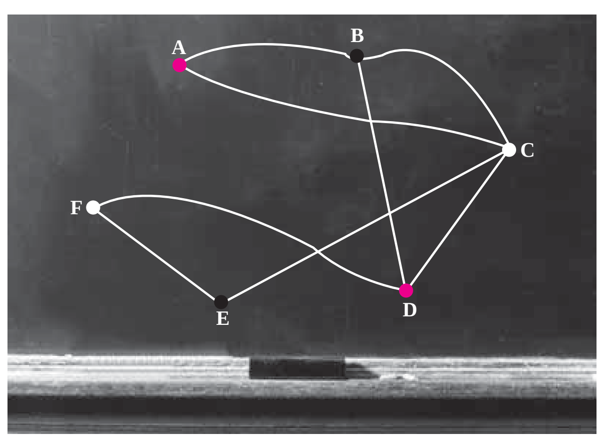
◆ **معلم:** آفرین زهرا. بیایید آکواریوم‌ها را با رنگ رأس‌ها مشخص کنیم.

بعد معلم پای تخته رفت و سه رأس A، B و C را با سه رنگ متفاوت رنگ کرد.




◆ **زهرا:** خانم ماهی‌های نوع D کنار ماهی‌های نوع B و C نمی‌توانند باشند. پس بهتره آن‌ها را بریزیم تو آکواریوم آبی!

بچه‌ها رأس‌های E و F را هم خودشان رنگ کردند. معلم که دفتر بچه‌ها را یکی‌یکی نگاه می‌کرد، تأیید کرد که همه مسئله را کامل کرده‌اند. بعد هم رفت پای تخته و رنگ‌آمیزی رأس‌های گراف ماهی‌ها را تکمیل کرد.




◆ **معلم:** پس تعداد حداقل آکواریوم‌ها چی شد؟

◆ **تقریباً همه:** سه‌تا.

◆ **معلم:** بچه‌ها با رنگ‌آمیزی رأس‌ها و یال‌های گراف می‌توان مسائل جالبی را حل کرد که در اینجا شما یک نوع آن را دیدید. می‌خواستیم رأس‌های گراف را با کمترین تعداد رنگ به‌طوری رنگ کنیم که هر دو رأس مجاور هم‌رنگ نباشند.

این نوع رنگ‌آمیزی را معتبر می‌نامیم و تعداد حداقل رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی معتبر گراف G را عدد رنگی G می‌نامیم. آیا مسئله برایتان جالب بود؟

◆ **بچه‌ها:** بله خانم.

◆ **من:** خانم «حدس بهزاد» چیست؟ به این موضوع ربطی دارد؟

معلم با تعجب مرا نگاه کرد و بعد پرسید که کجا حدس بهزاد را شنیده‌ام. پدرم استاد ریاضی دانشگاه بود و چند وقتی بود که از ۵۰ سالگی حدس بهزاد صحبت می‌کرد. توی خانهٔ ما همه کنجکاو شده بودند که بدانند این حدس ریاضی چیست که هنوز کسی نتوانسته است آن را حل کند. ماجرا را که گفتم، همه فهمیدند که علت سکوت من (که بین بچه‌ها به گرافیست معروف بودم) در طول این جلسه چه بود!

زنگ خورد و خانم مریم‌پرور قول داد که در جلسات بعد اگر تست‌ها فرصتی باقی گذاشتند، حدس بهزاد را سر کلاس بگوید؛ شاید یکی از ماها توانستیم آن‌را حل کنیم!

## پرسش‌های بیکارجو!


چند ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین وجود دارد که طول‌های اضلاع و اقطار آن‌ها همگی اعداد اول باشند؟

الف) ۰

ب) ۱

ج) ۲

د) ۳

هـ) بی‌شمار

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



**عباس قلعه‌پور اقدم،** کارشناس ارشد ریاضی محض

# اعداد فانتزی و شاد!

## ویژگی‌های جالب و سرگرم‌کنندهٔ برخی اعداد

**اشاره**

**«نظریهٔ اعداد» شاخه‌ای از دانش ریاضی است که جذابیت‌های خاص خود را دارد و نه‌تنها همواره مورد توجه ریاضی‌دانان بوده است، بخش‌هایی از آن (که به ویژگی‌های جالب برخی اعداد می‌پردازد)، برای عموم مردم به‌عنوان یک سرگرمی تلقی می‌شود و تا آنجا که بسیاری از آن‌ها را ساعت‌ها به تفکر واداشته است. در این مقاله سعی شده است به برخی از اعدادی که خصوصیات جالبی دارند پرداخته و گوشه‌ای از زیبایی‌های موجود در دنیای اعداد به نمایش گذاشته شود.**

**کلیدواژه‌ها:** نظریهٔ اعداد، متحابه، مقسوم‌علیه، عددهای قوی، عدد آشیلی، عدد خودشیفته

### مقدمه

مطالعهٔ عددها، طبقه‌بندی و سازماندهی آن‌ها به روش‌های متفاوت همیشه مورد توجه و علاقه و صحنهٔ تلاش ریاضی‌دانان بوده است. عناوین متفاوتی از مجموعه‌های اعداد مانند طبیعی، صحیح، گویا، حقیقی، اصم، اول، متعالی، مثلثی و... گواهی بر این موضوع است. در راستای این تحقیقات، شاخه‌ای از دانش ریاضی با عنوان «نظریهٔ اعداد» شکل گرفت که به شناخت ویژگی‌های اعداد و بررسی روابط بین اعداد صحیح می‌پردازد. این شاخه از دیرباز برای ریاضی‌دانان جاذبه‌های فراوان داشته و همواره پهنهٔ بروز خلاقیت‌های آن‌ها بوده است. آغاز پیدایش این نظریه را باید در کارهای **فیثاغورس**[1] (ریاضی‌دان سدهٔ ششم پیش از میلاد) و کاربردهای وسیع آن را در مخابرات و رمزنگاری جست‌وجو کرد. زیرمجموعه‌ای از این نظریه تحت عنوان «نظریهٔ اعداد جالب و سرگرم کننده» ویژگی‌های جالب موجود در برخی عددها را بررسی می‌کند که شما می‌توانید با مطالعهٔ این مقاله با گوشه‌ای از آن آشنا شوید.

### عددهای شاد[2]

اگر دوست دارید اعداد شاد را بشناسید، باید اعمال زیر را به مرحلهٔ اجرا درآورید.

به‌عنوان نمونه، عدد ۴۴ را در نظر می‌گیریم: در آغاز مربع هر رقم را به‌دست آورید. سپس آن‌ها را با هم جمع کنید.

$۴^۲+۴^۲=۱۶+۱۶=۳۲$

حال همین کار را با عدد جدید انجام دهید:

$۳^۲+۲^۲=۹+۴=۱۳$

و دوباره:

$۱^۲+۳^۲=۱+۹=۱۰$

و سرانجام:

$۱^۲+۰^۲=۱+۰=۱$

چون به عدد یک رسیدید، پس ۴۴ عددی شاد است. شاد از آن نظر که به یک رسیده است!

به‌همین ترتیب هر وقت خواستید شاد بودن یک عدد را بیازمایید، فرایند بالا را اجرا کنید. اگر به یک رسیدید، عدد موردنظر شاد است و اگر عدد شما هرگز به یک نرسید، ناشاد یا به اصطلاح غمگین است.

**نکته:** عددهای شاد زیادند. بین یک تا پنجاه، یازده عدد شاد وجود دارد. آن‌ها را پیدا کنید.

بزرگ‌ترین عدد شاد با رقم‌های غیرتکراری ۹۸۶۵۴۳۲۱۰ است. شاد بودن آن را بررسی کنید. همچنین به روش سعی و خطا می‌توانید نشان دهید که این بزرگ‌ترین عدد از این نوع (البته با ارقام غیرتکراری) است.

## عددهای خودشیفته[3]

عدد خودشیفته عددی است که اگر رقم‌های آن را به توان تعداد ارقامش برسانید و با هم جمع کنید، حاصل، خود عدد خواهد شد.

چهار عدد خودشیفتهٔ سه رقمی از این قرارند:

$$۱۵۳=۱^۳+۵^۳+۳^۳$$

$$۳۷۰=۳^۳+۷^۳+۰^۳$$

$$۳۷۱=۳^۳+۷^۳+۱^۳$$

$$۴۰۷=۴^۳+۰^۳+۷^۳$$

دو عدد ۳۹ رقمی متوالی را که خودشیفته‌اند، در زیر مشاهده می‌کنید. اگر حوصله و دقت لازم داشته باشید می‌توانید خودشیفته بودن آن‌ها را دریابید.

۱۱۵۱۳۲۲۱۹۰۱۸۷۶۳۹۹۲۵۶۵۰۹۵۵۹۷۹۷۳۹۷۱۵۲۲۴۰۰

۱۱۵۱۳۲۲۱۹۰۱۸۷۶۳۹۹۲۵۶۵۰۹۵۵۹۷۹۷۳۹۷۱۵۲۲۴۰۱

و یک عدد هفت رقمی خودشیفته:

$$۱۷۴۱۷۲۵=۱^۷+۷^۷+۴^۷+۱^۷+۷^۷+۲^۷+۵^۷$$

## عددهای قوی[4]

**آشیل**[5]، قهرمان افسانه‌ای یونان، اهل شهر تروا، بسیار قوی و رویین‌تن بود. تنها نقطهٔ ضعف او در پاشنهٔ پایش بود (نظیر آشیل در فرهنگ حماسی کشورمان، **اسفندیار** است که تنها نقطهٔ آسیب‌پذیر بدنش چشمانش بود). در ریاضی هم اعدادی هستند که آشیلی نام گرفته‌اند. این اعداد قوی هستند، اما کامل نیستند.

**عدد قوی:** عددی است که توان دوم هر مقسوم‌علیه اول آن جزو مقسوم علیه‌هایش باشد. ۲۵ عدد قوی است، زیرا تنها مقسوم‌علیه اول آن پنج است و توان دوم ۵ یعنی ۲۵ نیز جزو مقسوم‌علیه‌های ۲۵ است.

**پرسش:** آیا ۳۶ یک عدد قوی است؟

**عدد کامل:** عددی است که بتوان آن را به‌صورت توان صحیحی از یک عدد صحیح نوشت. ۸ کامل محسوب می‌شود، زیرا توان سوم ۲ است.

**عدد آشیلی:** عددی را گویند که قوی است، ولی کامل نیست.

۷۲ عدد آشیلی است. چرا؟ نمونه‌هایی دیگر از عددهای آشیلی که می‌توانید آن‌ها را بیازمایید: ۱۰۸، ۲۰۰، ۲۸۸، ۳۹۲، ۴۳۲، ۵۰۰ و ۶۴۸.

## عددهای صمیمی[6] (متحابه، دوست‌دار هم)

دو عدد صمیمی یکدیگر را بسیار دوست دارند، به‌طوری‌که با جمع کردن مقسوم‌علیه‌های واقعی (تمامی مقسوم‌علیه‌های یک عدد به غیر از خودش) هر کدام می‌توان به دیگری رسید. به‌عنوان نمونه زوج عدد صمیمی ۲۲۰ و ۲۸۴ را داریم:

مقسوم‌علیه‌های واقعی ۲۲۰ را با هم جمع می‌کنیم:

$$۱+۲+۴+۵+۱۰+۱۱+۲۰+۲۲+۴۴+۵۵+۱۱۰=۲۸۴$$

همین کار را با ۲۸۴ انجام می‌دهیم:

$$۱+۲+۴+۷۱+۱۴۲=۲۲۰$$

نمونه‌های دیگر از عددهای صمیمی: (۱۱۸۴ و ۱۲۱۰)، (۲۶۲۰ و ۲۹۲۴) و (۵۰۲۰ و ۵۵۶۴).

این نوع از اعداد توسط فیثاغورس و شاگردان او کشف و مطالعه شده بود و تحقیقات بیشتر در طول قرون بعدی در این زمینه توسط **فرما**[7]، **دکارت**[8] و یک نابغهٔ ایرانی به نام **محمدباقر یزدی** انجام گرفته است.

و سرانجام مثلث عددی زیبای زیر خالی از لطف نیست:

$$۱\times۹+۲ = ۱۱$$

$$۱۲\times۹+۳ = ۱۱۱$$

$$۱۲۳\times۹+۴ = ۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴\times۹+۵ = ۱۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴۵\times۹+۶ = ۱۱۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴۵۶\times۹+۷ = ۱۱۱۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴۵۶۷\times۹+۸ = ۱۱۱۱۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴۵۶۷۸\times۹+۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹\times۹+۱۰ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$

***پی‌نوشت‌ها**

1. Pythagoras
2. Happy numbers
3. Narcissistic numbers
4. Powerfull numbers
5. Achilles
6. Amicable numbers
7. Fermat
8. Descartes


***منبع**

۱. شهریاری، پرویز (۱۳۷۵). بخش‌پذیری در جبر. انتشارات مدرسه. تهران. چاپ سوم.

۲. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۷۵). آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۳. راسخی کازرونی، محمد. اعداد جالب در ریاضیات و خواص آن‌ها.

۴. فائقی، کاظم (۱۳۶۹). سرگرمی‌های ریاضی برای همه. نشر محمد. تبریز.

5. Andy, Martin (2013), 10fun examples of recreational number theory-list verse

6. Gardner, Martin (1973), mathematical puzzles and diversions (paper backed) pelican/ penguin books, ISBN 0-14-020713-9

**خدیجه اقدامی‌مقدم**، دبیر ریاضی بندر انزلی

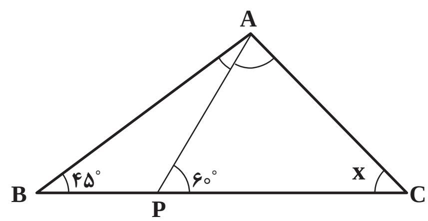
# حل یک مسئلهٔ چالش‌برانگیز هندسه به سه روش

**منبع سؤال:** (المپیاد ریاضی جمهوری دموکراتیک آلمان ـ سال ۱۹۶۴ ـ چاپ شده در کتاب «مسئله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف» ترجمه: پرویز شهریاری ـ انتشارات فردوس ـ چاپ سوم ـ ۱۳۷۶ـ تهران)

**سؤال:** نقطهٔ P را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: PC=۲BP.

زاویهٔ ACB را پیدا کنید به شرطی که بدانیم:

$\widehat{ABC} = 45^\circ , \widehat{APC} = 60^\circ$




شکل ۱

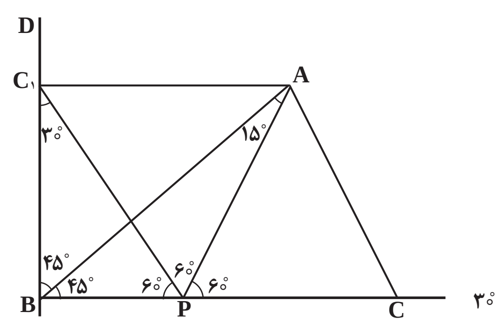
## حل

**روش اول:** راه‌حل موجود در کتاب منبع سؤال؛ با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه

نقطهٔ $C_1$ را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط راست AP در نظر می‌گیریم (شکل ۲).

داریم: $C_1P = CP = 2BP$

$\widehat{C_1PB} = 180^\circ - \widehat{APC} - \widehat{APC_1} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$




شکل ۲

بنابراین $\widehat{C_1BP} = 90^\circ$ (زیرا مثلث $C_1PB$ با مثلث قائم‌الزاویه به وتر ۲ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ ۱ متشابه است.)

یعنی BA نیمساز $\widehat{C_1BP}$ است. به این ترتیب، نقطهٔ A که از خط‌های راست PC، $C_1P$ و $C_1B$ به یک فاصله است، بنابراین بر نیمساز زاویهٔ $PC_1D$ قرار دارد. (D بر امتداد پاره‌خط راست $BC_1$ و بعد از $C_1$ قرار گرفته است.) بنابراین:

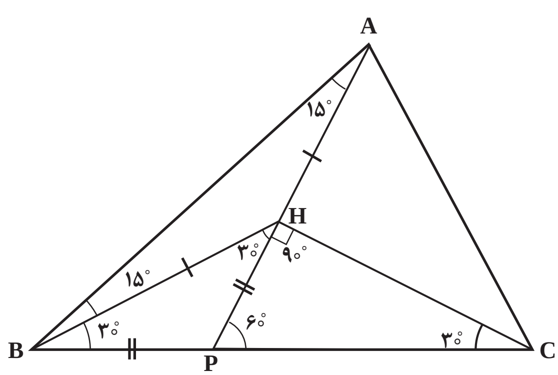
$$\widehat{ACB} = \widehat{AC_1P} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BC_1P}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

**روش دوم:** (روش اول ابتکاری؛ با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه)

بنابر فرضیات و ۶۰° بودن $\widehat{APC}$ (زاویهٔ خارجی)، $\widehat{ABP} = 45^\circ$ که نتیجه می‌دهد:

$\widehat{BAP} = 15^\circ$

از نقطهٔ C عمودی بر ضلع AP رسم می‌کنیم تا نقطهٔ H روی ضلع AP ایجاد شود (شکل ۳).




شکل ۳

از آنجا که مثلث PHC قائم‌الزاویه اسـت و داریم: $\widehat{HPC}=۶۰^\circ$، بنابراین: $\widehat{HCP}=۳۰^\circ$.

بنابـر خواص مثلـث قائم‌الزاویه با زوایـای ۳۰ و ۶۰ درجه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است، پس:

$$(۱)PH=\frac{۱}{۲}PC$$

همچنین طبـق فرض داشـتیم: $(۲)BP=\frac{۱}{۲}PC$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: BP=PH.

لذا مثلث BPH متساوی‌السـاقین است و بنابر ۶۰° بودن $\widehat{HPC}$ (زاویهٔ خارجی) خواهیم داشت:

$$\widehat{HBP}=\widehat{BHP}=۳۰^\circ$$

بنابرایـن: $\widehat{ABH}=۴۵-۳۰=۱۵^\circ$ و بنابـر ۱۵° بـودن $\widehat{BAP}$ (بنا به فرض)، مثلث ABH متساوی‌الساقین خواهد شد. پس:

(۳) BH=HA

از طرف دیگر، مثلث BHC بنابر تساوی زوایای مجاور به دو ساق، متساوی‌الساقین خواهد شد و خواهیم داشت:

(۴) BH=HC

بـا توجه به (۳) و (۴) داریم: HA=HC و داشـتیم: $\widehat{AHC}=۹۰^\circ$ (H پای ارتفاع). پس:

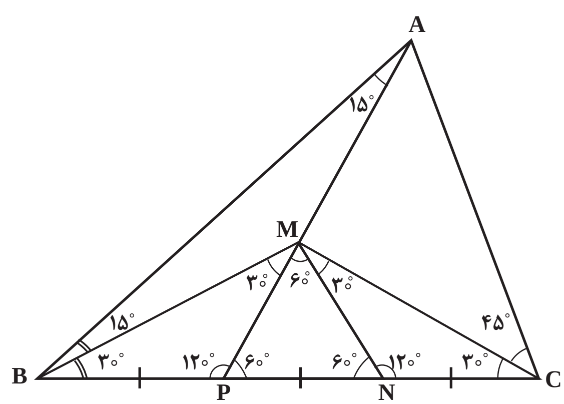
زوایای مجاور به دو ساق مثلث AHC برابر خواهند بود:

$$\widehat{HAC}=\widehat{ACH}=۴۵^\circ$$

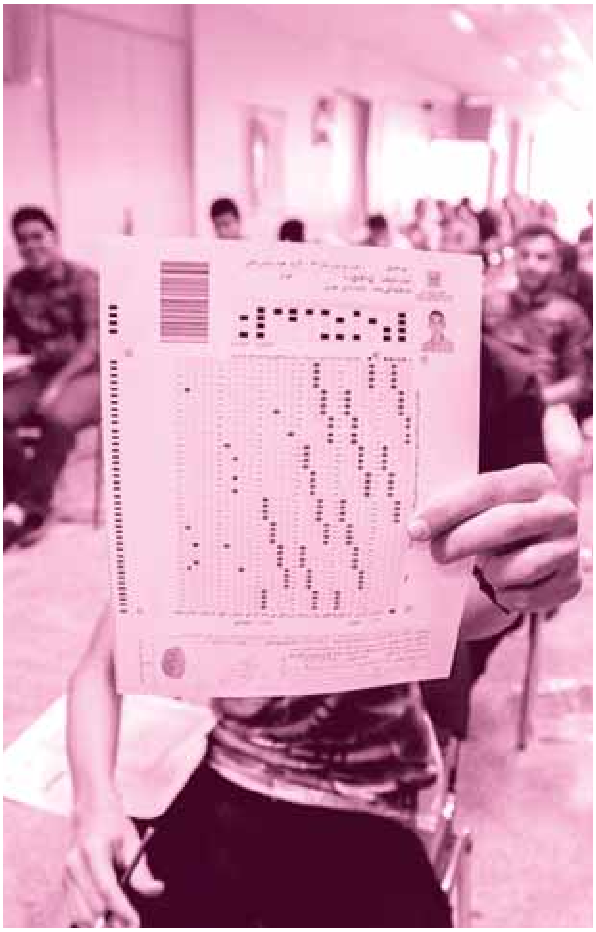
در نتیجه:

$$\widehat{ACB}=\widehat{ACH}+\widehat{HCP}=۴۵^\circ+۳۰^\circ=۷۵^\circ$$

**روش سـوم:** **(روش دوم ابتکاری؛ با استفاده از خواص مثلث متساوی‌الساقین)**




**شکل ۴**



بنابـر فرضیـات و ۶۰° بـودن $\widehat{APC}$ (زاویـه خارجـی) داریم: $\widehat{ABP}=۴۵^\circ$ که نتیجه می‌دهد:

$$(۱)\ \widehat{BAP}=۱۵^\circ$$

ابتدا از نقطه P روی ضلع PA به کمک پرگار، به اندازهٔ BP رسـم می‌کنیم و نقطهٔ ایجاد شده را M می‌نامیم. داریم:

$$\widehat{BPM}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ \text{ و } BP=PB\Rightarrow \Delta BMP\text{متساوی‌الساقین}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBP}=\widehat{PMB}=۳۰^\circ$$

از طرف دیگر، از نقطهٔ P به اندازهٔ BP روی ضلع PC جدا می‌کنیم و به نقطهٔ N می‌رسیم.

(می‌دانیم بنابر فرض مسـئله، نقطهٔ N وسط پاره‌خط PC است.) بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MPN}=۶۰^\circ\text{ فرض}\\ BP=MP=PN\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta MPN\text{متساوی‌الاضلاع}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{PMN}=\widehat{PNM}=۶۰^\circ\\ MN=PN=MP=BP\ (۲)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} PN = NC \\ MN = PN \\ \quad (۲) \end{array}\right\} \Rightarrow MN = NC$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta MNC \quad \text{متساوی‌الساقین} \\ \widehat{MNC} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{NCM} = ۳۰^\circ$$

حال در مثلث MBC داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{MBP} = ۳۰^\circ \\ \widehat{MCB} = ۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BMC \ \text{متساوی‌الساقین} \Rightarrow BM = MC \ (۳)$$

از طرف دیگر:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABM} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = ۴۵^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵^\circ \\ ,\ (۱) \quad \widehat{BAP} = ۱۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \text{متساوی‌الساقین}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} BM = MA \\ ,\quad (۳) \end{array}\right\} \Rightarrow MA = MC \quad (۴)$$

و چون داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AMC} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{PMN} + \widehat{CMN}) = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۹۰^\circ \\ ,\quad (۴) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta AMC \ \text{متساوی‌الساقین} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ACM} = ۴۵^\circ$$

پس:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCN} = ۴۵^\circ + ۳۰^\circ = ۷۵^\circ$$

**روش چهارم:** (از هیئت تحریریهٔ برهان)

**یادآوری‌ها:**

**۱. قضیهٔ سینوس‌ها:** در هر مثلث نسبت هر دو ضلع به یکدیگر، برابر است با نسبت سینوس‌های زوایای مقابل به آن‌ها.

**۲.** $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

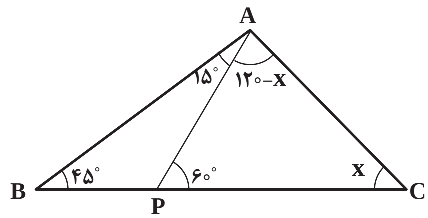
**۳.** نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و ۷۵°:

$$\begin{cases} \sin ۱۵^\circ = \cos ۷۵^\circ = \dfrac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} \\ \cos ۱۵^\circ = \sin ۷۵^\circ = \dfrac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan ۱۵^\circ = \cot ۷۵^\circ = ۲-\sqrt{۳} \\ \cot ۱۵^\circ = \tan ۷۵^\circ = ۲+\sqrt{۳} \end{cases}$$

حال در مثلث‌های APB و APC از قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ}, \quad \frac{AP}{PC} = \frac{\sin x}{\sin(۱۲۰-x)}$$




شکل ۵

از تقسیم دو رابطهٔ فوق بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{PC}{PB} = \frac{\sin ۴۵ \times \sin(۱۲۰-x)}{\sin ۱۵ \times \sin x} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰-x)}{\sin x} = \frac{۲\sin ۱۵}{\sin ۴۵} = \frac{\dfrac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}}{\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۱۲۰ \cos x - \cos ۱۲۰ \sin x}{\sin x} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x + \dfrac{۱}{۲}\sin x}{\sin x} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cot x + \frac{۱}{۲} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cot x = \sqrt{۳} - \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cot x = \frac{\sqrt{۳}-\dfrac{۳}{۲}}{\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۲-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x = ۷۵^\circ$$


کوچک‌ترین عدد طبیعی که چون با ۲۰۱۶ عدد طبیعی متوالی بعد از خودش جمع شود، حاصل یک عدد مربع کامل شود، کدام است؟

الف) ۱۰۰۱

ب) ۱۰۰۶

ج) ۱۰۰۹

د) ۲۰۰۹

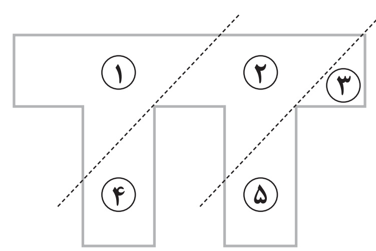
هـ) ۲۰۱۳

هوشنگ شرقی


## ایستگاه اول

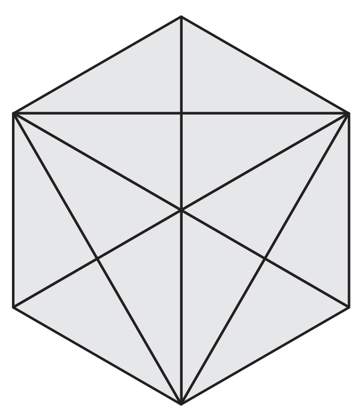
برای شروع چطور است به سراغ بازی با شکل‌های هندسی متفاوت برویم؟ این معماها به‌خاطر درک شهودی که به شما می‌دهند، اهمیت زیادی دارند و حل موفقیت‌آمیز آن‌ها هم، حتماً حس خوبی را به شما منتقل می‌کند. پس شروع می‌کنیم:

**۱.** شکل ۱ شکلی شبیه به نماد عدد پی($\pi$) در زبان یونانی است که نقطه‌چین‌های روی آن، مسیرهای دو برش متوالی از آن را نشان می‌دهند. به این ترتیب پس از برش، این شکل به پنج قطعهٔ کوچک‌تر تقسیم می‌شود. آیا می‌توانید با کنار هم قرار دادن این پنج قطعه (بدون هیچ تغییری در آن‌ها) یک مربع بسازید؟

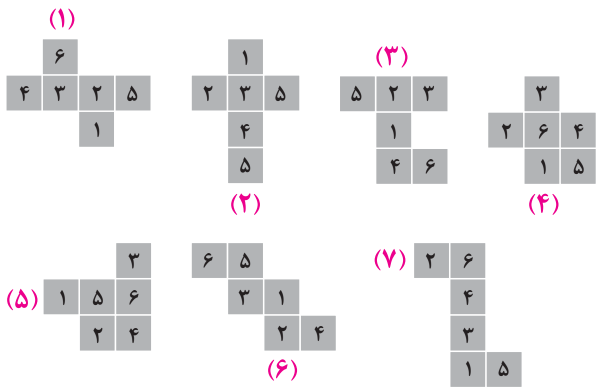


شکل ۱

**۲.** در شکل ۲ چند مثلث می‌توانید بشمارید؟

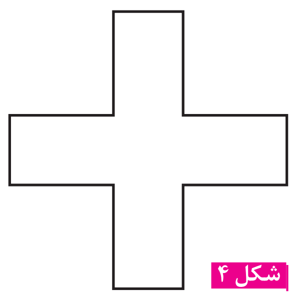

شکل ۲

**۳.** فقط یکی از موارد شکل ۳ گستردهٔ یک تاس شش‌وجهی معمولی را مشخص می‌کند. یعنی اگر این شکل را روی اضلاع مربع‌های کوچک تا بزنیم و آن را به شکلی فضایی و مکعب‌شکل تبدیل کنیم، یک تاس درست می‌شود. آن کدام شکل است؟



شکل ۳

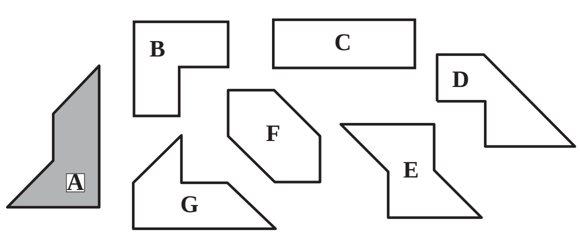
**۴.** آیا می‌توانید با دو خط متقاطع، نماد جمع (+) را در شکل ۴، به چهار قطعه تقسیم کنید و سپس با کنار هم قرار دادن قطعات حاصل، یک مربع هم‌مساحت با این شکل درست کنید؟


شکل ۴

**۵.** آیا می‌توانید ده سکهٔ یکسان را روی صفحه طوری قرار دهید که سکه‌ها روی پنج خط راست قرار داشته باشند و هر چهار سکه روی یک خط باشند.


شکل ۵

**۶.** در شکل ۶، آیا می‌توانید A را طوری به دو بخش برش دهید، که با این دو بخش بتوانید همهٔ شکل‌های B، C، D، E، F و G را بپوشانید؟



شکل ۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



هوشنگ شرقی

## میزگرد با مؤلفان کتاب هندسه پایهٔ دهم (رشتهٔ ریاضی)

# از ترسیم تا تفکر!

**اشاره**

**در ادامهٔ گفت‌وگوهای مجلهٔ برهان با مؤلفان کتاب‌های ریاضی پایهٔ دهم (رشتهٔ ریاضی)، این‌بار به سراغ مؤلفان کتاب هندسهٔ این پایه رفتیم و روز شنبه پنجم تیرماه در نشستی صمیمی گفت‌وگویی با این گروه داشتیم تا توصیه‌های ایشان را به شما دانش‌آموزان، برای استفادهٔ هرچه بهتر از کتاب درسی انعکاس دهیم. در این نشست مؤلفان کتاب، آقایان *سیدمحمدرضا سیدصالحی*، *محمود نصیری*، *هوشنگ شرقی* و *خانم زهرا رحیمی* حضور داشتند و آقای هوشنگ شرقی به نمایندگی از «مجلهٔ برهان» سؤال‌ها را مطرح کرد. در ادامه این گفت‌وگو را می‌خوانید.**

**شرقی: ابتدا از آقای سیدصالحی، مدیر محترم گروه تألیف هندسه ۱ می‌خواهم که ضمن معرفی نویسندگان کتاب دربارهٔ محتوا و اهداف موردنظر در تألیف کتاب و تفاوت‌های آن با کتاب‌های قبلی توضیحاتی بفرمایند.**

**سیدصالحی:** به نام خدا. در پی بحث‌های متعددی که در شورای برنامه‌ریزی ریاضی داشتیم و رایزنی‌هایی که در سطوح بالای «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» انجام گرفت، در نهایت تصمیم بر این شد که هندسه در پایهٔ دهم تنها مختص رشتهٔ ریاضی و زمان تدریس آن هم دو ساعت در هفته باشد. مؤلفان کتاب عبارت‌اند از: آقای نصیری که تجربهٔ سالیان دراز تدریس هندسه و تألیف کتاب‌های متعدد هندسه (درسی و کمک‌درسی) را در کارنامه‌شان دارند؛ آقای شرقی که ایشان هم تجربهٔ معلمی ریاضی و هندسه و نیز تألیف کتاب در این زمینه را دارند؛ خانم رحیمی که سال‌ها دبیر هندسه بوده‌اند و هم در رشتهٔ ریاضی و هم در رشتهٔ برنامه‌ریزی آموزشی تحصیل کرده‌اند و اکنون در دورهٔ دکترا در زمینهٔ تفکر ریاضی کار می‌کنند؛ و خود من که آخرین عضو گروه تألیف هستم.

دربارهٔ کتاب درسی هندسهٔ پایهٔ دهم و تغییرات آن هم باید بگویم که این تغییرات بیشتر در زمینهٔ رویکرد است و نه محتوا. با توجه به تغییراتی که در دورهٔ اول متوسطه انجام شد و دانش‌آموزان و معلمان پایه‌های پایین‌تر با آن‌ها بیشتر آشنایی دارند، انجام این تغییرات اجتناب‌ناپذیر بود. بنابراین جلسات متعددی با متخصصان این موضوع برگزار کردیم و در نهایت تصمیم بر این شد که این کتاب چهار فصل داشته باشد.

فصل اول دربارهٔ «ترسیم‌های هندسی و استدلال» است. ترسیم در هندسه از بحث‌های پایه‌ای است که همواره مورد توجه بوده و

تصمیم بر این شد که در ابتدای کتاب هندسهٔ دهم باشد. اما استدلال و تقویت آن از بحث‌هایی است که در «سند برنامهٔ ملی ریاضی دهم» بســیار مورد توجه بوده است و بنابراین لازم بود که در کتاب درسی هم به آن پرداخته شــود. لذا ضمن اینکه به‌صورت شفاف روش‌های استدلال مورد بررســی قرار می‌گیرند، سعی شده است که مفاهیم هندسه هم در خلال این توضیح‌ها آموزش داده شوند.

فصل دوم به «قضیهٔ **تالس** و تشابه» می‌پردازد که از بحث‌های مهم و پرکاربرد هندسه بوده و به‌صورت منسجم و کاربردی ارائه شده است.

«چندضلعی‌ها و مساحت» موضوع فصل سوم است که همیشه جایگاه خودش را در هندســه داشته است. موضوعی که سعی شده به آن توجه شــود، یکدست بودن فصل‌های کتاب از نظر حد و مرز ارائهٔ مطالب بوده است تا کتاب برای سطح متوسط دانش‌آموزان که مدنظر مؤلفان هســتند، قابل استفاده شود. لذا از طرح مسائلی که برای دانش‌آموزان نخبه یا معلمان قدیمی هندســه جذابیت دارند (ولی برای عموم دانش‌آموزان جاذبه‌ای ندارند)، پرهیز شده است.

فصل چهارم دربارهٔ «تجسم فضایی» است. یکی از مواردی که ســند برنامهٔ درسی بســیار بر آن تأکید دارد، تقویت تجسم و تفکر هندسی اســت و این‌ها حداقل دو هدفی هستند که وجود هندسهٔ دبیرستان را موجه می‌کنند. البته این موضوعی نیست که بتوان به سادگی به آن رسید، ولی با این حال تلاش کرده‌ایم در فصل چهارم تا جایی که می‌شــود به آن بپردازیم؛ بدون آنکه وارد بحث اثبات‌ها در هندسهٔ فضایی و مباحث صوری بشویم. صرفاً سعی کرده‌ایم تفکر تجسمی دانش‌آموزان را به چالش بکشیم و تقویت کنیم و مطمئناً از مهم‌ترین مباحثی اســت که بسیار جای کار دارد و مورد مجادلهٔ دانش‌آموزان و معلمان قرار می‌گیرد.

**شــرقی: در ادامه، در مورد هر فصل ســؤال‌های تخصصی را از مؤلفان اصلی آن فصل می‌پرســیم. از فصل سوم شروع کنیم. یک بخش دیگر از فصل سوم که شما کمتر به آن اشاره کردید، بحث مساحت‌هاست. دانش‌آموزان در دورهٔ اول متوسطه و حتی دورهٔ ابتدایی دستورهای محاسبهٔ مساحت شکل‌های هندسی را می‌آموختند و محاسبهٔ مساحت انواع شکل‌ها را انجام می‌دادند. شما در این بخش چه حرف تازه‌ای برای دانش‌آموزان دارید؟**

**نصیری:** همان‌طور که گفتید، دســتورهای محاســبهٔ مســاحت را دانش‌آموزان در این دوره می‌دانند و ما هم فقط به‌طور خلاصه آن‌ها را یادآوری کرده‌ایم. فقط در بخش «خواندنی» این فصل اشاره‌ای به مفاهیم اولیه و تابع مســاحت کرده‌ایم تا علاقه‌مندان با این مفاهیم هم آشنا شوند. اما در این فصل ما کوشیده‌ایم به کاربردهای مساحت توجه بیشــتر کنیم که به نظر من مســاحت یکــی از اصلی‌ترین کاربردهای هندسه در زندگی روزمره است و حتی افراد عامی هم با این مفهوم سروکار دارند.

**یکی از مباحثی که در سند برنامۀ درسی به آن اشاره شده، تقویت تفکر تجسمی است. منظور از تفکر تجسمی این است که وقتی ما فکر می‌کنیم، دو نوع تفکر داریم: یکی اینکه به زبان کلمات فکر می‌کنیم و دیگری اینکه به زبان تصویرها می‌اندیشیم**

**شرقی: کمی بیشتر توضیح می‌دهید که منظورتان از کاربرد مساحت چیست؟**

**نصیری:** بحث کمی فنی‌تر شده است. مثلاً محاسبۀ مساحت چهارضلعی‌های غیرمشخص و یا مسئله‌ای که دبیران هم از آن استقبال خوبی کردند و آن تبدیل مرز بین دو زمین کشاورزی از خط شکسته به خط راست و یا استفاده از مساحت‌ها برای اثبات قضیه‌ها (که در فصل دوم هم برای اثبات قضیۀ تالس یا قضیۀ نیم‌سازها مورد استفاده قرار گرفت) مطرح شده است.

بحث تازه‌ای هم که به این مبحث اضافه شده، محاسبۀ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای به کمک «قضیۀ پیک» بوده است که کاربردهای خوبی هم دارد. به نمونه‌هایی از کاربرد آن برای تخمین مساحت شکل‌های طبیعی اشاره‌هایی شده است که می‌تواند در جغرافیا، زیست‌شناسی و باستان‌شناسی کاربرد داشته باشد.

**شرقی: به فصل چهارم (تجسم فضایی) برویم و از خانم رحیمی می‌خواهیم تصویری از این فصل و اهداف آن ارائه دهند.**

**رحیمی:** یکی از مباحثی که در سند برنامۀ درسی به آن اشاره شده، تقویت تفکر تجسمی است. منظور از تفکر تجسمی این است که وقتی ما فکر می‌کنیم، دو نوع تفکر داریم: یکی اینکه به زبان کلمات فکر می‌کنیم و دیگری اینکه به زبان تصویرها می‌اندیشیم. تفکر تجسمی، فکر کردن به زبان تصویر و شکل است. اما اینکه چرا مطالب به این شکل تنظیم شده‌اند، باز هم به همان سند برنامۀ درسی برمی‌گردد که در آن روی سه چیز تأکید شده است: یکی آموزش تلفیقی (به جای آنکه دیسیپلین محور و یا موضوعی باشد) و دیگری کاربردها. تا حدی هم روی بحث شهود تأکید شده است. ما دیدیم که در این فصل فضا باز است تا ما به هر سۀ این مقوله‌ها بپردازیم.

من قبل از آنکه نوشتن مطالب را شروع کنم، از کسانی که وارد دانشگاه‌ها شده بودند نظرخواهی کردم که آیا ریاضیاتی که در دورۀ متوسطه خوانده‌اند، به موضوعاتی که در دانشگاه‌ها با آن‌ها سروکار داشته‌اند، کمک کرده است یا خیر. اکثر آن‌ها گله داشتند که ریاضیات و به خصوص هندسه‌ای که در دورۀ دبیرستان خوانده‌اند، کمکی به مهندس شدن آن‌ها نکرده است. حداقل توقعی که داشتند این بود که در بحث‌های ترسیم فنی باید به آن‌ها کمک می‌کرد. بنابراین در تدوین این فصل سعی کردیم به جلوه‌هایی از معماری، زیبایی‌شناسی و هنر توجه کنیم و در نتیجه از الفبای هندسه شروع کردیم. نقطه، خط و صفحه ـ یعنی مفاهیم اولیه ـ را توضیح دادیم و حالت‌های مختلف آن‌ها را نسبت به هم بیان کردیم.

در ادامه به شکل‌های هندسی فضایی رسیدیم و در این مبحث در مورد مشاهدۀ شکل‌ها از نماهای مختلف بحث کردیم که در واقع یکی از ابتدایی‌ترین بحث‌های ترسیم فنی است. در اینجا کوشیدیم دانش‌آموزان را متوجه ارزش «نگاه کردن از زاویه‌های مختلف» کنیم که این متفاوت دیدن می‌تواند در هنر، معماری یا مهندسی مورد استفاده قرار گیرد. بعد وارد بحث برش‌ها شدیم و سطح مقطع‌های حاصل از برش‌ها را بررسی و سعی کردیم مثال‌هایمان کاربردی و از زندگی روزمره باشند تا زمینه‌ای هم برای طرح موضوع مقاطع مخروطی در سال‌های آینده فراهم آید. در نهایت هم بحث «دوران» مطرح شد تا بچه‌ها بتوانند تصور کنند که از دوران یک شکل هندسی چه شکل فضایی ایجاد می‌شود؛ البته بدون اینکه وارد بحث استدلال شویم تا به جای درگیر شدن در استدلال، بیشتر تمرکز روی تجسم فضایی باشد.

**شرقی:** چه‌قدر توقع دارید دانش‌آموزان در محاسبه به توانایی برسند؟

**رحیمی:** در این فصل محاسبه چندان مورد توجه نیست و تأکید ما بیشتر روی تجسم است. مثلاً در مسئلۀ پرتقال‌هایی که روی هم چیده شده‌اند، بیشتر از آنکه هدف ما درستی عددی باشد که دانش‌آموز به دست می‌آورد، این است که دانش‌آموز بتواند شکل و نحوۀ چینش پرتقال‌ها را درک کند. یا در مسئلۀ تقاطع صفحه با کره و محاسبۀ مساحت مقطع حاصل، در واقع این محاسبه به تجسم کمک می‌کند و هدف تجسم است و نه محاسبه.

**شرقی:** یک سؤال خیلی مهم که دانش‌آموزان و معلمان هر دو دارند، این است که چون این بحث و مسائل مطرح شده در آن الگوریتم خاصی ندارند، چگونه در این زمینه می‌توان به مهارت دست یافت و تمرین مناسب برای این موضوع کجا پیدا می‌شود؟ آیا منابع مناسبی برای استفادۀ معلمان و دانش‌آموزان وجود دارد یا خیر؟

**رحیمی:** واقعیت این اســت که برای خود ما هم این بحث دشوار بود، چراکه ما هم در این زمینه آموزش چندانی ندیده بودیم و این بحث‌ها کاملاً تازگی داشــتند. تنها منبعی که بعد از تحقیق بسیار به آن رسیدیم، کتاب‌های ترسیم فنی هنرستان و منابع پیشرفته‌تر در ایــن زمینه بود. بــه دلیل نوپا بودن مبحث، بدیهی اســت که هنــوز منابع جدی در این زمینه وجود ندارد، ولی امیدواریم که با انتشار کتاب راهنمای معلم، مسائل بیشتری در این زمینه مطرح شــوند. ضمن اینکه استفاده از دست‌ســازه و نرم‌افزارهای مناسب می‌تواننــد به تفهیم بهتر این مباحث یاری رســاند. لذا قصد داریم لوح فشرده‌ای هم در این مورد طراحی کنیم. اگر این لوح به موقع به‌دست دانش‌آموزان برسد، می‌تواند به بحث تقویت تفکر تجسمی تا حد زیادی کمک کند.

**شرقی: یعنی شما به دانش‌آموزان و معلمــان توصیــه می‌کنیــد کــه از دست‌ســازه‌ها در این بحث استفاده کنند؛ مثلاً شکل‌ها را بسازند، از آن‌ها از زاویه‌های متفاوت عکس بگیرند و آن‌ها را با هم مقایسه کنند، و... .**

**رحیمی:** بله و من امیدوارم این فصل بــا توجه به محتوای خــاص خود بتواند لذت یادگیری هندسه را به دانش‌آموزان تزریق کند.

**شــرقی: آیا با توجه به اهمیت موضوع تجســم هندســی، برنامه‌ای برای تکمیل این بحث در سال‌های آینده دارید؟**

**ســیدصالحی:** من فکر می‌کنم قبل از این بحث باید بیشــتر روی معلمان سرمایه‌گذاری شود، چراکه معلمان هندسه و از جمله خود ما، با این فضا مأنوس نیستیم و این بحث‌ها را هندسه نمی‌دانیم. بایــد معلمــان را آموزش دهیــم تا وقتی ســر کلاس می‌روند، از مندرجات ســند راهنمای برنامهٔ درسی و اهداف آموزش هندسه در آن آگاه باشــند و بــا آن اهداف به آموزش هندســه بپردازند. البته مــا محدودیت زمان هم داریم و فکر می‌کنم در ســال‌های آینــده حداکثر دو ســاعت در هفته برای آموزش هندســه زمان داریم.

**شــرقی: خب کمی هــم در مورد فصــل اول کتاب توضیح دهید. حدود ترسیم‌های هندسی را تا کجا مدنظر دارید؟**

**ســیدصالحی:** یک مجموعه ترسیم‌های ساده و ابتدایی هستند که توقع داریم دانش‌آموزان با روش و حتی اســتدلال آن‌ها آشنا شوند. مثل ترســیم نیم‌ساز، عمودمنصف، خط عمود بر یک خط و... امــا در فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها حد و مرزی را که باید در طرح سؤال و تمرین رعایت شود، مشخص کرده‌ایم و قصد نداریم سؤال‌های خیلی دشواری در این زمینه داشته باشیم.

**یک مجموعه ترسیم‌های ساده و ابتدایی هستند که توقع داریم دانش‌آموزان با روش و حتی استدلال آن‌ها آشنا شوند. مثل ترسیم نیم‌ساز، عمودمنصف، خط عمود بر یک خط و...**

**شرقی: در مورد استدلال هم لطفاً توضیح بدهید. این بحث چقدر به بحث استدلال که در کتاب ریاضی نهم بود، مربوط می‌شود؟**

**سیدصالحی:** در کتاب نهم اشاره‌هایی به انواع روش‌های استدلال بــدون نام بردن از آن‌ها داشــتیم. اینجا یک پلــه بالاتر رفته‌ایم و روش‌های اســتدلال را به‌صورت شــفاف‌تر (اســتدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، برهان خلف و...) مطرح کرده‌ایم. اما استدلال و اثبات چیزی نیست که بتوان با یک آموزش رسمی به آن رسید، بلکه باید در ضمن ارائهٔ بحث این روش‌ها را آموزش داد.

**شرقی: آقای نصیری دانش‌آموزان در ریاضی متوسطهٔ اول تعریف چندضلعی‌های مهم را دیده‌اند و با ویژگی‌های آن‌ها هم کم و بیش آشــنایی دارند. در اینجا چه حرف تازه‌ای در این مورد برای آن‌ها دارید؟**

**نصیری:** خب اینجا بحث‌ها و تعریف‌ها دقیق‌تر می‌شوند. مثلاً در تعریف ذوزنقه می‌گوییــم: «یک چهارضلعی که **فقط** دو ضلع آن موازی باشند.» خب این تأکید بر اینکه فقط دو ضلع موازی باشند برای چیست؟ آیا نمی‌شود بگوییم: «لااقل» دو ضلع موازی داشته باشــند؟ تعریف‌های این فصل هم در همین راستا هستند و سعی شده است جامع‌تر باشند. اما توصیهٔ ما به معلمان این است که در طرح ســؤال در این زمینه، سعی کنند سؤال‌هایی مطرح کنند که دانش‌آموز واقعاً خودش بتواند آن‌ها را حل کند و در سطح متوسط دانش‌آموزان باشد.

**شرقی: در مورد فصل دوم هم خودم یک توضیح کلی بدهم. عنوان‌های درسی این فصل نسبتاً زیاد هستند. در درس اول «نسبت و تناسب» و ویژگی‌های آن را داریم که با رنگ و بوی هندســی مطرح شده است. لذا توصیه می‌کنیم که همکاران ما به هیچ عنوان وارد مســائل پیچیــده جبری در این بخش نشــوند. در درس دوم قضیهٔ تالس و نتایج آن و عکس قضیهٔ تالس را مطرح کرده‌ایم. در درس ســوم تشــابه و قضایای آن آمده اســت و در درس چهارم هــم کاربردهایی از قضیه‌های تشــابه را آورده‌ایم. تمرین‌های ما از آسان به متوسط تنظیم شده‌اند و مثال‌ها و تمرین‌های کاربردی زیادی هم داشته‌ایم.**

**ســیدصالحی:** دانش‌آمــوزان و اولیای آن‌ها معمــولاً یک جمله می‌پرسند: «کتاب آسان شده یا سخت؟!»

**شــرقی: من ترجیح می‌دهم که بگویم نه آســان شده و نه سخت، بلکه کتاب منسجم‌تر و بهتر شده است.**

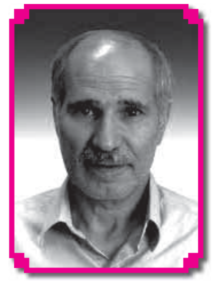
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

آموزشی

۲

**دکتر عین‌الله پاشا**
استاد آمار و ریاضی دانشگاه خوارزمی
(تربیت معلم)

# به استقبال سرشماری ۱۳۹۵ برویم!



## سرشماری

اشاره

**دادۀ بهتر، زندگی بهتر**

شعار سازمان ملل متحد

به مناسبت روز جهانی آمار

**در شمارۀ پیش (مهرماه) تاریخچه‌ای از سرشماری به شکل ابتدایی آن در جوامع بشری کهن و قرون معاصر آوردیم. اینک به بحث تاریخ سرشماری در کشور عزیزمان، ایران می‌پردازیم.**

### سرشماری در ایران

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، در زمان هخامنشیان، حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، سرشماری‌هایی در ایران انجام می‌شد که هدف عمدۀ آن‌ها تعیین نیروی جنگی و تأمین منابع مالی بوده است. هر یک از حکومت‌های امپراتوری بزرگ ایران ضرورت داشتن اطلاعات از جامعۀ خود را حس می‌کردند و به‌صورت‌هایی به تهیۀ اطلاعات مورد نیاز در این زمینه دست می‌زدند. این سرشماری‌ها همان‌طور که گفته شد چارچوب معینی نداشتند و هر از چند گاهی انجام می‌گرفتند. اطلاعات گردآوری شده هم شاید چندان دقیق نبوده‌اند. علاوه بر این، چون سؤال‌های سرشماری و زمان‌های گردآوری آن‌ها ثابت نبودند، اطلاعات حاصل را نمی‌شد در کنار هم قرار داد و به روند مناسبی از تغییرات در جامعه دست یافت و البته هدف هم این نبود.

از این قبیل سرشماری‌های خودرو و بی‌چارچوب که بگذریم، اولین نمونۀ سرشماری در ایران که آن هم فقط از شهر تهران بود، در زمان **ناصرالدین شاه قاجار** در سال ۱۲۴۶ هجری شمسی اجرا شد. در مقیاس تاریخی، هنوز چیزی از پایتختی (دارالخلافگی) تهران نگذشته بود. در آن زمان دورتادور تهران را مثل سایر شهرها دیوار (دیوار شاه طهماسب) کشیده و دروازه‌هایی برای ورود و خروج تعبیه کرده بودند. در اطراف دیوار هم به خاطر امنیت بیشتر خندق حفر کرده بودند. اما به سبب پایتخت شدن تهران و مهاجرت مردم از سایر شهرها به تهران (در واقع هجوم مردم به تهران به علت پایتخت شدن آن)، کم‌کم دیوارها را خراب و خندق‌ها را پر کردند تا شهر بتواند توسعه یابد.

در هر صورت ناصرالدین شاه با مشکل افزایش جمعیت روبه‌رو می‌شود. وی موضوع سرشماری دارالخلافه را به وزیر علوم وقت خود، **اعتضادالسلطنه علیقلی‌میرزا** ابلاغ می‌کند. او هم به سراغ تنها مرکز علمی موجود در ایران، یعنی دارالفنون (مدرسۀ مبارکه) از یادگاری‌های ماندگار **امیرکبیر** می‌رود و موضوع سرشماری را به مدیر آن مدرسه، **جعفر قلی‌خان نیّرالملک** احاله می‌دهد. در دارالفنون سرپرستی سرشماری به **عبدالغفار**[1]، معلم کلیۀ درس‌های ریاضی واگذار می‌شود. عبدالغفار نیز به کمک هشت تن از شاگردان خود از مدرسۀ دارالفنون در مدت ۵۵ روز جمعیت ساکن تهران را سرشماری می‌کند و نتیجه را به‌صورت رساله‌ای به اعتضادالسلطنه ارائه می‌دهد. عبدالغفار نام این رساله را «تشخیص نفوس دارالخلافه» می‌گذارد.

در این رساله، عبدالغفار بحثی دربارۀ جمعیت‌شناسی و «**نظریۀ مالتوس**» می‌آورد. (طبق نظریۀ مالتوس، رشد جمعیت سریع‌تر از رشد منابع غذایی است (اولی تصاعد هندسی و دومی تصاعد حسابی و لذا باید رشد جمعیت محدود شود.) عبدالغفار خود به این نظریه اعتقاد داشت و در نتیجه از رشد بی‌رویۀ جمعیت هراسناک بود. همچنین در این رساله به علم آمار اشاره می‌شود (شاید به‌صورت آکادمیک برای اولین‌بار در ایران) و از فواید و کارایی آن و از موضوعاتی از قبیل عمر متوسط، نرخ‌ها، میانگین‌ها و حساب احتمالات صحبت به میان می‌آورد.

عبدالغفار برای آنکه بتواند سرشماری را انجام دهد، به نقشۀ دقیقی از شهر تهران نیاز داشت که این نقشه را خود قبلاً به‌وسیلۀ شاگردانش تهیه کرده بود. علاوه بر این، می‌باید فرم‌های جمع‌آوری اطلاعات، طراحی و دستورالعمل دقیق مراجعه به منازل و ثبت اطلاعات تهیه می‌شد. این

اقدامات نشان از یک سرشماری مدرن مطابق با استانداردهای آن روز جهان داشت. شاید عبدالغفار از طریق معلمان خارجی دارالفنون که به خود وی درس داده بودند یا آن موقع در مدرسه همکاری می‌کردند، اطلاعاتی دربارهٔ سرشماری کسب کرده بود. در هر حال، اقدام او شروع خوبی در سرشماری محسوب می‌شود.

در تقسیم‌های آن روزها، شهر تهران به شش محله تقسیم شده بود. اقلام اطلاعاتی که در آن سرشماری مدنظر قرار داشتند تعداد افراد خانوار، نوع تصرف مسکن (ملکی، اجاره‌ای)، توزیع جمعیت برحسب جنس و سن، پیروان ادیان مختلف، موقعیت شغلی و اجتماعی، تأسیسات شهری و اماکن عمومی بودند. برخی از اطلاعات حاصل از این سرشماری به این شرح است:

- جمعیت تهران: ۱۴۷/۲۵۶ نفر
- تهرانی: ۲۶/۶ درصد
- مهاجر: ۷۳/۴ درصد (علت تخریب دیوار شاه طهماسب و پر کردن خندق‌ها، از این درصد بالا به خوبی استنباط می‌شود.)
- نسبت تعداد مردان به زنان:

$$\frac{۵۳۹۷۲}{۵۲۳۹۰}=۱/۰۳$$

سرشماری بعدی که در دورهٔ قاجار انجام گرفت، به چهار سال پس از به سلطنت رسیدن **مظفرالدین شاه قاجار**، در سال ۱۲۷۷ برمی‌گردد. در این سال امر سرشماری تهران به‌وسیلهٔ اتابک اعظم **امین‌السلطان** به **حسن اخضر علیشاه** که ظاهراً از دراویش بوده و خود را کلب آستان دوستان مولا می‌خوانده است، واگذار شد. این مأموریت به سبب نامه‌ای بسیار متملقانه و پرتکلف که حسن اخضر علیشاه به امین‌السلطان نوشته و در آن قصد خود را یک سال نوکری اعلام کرده بود، واگذار شد. در این سرشماری که یک سال طول کشید، تعداد ابنیهٔ تهران به تفکیک مورد استفاده از قبیل خانه، دکان، کاروان‌سرا، مدرسهٔ دولتی، طویله و به تفکیک محله‌های پنج‌گانه تهران آورده شد.

سرشماری دیگری که از تهران به عمل آمد، در زمان سردار سپه و در سال ۱۳۱۰ بود. این سرشماری به‌وسیلهٔ تشکیلات بلدیه (شهرداری) که تازه تأسیس شده بود، انجام شد و براساس آن جمعیت کل تهران ۲۱۰/۰۰۰ نفر و تراکم آن ۸۰ نفر در هر ۱۰/۰۰۰ مترمربع بود.

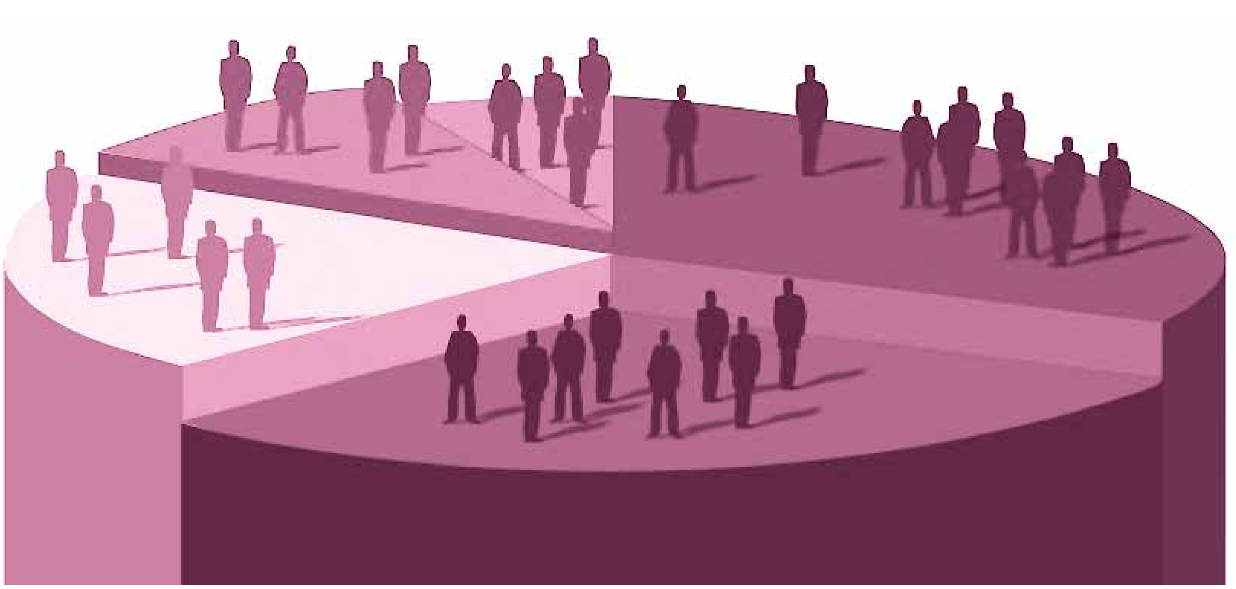
به‌طور گذرا از سال ۱۲۷۷ تا سال ۱۳۱۸ سرشماری‌های نامنظم و محدودی در تهران برگزار شدند. اولین قانون سرشماری تهران در سال ۱۳۱۲ در ۱۴ ماده به تصویب هیئت وزرا رسید که مادهٔ اول آن به‌صورت زیر است:

**مادهٔ ۱.** سرشماری مملکت در هر ۱۰ سال یک مرتبه اواسط مهرماه در روز غیرتعطیل و ظرف ۲۴ ساعت انجام می‌پذیرد.

همان‌طور که گفته شد، اگرچه قانون سرشماری کشور در سال ۱۳۱۲ به تصویب رسید، ولی تا سال ۱۳۱۸ این کار عملی نشد. در این سال برای اولین‌بار از کل ایران سرشماری به عمل آمد که خلاصه‌ای از نتایج (که به‌صورت ناقص به دست آمده و تنها مربوط به بخش‌هایی از کشور بوده است.) آن به این شرح است:

- جمعیت ایران: ۱/۸۳۲/۸۵۷
- زن: ۸۵۶/۱۱۳
- مرد: ۹۷۶/۷۴۴

طبق مادهٔ ۱، این سرشماری که قرار بود در مدت ۲۴ ساعت برگزار شود تا سال ۱۳۲۰ به تدریج ادامه یافت و در آن سال به علت اشغال ایران و رفتن **رضا شاه**، کار به نتیجه نهایی نرسید.



دیدیم کــه اولیــن سرشــماری تهران در دورۀ ناصــری بــا مســئولیت دارالفنون برگزار شــد. در دورۀ پهلــوی اول، قوانین و چارچوب اجرایی سرشــماری تدوین شد و تنها سرشــماری که قرار بود براســاس این قوانیــن بــه اجرا درآیــد، ابتر مانــد. در هر حــال موضوع سرشــماری همیشــه مدنظر دولــت بــوده اســت. در دورۀ پهلــوی دوم، پس از تکمیل قوانین، اولین سرشماری که مطابق با سرشماری‌های بین‌المللی بود، در ســال ۱۳۳۵ برگزار شــد. از آن پس هر ۱۰ ســال یک‌بار تا سال ۱۳۸۵ و ۵ سال بعد از آن در ســال ۱۳۹۰ سرشــماری برگزار شد. ایــن سرشــماری‌ها عموماً بــا بهره‌گیری از فناوری‌هــای جدید دائماً رو به تکامل بودند و سرشــماری ۵۵ روزۀ دورۀ ناصری، آن هم از شــهر تهران با جمعیت ۱۴۷/۷۳۶ نفر، به سرشــماری ۲۰ روزه از ایران با جمعیت ۷۵ میلیون نفر در ســال ۱۳۹۰ رسید. در دورۀ ناصری ۹ نفر مجری سرشماری بودند، ولی در سال ۱۳۹۰ حدود ۱۱۳/۵۰۰ نفر در امر سرشماری شرکت مستقیم داشتند.

در بخــش بعــدی اطلاعــات حاصل از سرشــماری‌های انجام شــده در ایــران به اختصار ارائه می‌شود.

## ایران در آینۀ سرشماری

### الف) دورۀ ناصری

همان‌طــوری کــه قبــلاً اشــاره شــد، در ایــن دوره از تهــران سرشــماری بــه عمــل آمــد و خلاصــه‌ای از اطلاعــات حاصــل از ایــن سرشــماری به شــرح زیر است:

- جمعیت تهران: ۱۴۷/۲۵۶ نفر
- جمعیــت بالای ۱۵ ســال: ۱۰۶/۳۶۲ (۷۲/۲ درصد)
- جمعیت بین ۵ تا ۱۵ ســال: ۱۹/۲۶۹ نفر (۱۳ درصد)
- جمعیــت زیــر ۵ ســال: ۲۱/۶۲۵ نفر (۱۴/۷ درصد)

در آن سرشــماری اطلاعات بیشــتری مــورد توجــه بــود کــه در ایــن دوره اصلاً موضوعیــت ندارنــد، ولی برای اطلاع شــما و یــادآوری تاریخ، به یکــی دو نمونه اکتفا می‌کنیــم. اولین مورد مربــوط به گروه‌های شغلی است. گروه‌های شغلی آن دوره با این زمان بسیار متفاوت بود که از نظر ما ممکن است عجیب به نظر آید. اطلاعات مربوط به گروه‌های شــغلی دورۀ ناصری به‌صورت زیر است:

- **آقایــان کســبه، اربــاب حــرف و صنایع**: ۶۱/۹ درصد
- **سپاهیان:** ۱۲/۳ درصد
- **نوکرها:** ۱۴/۵ درصد
- **کنیز سیاه:** ۳/۷ درصد
- **خدمتکار:** ۵/۵ درصد
- **خواجه و غلام سیاه:** ۱/۲ درصد

خلاصه‌ای از اطلاعات سرشــماری سال ۱۳۰۱ در تهران نیز به‌صورت زیر است:

- **جمعیت:** ۱۹۶/۲۵۵ نفر
- **تراکــم جمعیــت:** ۸۰ نفــر در هــر ۱۰/۰۰۰ مترمربع
- **افراد شاغل:** ۳۵/۳۱۲ نفر
- **بی‌کار بی‌مصرف:** ۶/۴۰۲ نفر

در ایــن سرشــماری اطلاعاتــی دربارۀ جمعیــت محلات تهــران، تعــداد خانه‌ها و اتاق‌هــا، جمعیت شــاغل و بــی‌کار، تعداد جمعیت شاغل و بی‌کار، تأهل (و انواع زن)، طلاق، جمعیت خانواده‌ها، تفکیک جمعیت براساس مذاهب و ادیان مختلف، توزیع سن ازدواج، تعــداد اماکن (از قبیــل مریضخانه، پانســیون، مســافرخانه و...) فوت کودکان، معلولیت، فوت (علت و ســن فوت)، و انواع مشاغل (به تفکیک دولتی، نیمه آزاد، آزاد و غیرمجاز) آمده است.[۲]

### ب) دورۀ پهلوی

بعد از مشــروطیت و تأســیس مجلس شورای ملی انجام اقدامات بنیادی در کشور آغاز شــد. از جمله قانونی بود که طبق آن، افراد باید «ســجل احوال» یا «ورقۀ هویت» (که همان شناسنامۀ امروزی است) دریافت می‌کردند. این قانون در سال ۱۲۹۷ هجری شمســی تصویب شــد، ولی گرفتن ســجل اختیاری بود. در سال ۱۳۰۴ قانون سربازی (که به آن اجباری هم می‌گفتند) از تصویب گذشــت و از همین ســال گرفتن سجل نیز اجباری شــد. ســجل علاوه بر آنکــه وقایع چهارگانۀ تولد، فوت، ازدواج و طلاق را ثبت

می‌کرد، سندی بود که به وسیلهٔ آن فرد می‌توانست بسیاری از کارهای اجتماعی، از جمله تحصیل، رأی دادن و غیره را انجام دهد.

مقارن همین ایام موضوع سرشماری نیز در دستور کار قرار گرفت. ابتدا بلدیه (شهرداری) و سپس اداره‌ای در وزارت کشور متصدی انجام سرشماری شد. در این سال‌ها دولت و کابینه‌های مختلف سرگرم تهیهٔ قوانین و چارچوب‌های مربوط به سرشماری بودند. اگرچه قانون سرشماری آماده شده بود، ولی سرشماری به سال ۱۳۱۸ موکول شد و این قرار بود اولین سرشماری سراسری در مملکت باشد. این سرشماری طبق قانون قرار بود در ۲۴ ساعت انجام شود، ولی به علت نبودن وسایل ارتباطی مناسب بین شهرها و اوضاع نابسامان آن دوره (جنگ جهانی دوم)، تا سال ۱۳۲۰ به تدریج ادامه یافت. در این سال به علت خروج رضا شاه از کشور و از هم پاشیده شدن شیرازهٔ مملکت، سرشماری در بسیاری از شهرها انجام نشد. در نتیجه اطلاع دقیقی از اوضاع و احوال مملکت به‌دست نیامد. مسئول برگزاری این سرشماری **علی‌اصغر حکمت**، استاد دانشگاه تهران بود. جمعیت تهران در این سال ۵۴۰/۰۸۷ نفر به‌دست آمد. گزارش آن، روز بعد از سرشماری تهران در هیئت وزرا در حضور رضا شاه مطرح شد. علی‌اصغر حکمت می‌نویسد: «عدد و کمیت نفوس شهر پایتخت، مرضی طبع عالی و همت بلند شاه نشد، زیرا ایشان میل داشتند جمعیت پایتخت خیلی بیش از آنچه سرشماری نشان می‌داد، باشد.»

هنوز کار تصویب و اصلاح قانون سرشماری و تعیین مرکزی که باید مسئول آن باشد، ادامه داشت. پس از مصوبات لازم و تهیهٔ چارچوب‌های بسیار دقیق و با جزئیات کامل، امر سرشماری عمومی ایران به کمک «اصل چهار **ترومن**» از ۱۰ تا ۲۵ آبان سال ۱۳۳۵ در تمام نقاط ایران برگزار شد.

بنابراین، اولین تعداد جمعیت قابل اتکای ایران در این سال به میزان ۱۸/۹۵۴/۷۰۴ نفر به‌دست آمد که ۹/۶۴۴/۹۴۴ نفر از آنان مرد و ۹/۳۰۹/۷۶۰ نفر از آنان زن بودند. یعنی نسبت تعداد مردها به زن‌ها ۱/۰۴ بود. جمعیت شهرنشین کشور ۵/۹۵۳/۵۶۳ نفر و جمعیت روستایی ۱۳/۰۰۱/۱۴۱ نفر بود. تراکم جمعیت در کشور ۱۲ نفر در هر کیلومتر مربع به‌دست آمد.

سرشماری بعدی مطابق قانون، ۱۰ سال بعد در سال ۱۳۴۵ برگزار شد. این سرشماری اولین سرشماری است که به وسیلهٔ مرکز آمار ایران که در سال ۱۳۴۴ به این منظور تأسیس شده بود، برگزار شد.

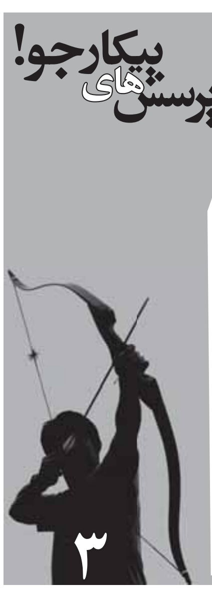
قبل از شروع سرشماری، به‌طور آزمایشی در دو شهر سرشماری انجام شد تا مشکلات و معایب کار عیان شود. جمعیت ایران در این سرشماری ۲۵/۷۸۸/۷۲۲ نفر بود که شامل ۵/۱۶۷/۱۹۲ خانوار (برای اولین‌بار است که به‌طور رسمی در کشور تعداد خانوار ذکر می‌شود) می‌شد. از این جمعیت، ۱۳/۳۵۵/۸۰۱ نفر مرد و ۱۲/۴۳۲/۹۲۱ نفر زن و نسبت مردان به زنان ۱/۰۷ بود.

مجدداً در سال ۱۳۵۵ سومین سرشماری عمومی نفوس و مسکن ایران به‌وسیلهٔ مرکز آمار ایران انجام شد. در این سرشماری نیز به منظور آزمایش پرسش‌نامه و بررسی مفاد آن‌ها از یک سال قبل در شش شهر سرشماری برگزار شد. این سرشماری از ۸ تا ۲۸ آبان‌ماه سال ۱۳۵۵ طول کشید و طبق اطلاعات آن، جمعیت ایران برابر ۳۳/۷۰۸/۷۴۴ نفر، تعداد مردان ۱۷/۳۵۶/۳۴۷ نفر، تعداد زنان ۱۶/۳۵۲/۳۹۷ نفر و نسبت مردان به زنان ۱/۰۶ اعلام شد.

*** پی‌نوشت‌ها**

۱. میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله متولد سال ۱۲۵۵ و وفات به سال ۱۳۲۶ هجری قمری، فرزند آخوند ملاعلی محمد اصفهانی. او به تشویق علی‌قلی میرزا اعتضادالسلطنه در زمرهٔ شاگردان مدرسهٔ دارالفنون درآمد و در محضر معلمان فرنگی، زبان‌های بیگانه را آموخت و با ریاضیات جدید عصر خود آشنایی کامل پیدا کرد. خود او می‌نویسد قبل از سن ۲۰ سالگی به تدریس علوم ریاضی در دارالفنون مشغول و معلم کل علوم ریاضی آن مدرسه شده است.

۲. در این سرشماری از جمله اطلاعاتی که می‌خواستند، نام همسر بود. در آن زمان مردان از عنوان کردن نام همسر خود بین عموم خودداری می‌کردند. از این‌رو در مقابل این سؤال مقاومت می‌کردند. نزدیک بود بلوایی در شهر پیش آید که با وساطت معتمدین شهر، این قلم از پرسش‌نامه حذف شد.




اگر برای عدد حقیقی $x$ و عدد طبیعی و دلخواه $n>1$ داشته باشیم:

$x^n=\sum_{i=0}^{n-1}x^i$ کوچک‌ترین، بازه‌ای که می‌توان گفت به یقین $x$ متعلق به آن است، کدام است؟

الف) $(2, 2+\frac{1}{n})$ ب) $(2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$

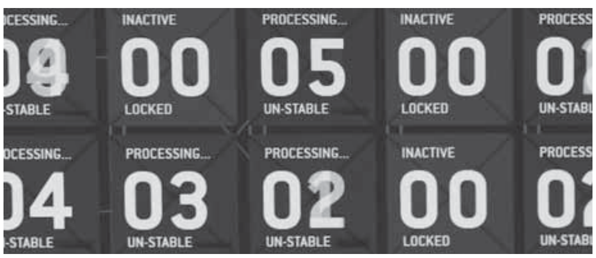
ج) $(2-\frac{1}{n}, 2)$ د) $(2-\frac{2}{n}, 2)$

هـ) $(2, 2+\frac{2}{n})$

# ایستگاه اعداد

احسان یارمحمدی

- **کارگردان:** کاسپار بارفورد[۱]
- **تهیه‌کنندگان:** شِـن فِرسـت[۲]، برایان فِرسـت[۳] و نایجل توماس[۴]
- **فیلم‌نامه‌نویس:** اِف. اِسکات فِریزِر[۵]
- **بازیگران:** جان کیوساک[۶] و مالین آکِرمن[۷]
- **موسیقی:** پل لئونارد ـ مورگان[۸]
- **تدوین:** کریس جیل[۹] و پر سَندهُلت[۱۰]
- **تاریخ اکـران:** ۱۸ آوریــل ۲۰۱۳ در دانمارک و ۲۶ آوریل ۲۰۱۳ در ایالات متحده آمریکا*
- **مدت فیلم:** ۸۹ دقیقه
- **محصول:** پادشــاهی متحدهٔ بریتانیــا، ایالات متحدهٔ آمریکا و بلژیک
- **زبان فیلم:** انگلیسی




نام فیلم، ایســتگاه اعداد، برگرفته از روشــی است که برای ارسال پیام‌های رمزدار از آن اســتفاده می‌شود. به‌همین دلیل ابتدا به معرفی رمزنگاری و رمزگشــایی می‌پردازیم. سپس با استفاده از ماتریس‌ها و ارائـهٔ یک مثال، دانش‌آموزان را بیشــتر و بهتر بــا رمزنگاری به روش ریاضی آشنا می‌کنیم، تا بدین ترتیب هم مقدمه‌ای برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به رشــتهٔ رمزنگاری و رمزگشــایی کــه می‌توانند در دوران تحصیلات تکمیلی دانشــگاهی، این رشــته را برگزینند، فراهم کرده باشیم و هم پیش‌زمینه‌ای را برای درک مفیدتر و عمیق‌تر فیلم مزبور به آن‌ها ارائه کرده باشیم.

پیشرفت بشر تا اندازهٔ زیادی مرهون قابلیت وی در برقراری ارتباط است و یک جنبهٔ اساسی این قابلیت، توانایی برقراری ارتباط از طریق نوشــتن است. از همان نخستین روزهای نوشتن، موقعیت‌هایی پیش می‌آمد که کســانی می‌خواســتند اطلاعات خود را منحصراً به عدهٔ محدودی برســانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. برای این کار، طرح‌هایی یافتند که از آن راه می‌توانستند برای کسانی کــه به اطلاعات به‌خصوص مورد نیاز برای از رمز درآوردن دسترســی نداشــتند، مکاتبه‌های خود را نامفهوم ســازند. تکنیک‌های کلی برای به انجام رساندن چنین مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثــی را تشــکیل می‌دهــد که آن را تحــت عنــوان «رمزنگاری» می‌شناسیم.

پیش از پیدایش پُست به مفهوم امروزی آن و ارسال الکترونیکی اطلاعات، شیوهٔ معمول فرستادن پیام، استفاده از قاصد خصوصی بود. با وجود این، باز هم غالباً صلاح در این بود که از روش‌های پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده شود، زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت. در روزگار کنونی هم، از پیامی که با بی‌سیم انتقال یابد، هر کســی که ابزار مناســب را داشته باشــد و از آن در زمان مناسب با انتخاب فرکانس صحیح اســتفاده کند، می‌تواند رونوشت بردارد. در چنین موردی نیز، اگر پنهان کردن محتوای پیام، مورد‌نظر فرســتنده باشد، باید از نوعی شیوهٔ پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرســتندهٔ پیام تلاش می‌کند اطلاعات خود را از هر کس مگر گیرندهٔ موردنظر پنهان دارد، کســانی هم هستند که به کشــف محتوای پیام بســیار علاقه‌مندند، و چه بسا این افراد از همان کســانی باشــند که فرســتنده تلاش دارد، اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. اگر چنین کســانی به طریقی رونوشــتی از پیام رمزی را

به‌دست آورند، در آشکار کردن رازی که پیام حاوی آن است، خواهند کوشید. البته تلاش آن‌ها بدون داشتن اطلاعاتی دربارهٔ جزئیات عمل رمزنگاری، که برای پنهان ساختن مضمون پیام به‌کار رفته است، انجام خواهد پذیرفت. تلاشی که از این راه و با هدف خواندن پیام‌های سرّی انجام پذیرد، تحت عنوان مبحثی قرار می‌گیرد که «رمزگشایی» نامیده می‌شود.

در تاریخ از موارد فراوانی می‌توان یاد کرد که رمزگشایی موفقیت‌آمیز، عامل خیلی مهمی در به‌دست آوردن موفقیت‌های سیاسی، کسب پیروزی‌های نظامی، دستگیری جنایتکاران و فعالیت‌های ضدجاسوسی بوده است. در ترجمهٔ اسناد تاریخی که از بایگانی‌های رسمی به‌دست آمده‌اند و تشخیص داده شده که به زبان سرّی نوشته شده‌اند، همچنین در بازسازی زبان‌هایی که مدت‌ها پیش از بین رفته‌اند و کسی دربارهٔ آن‌ها چیزی نمی‌داند و در حقیقت زبان‌هایی سرّی محسوب می‌شوند نیز رمزگشایی سهیم بوده است.

فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به‌کار می‌روند، با استفاده

از تکنیک‌هایی صورت می‌گیرند که بعضی ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند، بعضی ماهیت مهندسی دارند، و بعضی هم به‌راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، فراست، حس ششم و غیره.»[۱۱]

## رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها[۱۲]

رمزدار کردن پیام‌ها نیز در طول زمان‌های گذشته از اسلوب‌ها و مناسک متفاوت و متمایزی پیروی کرده‌اند که مجال پرداختن به آن‌ها از حوصلهٔ این مقاله خارج است. اما آنچه در این مقاله ملاک و معیار رمزدار کردن یک پیام است، بهره‌گیری و استفاده از مفاهیم ماتریس‌ها در جهت رمزدار کردن یک پیام است. بنابراین به ریاضی‌آموزان پیشنهاد می‌شود که برای درک بهتر و بیشتر این مقاله، آشنایی لازم و کافی را با مفاهیمی مانند: ضرب ماتریس‌ها، ماتریس مربعی[۱۳]، قطر اصلی[۱۴] ماتریس، دترمینان[۱۵]، ماتریس معکوس‌پذیر[۱۶]، ماتریس بالا مثلثی[۱۷]، ماتریس پایین مثلثی[۱۸]، اعمال سطری مقدماتی[۱۹] و اعمال ستونی مقدماتی[۲۰] داشته باشند. البته تعدادی از مطالب و نکات لازم برای مطالعهٔ رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها را قبل از ورود به آن آورده‌ایم.

**نکتهٔ ۱.** اگر $A$ ماتریسی مربعی با دترمینان مخالف صفر $(\det(A)=|A|\neq 0)$ باشد، آن‌گاه ماتریس $A$ معکوس‌پذیر و دارای معکوس $A^{-1}$ است.

**نکتهٔ ۲.** اگر $A$ ماتریسی معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ ($I$ ماتریس همانی[۲۱] هم‌مرتبه با ماتریس $A$ است.)

**نکتهٔ ۳.** اگر $A$ ماتریسی معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ ($A^*$ ماتریس الحاقی[۲۲] هم‌مرتبه با ماتریس $A$ است.)

**نکتهٔ ۴.** اعمال سطری مقدماتی عبارت‌اند از:
- تعویض دو سطر از ماتریس با یکدیگر.
- ضرب یک سطر از ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر.
- اضافه کردن مضربی از یک سطر ماتریس به سطر دیگر آن.

**نکتهٔ ۵.** اعمال ستونی مقدماتی عبارت‌اند از:
- تعویض دو ستون از ماتریس با یکدیگر.
- ضرب یک ستون ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر.
- اضافه کردن مضربی از یک ستون ماتریس به ستون دیگر آن.

برای به رمز درآوردن یک پیام با استفاده از ماتریس‌ها، به دو ماتریس قابل ضرب مربعی $A$ و ماتریس (نه الزاماً مربعی) $B$ به گونه‌ای نیازمندیم که متن رمز در قالب حاصل‌ضرب دو ماتریس $A$ و $B$ ارائه شود. به بیان بهتر، ماتریس $B$ دربرگیرندهٔ پیام اصلی است که به‌صورت رمز درآمده، ماتریس $A$ کلید رسیدن به پیام رمزآلود شده است، و ماتریس $AB$ حاوی رمزی است که حامل رمز آن را در اختیار دارد و می‌باید از تساوی ماتریسی $A^{-1}(AB)=B$ به محاسبهٔ ماتریس $B$ بپردازیم. (البته روشن است که حامل رمز تنها ماتریس $AB$ را در اختیار دارد. از طرف دیگر، فردی که می‌خواهد رمزگشایی کند، می‌باید ماتریس $A$ را در اختیار داشته باشد تا به واسطهٔ آن $A^{-1}$ مطلوب را تعیین کند و سپس با عملیات ضرب $A^{-1}(AB)$ به ماتریس $B$ که هدف اصلی در این محاسبه است، دست پیدا کند.)

بنابراین بحث اصلی می‌باید روی ماتریس $A$ انجام پذیرد. چراکه بدون این ماتریس عملاً رمز گشوده نمی‌شود. اما آیا هر ماتریس مربعی را می‌توان به‌عنوان ماتریس $A$ در نظر گرفت و با انجام محاسبات لازم به مقصود نهایی رسید؟ در پاسخ بیان می‌کنیم که می‌توان هر ماتریس مربعی را به‌عنوان ماتریس $A$ در نظر گرفت. اما اگر برای این ماتریس

شـرایط و ویژگی‌هایـی را ملاک عمل قرار دهیم، در انجام محاسـبات جبری لازم برای رمزگشایی از عملکرد بهتری برخوردار می‌شویم. چون برای محاسبهٔ معکوس ماتریس A از رابطهٔ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}$ استفاده می‌کنیم، روشن است که اگر دترمینان ماتریس A همواره برابر با ۱+ یا ۱- باشد، برای ضرب مقدار $\frac{1}{|A|}$ در ماتریس $A^{*}$ از محاسبات ساده‌تری بهره‌مند می‌شـویم. در ضمن اگر درایه‌های ماتریـس A همواره اعداد صحیح[۲۳] اختیار کنند، به هنگام انجام اعمال سطری یا ستونی مقدماتی نیز دچار زحمت کمتری می‌شـویم. به این منظور همیشه در انتخاب ماتریس A موارد زیر را ملاک توجه خود قرار می‌دهیم.[۲۴]

۱. ماتریس A همواره مربعی اسـت و مرتبهٔ آن به‌گونه‌ای اختیار شود که حاصل‌ضرب ماتریسی $A^{-1}(AB)$ امکان‌پذیر باشد.
۲. ماتریس A به‌گونه‌ای اختیار شود که درایه‌های آن اعداد صحیح را اختیار کنند.
۳. ماتریس A به گونه‌ای اختیار شود که دترمینان آن همواره برابر با ۱+ یا ۱- باشد.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که چگونه ماتریسی انتخاب کنیم که دترمینان آن همواره برابر با ۱+ یا ۱- شود؟ آیا استفاده از روش‌های تصادفی برای نوشـتن درایه‌های یک ماتریس و سـپس با اسـتفاده از روش‌های مرسـوم برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌ها، معیاری کارامد برای نیل به مقصود است یا خیر؟ برای پاسخ به این سؤال بیان می‌کنیم، از آنجـا که دترمینان ماتریس‌های قطری و ماتریس‌های مثلثی برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس است، بنابراین برای اینکه ماتریسـی با دترمینان ۱+ یا ۱- در اختیار داشـته باشـیم، باید ماتریسی بالامثلثی یا پایین‌مثلثی که درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها ۱+ یا ۱- باشند، در نظر بگیریم. اکنون با توجه به اینکه می‌دانیم انجام اعمال سـطری مقدماتی و اعمال ستونی مقدماتی روی دترمینان این نوع از ماتریس‌ها تغییری ایجاد نمی‌کند[۲۵]، با بهره‌گیری از این اعمال به تغییر ظاهر و ساختار درایه‌های ماتریس می‌پردازیم تا ماتریس انتخاب شده از ظاهر و ساختمان پیچیده‌تری برخوردار شود و اگر به هر دلیلی ماتریس مزبور به‌دسـت افراد غیرمجاز افتاد، آن‌ها نتوانند به سهولت و راحتی و در حداقل زمان با استفاده از این کلید، رمز پیام را بگشایند.

اما وضعیـت ارائهٔ ماتریس B که حاوی رمز پیام و به‌عبارت بهتر، ماتریس هدف در محاسـبات رمزگشـایی اسـت، چگونه است؟ برای نوشتن درایه‌های آن از چه روش و راهکاری باید استفاده کنیم؟ به این منظور می‌توان از روش‌هایی برای متناظر کردن حروف تشکیل‌دهندهٔ پیام با درایه‌های ماتریس B اسـتفاده کرد که در ادامه به یک روش از آن‌ها می‌پردازیم.

حروف الفبای انگلیسـی را به ترتیب و پشت‌سرهم بنویسیم و هر یـک از آن‌ها را به‌صورت متوالی با اعداد ۱، ۱-، ۲، ۲-، ۳، ۳-، ...، ۱۱، ۱۱-، ۱۲، ۱۲-، ۱۳، ۱۳- نظیر کنیم. بنابراین:

A→۱, B→-۱, C→۲, D→-۲, ... , W→۱۲, X→-۱۲, Y→۱۳, Z→-۱۳

و درایـهٔ صفر در ماتریس B بیانگر فاصلهٔ بین دو کلمهٔ موجود در پیام اصلی است.

**مثال:** فردی پیام زیر را دریافت کرده است. چگونگی رمزگشایی و رمزنگاری این پیام را در زیر مشاهده می‌کنید:

۳۸, −۴, −۳, −۳۷, −۲۰۹, −۷۱, −۱۵۳,۱۵۵, −۱۶, ۲۱, ۴۳, −۴۸, −۱۹, −۲۷, −۴۷,۱۱۵, ۳۰, −۲۸, −۵۴, ۸۴

دریافت کنندهٔ این پیام بعد از دریافت آن، اعداد قرار گرفته شده در این پیام را در قالب ماتریس روبه‌رو می‌گنجاند.

$$AB=\begin{bmatrix} ۳۸ & −۲۰۹ & −۱۶ & −۱۹ & ۳۰ \\ −۴ & −۷۱ & ۲۱ & −۲۷ & −۲۸ \\ −۳ & −۱۵۳ & ۴۳ & −۴۷ & −۵۴ \\ −۳۷ & ۱۵۵ & −۴۸ & ۱۱۵ & ۸۴ \end{bmatrix}$$

البته وی به ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲۰ & −۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۳ & −۸ & ۱۴ & ۲ \\ −۱۳ & ۱۱ & −۲۱ & −۳ \end{bmatrix}$ نیز برای انجام محاسبات لازم برای رمزگشایی پیام نیاز دارد. پس:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & −۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & −۱۳ & ۵ & −۱ \\ −۱ & −۱۰۵ & ۴۳ & −۷ \\ ۷ & ۶۹۶ & −۲۸۷ & ۴۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-۱}(AB)=\begin{bmatrix} ۰ & −۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & −۱۳ & ۵ & −۱ \\ −۱ & −۱۰۵ & ۴۳ & −۷ \\ ۷ & ۶۹۶ & −۲۸۷ & ۴۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳۸ & −۲۰۹ & −۱۶ & −۱۹ & ۳۰ \\ −۴ & −۷۱ & ۲۱ & −۲۷ & −۲۸ \\ −۳ & −۱۵۳ & ۴۳ & −۴۷ & −۵۴ \\ −۳۷ & ۱۵۵ & −۴۸ & ۱۱۵ & ۸۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & −۱۱ & ۱ & ۷ & ۲ \\ ۰ & ۳ & −۱۰ & ۱ & ۱۰ \\ −۶ & ۰ & −۴ & −۱۰ & ۰ \\ ۸ & ۷ & ۳ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=B$$

بنابراین:

۵,۰, −۶, ۸, −۱۱, ۳, ۰, ۷, ۱, ۱, −۱۰, −۴, ۳, ۷, ۱, −۱۰, ۵, ۲, ۱۰, ۰, ۰

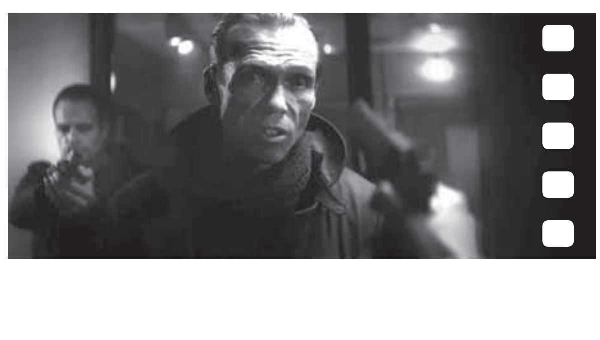
اکنون با متناظر کردن هر یک از اعداد بالا با حروف انگلیسی بنابر آنچه که بیان شده است، پیام زیر را به‌دست می‌آورد:

I LOVE MATHEMATICS

روش محاسبهٔ ماتریس A توسط اعضای گروه طراحی رمز:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & −۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۸ & −۱ & ۰ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\overset{\substack{R_۴+R_۱\\R_۴+R_۲\\R_۴+R_۳}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} ۷ & −۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۱ & −۵ & ۷ & ۱ \\ ۹ & ۴ & ۶ & ۱ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\overset{R_۲+R_۳}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} ۷ & −۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۱ & −۵ & ۷ & ۱ \\ ۲۰ & −۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\overset{\substack{R_۴+R_۱\\−۲R_۴+R_۲}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} ۱۳ & −۸ & ۱۴ & ۲ \\ −۱ & ۳ & −۷ & −۱ \\ ۲۰ & −۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\overset{\substack{R_۱\leftrightarrow R_۳\\R_۲\leftrightarrow R_۴}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} ۲۰ & −۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۳ & −۸ & ۱۴ & ۲ \\ −۱ & ۳ & −۷ & −۱ \end{bmatrix}\overset{−۲R_۲+R_۴}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} ۲۰ & −۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & −۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۳ & −۸ & ۱۴ & ۲ \\ −۱۳ & ۱۱ & −۲۱ & −۳ \end{bmatrix}=A \Rightarrow |A|=۱$$

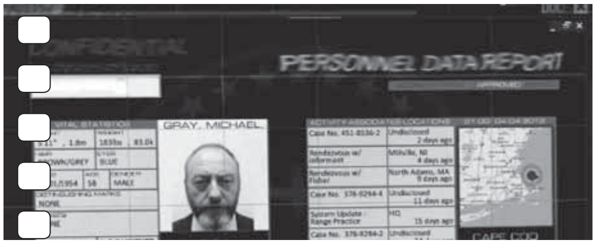


بنابراین:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & −۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & −۱۳ & ۵ & −۱ \\ −۱ & −۱۰۵ & ۴۳ & −۷ \\ ۷ & ۶۹۶ & −۲۸۷ & ۴۵ \end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=۱$$

## ایستگاه اعداد چیست؟

ایستگاه اعداد یک ایستگاه رادیویی موج کوتاه است که معمولاً در آن‌ها یک زن در حال خواندن یک مجموعه از اعداد اســت. البته گاهی در این ایســتگاه‌ها به جای اســتفاده از یک زن برای خواندن اعــداد مزبور، از یک مرد یا از یک بچــه یا از یک ربات یا تلفیقی از صدای آن‌ها اســتفاده می‌شــود. هر چند که تاکنون هیچ کشــور یا ســازمانی مسئولیت ایستگاه‌های اعداد و اعداد ارسال شده در آن‌ها را به‌عهده نگرفته اســت، اما در حقیقت این ایســتگاه‌های اعداد به منظور ارســال پیام‌های محرمانه و رمزگونه برای مأموران اطلاعاتی و جاسوســان از جانب ســرویس‌های اطلاعاتی و جاسوسی کشورها مورد استفاده قرار می‌گیرد. جاسوسان نیز با در اختیار داشتن کلید رمزها، می‌توانند به پیام نهفته در رمز دســت یابند. اولین اســتفاده از ایســتگاه‌های اعداد به جنگ جهانی اول باز می‌گردد و بیشترین اســتفاده از این ایســتگاه‌ها به دوران جنگ ســرد بین دو اَبَرقدرت شــرق و غرب، یعنی اتحاد جماهیر شوروی و ایالات متحدهٔ آمریکا برمی‌گردد. استفاده از ایســتگاه‌های اعداد بعد از پایان جنگ سرد در ســال ۱۹۸۹ و فروپاشــی اتحاد جماهیر شوروی در سال ۱۹۹۱ رو بــه کاهش نهاد. اما امروزه هنــوز تعدادی از آن‌ها با تغییراتی در طراحی این ایســتگاه‌ها و نیز دگرگونی‌هایی در چگونگی استفاده از گویندهٔ اعداد، فعال هستند.




## داستان فیلم

**اِمِرسون کِنت** یکی از مأموران سرویس اطلاعاتی ایالات متحدهٔ آمریکاست که به‌عنوان عضو حرفه‌ای این سازمان زیر نظر مافوق خود، **مایکل گِری**، مأموریت‌هایی را انجام می‌دهد. مأموریت جدید او اعزام به کشــور انگلیس و ورود به یک ایستگاه اعداد و همراهی و محافظت از شخصی به نام **کاترین** است که به‌عنوان گویندهٔ اعداد قرار است در این ایستگاه فعالیت کند. بعد از گذشت چند روز از آغاز فعالیت آن‌ها در ایســتگاه اعداد، عده‌ای به آن‌ها حمله می‌کنند که هدفشان دست یافتن به اطلاعات محرمانه‌ای اســت که در این ایستگاه اعداد ارسال و تبادل می‌شود. در این بین درگیری‌هایی صورت می‌گیرد که در نهایت با اتخاذ تصمیم‌ها و ابتکار عمل‌های درســت از جانب اِمِرســون کِنت، باعث نجات جان او و کاترین می‌شود. در اینجا از پرداختن به جزئیات این فیلم پرهیز می‌کنیم تا به هنگام تماشــای آن از انگیزه و هیجان کافی برخوردار باشید.

*** پی‌نوشت**

1. Kaspar Barford
2. Sean Furst
3. Bryan Furst
4. Nigel Thomas
5. F. Scott Frazier
6. John Cusack
7. Malin Akerman
8. Paul Leonard - Morgan
9. Chris Gill
10. Per Sandholt

۱۱. برگرفته از کتاب «**آشنایی با رمزگشایی به روش ریاضی**» به قلم **آبراهام سینکوف** که توسط **رویا درودی** و **عبدالله محمودیان** به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۴ در «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» به زیور طبع آراسته شده است.

۱۲. ریاضی‌آموزان برای بررسی بیشتر و بهتر روش رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها می‌توانند به مقالهٔ «**رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها**» به قلم **احسان یارمحمدی** در شمارهٔ ۲ «مجلهٔ ریاضی پایا» که در تابستان ۱۳۹۲ در شرکت آموزشی فرهنگی «مبتکران» به زیور طبع آراسته شده است، مراجعه کنند.

13. Square Matrices
14. Diagonal
15. Detrminant
16. Invertible Matrix
17. Upper Triangular Matrix
18. Lower Triangular Matrix
19. Elementary Row Operations
20. Elementary Column Operations
21. Identity Matrix
22. Adjacency Matrix
23. Integer Numbers

۲۴. ریاضی‌آموزان برای درک بهتر این موضوع بهتر است که قبل از بررسی مثال‌ها و تمرین‌های این مقاله مثال زیر را مورد کنکاش قرار دهند:

فردی پیام زیر را دریافت کرده است. چگونگی رمزگشایی و رمزنگاری این پیام را در مقابل مشاهده می‌کنید: ۸−, ۱−, ۱۰۲−, ۳۳−, ۲۶, ۷۳

دریافت‌کنندهٔ این پیام بعد از دریافت آن، اعداد پیام را در قالب ماتریس زیر می‌گنجاند:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲۶ & -۳۳ & -۱ \\ ۷۳ & -۱۰۲ & -۸ \end{bmatrix}$$

البته وی به ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۷ \\ -۹ & ۲۰ \end{bmatrix}$ ، $|A| = ۳ \neq \pm ۱$ نیز برای انجام محاسبات لازم برای رمزگشایی پیام نیاز دارد. پس:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۶/۶۶۷ & -۲/۳۳۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-۱}(AB)=\begin{bmatrix} ۶/۶۶۷ & -۲/۳۳۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲۶ & -۳۳ & -۱ \\ ۷۳ & -۱۰۲ & -۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳/۰۳۳ & ۱۷/۹۵۵ & ۱۱/۹۹۷ \\ ۵ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}\approx B$$

با انتخاب مقادیر تقریبی برای درایه‌های ماتریس B داریم: ۳, ۵, ۱۸, ۳, ۱۲, ۵

۲۵. ممکن است تعدادی از ریاضی‌آموزان از بیان این مطلب دچار تعجب شوند که چگونه امکان دارد که بنابر اعمال سطری یا ستونی مقدماتی، سطر یا ستونی از یک ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر ضرب شود، اما دترمینان آن تغییر نکند. در اینجا منظور نگارندهٔ مقاله از انجام اعمال سطری و ستونی مقدماتی برای تغییر ظاهر و ساختمان ماتریس، استفاده از اضافه کردن مضربی از یک سطر یا ستون ماتریس به سطر یا ستون دیگری از آن است که انجام این اعمال هیچ‌گونه تغییری در مقدار دترمینان ماتریس‌های بالامثلثی یا پایین‌مثلثی که دترمینان آن‌ها همواره برابر ۱+ یا ۱- باشد، ایجاد نمی‌کند. در ضمن هنگام انجام اعمال سطری یا ستونی مقدماتی با استفاده از روش تعویض دو سطر یا ستون از ماتریس با یکدیگر، اگر تعداد تعویض‌های سطرها یا ستون‌ها با یکدیگر عددی زوج باشد، دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند و اگر تعداد تعویض‌های سطرها یا ستون‌ها با یکدیگر عدد فردی باشد، دترمینان ماتریس قرینه می‌شود.

* فیلم ایستگاه اعداد (به‌صورت دوبله شده به زبان فارسی) در ساعت ۳۰ دقیقهٔ بامداد روز ۹۵/۲/۳۱ از شبکهٔ ۳ سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده است.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



# افسانهٔ چهار برادر!

## ایستگاه دوم

**کاوه**، **پرویز**، **حمید** و **مجید** چهار برادر همزاد هستند که در ظاهر کاملاً شبیه هم و غیرقابل تشخیص‌اند.

کاوه راست‌گویی عاقل است. یعنی همه‌چیز را به درستی تشخیص می‌دهد و راست هم می‌گوید. مثلاً می‌داند که آب مایع است و اگر از او بپرسید که آیا آب مایع است، می‌گوید: بله.

اما پرویز یک راست‌گوی دیوانه است! یعنی همه‌چیز را به غلط تشخیص می‌دهد و باورهایش نادرست‌اند. گرچه در گفتارش صادق است و هرچه را تشخیص می‌دهد، عیناً بیان می‌کند. مثلاً اگر از او بپرسید که آیا ۲×۲ مساوی ۴ است، باورش این است که این‌طور نیست و صادقانه می‌گوید: خیر!

حمید دروغ‌گویی عاقل است. یعنی همهٔ باورهایش دقیق و درست‌اند، اما به عمد همیشه دروغ می‌گوید. پس اگر از او هم بپرسید آیا ۲×۲ مساوی ۴ است، با اینکه می‌داند درست است، اما می‌گوید: خیر!

و بالاخره مجید یک دروغ‌گوی دیوانه است. یعنی همهٔ باورهایش غلط هستند و در عین حال، به عمد دروغ هم می‌گوید! حالا اگر از او بپرسید که آیا ۲×۲ مساوی ۴ است، باورش این است که غلط است، اما چون می‌خواهد دروغ بگوید، می‌گوید: بله!

حالا که این چهار برادر را شناختید، این مسئله‌ها را که در ارتباط با آن‌ها هستند حل کنید:

**۱.** فرض کنید روزی شما دوتا از این برادرها را در جایی می‌بینید و به شما گفته‌اند که آن‌ها کاوه و مجید هستند. آیا می‌توانید با یک پرسش از یکی از آن‌ها، هویت هر یک از آن‌ها را تشخیص دهید؟

**۲.** فرض کنید روزی شما یکی از برادرها را در خیابان می‌بینید و می‌خواهید نام او را بدانید. چگونه می‌توانید با دو پرسش که پاسخ آن‌ها بله یا خیر باشد، او را شناسایی کنید؟

**۳.** کاوه و پرویز هر دو ازدواج کرده‌اند ولی حمید و مجید مجردند. روزی شما یکی از چهار برادر را می‌بینید و می‌خواهید بدانید که آیا او ازدواج کرده است یا خیر. با چه سؤالی با پاسخ بله یا خیر می‌توانید به هدفتان برسید؟

**۴.** آیا می‌توانید یک سؤال از این برادرها بپرسید که همهٔ آن‌ها به آن پاسخ بله بدهند؟

**دکتر محرم‌نژاد ایردموسی**، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی


**اشاره**

**دومین شمارۀ پای تخته را در سال تحصیلی جدید پیش رو دارید. در این شماره ۱۰ مسئلۀ جدید و جالب مطرح شده‌اند که از حل آن‌ها لذت خواهید برد. حل مسائل ۱۹۱ تا ۲۰۰ نیز در این شماره آمده‌اند.**

## بخش اول:
## مسئله‌ها

**۲۲۱.** اگر: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=۱$، مقدار عبارت $\frac{a^۲}{b+c}+\frac{b^۲}{c+a}+\frac{c^۲}{a+b}$ را بیابید.

**۲۲۲.** مجموع همۀ ریشه‌های حقیقی معادلۀ زیر را بیابید.

$$(x^۲+۵x+۵)^{x^۲-۱۰x+۲۱}=۱$$

**۲۲۳.** چندجمله‌ای $f(x)$ در تساوی زیر صدق می‌کند. ضابطۀ f را بیابید.

$$f(x)+(x+۱)^۳=۲f(x+۱)$$

**۲۲۴.** اگر: $|a-b|=۲$، $|b-c|=۳$ و $|c-d|=۴$، مجموع همۀ مقادیر ممکن برای a-d را بیابید.

**۲۲۵.** مجموع دو عدد طبیعی را بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با: $۱۰^{۱۳۹۵}$، اما هیچ‌کدام از آن دو عدد، رقم صفر ندارند.

**۲۲۶.** برای آنکه تساوی زیر صحیح باشد، تعداد جملات زیر رادیکال چندتاست؟

$$\sqrt{۱۷^۲+۱۷^۲+...+۱۷^۲}=۱۷^۲+۱۷^۲+۱۷^۲$$

**۲۲۷.** x را بیابید، اگر $x!=\frac{(۷!)!}{۷!}$.

**۲۲۸.** دو عدد یکان و دهگان عدد بزرگ $۹^{۸^{۷^{۶^{۵}}}}$ را بیابید (۹ به توان ۸ به توان ... به توان ۵)

**۲۲۹.** همۀ اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که $\frac{(n+۱)^۷}{n+۷}$ عددی صحیح باشد.

**۲۳۰.** همۀ اعداد اول p را بیابید، به‌طوری که عدد p رقمی $\overline{۱۱۱...۱}$ مضرب p باشد.

## بخش دوم:
## راه‌حل‌ها

**۱۹۱. a عددی است حقیقی به‌طوری که: $a^۲+\frac{۱}{a^۲}=۱۴$. مقدار $a^۳+\frac{۱}{a^۳}$ را به‌دست آورید.**

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}=(a+\frac{۱}{a})^۲-۲=۱۴\rightarrow a+\frac{۱}{a}=\pm۴$$

$$a^۳+\frac{۱}{a^۳}=(a+\frac{۱}{a})^۳-۳(a+\frac{۱}{a})$$

$$=(\pm۴)^۳-۳(\pm۴)=\pm۶۴\mp۱۲=\pm۵۲$$

**۱۹۲. بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که عدد $K=۷۵!-۷۱!$ را می‌شمارد.**

می‌دانیم که توان عدد اول p در تجزیه !n برابر است با: $\sum_{k=۱}^{\infty}[\frac{n}{p^k}]$.

در نتیجه در تجزیه !۷۱، توان ۲ برابر است با: $۶۷=۳۵+۱۷+۸+۴+۲+۱$.

از طرف دیگر داریم $k=۷۱!\ (۷۵\times۷۴\times۷۳\times۷۲-۱)$. در نتیجه بزرگ‌ترین توان ۲ در تجزیهٔ k برابر است با ۶۷.

**۱۹۳. a، b و c اعدادی صحیح هستند، به‌طوری که: $۱\leq a<b<c$ و $a^۲+b^۲+c^۲=۱۴(a+b+c)$. حاصل a+b+c چه‌قدر است؟**

می‌توان معادله را به فرم $(a-۷)^۲+(b-۷)^۲+(c-۷)^۲=۱۴۷$ تبدیل کرد. در نتیجه سه مربع سمت چپ یا هر سه فرد هستند یا فقط یکی فرد است. با بررسی حالت‌ها به جواب $۱۴۷=۱^۲+۵^۲+۱۱^۲$ می‌رسیم. چون $۱\leq a<b<c$، در نتیجه (a,b,c) برابر است با: (۸,۱۲,۸) یا (۶,۱۲,۸) و مجموع a+b+c برابر است با: ۳۸ یا ۳۶.

**۱۹۴. ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲-۲x+m)(x^۲-۲x+n)=۰$ که در آن $m,n\in R$، یک تصاعد حسابی با جملهٔ اول $\frac{۱}{۴}$ تشکیل داده‌اند. حاصل $|m-n|$ را به‌دست آورید.**

فرض کنید ریشه‌ها $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۴}+۲d$ و $\frac{۱}{۴}+۳d$ باشند. همچنین $r_۱$ و $r_۲$ ریشه‌های $x^۲-۲x+n=۰$ و $r_۳$ و $r_۴$ ریشه‌های $x^۲-۲x+m=۰$ باشند. چون: $r_۱+r_۲+r_۳+r_۴=۲+۲$، پس: $d=\frac{۱}{۲}$ و $r_۱,r_۲,r_۳,r_۴\in\left\{\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴},\frac{۷}{۴}\right\}$.

تنها حالت‌های ممکن عبارت‌اند از:

$r_۳,r_۴\in\left\{\frac{۱}{۴},\frac{۷}{۴}\right\}$ و $r_۱,r_۲\in\left\{\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴}\right\}$ یا $r_۳,r_۴\in\left\{\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴}\right\}$ و $r_۱,r_۲\in\left\{\frac{۱}{۴},\frac{۷}{۴}\right\}$. در هر دو حالت $|m-n|=|r_۱r_۲-r_۳r_۴|=\frac{۱}{۲}$.

**۱۹۵. x و y دو عدد طبیعی هستند، به‌طوری که: $\frac{x}{۳}+\frac{y}{۴}=\frac{۱۱}{۱۲}$. آن‌ها را بیابید.**

معادله را به فرم $۴X+۳Y=۱۱$ می‌نویسیم که یک معادله سیاله است. با توجه به طبیعی بودن X و Y، تنها جواب ممکن برابر است با: X=۲ و Y=۱.

**۱۹۶. ریشه‌های معادلهٔ $[x^۳]+[x^۲]+[x]=\{x\}-۱$ را به‌دست آورید. ([x] نشان‌دهندهٔ جزءصحیح x و $\{x\}=x-[x]$.)**

چون طرف دوم عددی صحیح است پس: $\{x\}=۰$ و در نتیجه x عددی صحیح است. بنابراین: $x^۳+x^۲+x+۱=۰$. با تجزیه معادله داریم: $(x^۲+۱)(x+۱)=۰$ که تنها جواب حقیقی آن برابر است با: ۱-.

**۱۹۷. با فرض $f(x)=x^۲+۱۲x+۳۰$، ریشه‌های معادلهٔ زیر را پیدا کنید**

$$f(f(f(f(f(x)))))=۰$$

چون $f(x)=(x+۶)^۲-۶$ پس: $f(f(x))=(x+۶)^۴-۶$ و $f(f(f(x)))=(x+۶)^۸-۶$ و ...

$$f(f(f(f(f(x)))))=(x+۶)^{۳۲}-۶$$

که ریشه‌های آن برابر است با: $x=-۶\pm\sqrt[۳۲]{۶}$.

**۱۹۸. طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با: a، $۲a+۲d$ و $۲a+۳d$، که a و d دو عدد مثبت هستند. نسبت $\frac{a}{d}$ را بیابید.**

چون مثلث قائم‌الزاویه است، پس: $a^۲+(۲a+۲d)^۲=(۲a+۳d)^۲$. در نتیجه: $a^۲-۴ad-۵d^۲=۰$ یا $(a-۵d)(a+d)=۰$. چون: $d>۰$، پس: $a=۵d$ و در نتیجه: $\frac{a}{d}=۵$.

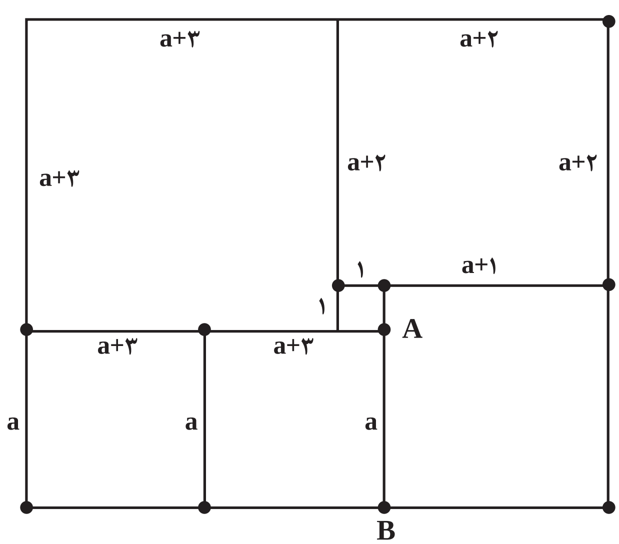
**۱۹۹. حاصل عبارت زیر را برحسب n به‌دست آورید:**

$$A=(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})(۱-\frac{۱}{۱۶})...(۱-\frac{۱}{n^۲})$$

$$A=(۱-\frac{۱}{۲})(۱+\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱+\frac{۱}{۳})...(۱-\frac{۱}{n})(۱+\frac{۱}{n})$$
$$=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times...\frac{n-۱}{n})\times(\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}\times...\times\frac{n+۱}{n})$$
$$=\frac{۱}{n}\times\frac{n+۱}{۲}=\frac{n+۱}{۲n}$$

**۲۰۰. در شکل مستطیل را می‌بینید که با ۶ مربع پوشانده شده است. اگر ضلع کوچک‌ترین، مربع برابر یک باشد، ضلع بزرگ‌ترین مربع چه‌قدر است؟**

اگر AB=a باشد، می‌توان بقیهٔ اضلاع را برحسب a به‌دست آورد. بزرگ‌ترین مربع ضلعی برابر a+۳ و از طرف دیگر ۲a-۱ خواهد داشت. در نتیجه داریم: a+۳=۲a-۱ و a=۴. پس ضلع بزرگ‌ترین مربع برابر است با ۷.



حمیدرضا امیری

# آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

**قضیهٔ باقی مانـــده:** اگر $P(x)$ یک تابع چندجمله‌ای، $r$ هر عدد (حقیقی) دلخواه، و $P(x)$ بر $(x-r)$ تقسیم شده باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(r)$ است.

**اثبات:** برای تقســـیم $P(x)$ بر $x-r$ باید خارج‌قســـمتی چـــون $Q(x)$ و باقی‌مانـــده‌ای چـــون $R(x)$ بیابیـــم به‌طوری که:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$P(x) = (x-r) \times Q(x) + R(x)$$

از آن‌جایی که درجـــهٔ باقی‌مانده $(R(x))$ باید کمتر از درجـــهٔ مقســـوم‌علیه $(x-r)$ باشـــد و درجـــهٔ $(x-1)$، ۱ اســـت. لـــذا $R(x)$ باید عدد ثابت $R$ باشـــد. در معادلهٔ $P(x)=(x-r)Q(x)+R$، چندجملـــه‌ای ســـمت چـــپ با چندجمله‌ای ســـمت راســـت یکســـان(هم‌ارز) است، و مقادیری کـــه آن‌ها برای هر عـــدد $x$ می‌پذیرند، با هم برابرند. اگر ما به‌جای $x$ قرار دهیم $r$، خواهیم داشت:

$$P(r)=(r-r)Q(r)+R=(0)Q(r)+R=R$$

بنابراین: $P(r)=R$.

### مثال ۳. کاربرد قضیهٔ باقی‌مانده

در صورتی که بدانیم $P(x)=2x^4-10x^3+17x^2-14x-3$ بر $(x-3)$ تقسیم شده است، با استفاده از قضیهٔ باقی‌مانده، باقی‌مانده تقسیم را پیدا کنید.

**حل:** با اســـتفاده از قضیه باقی‌مانده، باقی‌مانده تقســـیم $P(3)$ خواهد بود.

$$P(x)=2x^4-10x^3+17x^2-14x-3$$

$$P(3)=2\times(3)^4-10\times(3)^3+17\times(3)^2-14\times(3)-3=0$$

باقی‌مانـــده ۰ خواهـــد بـــود. اگرچه این محاســـبه کسل‌کننده است، برای یک ماشین‌حساب، ساده است.

### برای ترجمه دانش‌آموزان

**3. Use The Factor Theorem**

If $R=P(r)=0$ in the equation $P(x)=(x-r)Q(x)+R$, then $P(x)$ factors as $(x-r)Q(x)$. This fact can help us factor polynomials.

**The Factor Theorem**

If $P(x)$ is a polynomial funcation and $r$ is any number, then

If $P(r)=0$, then $x-r$ is a factor of $P(x)$.

If $x-r$ is a factor of $P(x)$, then $P(r)=0$.

**PROOF**

**Part1:** First, we assume that $P(r)=0$ and prove that $x-r$ is a factor of $P(x)$. if $P(r)=0$, then $R=0$, and the equation $P(x)=(x-r)Q(x)+R$ becomes

$$P(x)=(x-r)Q(x)+0$$

$$P(x)=(x-r)Q(x)$$

Therefore, $x-r$ divides $P(x)$ exactly, and $x-r$ is a factor of $P(x)$.

**Part2:** Conversely, we assume that $x-r$ is a factor of $P(x)$ and prove that $P(r)=0$. Because, by assumption, $x-r$ is a factor of $P(x)$, $x-r$ divides $P(x)$ exactly, and the division has a remainder of 0. By the Remainder Theorem, this remainder is $P(r)$. Hence, $P(r)=0$.

*** دانش‌آموزان عزیز**

شما می‌توانید ترجمه‌هایتان را برای ما ارسال کنید تا به نام خودتان در این قسمت (یا در بخش با مخاطبان) به چاپ برسد.

## لغت‌ها و اصطلاحات مهم

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. Remainder Theorem | قضیهٔ باقی‌مانده | 2. Divided | تقسیم شده |
| 3. Polynomial function | تابع چندجمله‌ای | 4. Quotient | خارج‌قسمت |
| 5. Divident | مقسوم | 6. Divisor | مقسوم‌علیه |
| 7. Less than | کمتراز، کوچکتراز | 8. Replace | جای‌گذاری، قرار دادن |
| 9. Values | مقادیر | 10. Assume | پذیرفتن ، فرض کردن |
| 11. Equal | مساوی، برابر | 12. Equation | معادله |

### The Remainder Theorem

If $P(x)$ is a polynomial function. $r$ is any number, and $P(x)$ is divided by $x-r$, the remainder is $P(r)$.

### PROOF

To divide $P(x)$ by $x-r$, we must find a quotient $Q(x)$ and a remainder $R(x)$ such that

Divident = divisor . quotient + remainder

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P(x) & = & (x-r) & . & Q(x) & + & R(x) \end{array}$$

Since the degree of the remainder $R(x)$ must be less than the degree of the divisor $x-r$, and the degree of $x-r$, is $1$, $R(x)$ must be a constant $R$.

In the equation

$P(x)=(x-r)Q(x)+R$

the polynomial on the left side is the same as the polynomial on the right side, and the values that they assume for any number x are equal. If we replace $x$ with $r$, we have

$$\begin{aligned} P(r) &= (r-r)Q(r)+R \\ &= (0)Q(r)+R \\ &= R \end{aligned}$$

Thus, $P(r)=R$.

### EXAMPLE 3

**Using the Remainder Theorem**

Use the Remainder Theorem to find the remainder that will occur when

$P(x)=2x^4-10x^3+17x^2-14x-3$

is divided by $x-3$.

### SOLUTION

By the Remainder Theorem, the remainder will be $P(3)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4-10x^3+17x^2-14x-3 \\ P(3) &= 2(3)^4-10(3)^3+17(3)^2-14\times(3)-3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Substitute 3 for x.

The remainder will be 0. Although this calculation is tedious, it is easy to do with a calculator.


میانـهٔ AM از مثلث ABC از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. دربارهٔ مثلث ABC چه حکمی می‌توان داد؟

الف) $AC=BC$

ب) $\hat{A}=۹۰^\circ$

ج) $\hat{C}=۱۲۰^\circ$

د) $|C-B|=۹۰^\circ$

هـ) $BC=۲|AB-AC|$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



**فریبا میرحسین‌زاده**، دبیر ریاضی از تبریز

# الفبای ترسیم

### مقدمه

ترسیم چیست؟ ترسیمی که تنها با خط‌کش و پرگار صورت می‌گیرد و از یک رشته مراحل تشکیل شده است و در هر مرحله یکی از کارهای زیر انجام می‌گیرد:

۱. وصل کردن دو نقطه به‌وسیلهٔ خط راست؛
۲. یافتن نقطهٔ تلاقی دو خط؛
۳. رسم یک دایره با یک شعاع مفروض و به مرکز یک نقطهٔ داده شده؛
۴. یافتن نقطه‌های تلاقی یک دایره با دایره‌های دیگر، یا نقطهٔ تلاقی یک دایره با یک خط.

مسئله‌های ترسیم همیشه موضوع محبوبی در هندسه بوده‌اند. خواننده از دورهٔ مدرسه به یاد دارد که می‌توان فقط با خط‌کش و پرگار، انواع زیادی از ترسیم‌ها را انجام داد. در همهٔ مسائل ترسیم از خط‌کش فقط به‌عنوان ابزاری غیرمدرج برای کشیدن خط راست استفاده می‌شود و نه اندازه‌گیری یا مشخص کردن فاصله‌ها.

یکی از مشهورترین مسئله‌های کلاسیک ترسیم، مسئلهٔ «تماس‌ها» از **آپولونیوس** (حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد) است که در آن سه دایرهٔ دلخواه در صفحه مفروض‌اند و مطلوب مسئله، دایرهٔ چهارمی است که بر هر سه مماس باشد.

**گاوس**[۱] در ۱۷ سالگی به بررسی ترسیم‌پذیری pضلعی منتظم در حالتی که p عددی اول باشد، پرداخت. او کشف کرد که pضلعی منتظم ترسیم‌پذیر است: اگر و تنها اگر p یک «عدد فرما»ی اول، یعنی $p = 2^{2^n} + 1$ باشد. نخستین عددهای فرما ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ هستند.

وقتی با یک ترسیم هندسی سروکار داریم، هرگز نباید فراموش کنیم که مسئله این نیست که شکل‌هایی را به‌طورعملی و با درجهٔ معینی از دقت بکشیم؛ بلکه باید روشن کنیم، آیا فقط با استفاده از خط‌کش و پرگار و با فرض اینکه ابزارهای ما از دقت کامل برخوردارند، می‌توان به‌طور نظری به جواب دست یافت یا نه.

حال به بررسی چند ترسیم کلاسیک می‌پردازیم. کلید فهم عمیق‌تر این موضوع برگرداندن مسئله‌های هندسی به زبان جبر است. در این صورت ترسیم هندسی عبارت است از حل یک معادلهٔ جبری. نخست باید رابطهٔ (معادلهٔ) بین کمیت خواسته شده (x) و کمیت‌های مفروض (a, b, c, ...) را پیدا کنیم. سپس باید کمیت مجهول را با حل این معادله بیابیم و بالاخره باید تعیین کنیم که آیا می‌توان این جواب را با فرایندهای جبری به‌دست آورد که متناظر با ترسیم‌هایی با خط‌کش و پرگار باشد یا نه.

بنیان تمام نظریه‌های مورد بحث ما اصل اساسی هندسه تحلیلی، یعنی مشخص‌سازی کمی اشیای هندسی به‌وسیلهٔ عددهای حقیقی است که بر پایهٔ مفهوم پیوستار اعداد حقیقی قرار دارد.

**توجه:** بعضی از ساده‌ترین عمل‌های جبری متناظرند با ترسیم‌های مقدماتی. اگر دو پاره‌خط با طول‌های a و b داده شده باشند، آن‌گاه رسم ab، $\frac{a}{b}$، a−b و a+b کار خیلی ساده‌ای است.

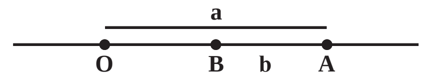
### ۱. ترسیم a+b

خط راستی می‌کشیم و روی آن فاصله‌های AB=b و OA=a را با پرگار مشخص می‌کنیم. در این صورت: OB=a+b.


### ۲. ترسیم a−b

خط راستی می‌کشیم و روی آن فاصله‌های AB=b

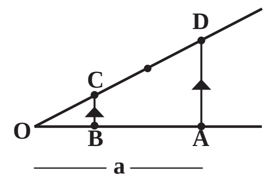
و OA=a را بـا پـرگار مشـخص می‌کنیـم، امـا این‌بـار AB را در جهـت مخالـف OA تعییـن می‌کنیـم. در ایـن صـورت: OB=a−b.




### ۳. ترسیم $۳a$

برای ترسیم آن a+a+a را رسم می‌کنیم.

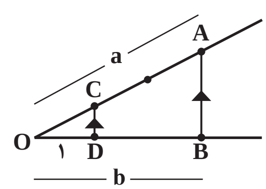
### ۴. ترسیم $\frac{a}{۳}$




OA=a را روی یـک خـط مشـخص می‌کنیم و خط دیگری را که از O بگذرد، می‌کشیم. روی این خـط، پاره‌خط دلخواه OC=c را مشخص می‌کنیم و OD=۳c را رسم می‌کنیم. A و D را به‌هم وصل می‌کنیم و خطی گذرنده از C به موازات AD می‌کشیم که OA را در B قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD} \\ \frac{OC}{OD}=\frac{c}{۳c}=\frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{۱}{۳} \rightarrow OB=\frac{OA}{۳}=\frac{a}{۳}$$

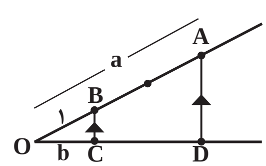
### ۵. ترسیم $\frac{a}{b}$




OA=a و OB=b را روی ضلع‌های زاویهٔ دلخواه O و OD=۱ را روی OB مشـخص می‌کنیـم. از D خطـی به موازات AB رسـم می‌کنیـم کـه OA را در C قطع کند. داریم:

$$CD \parallel AB \rightarrow \frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB} \rightarrow \frac{OC}{a}=\frac{۱}{b} \rightarrow OC=\frac{a}{b}$$

### ۶. ترسیم $a.b$




OA=a و OC=b را روی ضلع‌های زاویهٔ دلخواه O و OB=۱ را روی OA مشـخص می‌کنیـم. از A خطـی به موازات BC رسـم می‌کنیـم کـه OC را در D قطع کند. داریم:

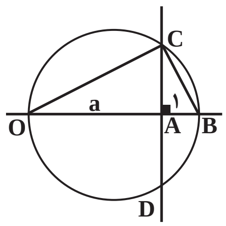
$$BC \parallel AD \rightarrow \frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OD} \rightarrow \frac{۱}{a}=\frac{b}{OD} \rightarrow OD=a.b$$

از مطالب بالا نتیجه می‌گیریم که عمل‌های جبری «گویا» (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کمیت‌های معلوم) را می‌توان با ترسیم هندسی انجام داد.

### ۷. ترسیم $\sqrt{a}$

روی خـط راسـتی AB=۱ و OA=a را مشـخص می‌کنیـم (با خط‌کش و پرگار). دایره‌ای به قطر OB رسم می‌کنیم. سپس در نقطهٔ A عمودی بر OB رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند.

زاویهٔ OCB محاطی و روبه‌رو به قطر دایره است. پس:



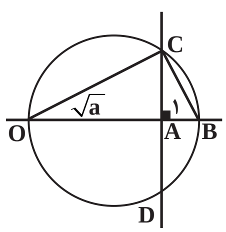

$$O\hat{C}A=\frac{\overset{\frown}{OB}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

و در مثلث OCB پاره‌خط AC ارتفاع وارد بر وتر است. پس:

$$CA^۲=OA\times AB \rightarrow CA^۲=a\times ۱ \rightarrow CA=\sqrt{a}$$

### ۸. ترسیم $\sqrt[۴]{a}$

روی خط راسـتی $OA=\sqrt{a}$ و AB=۱ را مشخص می‌کنیم (با خط‌کـش و پـرگار). دایره‌ای به قطر OB رسـم می‌کنیم در نقطهٔ A عمودی بر OB رسـم می‌کنیم تا دایـره را در C قطع کند. در مثلث OCB پاره‌خط CA ارتفاع وارد بر وتر است. پس:




$$CA^۲=OA\times AB \rightarrow CA^۲=\sqrt{a}\times ۱ \rightarrow CA=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[۴]{a}$$

و به روش مشابه می‌توان $\sqrt[۸]{a},\sqrt[۱۶]{a},...,\sqrt[۲^n]{a}\ (۲\in N)$ را رسم کرد. اما در ریاضیات عالی ثابت می‌شود که دیگر ریشه‌ها، از جمله $\sqrt[۳]{a}$ و $\sqrt[۵]{a}$ قابل رسم نیستند.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Gauss

کارل فردریش گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) ریاضی‌دان بسیار مشهور آلمانی که به‌عنوان یکی از برترین ریاضی‌دانان همهٔ اعصار شناخته می‌شود.

آموزشی

۲

هوشنگ شرقی

# استدلال استقرایی و استقرای ریاضی

**اشاره**

**در شمارهٔ قبل، در مورد ساختارهای استقرایی و استدلال استقرایی گفتیم و مثال‌هایی آوردیم. در خاتمه این پرسش را مطرح کردیم که: آیا الگوهای استقرایی که کشف می‌کنیم (حدس می‌زنیم)، همواره معتبر هستند؟ یعنی آیا تا بی‌نهایت آن الگو ادامه می‌یابد؟**

با یک مثال تاریخی شروع می‌کنیم: **لئونارد اویلر** (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ریاضی‌دان مشهور سوئیسی، می‌گوید: «من هیچ استدلال دیگری به جز استقرای طولانی ندارم. آزمایش‌های طولانی که انجام داده‌ایم، شکی در صحت قانون باقی نگذاشته است و... به نظر می‌رسد وقتی قانونی مثلاً برای ۲۰ مورد متوالی آن صحیح باشد، غیرممکن است برای موارد بعدی نادرست از آب درآید.»

همین شخص زمانی حدس زد که تابع $f(n)=n^{۲}+n+۴۱$ به ازای همهٔ اعداد طبیعی، همیشه دارای مقداری است که یک عدد اول است. حدس او به ازای تمام اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ درست است:

| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | … | ۲۰ | ۲۱ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(n) | ۴۳ | ۴۷ | ۵۳ | ۶۱ | ۷۱ | ۸۳ | … | ۴۶۱ | ۵۰۳ | … |

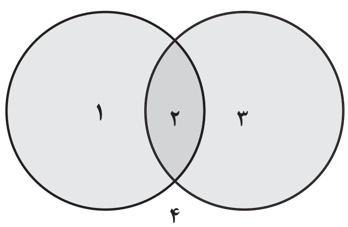
و چنانچه ملاحظه می‌کنید، همهٔ اعداد ردیف زیرین، عددهای اول هستند. ولی آیا آن‌گونه که او ادعا می‌کرد، می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ عددهای بعدی هم عددهای اول هستند؟ آزمایش نشان می‌دهد که لااقل به ازای $n=۴۱$ چنین نیست:

$$n = ۴۱$$
$$\Rightarrow n^{۲} + n + ۴۱ = ۴۱^{۲} + ۴۱ + ۴۱ = ۴۱(۴۱+۱+۱)$$
$$= ۴۱ \times ۴۳$$

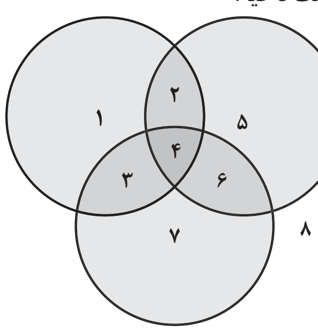
یعنی $f(۴۱)$ عددی اول نیست. (چرا؟) حتی به ازای $n=۴۰$ هم حاصل عددی مرکب است:

$$f(۴۰) = ۴۰^{۲} + ۴۰ + ۴۱ = ۴۰(۴۰+۱) + ۴۱$$
$$= ۴۰ \times ۴۱ + ۴۱ = ۴۱(۴۰+۱) = ۴۱ \times ۴۱$$

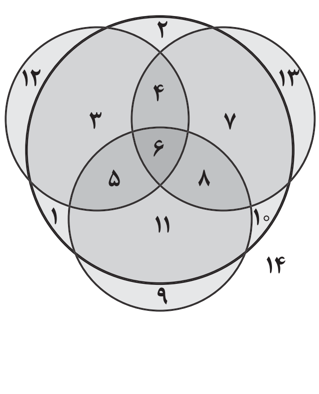
این‌گونه حدس‌های استقرایی نادرست بسیارند. بعضی از آن‌ها خیلی زود باطل می‌شوند و بعضی دیرتر. مثلاً می‌دانیم هر دایره، صفحه را به دو ناحیه (درون و بیرون دایره) تفکیک می‌کند. دو دایره نیز صفحه را به حداکثر چهار ناحیه تفکیک می‌کنند:




و سه دایره، به هشت ناحیه:




اکنون شاید حدس بزنیم که n دایره، صفحه را به حداکثر $۲^{n}$ ناحیه تفکیک می‌کنند، ولی این حدس با رسم چهار دایره، بلافاصله باطل می‌شود!



یعنی دایرهٔ چهارم اگر همهٔ دایره‌ها را قطع کند، حداکثر نواحی که ۱۴ ناحیه است، ایجاد می‌شود. در واقع حدس درست به‌صورت $۲^n$ ناحیه نیست، بلکه $n^۲-n+۲$ ناحیه است! (که به ازای $n=۱,۲,۳,۴$ جواب درست را به ما می‌دهد.)

اما از کجا می‌توانیم مطمئن شویم این حدس همواره درست است و هیچ مثال نقضی برای آن پیدا نخواهد شد؟ به‌عبارت دیگر، برای اثبات درستی یک حدس استقرایی، چه شرایطی لازم است؟

## داستان حکیم فرزانه و نسخهٔ عمر جاودانی!

بشر از هنگامی که خود را شناخته است و تاریخ آن نشان می‌دهد، همواره به دنبال دارو یا معجزه‌گری بوده که آب حیات یا نسخهٔ عمر جاودانی باشد. در روزگاران کهن گفته می‌شد که پیری دانا در بلندای کوهی زندگی می‌کند و نسخهٔ عمر جاودان دارد. جوانی برای یافتن این نسخه رنج سفر را بر خود هموار کرد و به هر زحمتی بود خود را به منزل پیر خردمند رساند. از او پرسید که آیا شایعهٔ وجود نسخهٔ عمر جاودان درست است یا خیر. حکیم فرزانه گفت: «آری و تنها دو شرط دارد: اول، از امروز فقط جملات راست به زبان بیاوری، و دوم، بگویی که فردا هم همین حرف‌ها را تکرار می‌کنی!»

جوان کمی فکر کرد و بعد لبخندی زد و گفت: «آری اگر بتوانم این دو کار را بکنم، عمر جاودان خواهم داشت!»

اما چرا؟ واضح است که اگر جوان از امروز راست بگوید و بگوید که فردا هم همین حرف را خواهد زد، یعنی تا فردا زنده خواهد بود و فردا هم همین حرف‌ها را تکرار خواهد کرد. پس تا پس‌فردا هم زنده خواهد بود و الی آخر! پس او نمی‌تواند چنین تضمینی بدهد! اما جملهٔ حکیم درست است، زیرا گفت: «اگر بتوانی... .»

حدس‌های استقرایی ساختمانی بسیار شبیه به این دارند. یعنی اگر حکمی که شامل یک مجهول با دامنهٔ اعداد طبیعی است $(n\in N)$(۱)، به ازای $n=۱$ درست باشد و (۲) با فرض درستی به ازای $n=k$ بتوان تضمین کرد که به ازای $n=k+۱$ هم درست است، آن‌گاه این حکم برای هر عدد طبیعی دلخواه $n$ نیز درست است. درستی این موضوع بدیهی است، زیرا اگر به موجب بند (۱) حکم برای $n=۱$ درست باشد، به موجب بند (۲) برای $n=۲$ هم درست است و در نتیجه (باز به موجب بند (۲)) برای $n=۳$ نیز درست خواهد بود و الی آخر.

درستی این قضیه را به‌صورت منطقی هم می‌توان به دقت (با استدلال استنتاجی) ثابت کرد:

**قضیه:** اگر $p(n)$ حکمی (گزاره‌ای) باشد که در آن، $n\in N$ و $p(۱)$ درست باشد و با فرض درستی $p(k)$، $p(k+۱)$ هم درست باشد، آن‌گاه $p(n)$ برای هر $n\in N$ درست است.

**اثبات (برهان خلف):** فرض کنیم $p(n)$ به ازای بعضی اعداد طبیعی نادرست باشد. کوچک‌ترین این اعداد را $a$ می‌نامیم. بدیهی است که $a\neq۱$ (چرا؟) پس: $a\geq۲$ و $a-۱\geq۱$. لذا: $a-۱\in N$ و $p(a-۱)$ درست است (زیرا $a$ کوچک‌ترین عددی بود که به ازای آن $p(n)$ نادرست است). بنابراین به موجب فرض مسئله، درستی $p(k)$ درستی $p(k+۱)$ را نتیجه می‌دهد: $p(a-۱+۱)$ هم درست است و یعنی $p(a)$ درست است و این تناقض محسوب می‌شود. زیرا قبلاً فرض شده بود که $p(a)$ نادرست است! پس درستی قضیه ثابت شد.

**نتیجه:** برای اثبات یک حدس استقرایی باید دو قدم زیر را برداریم:

**قدم ۱.** درستی حکم را به ازای $n=۱$ تحقیق می‌کنیم.

**قدم ۲.** درستی حکم را به ازای $n=k$ فرض می‌گیریم (فرض استقرا) و سپس درستی حکم را به ازای $n=k+۱$ اثبات می‌کنیم (حکم استقرا). برای اثبات حکم استقرا از روی فرض در مسائل گوناگون روش‌های مختلفی وجود دارند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

**مثال ۱.** جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی) را حدس بزنید و حدس خود را با قضیهٔ استقرای ریاضی اثبات کنید.

**حل:** می‌دانیم دنبالهٔ (تصاعد) حسابی دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن با افزودن مقداری ثابت (قدرنسبت) به جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید. اگر قدرنسبت این دنباله $d$ باشد، جملهٔ دوم آن برابر است با جمله اول به اضافهٔ قدرنسبت: $a_۲=a_۱+d$ و جملهٔ سوم برابر است با: $a_۳=a_۲+d=a_۱+۲d$، و $a_۴=a_۳+d=a_۱+۳d$ و... و حدس می‌زنیم:

$a_n=a_1+(n-1)d$. حال به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی این حدس را ثابت می‌کنیم:

(شروع استقرا) $n=1: a_1=a_1+(1-1)d \Rightarrow a_1=a_1$

(فرض استقرا) $n=k: a_k=a_1+(k-1)d$

(حکم استقرا) $n=k+1: a_{k+1}=a_1+kd$

برای اثبات حکم از روی فرض (که به آن گذر استقرایی می‌گوییم) کافی است بنویسیم:

$$a_{k+1}=a_k+d \overset{\text{فرض}}{\underset{\text{استقرا}}{\Rightarrow}} a_{k+1}=a_1+(k-1)d+d$$
$$=a_1+(k-1+1)d$$
$$=a_1+kd$$

و به این ترتیب گذر استقرایی انجام شده و حکم ثابت شده است.

**مثال ۲.** حاصل‌ضرب زیر را حدس بزنید و حدس خود را با قضیهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{n})=?$$

**حل:** اگر این حاصل‌ضرب را $P_n$ بنامیم، داریم:

$$P_1=1+\frac{1}{1}=2, P_2=(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})=2\times\frac{3}{2}=3$$

$$P_3=(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=4$$

و احتمالاً حدس می‌زنیم: $P_n=n+1$ یعنی:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{n})=n+1$$

حال این حدس را اثبات می‌کنیم:

(شروع استقرا) $n=1: 1+\frac{1}{1}=1+1 \Rightarrow 2=2$

(فرض استقرا) $n=k: (1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{k})=k+1$

$$n=k+1: \underbrace{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{k})}_{k+1}(1+\frac{1}{k+1})=k+2$$

(حکم استقرا)

برای اثبات حکم از روی فرض، کافی است به جای حاصل‌ضرب k جملهٔ (پرانتز) نخست، از فرض معادل آن را جایگزین کنیم (یا اینکه دو طرف فرض را در $1+\frac{1}{k+1}$ ضرب کنیم):

$$(k+1)(1+\frac{1}{k+1})=k+1+1=k+2$$

و بنابراین گذر استقرایی کامل و حکم اثبات می‌شود.

**مثال ۳.** ثابت کنید n دایره در صفحه، صفحه را به حداکثر $n^2-n+2$ ناحیهٔ مجزا تفکیک می‌کنند.

**اثبات:** به ازای $n=1$، $n^2-n+2=2$. یعنی یک دایره صفحه را به دو ناحیهٔ مجزا (درون و بیرون دایره) تفکیک می‌کند. فرض می‌کنیم k دایره، صفحه را به حداکثر $k^2-k+2$ ناحیهٔ مجزا تفکیک کنند (فرض استقرا). حال یک دایرهٔ دیگر به این دایره‌ها اضافه می‌کنیم. بدیهی است، در صورتی تعداد نواحی تفکیک شده حداکثر می‌شود که دایرهٔ k+1ام همهٔ k دایرهٔ قبلی را در دو نقطه قطع کند (تبدیل یک دایره به دو دایره، و دو دایره به سه دایره را به‌یاد بیاورید). پس از برخورد این دایره با هر یک از k دایرهٔ قبلی، دو ناحیهٔ جدید به‌وجود می‌آید و در مجموع 2k ناحیه اضافه می‌شود. پس تعداد نواحی که از برخورد k+1 دایره به‌وجود می‌آید برابر است با:

$$(k^2-k+2)+2k=(k^2+2k+1)-(k+1)+2$$
$$=(k+1)^2-(k+1)+2$$

به این ترتیب درستی حکم به ازای $n=k+1$ هم ثابت شد و گذر استقرایی کامل است.

## تمرین

**۱.** جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1$ و قدرنسبت q را حدس بزنید و حدس خود را با قضیهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید.

**۲.** مجموع زیر را حدس بزنید و حدستان را اثبات کنید:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$$

**۳.** ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $2^n>2n-1$.

**۴.** ماتریس دودردوی $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس‌های $(A\times A)A^2$، $A^3$ و $A^4$ را تشکیل دهید. سپس برای $A^n$ حدس بزنید و درستی این حدس را اثبات کنید.

**۵.** برای دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})$$

**۶.** بررسی کنید که یک خط راست، دو خط راست متقاطع، سه خط راست دوبه‌دو متقاطع و چهار خط راست دوبه‌دو متقاطع صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند. سپس حدس بزنید که n خط راست دوبه‌دو متقاطع صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند و حدس خود را اثبات کنید.

**۷.** مسئلهٔ «جزیرهٔ گنگ‌ها» را از شمارهٔ قبل به یاد بیاورید. آیا می‌توانید حدس استقرایی زده شده را اثبات کنید؟


## ایستگاه سوم

**لطیفهٔ اول:**

معلم ریاضی رو به یکی از دانش‌آموزان گفت: «اگر فرض کنیم x مقداری مجهول است و $x+5=2x+1$، دربارهٔ x چه می‌توانیم بگوییم؟» دانش‌آموز با خونسردی گفت: «فکر نمی‌کنم چیز تازه‌ای اتفاق بیفتد. x همچنان مجهول است!»


**لطیفهٔ دوم:**

**پدر:** پسرم اگر من ۵ کیک به تو بدهم و تو دو تا از کیک‌ها را به خواهرت بدهی، آن‌وقت چند کیک برایت می‌ماند؟

**پسر:** نمی‌دانم!

**پدر:** چرا، اینکه مسئلهٔ ساده‌ای است!

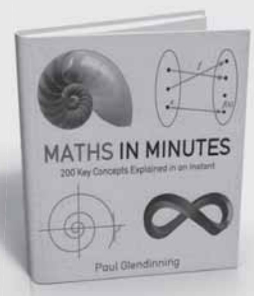
**پسر:** آخر همهٔ محاسبه‌های ما در مدرسه با سیب‌ها و پرتقال‌هاست!


**لطیفهٔ سوم:**

این یک روایت واقعی از یکی از مدرسه‌های کشور انگلستان است: معلم ریاضی از یکی از دانش‌آموزان پرسید که چگونه می‌توانید عدد هفت (seven) را به یک عدد زوج (even) تبدیل کنید؟ دانش‌آموز گفت: خیلی ساده! کافی است حرف s را از اول آن حذف کنید!

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاَ یاسی‌پور

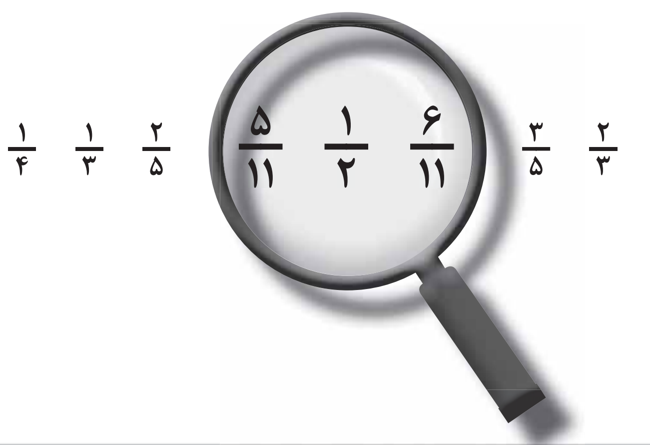
# ریاضیات در چند دقیقه




## مجموعه‌های چگال

با ویژگی «چگال بودن» می‌توان روابط بین مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌های آن‌ها را، زمانی که مفهومی از فاصلهٔ بین اعضای مجموعه‌ها وجود دارد، توصیف کرد. این ویژگی طریق ارزیابی از «اندازهٔ» نسبی مجموعه‌های متناهی مختلفی را به‌دست می‌دهد که با شمارش اعضا تفاوت دارد. به‌عنوان نمونه، یک راه برای معنی ریاضی داشتن این مفهوم که اعداد گویا مجموعه‌ای «بسیار بزرگ»اند، این است که آن‌ها در زیرمجموعه‌ای خاص ـ در این حالت اعداد حقیقی ـ که خودشان «بسیار بزرگ»اند، *چگال* (dense) هستند.

می‌گوییم مجموعهٔ X در مجموعهٔ دیگر Y چگال است، اگر X زیرمجموعه‌ای از Y باشد و هر نقطه در X یا عضوی از Y باشد، یا به‌طور دلخواه نزدیک به عضوی از آن باشد. یعنی به ازای هر نقطهٔ واقع در Y بتوانیم هر فاصلهٔ dی بزرگ‌تر از صفری را انتخاب کنیم و نقطه‌ای در X در فاصلهٔ d از آن نقطه بیابیم.




برای مثال، به منظور اثبات اینکه گویاها در حقیقی‌ها چگال‌اند، فاصلهٔ d و عدد حقیقی y را انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه ثابت می‌کنیم که همواره عدد گویای xی در فاصلهٔ d از y موجود است که بتواند با تقریب زدن بسط دهدهی y تولید شود.

## مجموعه‌های ناشمارا

مجموعه‌هـــای ناشـــمارا مجموعه‌هایـــی نامتناهی هســـتند که اعضـــای آن‌هـــا را نمی‌تـــوان در ترتیب شمارایی مرتب کرد. وجود چنین مجموعه‌هایی بدان معنی است که دســـت‌کم دو نوع مجموعهٔ نامتناهی، یعنی شـــمارا و ناشمارا موجودند و آشکار می‌شود که بی‌نهایت انواع متفاوت از مجموعه‌های ناشمارا وجود دارد.

امـــا چگونـــه می‌تـــوان اثبـــات کـــرد کـــه مجموعه‌ای شمارا است؟ در سال ۱۸۹۱، **ژرژ کانتور** (Georg Cantor)، ریاضی‌دان آلمانی، برای نشـــان دادن اینکه مجموعهٔ اعداد حقیقـــی بین ۰ و ۱ ناشماراســـت، از اثباتی با به‌کار بردن تناقض استفاده کرد. وی چنین استدلال کرد که اگر این مجموعه شمارا باشد، در این صورت فهرستی نامتناهی اما شمارا از اعضای آن وجود دارد که هر یک از آن‌ها می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$۰.a_{۱}a_{۲}a_{۳}a_{۴}\ldots$

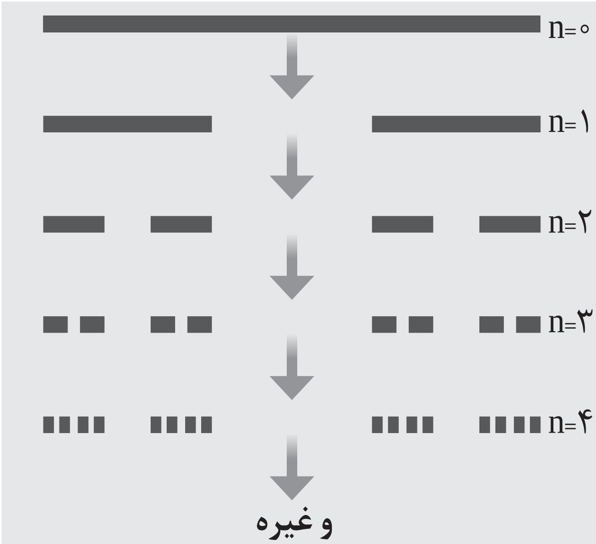
کـــه در آن هـــر رقم $a_k$ عدد طبیعـــی بین ۰ و ۹ است.

کانتور نقیض این گزاره را با نشان دادن این موضوع به‌دست آورد که همواره ساختن عددی حقیقی بین ۰ و ۱ که در این فهرست نباشد، موجود است.

## مجموعه‌های کانتور

مجموعه‌های کانتور قدیمی‌ترین ظهور اشیایی معروف به «فرکتال‌ها» هستند. استدلال قطری‌ای که توسط **ژرژ کانتور** (Georg Cantor) گســـترش یافت، نشان می‌دهد کـــه بازه‌های خاصی از خط اعـــداد حقیقی، مجموعه‌هایی ناشمارایند. اما آیا جمیع مجموعه‌های ناشمارا شامل چنین بازه‌های خطی هســـتند؟ کانتور نشـــان داد ممکن اســـت مجموعه‌ای ناشمارا بسازیم که شامل هیچ بازهٔ خطی نباشد. مجموعه‌های کانتور بـــه گونه‌ای *نامتناهی* درهم *تنیده‌اند*؛ یعنی ساختاری مبتنی بر مقیاس‌های ظریف‌تر و ظریف‌تر دارند.

یک مثال در این مورد «*مجموعهٔ وســـط سوم کانتور*» (middle third Cantor set) است. این مجموعه با بازه‌ای آغاز می‌شـــود و حاصل حذف یک‌سوم‌های وسط از جمیع بازه‌هایی است که در هر مرحله باقی می‌ماند. این مجموعه در مرحلهٔ ساخت nام، دارای $۲^n$ بازه هر یک به طول $\frac{۱}{(۳^n)}$، و کل طول $(\frac{۲}{۳})^n$ اســـت. همچنـــان که n به بی‌نهایت میل می‌کنـــد، تعداد نقاط داخل در آن نیز چنین می‌شـــود، در حالی‌که طول مجموعه به طرف صفر منقبض می‌شود. البته نشان دادن اینکه در حدّ نامتناهیِ این زیر تقسیم در واقع چیزی به‌جا می‌ماند و اثبات اینکه مجموعه ناشماراســـت، اندکی کار بیشتر می‌طلبد، اما می‌تواند انجام گیرد.




### ساخت مجموعهٔ کانتور

کار را با بازهٔ واحد بســـته، اعـــداد حقیقی بین ۰ و ۱، از جمله نقاط انتهایی آغاز می‌کنیم، و یک سوم وسط را حذف کنیم و دو بازهٔ بسته به طول $\frac{۱}{۳}$، از جمله نقاط انتهایی‌شان را، به‌جا می‌گذاریم. اکنون یک‌سوم وسط هر یک از این بازه‌ها را حذف می‌کنیم. به این ترتیب چهار $(۲^۲)$ بازهٔ بسته، هر یک به طول $\frac{۱}{۹}(\frac{۱}{۳^۲})$ خواهیم داشت. فرایند مورد بحث را به‌طور نامتناهی تکرار می‌کنیم.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir


## سؤالات ریاضی دهم

**۱.** اگر $A=[-2,+\infty)$، $B=(-\frac{5}{2},10]$ و $C=(-\infty,10)$، حاصل هر کدام را به‌صورت بازه نمایش دهید:

I) $(A\cap B)$

II) $(A\cup C)$

III) $(A'\cap C)'$

IV) $(A\cup C')$

V) $(A-B)$

**۲.** اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد و داشته باشیم: $A\cap B\neq\varnothing$، آیا $(A-B)$ تهی است؟ چرا؟

**۳.** دو مجموعهٔ نامتناهی مانند A و B مثال بزنید به‌طوری که $(A-B)$ متناهی و $(A\cap B)$ نامتناهی باشد.

**۴.** در یک دنبالهٔ حسابی، قدرنسبت (۳-) و جملهٔ پنجم ۸ است. جملهٔ دوازدهم در این دنباله را بیابید.

**۵.** اگر جملات سوم و هفتم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۵ و ۸۰ باشد، جملهٔ یازدهم این دنباله را بیابید.

## هندسهٔ پایهٔ دهم

**۱.** مثلث ABC را که در آن $AB=8$ و $AC=6$ و میانهٔ BM به طول ۵ واحد است، رسم کنید.

**۲.** زاویهٔ xoy و دو نقطهٔ A و B روی نیم‌خط ox مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B و نیز از ox و oy به یک فاصله باشد.

**۳.** ذوزنقهٔ ABCD را طوری رسم کنید که قاعدهٔ بزرگ CD از آن به طول ۶ واحد، ارتفاع آن ۳ واحد و طول ساق‌های آن ۴ و ۳/۵ واحد باشد.

**۴.** در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید اگر: $BD\neq CD$، آن‌گاه: $AB\neq AC$.

**۵.** در مثلث ABC، نیم‌ساز زاویهٔ A ضلع B را در D قطع می‌کند. ثابت کنید: $AC>CD$.

**۶.** کدام‌یک از احکام کلی زیر درست هستند و کدام نادرست. احکام درست را با استدلال استنتاجی ثابت کنید و احکام نادرست را با مثال نقض رد کنید.
الف) نقطهٔ هم‌رسی سه ارتفاع هر مثلث، درون مثلث واقع است.
ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از دو ضلع مجاورش کوچک‌تر است.

ج) هر متوازی‌الاضلاع که دو قطر آن با هم برابر باشند، مستطیل است.

## هندسهٔ ۲ (سال سوم دبیرستان)

**۱.** در «مثلث سرپینسکی» به روش استقرایی الگویی برای تعداد مثلث‌های سیاه شده در مرحلهٔ nام حدس بزنید.

**۲.** اولاً نشان دهید که هر سه عدد طبیعی متوالی بزرگ‌تر از ۱ می‌توانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند. ثانیاً طول‌های اضلاع چنین مثلثی را به‌دست آورید که در آن نیم‌ساز وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، آن را به دو قطعه تقسیم کند که اختلاف اندازه‌های آن‌ها $\frac{۲}{۳}$ واحد باشد.

**۳.** در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد، نقطهٔ M درون مثلث، از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. این فاصله را به‌دست آورید.

**۴.** ثابت کنید در هر مثلث، مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از سه رأس آن، از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

**۵.** مثلث ABC را با داشتن طول‌های سه میانهٔ آن رسم کنید.

**۶.** چهارضلعی محدب ABCD مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای مانند M درون چهارضلعی را به‌دست آورید که چهارضلعی‌های MABC و MADC هم مساحت باشند.

## سؤالات حسابان

**۱.** باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{۱۰}$ را بر $x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$ به‌دست آورید.

**۲.** P(x) یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است و در تقسیم بر x+۱، x+۲، x-۱ و x-۲ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. اگر باقی‌ماندهٔ P(x) بر x-۳ نیز صفر باشد، چندجمله‌ای P(x) را مشخص کنید.

**۳.** به کمک رسم نمودار (هندسی)، جواب‌های تقریبی معادلهٔ $۲^{۲x+۱}=۸x^۲+۲$ را به‌دست آورید.

**۴.** با استفاده از نابرابری مثلث، تمام جواب‌های معادلهٔ $|۳x-۵|=|۴-۲x|+|x-۱|$ را بیابید.

**۵.** معادلهٔ $x^۲+(\frac{x}{x+۱})^۲=\frac{۵}{۴}$ را حل کنید.

**۶.** حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید:

$$A=\binom{n}{۱}+\frac{\binom{n}{۲}}{۲}+\frac{\binom{n}{۳}}{۲^۲}+\dots+\frac{\binom{n}{n-۱}}{۲^{n-۲}}.$$

## سؤالات جبر و احتمال

**۱.** برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید که عبارت $n(n+۱)(n+۲)(n+۳)+۱$ مربع کامل است.

**۲.** ثابت کنید حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی، مضرب $n!$ است.

**۳.** n+۱ عدد طبیعی از بین اعداد ۱، ۲، ۳ و... و ۲n انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید در بین آن‌ها حداقل دو عدد وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند.

**۴.** اگر a، b و c اعداد حقیقی مخالف صفر باشند، ثابت کنید: $(a^۲+b^۲+c^۲)(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲})\geq ۹$.

**۵.** برای اعداد حقیقی $x>y>۰$ ثابت کنید: $\frac{x^۴-y^۴}{۴y^۳}>x-y$.

## سؤالات ریاضی ۳

**۱.** اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و احتمال رخ دادن A و B با هم برابر $\frac{۱}{۶}$ باشد، احتمال‌های زیر را حساب کنید:

الف) $P(A\cup B)$

ب) $P(A\cap B')$

ج) A و B هیچ‌کدام رخ ندهد.

د) حداکثر یکی از آن‌ها رخ دهد.

هـ) فقط یکی از آن‌ها رخ دهد.

**۲.** نسبت دانش‌آموزان کلاس‌های A و B، ۲ به ۳ است و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۷۵ درصد دانش‌آموزان کلاس B در آزمون پذیرفته شده‌اند. یک دانش‌آموز از این دو کلاس، به تصادف انتخاب شده است. با چه احتمالی این دانش‌آموز در آزمون قبول نشده است؟

**۳.** از ظرفی حاوی ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه، دو مهره با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال:

الف) این دو مهره هم‌رنگ هستند.

ب) فقط یکی سفید است.

ج) حداقل یکی سیاه است.

**مراد کریمی شهمارروندی**
دبیر ریاضی دبیرستان پسرانه شاهد شهرکرد

# حاصل ضرب جمله‌های دنبالهٔ هندسی متناهی

**نکته:** در هر دنبالهٔ هندسی متناهی حاصل‌ضرب جمله‌هایی که از دو طرف تصاعد به یک فاصله هستند، مقداری است ثابت و برابر است با حاصل‌ضرب جملهٔ اول در جملهٔ آخر و اگر تعداد جملات فرد باشد برابر است با مجذور جملهٔ وسط.

یعنی: $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ : **جملات یک دنبالهٔ هندسی**

$$\Rightarrow t_1.t_n = t_2.t_{n-1} = \ldots$$

**توجه:** نکتهٔ فوق به قانون اندیس‌ها معروف است و به زبان ریاضی یعنی:

**برای چهار جمله از دنبالهٔ هندسی** $m+n=P+r \Leftrightarrow t_m \times t_n = t_P \times t_r$

**برای سه جمله از دنبالهٔ هندسی** $m+n=2P=P+P \Leftrightarrow t_m \times t_n = t_P^2$

**قضیه:** اگر $t_1$، $t_2$، ... و $t_n$ جملات یک دنبالهٔ هندسی متناهی باشند، نشان دهید حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $\sqrt{(t_1.t_n)^n}$ است.

**اثبات:** اگر حاصل‌ضرب جملات دنبالهٔ هندسی متناهی را با $P_n$ نمایش دهیم، در این صورت داریم:

$$P_n = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \ldots \times t_{n-2} \times t_{n-1} \times t_n \quad (1)$$

$$P_n = t_n \times t_{n-1} \times t_{n-2} \times t_3 \times t_2 \times t_1 \quad (2)$$

دو طرف روابط (۱) و (۲) را نظیربه‌نظیر در یکدیگر ضرب می‌کنیم و با توجه به نکتهٔ فوق نتیجه می‌شود:

$$P_n^2 = (t_1.t_n) \times (t_2.t_{n-1}) \times (t_3 \times t_{n-2}) \times \ldots \times (t_{n-2} \times t_3) \times (t_{n-1} \times t_2) \times (t_n \times t_1)$$

$$P_n^2 = (t_1.t_n) \times (t_1.t_n) \times (t_1.t_n) \times \ldots \times (t_1 \times t_n) \times (t_1 \times t_n) \times (t_1 \times t_n) = (t_1 \times t_n)^n$$

$$\Rightarrow |P_n| = \sqrt{(t_1 \times t_n)^n}$$

**مثال ۱.** حاصل‌ضرب جمله‌های دنباله‌های هندسی متناهی زیر را به‌دست آورید:

**الف)** $8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \Rightarrow |P_n| = \sqrt{(t_1 \times t_n)^n}$

$$\Rightarrow P_4 = \sqrt{(8 \times \frac{1}{8})^4} = \sqrt{1} = 1$$

**ب)** $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81} \Rightarrow P_n = \sqrt{(\frac{1}{3} \times \frac{8}{81})^4}$

$$= \sqrt{(\frac{8}{3 \times 81})^4} = (\frac{8}{3 \times 81})^2 = \frac{64}{3^{10}}$$

**مثال ۲.** یک دنبالهٔ هندسی متناهی پنج جمله دارد. جملهٔ اول آن $2\sqrt{3}$ و قدرنسبت $\sqrt{2}$ است. حاصل‌ضرب جمله‌های آن را حساب کنید.

**حل:** ابتدا به کمک معلومات، جملهٔ آخر را به‌دست می‌آوریم و سپس حاصل‌ضرب جملات را حساب می‌کنیم.

$n = 5$
$t_1 = 2\sqrt{3}$
$q = \sqrt{2}$

$t_5 = t_1 \times q^4 = 2\sqrt{3} \times (\sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3}$ **جملهٔ پنجم**

$$P_5 = \sqrt{(2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3})^5} = \sqrt{(16 \times 3)^5} = \sqrt{4^{10} \times 3^5}$$

$$= \sqrt{4^5 \times 4^5 \times 3^2 \times 3^3} = 9 \times 4^5 \times \sqrt{3}$$

**مثال ۳.** در یک دنبالهٔ هندسی داریم: $t_1=-16$، $q=\frac{1}{2}$ و $n=5$. $P_5$ را به‌دست آورید.

$n = 5$
$t_1 = -16$
$q = \frac{1}{2}$
$P_5 = ?$

$$t_5 = t_1 \times q^4 = (-16) \times (\frac{1}{2})^4 = -1$$

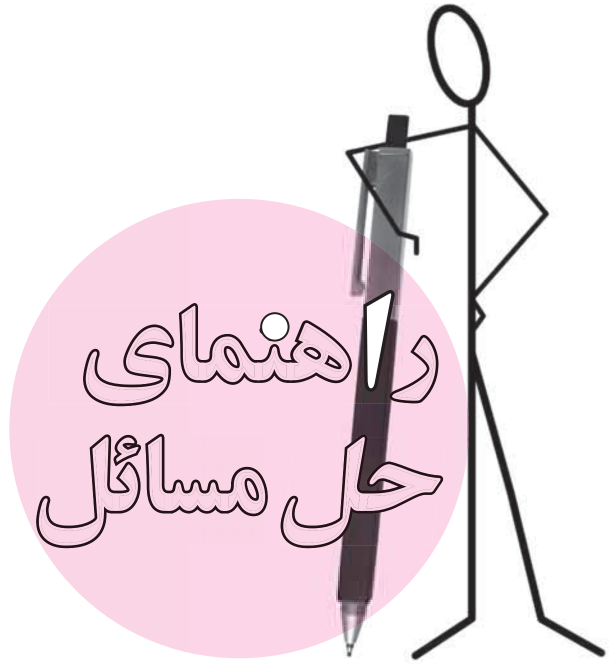
$$P_5 = \sqrt{(t_1.t_5)^5} = \sqrt{[(-16) \times (-1)]^5}$$

$$= \sqrt{16^5} = \sqrt{(2^4)^5} = \sqrt{2^{20}} = 2^{10} = 1024$$

## تمرین

**۱.** در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب جملات اول، دوم، نهم و دهم مساوی ۴ است. حاصل‌ضرب ۱۰ جملهٔ اول آن را بیابید.

**۲.** در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب جمله‌های سوم و یازدهم مساوی با جملهٔ چهاردهم است. حاصل‌ضرب ۱۰ جملهٔ اول آن را بیابید.




## راهنمایی حل مسائل ریاضی دهم

۱.
I) $(A\cap B)=[-۲,۱۰]$

II) $(A\cup C)=R$

III) $A'=(-\infty,-۲),(A'\cap C)=(-\infty,-۲)\Rightarrow(A'\cap C)'=[-۲,+\infty)$

IV) $C'=[۱۰,+\infty)\Rightarrow A\cup C'=[-۲,+\infty)$

V) $(A-B)=(۱۰,+\infty)$

۲. خیر، می‌دانیم $(A-B)\subseteq A$ و A متناهی است. پس قطعاً $(A-B)$ متناهی است، اما لزوماً تهی نیست. به عنوان مثال:

$A=\{۱,۲,۳,۴\},\ B=\{۳,۴,۵,...\}$

$\Rightarrow A-B=\{۱,۲\}\neq\varnothing$

۳.
$A=\{۲,۳,۴,...\}$

$B=\{۶,۷,۸,۹,...\}$

$A-B=\{۲,۳,۴,۵\},\ A\cap B=\{۶,۷,۸,...\}$

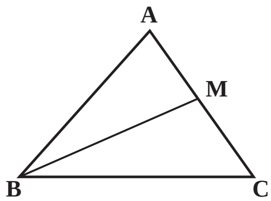
۴.
$$d=-۳, t_۵=۸\Rightarrow ۸=a+(۵-۱)\times(-۳)$$
$$\Rightarrow ۸=a-۱۲\Rightarrow a=۲۰\Rightarrow t_{۱۲}=a+۱۱\times d$$
$$\Rightarrow t_{۱۲}=۲۰+۱۱\times(-۳)\Rightarrow t_{۱۲}=-۱۳$$

۵.
$$t_n=a\times r^{n-۱}$$
$$\begin{cases}t_۷=a\times r^۶\\ t_۳=a\times r^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۸۰=a\times r^۶\\ ۵=a\times r^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{۸۰}{۵}=\frac{\cancel{a}\times r^۶}{\cancel{a}\times r^۲}$$
$$\Rightarrow r^۴=۱۶\Rightarrow r=\pm۲\Rightarrow t_{۱۱}=a\times r^{۱۰}\Rightarrow t_{۱۱}=a\times ۲^{۱۰}$$

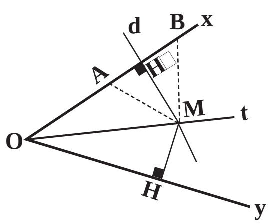
برای یافتن a از جملهٔ سوم استفاده می‌کنیم:

$$۵=a\times ۲^۲\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}\Rightarrow t_{۱۱}=\frac{۵}{۴}\times ۲^{۱۰}=۵\times ۲^۸=۱۲۸۰$$

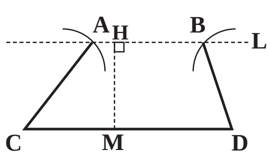
## پاسخ مسائل هندسهٔ پایهٔ دهم




۱. در مثلث ABC که AB=۸، AC=۶ و میانهٔ BM=۵، $AM=\frac{AC}{۲}=۳$. در نتیجـه، مثلـث ABM را بـا داشــتن طول‌های ســه ضلع آن می‌توان رســم کــرد و از آنجا مثلث ABC را بنا کرد. پس ابتدا پاره‌خط BM به طول ۵ را رســم می‌کنیم و ســپس به مرکز B و به شعاع ۸ و به مرکز M و به شــعاع ۳ کمان‌هایی رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را A می‌نامیم. سپس AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ C امتداد می‌دهیم و C را به B وصل می‌کنیم.

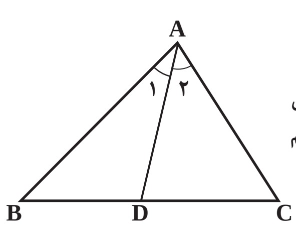



۲. نیم‌ســاز زاویهٔ xoy (ot) را رســم می‌کنیــم. همــهٔ نقــاط روی ot از ox و oy بــه یک فاصله‌اند. ســپس عمودمنصف AB را رســم می‌کنیم (d) همهٔ نقــاط روی d از A و B به یک فاصله‌اند. پس محل برخورد d و ot، یعنی نقطهٔ M، جایی است که از A و B به یک فاصله و از ox و oy نیز به یک فاصله است: MH=MH´ و MA=MB.




۳. ابتــدا پاره‌خــط CD بــه طــول ۶ واحــد را رســم می‌کنیم. ســپس از یک نقطهٔ دلخــواه روی آن عمودی خــارج می‌کنیم و بــه اندازهٔ ۳ واحد روی آن جــدا می‌کنیــم (MH=۳). در ادامه در نقطهٔ H عمودی بر MH رسم می‌کنیم که خطی موازی CD اســت (خــط L). بعد به مرکز C و به شــعاع ۴ و بــه مرکز D و به شــعاع ۳/۵ کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد این کمان‌ها با L نقاط A و B است.

۴.



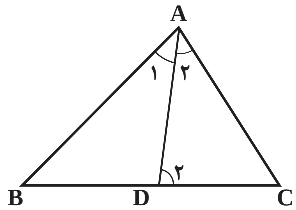

فرض: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ و $BD\neq CD$

حکم: $AB\neq AC$

**اثبات:** فرض کنیم AB≠AC نباشــد، پس: AB=AC. یعنی ABC مثلثی متساوی‌الســاقین اســت و در نتیجه طبق خواص این مثلث، نیم‌ساز زاویهٔ رأس در آن، میانــه (و ارتفاع) نیز هســت. و در نتیجــه: BD=CD. اما این خلاف فرض است. پس باید AB≠AC باشد (برهان خلف).

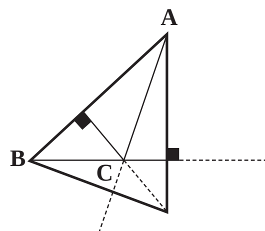
**۵.** فرض: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$

حکم: AC>AD

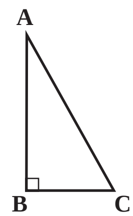



**اثبات:** زاویهٔ $D_۲$ نسبت به مثلث ABD خارجی است. پس داریم: $\hat{D}_۲ = \hat{A}_۱ + \hat{B} > \hat{A}_۱$ و چون: $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$، پس: $\hat{D}_۲ > \hat{A}_۲$. لذا در مثلث ADC زاویهٔ روبه‌رو به AC از زاویهٔ روبه‌رو به DC بزرگ‌تر است و در نتیجه: AC>CD.

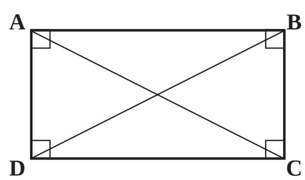
**۶. الف)** نادرست. مثال نقض: مثلثی با یک زاویهٔ منفرجه.




**ب)** نادرست. مثال نقض: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$، ارتفاع AB از هر دو ضلع مجاورش (AB و AC) کوچک‌تر نیست.




**ج)** درست. در متوازی‌الاضلاع ABCD قطرهای AC و BD برابرند. با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع داریم:

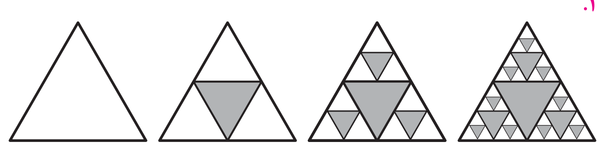



$$\left.\begin{array}{l} AB = AB \\ BC = AD \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \overset{ض‌ض‌ض}{\cong} \Delta ABD \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}, \hat{A} + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ \Rightarrow$ ABCD مستطیل است.

## هندسهٔ ۲ (سوم دبیرستان)

**۱.**



مرحلهٔ ۰    مرحلهٔ ۱    مرحلهٔ ۲    مرحلهٔ ۳

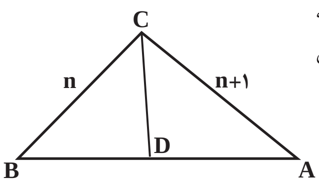
حدس:

| مرحله | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| تعداد مثلث‌های سیاه | ۰ | ۱ | ۴ | ۱۳ | ... | $\frac{۳^n - ۱}{۲}$ |

**۲.** کافی است نشان دهیم که a=n، b=n+۱ و c=n+۲ می‌توانند با فرض n>۱ اضلاع مثلثی باشند و این کار را به کمک نامساوی مثلثی انجام می‌دهیم:

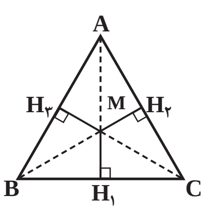
$$a + b > c : ۲n + ۱ > n + ۲ \Leftrightarrow n > ۱$$
$$a + c > b : ۲n + ۲ > n + ۱ \Leftrightarrow n > -۱$$
$$b + c > a : ۲n + ۳ > n \Leftrightarrow n > -۳$$

و برای قسمت دوم با توجه به قضیهٔ نیم‌سازهای زوایای داخلی می‌نویسیم:



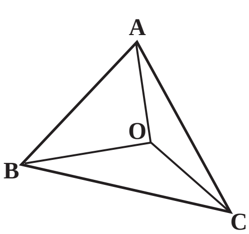

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{n+۱}{n} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{n+۱+n}{n} = \frac{AB}{DB}$$
$$\Rightarrow \frac{n+۲}{DB} = \frac{۲n+۱}{n} \Rightarrow DB = \frac{n^۲ + ۲n}{۲n+۱},$$
$$DA = n + ۲ - \frac{n^۲ + ۲n}{۲n+۱} = \frac{n^۲ + ۳n + ۲}{۲n+۱}$$
$$\Rightarrow DA - DB = \frac{n+۲}{۲n+۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۴n + ۲ = ۳n + ۶$$
$$\Rightarrow n = ۴ \Rightarrow BC = ۴, AC = ۵, BA = ۶$$

**۳.**




$$MH_۱ = MH_۲ = MH_۳ = x$$
$$AB = AC = BC = a = ۶$$
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} MH_۱ . BC + \frac{۱}{۲} MH_۲ . AC + \frac{۱}{۲} MH_۳ . AB$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ = \frac{۳}{۲} ax \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۶} a = \sqrt{۳}$$

**۴.** از نامساوی مثلثی استفاده می‌کنیم:

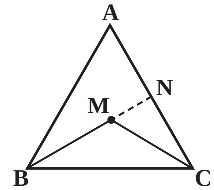



$$\left.\begin{array}{l} OA + OB > AB \\ OA + OC > AC \\ OB + OC > BC \end{array}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow} ۲(OA + OB + OC) > AB + AC + BC$$
$$\Rightarrow OA + OB + OC > \frac{AB + AC + BC}{۲}$$

برای اثبات اینکه OA+OB+OC<AB+AC+BC از یک نابرابری دیگر به صورت زیر کمک می‌گیریم:

برای هر نقطهٔ دلخواه M درون مثلث ABC داریم:

$AB+AC > MB + MC$ و برای اثبات، مطابق شکل MB را امتـداد می‌دهیم تا AC را در نقطـهٔ N قطع کنـد و به کمک نامساوی مثلثی می‌نویسیم:

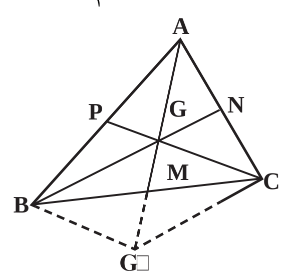



$$\left.\begin{array}{l} MN+NC>MC \\ BA+AN>BM+MN \end{array}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow} MN+NC+BA+AN>MC+BM+MN$$
$$\Rightarrow AB+AC>MC+MB$$

حال به کمک این قضیه می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} OB+OC<AB+AC \\ OA+OC<AB+BC \\ OB+OA<AC+BC \end{array}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow} ۲(OA+OB+OC)<۲(AB+AC+BC)$$
$$\Rightarrow OA+OB+OC<AB+AC+BC$$

**۵.** مسـئله را حل شـده فرض می‌کنیم. GM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ G´ امتـداد می‌دهیم. چـون GM=G´M و MB=MC، پس GCG´B متوازی‌الاضلاع است. بنابراین: $CG' = GB = \frac{۲}{۳}BN$، $CG = \frac{۲}{۳}CP$ و $GG' = ۲GM = \frac{۲}{۳}AM$. اکنـون بـا معلوم بـودن طول‌های CG´، CG و GG´ (برحسب طول‌های میانه‌هـای مثلث) می‌تـوان ابتدا مثلـث CGG´ و از آنجـا مثلث ABC را رسم کرد.

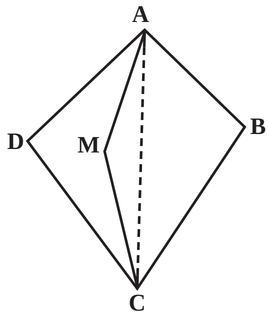



**طریقهٔ رسم:** پاره‌خط CG´ را مساوی $\frac{۲}{۳}m_b$ (دو سوم طول میانهٔ وارد بر AC=b) رسـم می‌کنیم. به مرکز G´ و به شـعاع $\frac{۲}{۳}m_a$ و به مرکز C به شـعاع $\frac{۲}{۳}m_c$ کمان می‌زنیم و محل برخورد دو کمان را G می‌نامیم تا مثلث CGG´ رسـم شود. سـپس CG را از طرف G به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_c$ امتـداد می‌دهیم تا به نقطهٔ P برسـیم، G´G را به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}m_a$ امتداد می‌دهیـم تـا به نقطهٔ A برسـیم، و A را به P وصـل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا امتداد میانهٔ CM از مثلث CGG´ را در نقطهٔ B قطع کند و مثلث ABC رسم می‌شود. شرط وجود جواب آن است که مثلث CGG´ رسم شود؛ یعنی: $\frac{۲}{۳}m_a+\frac{۲}{۳}m_b>\frac{۲}{۳}m_c$ و یا: $m_a+m_b>m_c$. به همین ترتیب: $m_a+m_c>m_b$ و $m_b+m_c>m_a$.

**۶.**

$$S_{MABC} = S_{MADC}$$
$$\Rightarrow S_{ABC}+S_{MAC} = S_{ADC}-S_{MAC}$$
$$\Rightarrow S_{MAC} = \frac{S_{ADC}-S_{ABC}}{۲}$$

بنابراین $S_{MAC}$ مقداری ثابت اسـت و چون AC هـم مقداری ثابت اسـت، پس مکان هندسی M خط راستی موازی AC است.




## پاسخ‌نامهٔ حسابان

**۱.**
$$x^{۱۰} = (x^{۱۰}-۱)+۱ = [(x^{۵})^{۲}-۱]+۱ = (x^{۵}-۱)(x^{۵}+۱)+۱$$
$$= (x-۱)(x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)(x^{۵}+۱)+۱$$
$$\Rightarrow x^{۱۰} = (x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱)Q(x)+۱ \Rightarrow \boxed{R(x)=۱}$$

**۲.** چون تقسیم P(x) بر x+۱ باقی‌ماندهٔ ۲ دارد، پس: P(x)=(x+۱)Q(x)+۲ و: P(x)−۲=(x+۱)Q(x). یعنـی P(x)−۲ مضـرب (x+۱) اسـت. به‌طور مشـابه P(x)−۲ باید مضرب (x+۲)، (x−۱) و (x−۲) باشد، پس P(x)−۲ مضرب تمام آن‌هاست. یعنی:

P(x)−۲=(x+۱)(x−۱)(x+۲)(x−۲)Q(x)

پس: $P(x)-۲=(x^{۲}-۱)(x^{۲}-۴)Q(x)$ و درنتیجه: $P(x)-۲=(x^{۴}-۵x^{۲}+۴)Q(x)$.

بنابراین: $P(x)=(x^{۴}-۵x^{۲}+۴)Q(x)+۲$.

چون P(x) از درجهٔ ۴ اسـت، پس: Q(x)=k. یعنی مسـتقل از x است و k∈R. بنابرایـن: $P(x)=k(x^{۴}-۵x^{۲}+۴)+۲$. اکنـون چون P(x) بر x−۳ بخش‌پذیر است، داریم: P(۳)=۰، بنابراین:

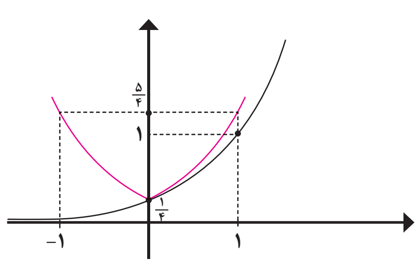
$$P(۳)=۰ \Rightarrow k(۸۱-۴۵+۴)+۲=۰$$
$$\Rightarrow ۴۰k+۲=۰ \Rightarrow k=-\frac{۱}{۲۰}$$

پس: $P(x) = -\frac{۱}{۲۰}(x^{۴}-۵x^{۲}+۴)+۲$.

**۳.** ابتدا معادلهٔ داده شده را ساده می‌کنیم.

$$۲^{۲x+۱} = ۸x^{۲}+۲ \Rightarrow ۲\times(۲^{۲})^{x} = ۲(۴x^{۲}+۱)$$
$$\Rightarrow ۴^{x} = ۴x^{۲}+۱ \xRightarrow{\div ۴} ۴^{x-۱} = x^{۲}+\frac{۱}{۴}$$

اکنـون نمودار هـر کدام از توابع $y=۴^{x-۱}$ و $y=x^{۲}+\frac{۱}{۴}$ را رسـم می‌کنیم.



به وضوح x=۰ یک ریشه است، ولی چون رشد تابع نمایی $4^{x-1}$ نسبت به تابع درجهٔ دوم $x^2+\frac{1}{4}$ خیلی بیشتر است، برای xهای بزرگ، این دو نمودار دوباره یکدیگر را قطع می‌کنند. پس معادلهٔ اولیه دو ریشه خواهد داشت. با توجه به جدول زیر، ریشهٔ دوم عددی بین ۲ و ۳ خواهد بود.

| x | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| $4^{x-1}$ | ۱ | ۴ | ۱۶ |
| $x^2+\frac{1}{4}$ | $1+\frac{1}{4}$ | $4+\frac{1}{4}$ | $9+\frac{1}{4}$ |

**۴.** نابرابری مثلثی به‌صورت $|a\pm b|\le|a|+|b|$ است و تساوی هنگامی رخ می‌دهد که a و b هم‌علامت باشند. در این سؤال a=x-۱، b=۴-۲x و a-b=۳x-۵. پس تساوی $|a-b|=|a|+|b|$ هنگامی رخ می‌دهد که a و b مثبت و یا هر دو منفی باشند.

$$\begin{cases} a<0\Rightarrow x-1<0\Rightarrow x<1 \\ b<0\Rightarrow 4-2x<0\Rightarrow x>2 \end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}}\varnothing$$

$$\begin{cases} a>0\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1 \\ b>0\Rightarrow 4-2x>0\Rightarrow x<2 \end{cases}\xRightarrow{\text{اشتراک}}1<x<2$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های این معادله (۱,۲) است.

**۵.** ابتدا قرار می‌دهیم t=x+۱:

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{5}{4}\Rightarrow(t-1)^2+\left(\frac{t-1}{t}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow t^2-2t+1+\left(1-\frac{1}{t}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow t^2-2t+1+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-2\left(t+\frac{1}{t}\right)+2=\frac{5}{4}$$

اکنون اگر $s=t+\frac{1}{t}$، پس:

$$s^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2.$$

بنابراین: $t^2+\frac{1}{t^2}=s^2-2$. با جای‌گذاری در معادلهٔ بالا داریم:

$$(s^2-2)-2s+2=\frac{5}{4}\Rightarrow s^2-2s-\frac{5}{4}=0$$

$$\Rightarrow 4s^2-8s-5=0\Rightarrow(2s-5)(2s+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} s=\frac{5}{2}\Rightarrow t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \\ \Rightarrow 2t^2-5t+2=0\Rightarrow t=\frac{1}{2},t=2 \\ s=-\frac{1}{2}\Rightarrow t+\frac{1}{t}=-\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2t^2+t+2=0\Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

اگر t=۲، داریم: x=۱ و اگر $t=\frac{1}{2}$، داریم: $x=-\frac{1}{2}$.

**۶.** در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$، قرار می‌دهیم a=۲ و b=۱:

$$3^n=(2+1)^n=2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}$$

$$+\binom{n}{3}2^{n-3}+\dots+\binom{n}{n-1}\times 2+\binom{n}{n}\times 1$$

$$\Rightarrow 3^n=2^n+2^{n-1}\left[\binom{n}{1}+\frac{\binom{n}{2}}{2}+\frac{\binom{n}{3}}{2^2}+\dots+\frac{\binom{n}{n-1}}{2^{n-2}}\right]+1$$

$$\Rightarrow 3^n=2^n+A(2^{n-1})+1\Rightarrow A=\frac{3^n-2^n-1}{2^{n-1}}.$$

## پاسخ سؤالات ریاضی ۳

**۱.** در این سؤال داریم: $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

پس:

**الف)**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$$

**ب)**

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

**ج)**

$$P(A'\cap B')=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

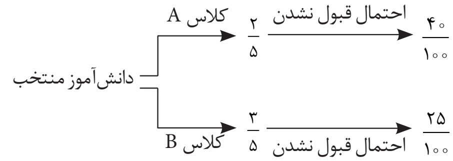
**د)** حداکثر یکی رخ دهد. یعنی فقط A یا فقط B رخ دهد و یا هیچ‌کدام رخ ندهد. متمم آن، این است که هر دو با هم رخ دهند، پس اگر این پیشامد C باشد، داریم:

$$P(C)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

**هـ)** فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد. یعنی فقط A و یا فقط B رخ دهد. پس اگر این پیشامد D باشد، داریم:

$$P(D)=P(A-B)+P(B-A)$$
$$=(P(A)-P(A\cap B))+(P(B)-P(A\cap B))$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

**۲.** فرض کنیم A پیشامد قبول نشدن دانش‌آموز انتخاب شده باشد. شکل زیر را در نظر می‌گیریم:




پس:

$$P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{40}{100}+\frac{3}{5}\times\frac{25}{100}=\frac{16}{100}+\frac{15}{100}=\frac{31}{100}$$

**۳. الف)** اگر A پیشامد دو مهرهٔ هم‌رنگ باشد، داریم:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{10\times 10}=\frac{16+36}{100}=\frac{52}{100}$$

**ب)** اگر B پیشـامد فقط یک مهرهٔ سـفید باشـد، این مهره سـفید در انتخاب اول و یا در انتخاب دوم ظاهر می‌شود. پس:

$$P(B)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}+\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{10\times 10}=\frac{24+24}{100}=\frac{48}{100}$$

**ج)** اگر C پیشـامد حداقل یک مهرهٔ سیاه باشد، متمم این پیشامد این است که هر دو مهره سفید باشند.

پس:

$$P(C)=1-\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{10\times 10}=1-\frac{16}{100}=\frac{84}{100}$$

## پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

**۱.**

$$\begin{aligned}A&=n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\&=(n(n+3))((n+1)(n+2))+1\\&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\end{aligned}$$

اگر $n^2+3n=x$ باشد، داریم:

$$A=x(x+2)+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

**۲.** فرض کنید: $A=(k+1)(k+2)\ldots(k+n)$ حاصل‌ضرب n عدد متوالی باشد کـه $k\in Z$. با توجـه به اینکه از دو عدد متوالی، حداقل یکی مضرب ۲ اسـت، پس A مضرب ۲ اسـت. همچنین از هر سه عدد متوالی، حداقل یکـی مضـرب ۳ اسـت، پس A مضرب ۳ اسـت و به همیـن ترتیب از هـر n عـدد متوالـی، حداقل یکـی مضرب n اسـت، پـس A مضرب n نیـز هسـت. بنابرایـن A مضـرب ۲، ۳ و ... و n خواهد بـود و چون این اعداد نسـبت بـه هم اول‌اند، پس A مضربـی از حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی $n!$ است.

**۳.** اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳ و ... و 2n را در n دسته به‌صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

$$\{1,2\}\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$$

اکنـون (n+1) عـدد انتخابی از ایـن n مجموعه، طبـق اصل لانهٔ کبوتری، حداقل دو عضو از یک مجموعه را در اختیار خواهد داشت و با توجه به اینکه داخل هر مجموعه دو عدد متوالی قرار دارند، پس نسبت به یکدیگر اول خواهند بود.

**۴.**

$$\begin{aligned}A&=(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\\&=\frac{a^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{c^2}\\&=3+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)\end{aligned}$$

می‌دانیـم که برای هر عدد حقیقـی مثبت x داریم: $x+\frac{1}{x}\geq 2$. با توجـه به اینکه دو عبارت داخل هر پرانتـز معکوس یکدیگرند و مثبت، پس:

$$A\geq 3+2+2+2=9$$

**۵.**

$$\begin{aligned}&\frac{x^4-y^4}{4y^3}>x-y\Rightarrow x^4-y^4>4y^3(x-y)\\&\Rightarrow(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)>(x-y)4y^3\\&\Rightarrow x^3+x^2y+xy^2+y^3>4y^3\\&\Rightarrow(x^3-y^3)+y(x^2-y^2)+y^2(x-y)>0\end{aligned}$$

اکنـون با توجه به اینکه $x>y>0$، بنابرایـن تمام عبارت‌های بالا در سمت چپ نامساوی مثبت هستند و آخرین نامساوی صحیح است. پس به کمک اثبات بازگشتی حکم مسئله ثابت می‌شود.

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



# پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ...

**با درود به خوانندگان عزیز مجله، همکاران محترم فرهنگی و دانش‌آموزان عزیز، در این شماره هم به بخشی از نامه‌ها و ایمیل‌های شما بزرگواران پاسخ می‌دهیم.**

● همکار محترم، آقای **جابر مختاری‌دهقادی**

مقاله‌تان با عنوان «تقویم و ریاضی» مدتی است که به دستمان رسیده است و به دنبال فرصتی برای چاپ آن می‌گردیم! اگرچه موضوع آن تکراری است و در بسیاری از کتاب‌های مربوط به نظریهٔ اعداد یا ریاضیات گسسته و حتی کتاب درسی ریاضیات جدید نظام قدیم آموزشی مطرح شده، ولی باز هم قابل طرح است. از شما همکار محترم می‌خواهیم که با ارائهٔ مطالب تازه‌تر، دوستان خود را در مجلهٔ برهان یاری کنید و سپاس از لطفتان.

● همکار محترم، سرکار خانم **بتول نوری یامچی** از استان آذربایجان‌شرقی

مقاله‌تان با عنوان «آموزش رسم نمودار با نرم‌افزار مت‌لب» به دستمان رسید. این‌گونه مقالات که ارتباطی بین ریاضیات و نرم‌افزار رایانه برقرار می‌کنند، در مجلهٔ ما جایگاهی دارند و ان‌شاءالله در آینده از این مقاله استفاده می‌کنیم. اما سعی کنید، اولاً حجم این مقاله‌ها چندان زیاد نشود و ثانیاً در مقاله‌های بعدی که ارسال می‌کنید، به موضوعات خالص ریاضی بیشتر بپردازید. با تشکر از لطفتان به مجلهٔ برهان.

● همکار گرامی، آقای **محمود ندائی** و دوست دانش‌آموز آقای **حسین دامغانی**

با سپاس فراوان از لطف و توجهتان به مجله، پاسخ‌هایتان به مسائل پای تخته به مسئول این بخش تحویل داده شد.

● همکار محترم، آقای **مهدی بشارت** از تهران

ضمن سپاس از توجهتان به مجله و ارسال مقالهٔ «دنبالهٔ دایره‌ها»، به اطلاعتان می‌رسانیم که کار تحقیقی‌تان خوب و قابل قبول است و در صورت امکان در یکی از شماره‌های آتی آن را مورد استفاده قرار می‌دهیم. اما خواهش ما از شما همکار عزیز و توانمند این است که به نیازهای دانش‌آموزان در سطوح متفاوت توجه کنید و براساس این نیازها مطالبی را برای ما به رشتهٔ تحریر درآورید. باز هم از شما سپاسگزاریم.

● همکار محترم، سرکار خانم **احترام انبارکی**، از شهرستان کرج

دو مقاله‌تان با عنوان‌های «ارزش ریاضیات» و «حل نامعادلات گویا به کمک نقاط بحرانی» به‌دست ما رسید. قبلاً هم لطفتان شامل حال مجله شده بود و ترجمه‌ای از شما را در برهان به چاپ رساندیم. بابت توجهتان به مجلهٔ خودتان، از شما سپاسگزاریم، ولی باید به اطلاعتان برسانیم که متأسفانه مقالهٔ اول شما بیشتر به یک توصیهٔ اخلاقی شباهت دارد تا یک مقالهٔ مدون و منسجم ریاضی. دومی هم بیشتر به یک جزوهٔ درسی شباهت دارد. از شما همکار بزرگوار می‌خواهیم با دقت و توجه بیشتری یاری‌رسان مجلهٔ خودتان باشید. منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

● همکار محترم، سرکار خانم **آمنهٔ پوردکریا**، مدیریت پژوهش‌سرای دانش‌آموزی شهرستان لنگرود

با سپاس از توجهتان به مجله و ارسال کار یکی از دانش‌آموزان آن مرکز (خانم فاطمهٔ حسنی) که ترجمهٔ مربوط به بخش «آموزش ترجمه متون» را انجام داده بودند، برای تشویق این دانش‌آموز متن نوشتهٔ (ترجمهٔ) ایشان را عیناً در اینجا می‌آوریم:

ترجمهٔ متن ریاضی ماهنامه برهان ریاضی متوسطهٔ ۲، شمارهٔ ۸۷، مهر ۱۳۹۴، صفحهٔ ۲۸:

◆**مثال ۲. حل یک معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه معادلهٔ $۹x^۲-۶x+۱=۰$ را حل کنید.**

**حل:** این معادله به شکل استاندارد است و می‌توان آن را به روش تجزیه حل کرد:

$$۹x^۲-۶x+۱=۰$$
$$(۳x-۱)(۳x-۱)=۰$$

$x=-\frac{۱}{۳}$ یا $x=\frac{۱}{۳}$ بنابراین

این معادله تنها جواب تکراری $\frac{۱}{۳}$ دارد.

مجموعهٔ جواب $\{\frac{۱}{۳}\}$ است.

**روش ریشهٔ دوم:**

فرض کنیم بخواهیم معادلهٔ درجه دوم $x^۲=p$ را حل کنیم که در آن $p\geq ۰$ یک عدد حقیقی نامنفی است. در این زمینه مثال‌هایی آورده شده است.

شکل استاندارد معادلهٔ فوق به‌صورت زیر است:

$$x^۲-p=۰$$

تجزیه (با اعداد حقیقی) $(x-\sqrt{p})(x+\sqrt{p})=۰$

**حل:** $x=\sqrt{p}$ یا $x=-\sqrt{p}$

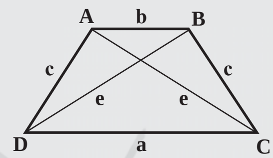
نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

اگر $x^۲=p$ و $p\geq ۰$، آن‌گاه: $x=\sqrt{p}$ یا $x=-\sqrt{p}$.

با سپاس از همهٔ عزیزان تا شمارهٔ بعد همگی را به خدای بزرگ می‌سپاریم.

# ؟ پاسخ پرسش‌های پیکارجو ؟

**۱.** می‌دانیم که هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین قابل محاط شدن در یک دایره است. بنابراین طبق قضیهٔ **بطلمیوس** در مورد چهارضلعی‌های محاطی می‌توان نوشت:




$$AB.CD + AD.BC = AC.BD \Rightarrow ab + c^{۲} = e^{۲}$$
$$\Rightarrow ab = (e-c)(e+c)(*)$$

حال با فرض $d=((e-c),(e+c))$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} d\,|\,e-c \\ d\,|\,e+c \end{cases} \Rightarrow d\,|\,(e+c)\mp(e-c) \Rightarrow d\,|\,۲e, d\,|\,۲c$$
$$\Rightarrow d\,|\,(۲e,۲c) \Rightarrow d\,|\,۲(e,c) \Rightarrow d\,|\,۲$$
$$\Rightarrow d=۱ \text{ یا } d=۲,\ d\neq ۲ \Rightarrow \quad d=۱$$

پس e–c و e+c نسبت به هم اول هستند و a و b هم دو عدد اول‌اند. لذا تنها راه برقراری (*) این است که: a=e+c و b=e–c. این تساوی‌ها هم با توجه به نامساوی مثلثی ناممکن هستند (گزینهٔ الف).

**۲.** اگر این عدد را با n نمایش دهیم، داریم:

$$n+(n+۱)+(n+۲)+...+(n+۲۰۱۶)=m^{۲}$$
$$\Rightarrow (۲۰۱۷)n + \frac{۲۰۱۶\times ۲۰۱۷}{۲} = m^{۲}$$
$$\Rightarrow (۲۰۱۷)(n+۱۰۰۸)=m^{۲}$$

و چون ۲۰۱۷ عددی اول است، پس کوچک‌ترین عدد برای آنکه عبارت سمت چپ مربع کامل باشد، این‌گونه به‌دست می‌آید: n+۱۰۰۸=۲۰۱۷ و n=۱۰۰۹ (گزینهٔ ج).

**۳.** به کمک فرض مسئله می‌توان نوشت:

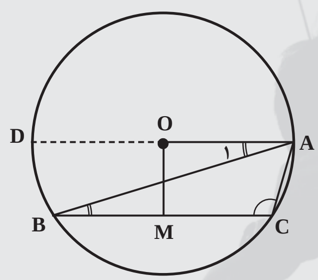
$$x^{n}=۱+x+x^{۲}+...+x^{n-۱}=\frac{x^{n}-۱}{x-۱}(x\neq ۱)$$
$$\Rightarrow x^{n+۱}-x^{n}=x^{n}-۱ \Rightarrow x^{n+۱}-۲x^{n}+۱=۰$$

با فرض $f(x)=x^{n+۱}-۲x^{n}+۱$ خواهیم داشت:

$$f(۲)=۲^{n+۱}-۲^{n+۱}+۱=۱>۰$$
$$f(۲-\frac{۱}{n})=(۲-\frac{۱}{n})^{n+۱}-۲(۲-\frac{۱}{n})^{n}+۱$$
$$=(۲-\frac{۱}{n})^{n}(۲-\frac{۱}{n}-۲)+۱=۱-\frac{(۲n-۱)^{n}}{n^{n+۱}}$$
$$=\frac{n^{n+۱}-(۲n-۱)^{n}}{n^{n+۱}}$$

و به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که برای هر n≥۲، $n^{n+۱}<(۲n-۱)^{n}$ و بنابراین صورت کسر فوق منفی است و: $f(۲-\frac{۱}{n})<۰$.
بنابراین معادلهٔ f(x)=۰ لااقل یک ریشهٔ حقیقی در بازهٔ $(۲-\frac{۱}{n},۲)$ دارد (گزینهٔ ج).

**۴.** مطابق شکل، M وسط BC است و داریم:




$A\hat{O}M=۹۰^{\circ}$. بنابراین: $OA\perp OM$ و می‌دانیم قطری که از وسط یک وتر می‌گذرد بر آن عمود است؛ یعنی: $OM\perp BC$. پس: $BC\|OA$ و در نتیجه: $\hat{A}_{۱}=\hat{B}$ و $\hat{A}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$. پس: $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$ و $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$. بنابراین:

$$\hat{C}-\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰^{\circ}$$ (گزینهٔ د)


اقتصاد مقاومتی؛ اقدام و عمل

**نحوهٔ اشتراک:**
پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:
۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگهٔ اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شمارهٔ ۷۷۳۳۹۷۱۳-۰۲۱. لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

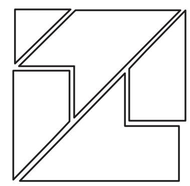
◆ عنوان مجلات در خواستی:
◆ نام و نام خانوادگی:
◆ تاریخ تولد: ◆ میزان تحصیلات:
◆ تلفن:
◆ نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان:
خیابان:
پلاک: شمارهٔ پستی:
شمارهٔ فیش بانکی:
مبلغ پرداختی:
◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۱۱۵۵/۴۹۷۹
● تلفن بازرگانی: ۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸
● Email: Eshterak@roshdmag.ir
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۲۵۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال

# پاسخ ایستگاه‌های اندیشه

## ایستگاه اول: چند معمای تصویری، یا بازی با تصاویر!

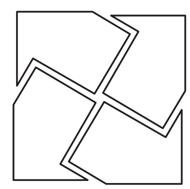
**۱.**



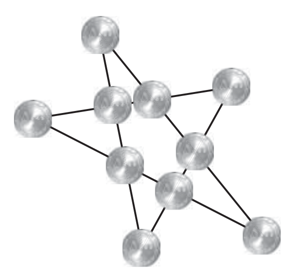
**۲.** ۳۷ مثلث

**۳.** فقط موردهای ۱، ۲، ۶ و ۷ را می‌توان به مکعب تبدیل کرد که از میان آن‌ها، فقط ۶ یک تاس واقعی را می‌سازد که در آن مجموع هر جفت عدد دو وجه متقابل، مساوی ۷ است.

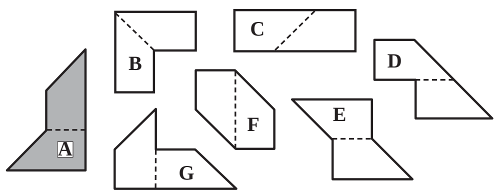
**۴.**



**۵.**



**۶.**




## ایستگاه دوم: افسانهٔ چهار برادر

**۱.** می‌دانیم که کاوه و مجید به همهٔ سؤال‌ها یک‌جور پاسخ می‌دهند! (چرا؟) ولی کافی است از یکی از آن‌ها بپرسیم: «آیا تو راست‌گو هستی؟» در این صورت اگر او کاوه باشد، می‌گوید: بله، ولی اگر مجید باشد چطور؟ اگر او مجید باشد، چون دیوانه است، پس باور دارد که راست‌گوست (زیرا در اصل چنین نیست)، ولی برای آنکه دروغ بگوید، می‌گوید: خیر! پس با این پرسش و پاسخ آن معلوم می‌شود کدام‌یک کاوه و کدام مجید است.

**۲.** می‌توانید نخست از او بپرسید: «آیا دو به اضافهٔ دو مساوی چهار است؟» اگر او پاسخ بله بدهد، می‌فهمید او به همهٔ سؤالات پاسخ درست می‌دهد و در نتیجه، کاوه یا مجید است. سپس به راه‌حل مسئلهٔ (۱) رجوع می‌کنید و از آنجا هویت او را تشخیص می‌دهید. اما اگر او پاسخ خیر بدهد، آن‌گاه می‌فهمید که او به همهٔ سؤالات پاسخ نادرست می‌دهد و در نتیجه پرویز یا حمید است. پس از او می‌پرسید: «آیا تو پرویز هستی؟» پرویز در پاسخ به این سؤال می‌گوید خیر و حمید می‌گوید بله و از آنجا هویت او را تشخیص می‌دهید.

**۳.** فقط کافی است از او بپرسید: «آیا تو کاوه یا حمید هستی؟» به این سؤال هم کاوه و هم پرویز پاسخ بله می‌دهند، اما حمید و مجید پاسخ خیر می‌دهند. (چرا؟) بنابراین اگر او به این سؤال پاسخ بله بدهد، متأهل است و اگر پاسخ خیر بدهد، مجرد است!

**۴.** بله، اگر بپرسیم: «آیا تو کاوه یا مجید هستی؟» همه به آن پاسخ بله می‌دهند! (چرا؟)


## با مجله‌های رشد آشنا شوید

### مجله‌های دانش‌آموزی
به صورت ماه‌نامه و نه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
- رشد کودک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی
- رشد نوآموز برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی
- رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی

### مجله‌های دانش‌آموزی
به‌صورت ماه‌نامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
- رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول
- رشد برهان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول
- رشد جوان برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم
- رشد برهان متوسطه دوم برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم

### مجله‌های بزرگسال عمومی
(به صورت ماه‌نامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):
◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد تکنولوژی آموزشی ◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد معلم

### مجله‌های بزرگسال تخصصی:
به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:
◆ رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش تربیت‌بدنی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی ◆ رشد آموزش تاریخ ◆ رشد آموزش جغرافیا ◆ رشد آموزش زبان‌های خارجی ◆ رشد آموزش ریاضی ◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد مدیریت مدرسه ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش ◆ رشد آموزش پیش دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانشجویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و... تهیه و منتشر می‌شود.

◆ **نشانی:** تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش‌وپرورش، پلاک ۲۶۶.
◆ **تلفن و نمابر:** ۸۸۳۰۱۴۷۸ ـ ۰۲۱
◆ **وبگاه:** www.roshdmag.ir

# چهارم آبان

# روز گرامیداشت

# محمدبن موسی خوارزمی

# و روز جبر

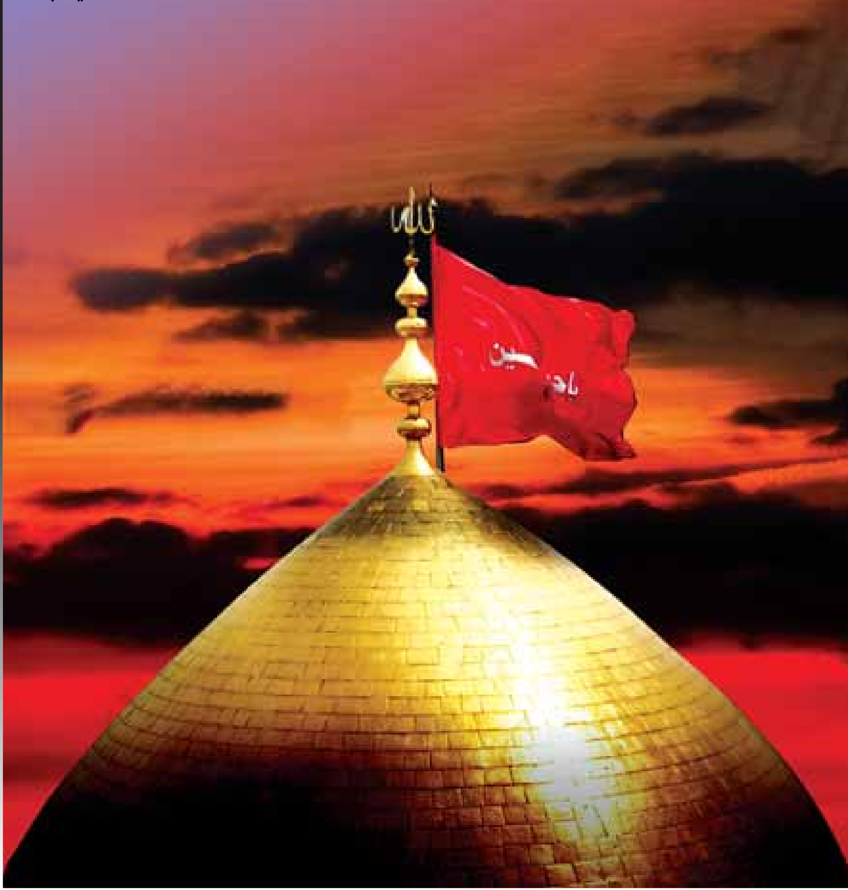
**محمدبن موسی خوارزمی**، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف، جغرافی‌دان و مورخ بنام ایران‌زمین در دورهٔ عباسیان، حدود سال ۱۸۵ هجری قمری در «خوارزم» زاده شد که امروزه «خیوه» نام دارد و در جمهوری ازبکستان واقع است. دربارهٔ او و کارهایش هرچه بگوییم کم است. اما به‌طور خلاصه می‌توان گفت که کارهای او در زمینهٔ ریاضیات بسیار گسترده بوده‌اند که یکی از مهم‌ترین آن‌ها کار روی حل معادلات درجهٔ اول و دوم و ابداع روش‌های گوناگون جبری و هندسی برای حل آن‌ها بوده است. از این جنبه وی را می‌توان بنیان‌گذار اصلی دانش جبر دانست. اصطلاح جبر (algebra) هم از نام کتاب معروف او «**الجبر و المقابله**» گرفته شده است.

در زمینهٔ نجوم نیز کارهای گسترده‌ای انجام داده که یکی از مهم‌ترین آن‌ها تلفیق میراث علمی هند و یونان در این زمینه بوده است. وی همچنین کتاب‌های زیادی در زمینهٔ نجوم تحریر کرد که از آن جمله است: دو کتاب در اصطرلاب، اطلسی از نقشهٔ آسمان و زمین، و نیز چند ترجمه و تصحیح از کتاب‌های هند و یونان، از جمله تصحیح نقشه‌های جغرافیایی **بطلمیوس**. خوارزمی در جغرافیای طبیعی و تاریخ‌نگاری هم تبحر به‌سزایی داشت و آثاری از وی به‌جا مانده است که از این موضوع حکایت می‌کند. کتاب‌های «صورت‌الارض» و «التاریخ» وی متأسفانه در دسترس نیستند که اولی دربارهٔ جغرافیا و تقسیم‌بندی شهرها و ولایات آن دوره و دومی دربارهٔ تاریخ اسلام است.

دربارهٔ اهمیت کارهای خوارزمی همین بس که بگوییم: **جورج سارتن** در کتاب «تاریخ علم» خود، نیمهٔ نخست قرن نهم میلادی را «عصر خوارزمی» نامید. نویسندهٔ اروپایی دیگری گفته است: «محمدبن موسی خوارزمی معلم واقعی ملل اروپایی جدید در علم جبر بوده است.» همچنین یکی از حفره‌های سطح کرهٔ ماه به نام این دانشمند بزرگ ایرانی نام‌گذاری شده است. برای اطلاع بیشتر از زندگی این استاد بزرگ تاریخ ریاضی کشورمان می‌توانید به مطلبی از زنده‌یاد **پرویز شهریاری** در فصل‌نامهٔ برهان (شمارهٔ ۸۰، زمستان ۱۳۹۲) مراجعه کنید.

# اربعین حسینی تسلیت باد

**اربعین حسینی، یادآور چهلمین روز شهادت اَبَرمردی حق‌طلب و یاران عدالت‌پیشه‌اش است که برای اصلاح دین و برای دعوت جامعهٔ جهل‌زده به اندیشیدن، قیام به حق نمودند.**
**می‌توان این روز را روز تفکر و منطق نیز دانست: روز حق‌طلبی بر اساس اندیشه و منطق متعالی در پرتو امامت حسین‌بن‌علی(ع).**
**این شهادت بر همهٔ رهروان واقعی آن حضرت تسلیت باد!**



www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

**و...**

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)