



ISSN: 1735-4951

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی  
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

[www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)  
پیامک: ۰۰۰۱۹۹۵۰۶



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



دوره بیست و هفتم

شماره ۱۱۰

اردیبهشت ۱۳۹۷



صفحه ۴۸

ریال ۱۱۰۰۰

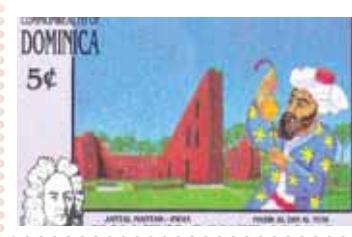


❶ در جلسه امتحان به هر سؤالی پاسخ می دهم، ولی ... ❷ یک کلاس، یک میهمانی و حل چند مسئله ❸ اثبات همسی میانه ها و چند نتیجه دیگر به کمک مساحت ها ❹ عدد پی و محیط زمین

# آلبومریاضیات

احسان یارمحمدی

# نصیرالدین طوسی



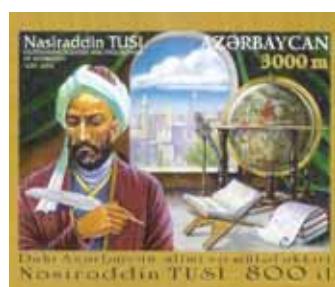
۱



۲



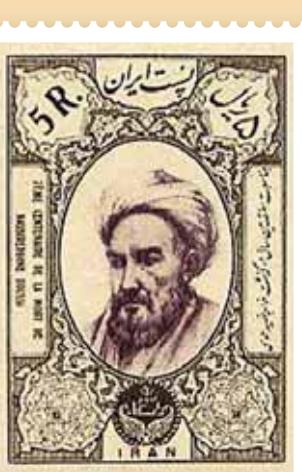
۱



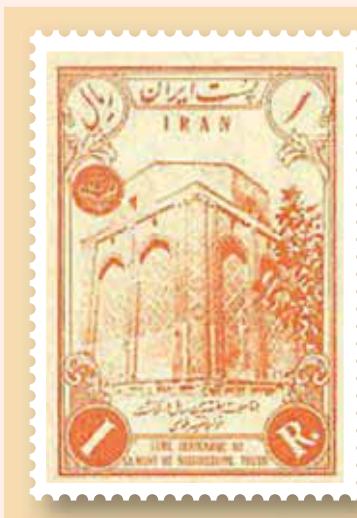
۳



۴



۶



۱. تمبر منتشر شده توسط اداره پست جمهوری اسلامی ایران در سال ۱۹۹۳. به مناسبت بزرگداشت نابغه اسلامی، خواجه نصیرالدین طوسی

ابوسعفر محمد بن محمد بن حسین طوسی، مشهور به «خواجه نصیرالدین طوسی»، ریاضی دان، ستاره‌شناس، فیلسوف، متكلم، شاعر و فقیه نامدار ایران زمین است. خواجه نصیرالدین «زیج ایلخانی» را از روی رصدهای انجام شده در رصدخانه مراغه تهییه و تدوین کرد. این زیج تا چندین سده از جایگاه و اعتبار ویژه‌ای در محافل علمی آن روزگاران برخوردار بود و اکنون به عنوان سندی مستدل در اختیار ایرانیان و جهانیان قرار گرفته است.

۲. تمبر منتشر شده در سال ۲۰۰۹ در جمهوری آذربایجان

۳. تمبر منتشر شده در جمهوری دومینیکن، منقش به تصویر خواجه نصیرالدین طوسی و ادموند هالی، به مناسبت عبور دنباله‌دار هالی در سال ۱۹۸۵-۸۶

۴. تمبر منتشر شده در جمهوری آذربایجان که نصیرالدین طوسی را دانشمند و فیلسوف خارق‌العاده اهل کشور آذربایجان معرفی کرده است!

۵. تصویر تارنمای گوگل به مناسبت هشتتصد و دوازدهمین زادروز خواجه نصیرالدین طوسی

۶. تمبرهای منتشر شده به مناسبت هفتادمین سال درگذشت خواجه نصیر طوسی در سال ۱۳۵۳ توسط اداره پست ایران



ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی  
برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲

## دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی دربی ۱۱۰
- اردیبهشت ۱۳۹۷
- شماره ۸
- صفحه ۴۸
- ریال ۱۱۰۰۰



وزارت آموزش و پرورش  
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی  
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی  
شرکت است

مدیر مسئول: محمد ناصری

سودبیر: حمیدرضا امیری

هیئت تحریریه:

محمد هاشم رستمی  
دکتر ابراهیم روحانی  
میرشهرام صدر  
هوشمند شرقی  
سید محمد رضا هاشمی موسوی  
غلامرضا یاسی پور

دکتر محزم زاد ابردموسی  
حسین نامی سعی

حسین کریمی  
 محمود اوورزنی

احسان یارمحمدی  
ازاده فرزان  
مدیر داخلی: هوشمند شرقی

ویراستار ادبی: بهروز راستانی  
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غافلی  
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:  
[www.roshdmag.ir](http://www.roshdmag.ir)  
پیام‌نگار:  
[Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir](mailto:Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir)  
نشانی و بلاگ مجله:  
<http://weblog.roshdmag.ir/borhanmotevasete2>  
پیام‌گیر نشریات رشد:  
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک:  
۰۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

roshdmag:  
نشانی دفترچه:  
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر:  
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

نشانی امور مشترکین:  
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین:  
۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸

شمارگان:  
۶۴۰۰ نسخه

### خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و  
مطلوب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات  
رشد به نشانی زیر بفرستید:  
• نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۹۵۶۷  
• تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

- حرف، اول
- در جلسه امتحان به هر سؤالی پاسخ می‌دهم، ولی ... / سردبیر ۲
- آموزشی
- یک کلاس، یک میهمانی و حل چند مسئله / سیدجمال بخشایش، رضا منصوری و مسعود جوانبخش ۳
- O-X به سبک جدید / محمد طبیعی ۱۵
- عدد پی و محیط زمین / مترجم: عباس قلعه‌پور اقدم ۱۴
- اثبات همسی میانه‌ها و چند نتیجه دیگر به کمک مساحت‌ها / روح‌الله حسنه ۲۲
- پای تخته / دکتر مهرم‌نژاد ابردموسی ۲۸
- ریاضی لذت‌بخش در کلاس خانم جمشیدی - دنباله‌های فاری - کسرها به ترتیب مقدار (۳) / آناهیتا کمیجانی ۳۲
- مسائل برای حل ۳۶

### ریاضیات در سینمای جهان

- سرزیمین ستاره‌ها: برادران بنوموسی - دانشمندان بلندآوازه ایران‌زمین / احسان یارمحمدی ۶
- آموزش ترجمه متون ریاضی ۲۶
- زوجیت در اعداد صحیح / حمیدرضا امیری

### گفت و گو

- گفت‌و‌گوی مجله ریاضی رشد برهان با دکتر مجید میرزاویزی - ریاضیات بخش مهمی از زندگی ام شد ۱۸

### ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: جدول واژه‌های ریاضی با رمز! / هوشمند شرقی ۹
- ایستگاه دوم: دو داستان، دو معما! ۱۷
- ایستگاه سوم: لطیفه‌های ریاضی ۳۱

### پرسش‌های پیکارجو!

- راهنمای حل مسائل ۴۲
- پاسخ پرسش‌های پیکارجو! ۴۷
- پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

- مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
- نگاش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲)
  - طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
  - طرح معماهای ریاضی نگارش یا ترجمة مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر با مدرسہ شما و ... .

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها با مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانع ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمایید به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوار و نام شهرستان و سمت خود را قید فرماید.

## در جلسه امتحان به هر سؤالی پاسخ می‌دهم، ولی ...

زمان تمهیلم در دوره کارشناسی، از یکی از استادانم، بناب آقای دکتر نشوادیان، روش طالب و بسیار بدینه در ارزشیابی یا

همان امتحان یاد کردم. این روش را در کلاس‌های درس در دیستان ابهرآکرم و نیتیه آن فیلی عالی بود. امتحان پیوهای را

یک امتحان ۶۰ نمره‌ای در نظر کرده و سؤال‌های جامع و کاملی از همه مباحثی که تدریس کرده بودم، طرح کردم. فکر من کنم

تعداد سؤال‌ها به ۱۲ رسید و تقریباً هر سؤالی به طور متوسط ۳ تا ۵/۳ نمره داشت. به انش آموزانم کفته بودم که در جلسه

امتحان خصوصی دارم و به تمام سؤال‌های آن‌ها پاسخ می‌دهم، ولی شرط دارم،

روز امتحان فرا رسید و پیوهای همه کتابلو بودند تا بغمدن شرط من برای پاسخ‌گویی به سؤال‌های آن‌ها پیسته باشند.

من با خوبیستی از نام دانش آموزان وار در جلسه امتحان شدم و بلا خاصله دست دو سه نفر بالا رفت که آقا سؤال داریم

با روی فوش به سمت آن‌ها رفتم و پرسیدم: چه سؤالی دارید؟

اوین نفر درباره یکی از سؤال‌ها پرسید که: آقا می‌شود از خلان راه مسئله را حل کنیم؟ یا: از خلان فرمول استفاده

کنیم؟ به او کفتم: سؤال پنده نمره دارد؟ کفت: آقا ۳/۵ نمره. کفتم: یک نمره از نمره ورقهات کم می‌کنم و به سؤال

پاسخ دقیق می‌دهم؛

کفت: آقا یعنی، چه از این سؤال با راهنمایی شما نمره بگیرم و چه نمره نکبرم، شما در هر صورت یک نمره کم می‌کنید؟

کفتم: درست خوییدی!

او کفت: آقا کلمی صید کنید یک بار دیگر فرمود فکر کنم. اگر نشد، دوباره می‌پرسیم.

نفر بعدی پرسید: آقا می‌شود درباره سؤال ۵ راهنمایی کنید؟ من اصلانی نمی‌دانم از کجا باید شروع کنم.

کفتم: از نمره ورقهات کم می‌کنم و راهنمایی من کنم.

این دانش آموز بخلاف اولی کفت: قبول می‌کنم آقا، راهنمایی بفرمایید. در پیشتر من شروع کردم و البته سعی می‌کردم طوری راهنمایی کنم که در اغلب به اندازه نمره کم شده بتوانند بنویسند. در پیشتر

موارد، راهنمایی هنچ به حل کامل مسئله منبر می‌شد.

در این روش من سر جلسه امتحان به انش آموزانم یاد می‌دارم و آن‌ها با استفاده از مطالب و مفاهیمی که در کلاس

و سر جلسه امتحان یاد می‌کردمند، مسئله‌ها را حل می‌کردند. با این روش مقدار زیادی از اضطراب پیوهای نسبت به امتحان کنم

می‌شد و با خیال راحت تری سر جلسه امتحان خصوصی پیدا می‌کردند.

قبل از این، کاهی با خراموش کردن یک مطلب یا فرمول بزرگی، حل یک مسئله و نمره آن را به طور کامل از دست

می‌دازند، ولی در این روش فقط با بدینه کنم (۷۵٪ تا یک نمره)، من توانستند نمره سؤال را بگیرند. من هم به هدف

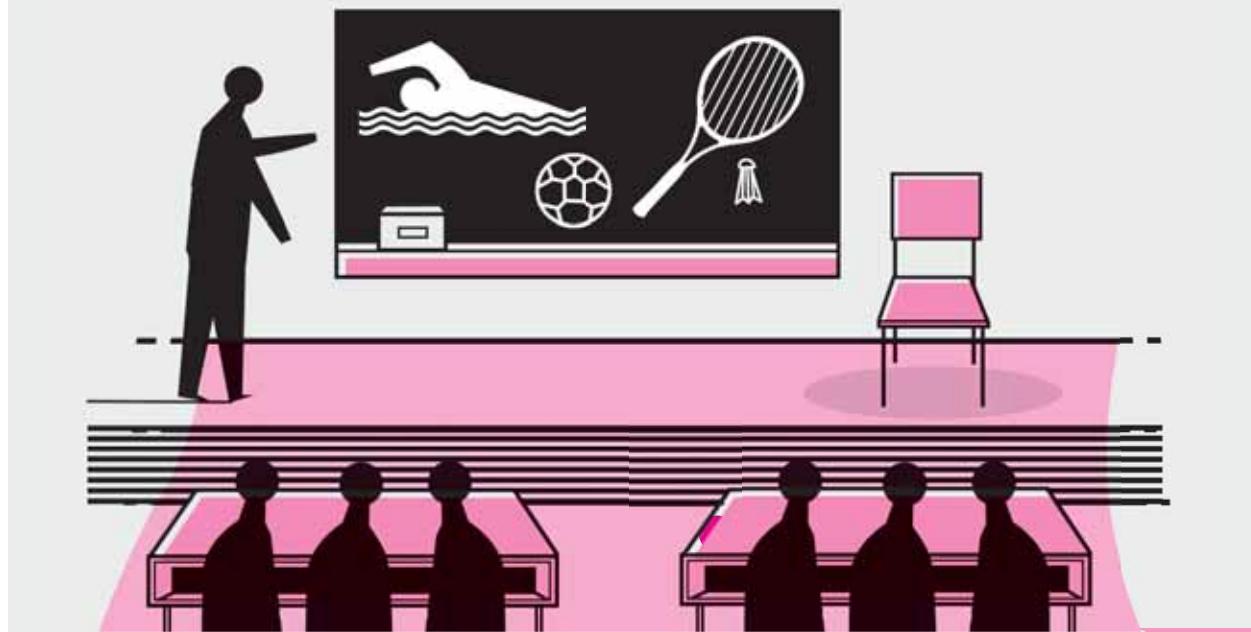
فروم که یا کلیری (دانش آموزانم) بود، می‌رسیدم!

آیا شما حاضرید با شرایط بالا امتحان بدھید؟ اگر دیر شما تصمیم بگیرید با شرایط بالا امتحان را بگزارند، شما چه

عکس العملی نشان می‌هید؟

حمد، خان امیری، سر دید

# پکی کلاس، پکی میهمانی و حل چنان مسئله



اشارہ

برای حل مسئله‌هایی که تعداد یک یا چند مجموعه در آن‌ها آمده است، استفاده از قوانین و اصول جبر مجموعه‌ها برای رسیدن به جواب موردنظر، یکی از راه‌هایی است که پیشنهاد می‌شود. ما در اینجا به بررسی حل سه مسئله از این نوع می‌پردازیم و سعی کرده‌ایم که با استفاده از راه حل‌های دیگری مانند نمودار ون و رسم جدول، این مسئله‌ها را حل کنیم.

مسئلہ ۱

در یک کلاس، ۹ نفر به ورزش شنا، ۱۴ نفر به تنیس و ۶ نفر هم به فوتبال و هم به تنیس علاقه دارند. ۷ نفر به شنا علاقه دارند، ولی به فوتبال علاقه ندارند. ۴ نفر هم فقط به فوتبال علاقه دارند. تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند، کدامیک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

از اینجا شروع می‌کنیم که مسئله گفته، فقط ۴ نفر به فوتبال علاقه دارند. پس در درون نمودار، در قسمتی که فقط مربوط به فوتبال است، عدد ۴ را می‌نویسیم. سپس چون ۶ نفر به فوتبال و تنیس علاقه دارند، در قسمت اشتراک فوتبال و تنیس عدد ۶ را می‌نویسیم.

حل مسئله ۱

برای حل این مسئله از نمودار ون کمک می‌گیریم.  
سه منحنی برای ورزش‌های شنا، فوتبال و تنیس رسم  
می‌کنیم.

مجموع	پیر	جوان	
	b	a	خانم
	d	c	آقا
	%۵۰	%۵۰	مجموع

همچنین، طبق گفته مسئله ۷۵ درصد میهمان‌ها

$$\text{خانم هستند؛ یعنی: } a+b=75$$

$$c+d=25 \text{ می‌توان نتیجه گرفت:}$$

مجموع	پیر	جوان	
%۷۵	b	a	خانم
%۲۵	d	c	آقا
	%۵۰	%۵۰	مجموع

از آنجایی که طبق فرض مسئله ۴۰ درصد خانم‌ها

$$\text{خانم هستند، یعنی: } a=40, \text{ پس داریم:}$$

مجموع	پیر	جوان	
%۷۵	b = %۳۵	a = %۴۰	خانم
%۲۵	d = %۱۵	c = %۱۰	آقا
%۱۰۰	%۵۰	%۵۰	مجموع

بنابراین جواب مسئله (آقایان پیر) ۱۵ درصد میهمان‌هاست.

### مسئله ۳

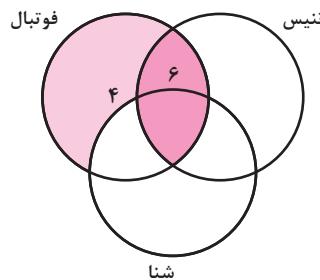
در یک میهمانی ۹۰٪ افراد، زن یا مجرد و ۶۵٪ افراد مرد یا متاهل هستند. اگر ۳۵٪ افراد حاضر در میهمانی مرد باشند، چند درصد افراد حاضر در میهمانی

زن و متأهل هستند؟

- (۱) ۱۰٪  
 (۲) ۲۰٪  
 (۳) ۳۰٪  
 (۴) ۴۰٪

### حل مسئله ۳

جدولی را برای حل این مسئله تنظیم می‌کنیم. زن و مرد در ردیفهای این جدول و مجرد و متأهل در ستونهای آن قرار می‌گیرند. خانه‌های جدول را هم نام‌گذاری می‌کنیم.



مسئله پرسیده است: تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ تا همینجا مشخص می‌شود که ۹ نفر نمی‌تواند تعداد علاقمندان به فوتبال باشد. (تعداد علاقمندان فوتبال بزرگتر یا مساوی ۱۰ است)

### مسئله ۲

در یک میهمانی ۵۰٪ میهمان‌ها جوان و بقیه پیر هستند. ۷۵٪ میهمان‌ها خانم و بقیه آقا هستند. خانم‌ها جوان و بقیه پیر هستند. آقایان پیر چند درصد میهمان‌ها هستند؟

- (۱) ۲۰٪  
 (۲) ۱۵٪  
 (۳) ۱۰٪  
 (۴) ۵٪

### حل مسئله ۲

برای حل این نوع مسئله‌ها می‌توان از جبر مجموعه‌ها، اصل شمول و طرد، یا حتی رسم نمودار ون کمک گرفت. اما چون در این مسئله با دو دسته روبه‌رو هستیم، یکی جوان و پیر بودن و دیگری خانم یا آقا بودن، بنابراین بهتر است از رسم جدولی که در ادامه توضیح داده می‌شود، بهره برد.

در جدول زیر، خانم و آقا در ردیفهای جدول، و جوان و پیر در ستونهای آن قرار می‌گیرند. خانه‌های این جدول را نام‌گذاری می‌کنیم:

مجموع	پیر	جوان	
	b	a	خانم
	d	c	آقا
			مجموع

طبق گفته مسئله ۵۰ درصد میهمان‌ها جوان

هستند؛ یعنی:  $a+c=50$

می‌توان نتیجه گرفت که:  $b+d=50$

مجموع	متأهل	مجرد	
	b	a	زن
	d = ٪ ۱۰	c	مرد
			مجموع

از آنجا که طبق گفته مسئله ۳۵ درصد افراد مرد هستند، بنابراین تعداد مردهای مجرد ۲۵ درصد است.

مجموع	متأهل	مجرد	
	b	a	زن
٪ ۲۵	d = ٪ ۱۰	c = ٪ ۲۵	مرد
			مجموع

پس تعداد زن‌های متأهل نیز  $b = ٪ ۳۰$  است.  
 $b = ٪ ۶۵ - (c+d) = ٪ ۶۵ - (٪ ۲۵ + ٪ ۱۰) = ٪ ۳۰$ .  
 که جواب مسئله همین است.

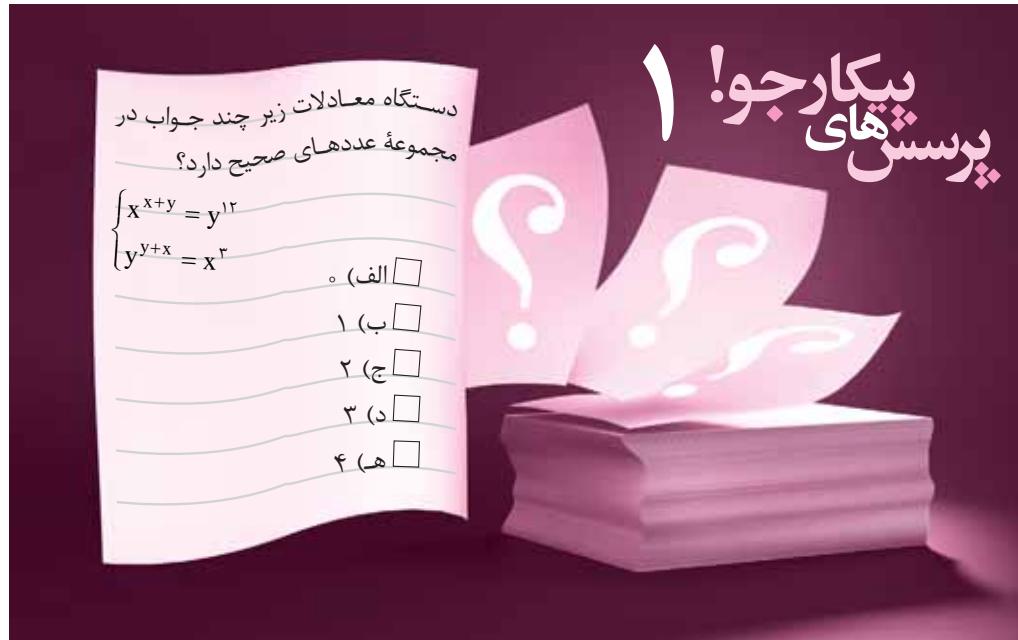
مجموع (درصد)	متأهل (درصد)	مجرد (درصد)	
۶۵	۳۰	۳۵	زن
۳۵	۱۰	۲۵	مرد
۱۰۰	۴۰	۶۰	مجموع

مجموع	متأهل	مجرد	
	b	a	زن
	d	c	مرد
			مجموع

طبق صورت مسئله، ۹۰ درصد افراد حاضر در میهمانی، زن یا مجرد هستند. اگر بخواهیم از نظر جبر مجموعه‌ها به این قسمت نگاه کنیم، زن یا مجرد مانند اجتماع زن و مجرد است. یعنی افراد یا زن هستند یا مجرد یا هر دو. بنابراین باید مجموع خانه‌های a، b و c ۹۰ درصد شود ( $a+b+c = ٪ ۹۰$ ).

مجموع	متأهل	مجرد	
	b	a	زن
	d	c	مرد
			مجموع

پس مرد و متأهل، یعنی خانه d، ۱۰ درصد است. طبق صورت مسئله، ۶۵ درصد افراد حاضر در میهمانی، مرد یا متأهل هستند. دوباره از نظر جبر مجموعه‌ها، مرد یا متأهل مانند اجتماع مرد و متأهل است؛ یعنی افراد یا مرد هستند یا متأهل یا هر دو. بنابراین باید  $b+d = ۶۵$  درصد شود.



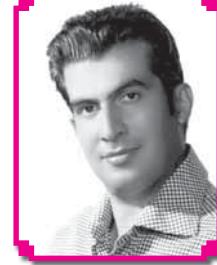
- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی
- تصویربردار: علی محمد قاسمی
- تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی
- پژوهشگر: محبوبه کلانتری
- طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت
- انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- گوینده و راوي: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیماهی جمهوری اسلامی ایران

## سرزمین ستاره‌ها: برادران بنوموسی



موسی بن‌شاکر خود از اهل علم و ادب نبود و مأمون رعایت حق او به اعتبار پسران او (يعنی محمد، احمد و حسن) می‌کرده است. سپس داستانی نقل کرده و نوشته است که موسی بن‌شاکر در ایام جوانی در خراسان راهنzen بود. بعد توبه کرد و درگذشت. پس از وی مأمون فرزندان او را به اسحاق بن‌ابراهیم مصعبی سپرد و با یحیی‌بن‌ابی‌منصور در «بیت‌الحكمه» جای داد. در اوقاتی که مأمون در روم بود، همواره نامه‌هایی به اسحاق مذکور می‌نوشت و درباره فرزندان موسی سفارش می‌کرد. تا حدی که اسحاق می‌گفت که مأمون او را دایه اولاد موسی بن‌شاکر گردانیده است. این داستان را مورخان بعدی از قول قسطی نقل کرده‌اند، اما به نظر درست درنمی‌آید. چه اگر بعد از موسی فرزندان او به سرپرست احتیاج داشتند، پس چگونه مأمون رعایت حال موسی را به اعتبار پسرانش می‌کرد و اگر موسی دزد و راهنزن بود، مأمون چرا در حق فرزندان او این همه رعایت می‌کرده است؟ ظاهراً امر این است که موسی بن‌شاکر منجم بود. در خراسان به خدمت مأمون پیوست و با اوی به بغداد رفت. پس از درگذشت وی، مأمون مراعات احوال فرزندان وی را کرد. در هر حال محمد، احمد و حسن در جوانی با دانشمندان حوزه علمی بغداد مأمور شدند، در علم ترقی کردند و ثروت خود را

## دانشمندان بلند آوازه ایران زمین



احسان یارمحمدی

### اشاره

برادران بنوموسی سه برادر ریاضی‌دان، اخترشناس و دانش‌پرور بودند که در زمرة دانشمندان بلند آوازه ایران‌زمین هستند. در این مقاله با معرفی مستند برادران بنوموسی از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت‌های بی‌بدل در عرصه دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل نخست به ارائه سطرهایی از کتاب «ریاضی‌دانان ایرانی، از خوارزمی تا ابن‌سینا»، به قلم زنده‌یاد ابوالقاسم قربانی (۱۳۸۰-۱۲۹۰) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۵۰ توسط «انتشارات مدرسه عالی دختران ایران» به زیور طبع آراسته شد، می‌پردازیم. سپس به ارائه مطالبی از مستند برادران بنوموسی خواهیم پرداخت.

«بنوموسی» (یا بنی‌موسی) شهرت سه برادر به نام‌های محمد، احمد و حسن، پسران موسی بن‌شاکر است. این سه برادر اصلتاً اهل خراسان و از علمای معروف ریاضیات، نجوم و مکانیک در قرن سوم هجری بودند که در بغداد می‌زیستند. بزرگ‌ترین آن‌ها، ابو‌جعفر محمد بن‌موسی در ربيع الاول سال ۲۵۹ (زانویه ۸۷۳) درگذشت. این‌ندیم نوشته است که آستان برای به‌دست آوردن علوم باستانی نهایت سعی و کوشش را به خرج دادند، از بذل مال و



هوشمند، توانستند توجه همگان را به خود جلب کنند. کتاب بنوموسی و همتای آن جَزْرِی، در بردارنده نخستین اطلاعات درباره ماشین‌های خودکار و ربات‌های مکانیکی هستند. این دانشمندان طراحان وسایل و دستگاه‌های مکانیکی هوشمند اولیه و امروزی بوده‌اند. آن‌ها که در مدرسه عالی علوم بغداد تحصیل می‌کردند، نه تنها ریاضی‌دانان بزرگی بودند، بلکه در ترجمه متون علمی یونانی توانایی و تبحر بسیار داشتند. آن‌ها صدگونه از این ابزارها را در کتاب خود به نام «الحیل» گردآوری و معرفی کردند. آن‌ها همچون اسباب‌بازی‌های امروزی، کاربرد علمی کمی داشتند، اما هنر و دانش خیره‌کننده‌ای را به نمایش می‌گذاشتند.

کتاب الحیل از جمله نخستین آثار در زمینه مهندسی مکانیک بهشمار می‌رود که در قرن سوم نوشته شده است. کتاب علم الحیل را می‌توان برابر دسته‌بندی‌های امروزی علم، جزو مهندسی مکانیک بهشمار آورد که درخصوص ابزارها و دستگاه‌های مکانیکی و هیدرولیکی بحث می‌کند. این کتاب اولین اثر مدون شناخته شده‌ای است که در این زمینه در جهان اسلام باقی مانده است. در این کتاب صددستگاه شرح داده شده‌اند که عمدتاً به صورت خودکار و با استفاده از خواص مکانیکی سیالات عمل می‌کنند.

پل رودخانه دجله نزدیک باب الطاق بود) انجام داده‌اند، یاد کرده است. باز ابویحان بیرونی از رصدی که محمد و احمد، پسران موسی بن شاکر، در حدود سال ۸۶۲/۲۴۸ در بغداد انجام دادند، نام برده است.

ابن یونس شش رصد از رصدهای بنوموسی را در «زیج کبیر حاکمی» ذکر کرده است. او تالیف یک زیج را به بنوموسی و تالیف زیج جداگانه‌ای را به ابوالقاسم احمدبن موسی نسبت داده است. بنوموسی، علاوه بر اقدام برای ترجمه آثار یونانی به عربی، تحقیقات نفیسی در ریاضیات، نجوم و مکانیک به عمل آورده‌اند. اما چون در کارهای علمی همکاری داشته‌اند، تشخیص آثار شخصی هر یک از آنان میسر نیست. با وجود این، بعضی از آثار آنان به

نام یکی از سه برادر نامیده شده است.

\*\*\*

از روزگاران گذشته تا به امروز، مهندسان مکانیک در بخش‌های صنعتی نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند. کوشش برای ساخت ماشین‌هایی که بتوانند به صورت خودمختار عمل کنند، به زمان خیلی قدیم باز می‌گردد. در قرن سوم شمسی، برای نخستین بار سه برادر به نام‌های محمد، احمد و حسن که به برادران بنوموسی معروف بودند، با کارهای خود حیرت مردم را برانگیختند. اولین بار این برادران بنوموسی بودند که با طراحی و ساخت ابزارهای

صرف گرد آوردن نسخه‌های خطی یونانی و ترجمۀ آن‌ها به زبان عربی کردند. به علاوه، مترجمان عالی مقامی چون حنین بن اسحاق و ثابت بن فرهاد در استخدام داشتند.

برادر بزرگتر، یعنی ابوجعفر محمدبن موسی، از هندسه و نجوم نصیب وافر داشت و ابوالقاسم احمدبن موسی در نجوم و مخصوصاً در صناعت حیل (مکانیک) زبردست بود. حسن بن موسی هم بیشتر به هندسه می‌پرداخت. اهمیت کارهای نجومی بنوموسی (محمد و احمد) از این‌رو پیداست که ابویحان بیرونی در چند موضع از آثار خود از آنان نام برده و از رصدهایی که انجام داده‌اند، گفت و گو کرده است. از جمله در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» نوشته است که محمد و احمد، پسران موسی بن شاکر، نهایت ارتفاع (خورشید) را در «سُرْمَنْ رَأَى» (سامرا) روز بیست ماه صفر سال ۸۵۸/۲۴۳ اندازه گرفتند و آن را مساوی با ۷۹ درجه و ۲۲ دقیقه یافتند. اقل ارتفاع (خورشید) را نیز روز بیست و پنجم ماه شعبان همان سال و نیز روز هفده ماه رمضان سال ۸۶۹/۲۴۵ اندازه گرفتند و آن را مساوی با ۳۲ درجه و ۱۳ دقیقه یافتند. نصف تفاضل این دو مقدار، یعنی ۲۳ درجه و ۳۴ دقیقه و ۰ ° ۳۰ نانیه، «میل اعظم» است. سپس از قول ابوالعباس نیریزی و ابوجعفر خازن، از رصدی که بنوموسی در خانه خود (که پهلوی



مهندسی کنترل محسوب می‌شود و در ابداع ماشین‌های خودکار دوره انقلاب صنعتی نقش بسیار اساسی داشته است. فواره‌های امروزی براسانس جدیدترین ریزفناوری‌ها ساخته می‌شوند، در حالی که موسیقی و نور را با هم با فوران آب همراه کرده‌اند.

هر یک از برادران بنوموسی در یک رشته تبحر داشتند. ابوجعفر محمد، ارشد برادران، صنعتگر بود. احمد، برادر دوم، اخترشناس و برادر سوم، موسوم به حسن، ریاضی دان بود. هر سه بسیار مورد احترام خلفاً بودند و در اوج افتخار درگذشتند. در سال ۱۳۶۰ شمسی احمد یوسف الحسن و همکارانش کتاب الحیل را با استفاده از سه نسخه خطی کامل محفوظ در ترکیه، واتیکان و آلمان و نیز دو نسخه ناقص کتابخانه‌های لیدن و نیویورک تصحیح و با شرح و توضیح مفصلی انتشار دادند. از کتاب الحیل نسخه ناقصی در کتابخانه مجلس شورای اسلامی ایران وجود دارد.

در پایان از اشاره به مطالب بیشتری که در مستند «سرزمین ستاره‌ها: برادران بنوموسی» گنجانده شده است، خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموzan، علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات، و دانش‌آموزانی که مایل هستند در دوران تحصیلات داشتگاهی رشته مهندسی مکانیک را انتخاب کنند، به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

به نمایش درآوردن و کنترل جریان آن صرف کردن. برادران بنوموسی در اوایل قرن سوم از جمله افراد مبتکر در این زمینه بودند. فواره‌ها به طور همزمان به حواس بینایی و شنوایی امداد و حسن بن موسی در کتاب خود «الحیل» به فواره‌هایی اشاره کردن که شکل آن‌ها پیوسته تغییر می‌کرد. این فواره‌ها در قرن سوم هجری و حتی امروزه حسی آمیخته از رمزآلودگی عرفان و زیبایی، و تنوع شکلهای آب را در بیننده ایجاد می‌کنند؛ فواره‌هایی که امروزه نیز شاهد تغییر حالت آب و به عبارت دیگر، رقصان شدن آب توسط آن‌ها هستیم. طرح آبنمایش برادران بنوموسی سرشار از ریزفناوری‌هایی همچون چرخ‌نده‌هایی حلزونی، سوپاپ، بازوی تعادل و توربین‌های بادی و آبی بود. این‌ها توانایی آنان را به عنوان طراحان و استادکارانی با دانش وسیع از فنون صنعتی و مکانیک سیالات نشان می‌دهد. همین توانایی آنان را قادر می‌ساخته است، ابزارهای ویژه‌ای بسازند. چشم‌گیرترین فواره‌ها آن‌هایی بودند که شکلشان قابل تغییر بود. این تغییر شکل‌ها به سبب وجود قسمتی غنچه‌ای شکل در محل خروج آب از فواره میسر می‌شد. این غنچه و همچنین لوله‌هایی که به آن متصل بودند، سبب می‌شوند آب به شکل خاصی ظاهر شود. استفاده از چرخ‌نده حلزونی و چرخ برای انتقال حرکت از آب جاری به لوله چرخان گامی عمده به جلو در نوآوری سامانه‌های قوه تخیل برادران بنوموسی برای ابداع اسباب و ابزارهای تفریحی و سرگرم‌کننده، آنان را به طراحی فواره کشاند. فواره‌ها به طور همزمان به حواس بینایی و شنوایی ما آرامش می‌بخشند. آن‌ها فضایی آرام ایجاد می‌کنند و جلوی آسیب سروصدای شهری همچون ترافیک و حفاری خیابان‌ها را در دنیای پرسروصدای امروزی می‌گیرند. فواره‌ها همچنین فضای خصوصی فراهم می‌آورند که در آن صدای نجوای افراد در گوش و کنار به گوش دیگران نمی‌رسد. فواره فقط نمایش زیبایی از آب نیست، بلکه در روزهای خشک و گرم تابستان رطوبت هوا را افزایش می‌دهد و فضای دلپذیری فراهم می‌سازد. خلاف تصور همگان، فواره‌ها الزاماً مصرف کننده آب نیستند. می‌توان به وسیله یک پمپ شناور، آب استخر یا حوضچه‌ها را به گردش درآورد. فواره‌ها و آبنمایها جزء جدایشدنی باع‌ها هستند. این عناصر همان‌گونه که هزار سال پیش در دنیای اسلام رایج بوده‌اند، امروزه نیز رواج دارند. فواره‌ها و آبنمایها نشانگر نهایت ثروت‌اند، چرا که آب در گذشته کم بوده و نمایش آن از جمله عجایب بهشمار می‌آمده است. فواره‌ها و آبنمایها سنگ بنای هنر و معماری اسلامی محسوب می‌شوند. از آنجا که آب را با بهشت پیوند است، مهندسان مسلمان زمان و توان زیادی برای

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

هوشناگ شرقی

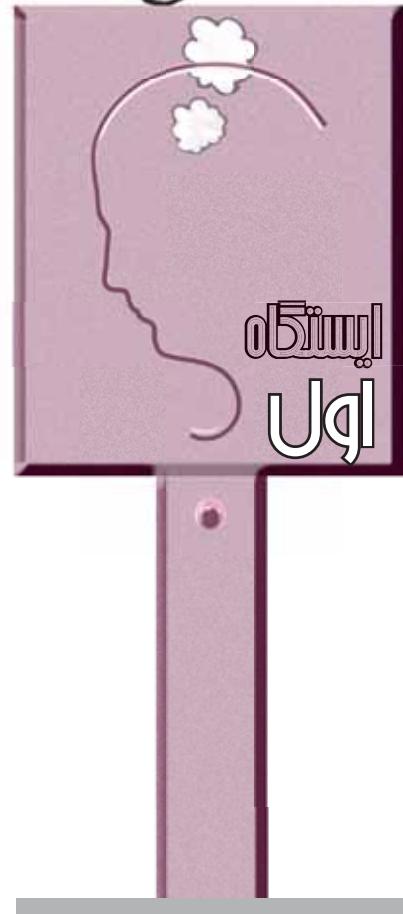


باز هم برایتان یک جدول واژه‌های ریاضی داریم، اما این بار رمز جدول نام یکی از شاخه‌های جدید در رشته ریاضی است که شاید با آن آشنایی داشته باشید. واژه‌های مشخص شده را در جدول ببایید، دور آن‌ها را خط بکشید، و حروف باقی مانده را جایی بنویسید. از ترکیب آن‌ها رمز جدول مشخص می‌شود. آن را به همراه شرح مختصری از آن برایمان بفرستید تا به قید قرعه جایزه‌ای نفیس تقدیمتان شود!

فهرست واژه‌ها:

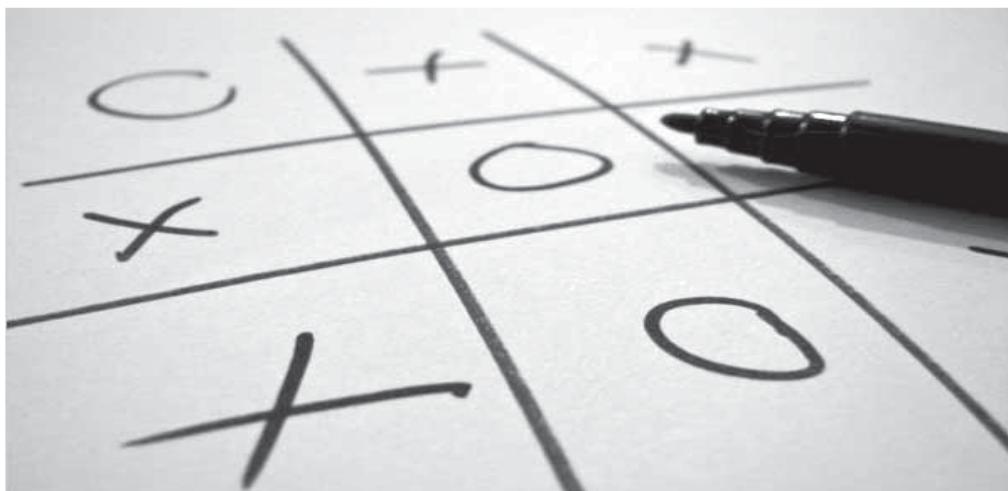
ا	هـ	نـ	تـ	گـ	رـ	لـ	قـ	یـ
دـ	نـ	لـ	تـ	نـ	اـ	کـ	سـ	اـ
عـ	اـ	ظـ	گـ	شـ	رـ	لـ	سـ	سـ
اـ	لـ	رـ	یـ	وـ	مـ	اـ	نـ	بـ
صـ	یـ	تـ	زـ	دـ	رـ	کـ	اـ	زـ
تـ	زـ	وـ	وـ	لـ	هـ	یـ	جـ	اـ
اـ	تـ	اـ	لـ	اـ	لـ	دـ	تـ	سـ
تـ	رـ	اـ	مـ	نـ	اـ	هـ	مـ	جـ
رـ	کـ	یـ	تـ	زـ	رـ	یـ	یـ	ذـ
بـ	یـ	اـ	عـ	حـ	یـ	کـ	اـ	نـ
یـ	بـ	نـ	دـ	اـ	وـ	نـ	کـ	یـ
عـ	یـ	سـ	دـ	نـ	هـ	لـ	یـ	دـ

- الگوریتم  $\rightarrow$  آنالیز ترکیبی
  - استدلال  $\rightarrow$  لوزی
  - تحانس  $\rightarrow$  تبدیل هندسی
  - رادیکال  $\rightarrow$  راستا
  - اسنتاج  $\rightarrow$  دایره
  - تابع  $\rightarrow$  نیمساز
  - تربيع  $\rightarrow$  واریانس
  - احتمال  $\rightarrow$  توان
  - عدد  $\rightarrow$  وتر
  - تصاعد  $\rightarrow$  ددهدھی
  - انتگرال  $\rightarrow$  مشتق
  - هندسه  $\rightarrow$  سکانت
  - میکنوا  $\rightarrow$  مثلثات
  - یکان  $\rightarrow$  گسسته
  - حد  $\rightarrow$  حد ماتس س.ها



# پرسنل ہائی پیکار جو!





# په سپک جدید X-O

اشاره



این نوشه ترجمه مقاله «Tic-Tetris-Toe» از اندی لیو (Andy Liu) است که در آن پنج سبک جدید برای بازی «X-O» معرفی شده‌اند که آن‌ها را «X-O» تتریسی می‌نامند. در توضیح تتریس باید گفت که نوعی بازی ویدیویی قدیمی است متشکل از شکل‌هایی مانند  $\square$ ,  $\square\square$ ,  $\square\square\square$  و  $\square\square\square\square$ . از آنجا که نویسنده این شکل‌ها را در معرفی سبک جدید خود به کار برده، لذا از کلمه «تتریس» استفاده کرده است. چون این کلمه چندان مشهور نیست، و به جز معرفی برخی از شکل‌ها نقش دیگری را در مقاله ایفا نمی‌کند، لذا آن را ذکر نکرده‌ایم.

محمد طبیعی  
دانشجوی مهندسی عمران  
دانشگاه صنعتی شریف

## بخش اول:

## معرفی

با توجه به شباهت شکلی موجود بین این شکل‌ها و حرفهای N, L, T, I و O این‌ها را  $N_4$ ,  $L_4$ ,  $T_4$ ,  $I_4$  و  $O_4$  نامیم. برای  $N_4$  در صفحه  $3 \times 3$ , برای  $L_4$  در صفحه  $4 \times 4$ , برای  $T_4$  در صفحه  $5 \times 5$ , برای  $I_4$  در صفحه  $7 \times 7$  و برای  $O_4$  در صفحه  $9 \times 9$  بازی می‌کنیم. بدیهی است که برتری غالباً بازیکن اول است.

آیا می‌توانید یک راهبرد (استراتژی) برای نفر اول بیابید؟ ابتدا سعی کنید و چندین بار این بازی را با دوستانان انجام دهید و سپس مطالب زیر را بخوانید.

## بخش دوم:

## بازی

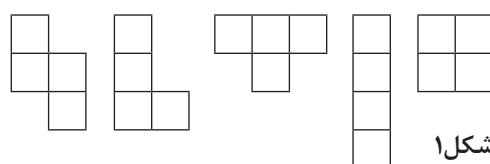
ابتدا اجازه دهید که سطراها را با عده‌های ۱، ۲ و ۳ و ستون‌ها را با حروفهای a, b و c مشخص کنیم. به این ترتیب خانهٔ واقع در گوشهٔ سمت چپ مربع  $a_1$  نامیده می‌شود.

شما برای برندۀ شدن به چهار حرکت نیاز خواهید داشت و حرکت پنجم حرکتی اضافی است که تنها در

بازی X-O یک بازی مشهور قدیمی است که در آن هر یک از بازیکنان به نوبت یکی از حروف X یا O را در صفحه‌ای  $3 \times 3$  قرار می‌دهند. برندۀ کسی است که بتواند سه خانه را به صورت سطري، ستوني یا قطری پر کند. در اینجا قصد داریم چند سبک جدید برای این بازی معرفی کنیم. این سبک‌های جدید دو تفاوت اساسی با بازی X-O معمولی دارند:

اول آنکه بازی الزاماً روی یک صفحه  $3 \times 3$  انجام نمی‌شود، هر یک از پنج شکل معرفی شده در زیر، صفحهٔ مربعی متفاوتی دارند.

دوم آنکه در اینجا تلاش می‌کنیم به یکی از ۵ شکل زیر برسیم.



شکل ۱

حالا من با یکی از مربع‌های گوش‌های، مثلاً  $a_1$  شروع می‌کنم. فرض می‌کنیم شما در مرحله بعد  $c$  را اختیار می‌کنید. من می‌دانم که باید یکی از خانه‌های  $b_1, b_2$  و  $c_1$  را بگیرم. شما می‌توانید در حرکت بعد با انتخاب  $b_1$ ، مرا مجبور کنید خانه  $c_2$  را انتخاب کنم. اکنون بسته به حرکت من، شما بار دیگر به دو طریق، با انتخاب یکی از خانه‌های  $c_1, c_2$  و  $c_3$  می‌توانید بازی را بپرید.

$a$ $b$ $c$	$a$ $b$ $c$	$a$ $b$ $c$

شکل ۴

آیا می‌توانید همهٔ چیزهایی را که تا به الان مطرح کرده‌ایم، به‌حاطر بسپارید؟ شما مجبور نیستید این کار را بکنید، فقط بدانید که باید خانه  $b_1$  را یکی از خانه‌های  $b_2$  و  $b_3$  و یکی از خانه‌های  $c_1$  و  $c_2$  را بدست آورید. حالا باید در جستجوی یک تهدید دوگانه باشید. با کمی تمرین همواره بازی را خواهید برداشت؛ البته اگر بازیکن اول باشد.

#### بخش سوم:

### بازی‌های $L_4$ و $T_4$

سطرهای اضافی را با عده‌های ۴ و ۵ و... و همین‌طور ستون‌های اضافی را با حروف  $d, e, \dots$  نشان می‌دهیم. در بازی  $L_4$  شما به آسانی می‌توانید برنده شوید. ابتدا خانه  $b_1$  را انتخاب کنید. همچنین می‌توان تضمین کرد که در حرکت بعد شما می‌توانید یکی از خانه‌های  $b_2$  یا  $c_2$  را انتخاب کنید. اگر هر دوی این خانه‌ها خالی بودند، در صورتی که  $b_1$  و  $b_2$  خالی باشند،  $b_2$  را انتخاب کنید در غیر این صورت،  $b_1$  و  $b_2$  یقیناً خالی هستند. پس  $c_2$  را انتخاب کنید. در سومین حرکت خود، ۳ مربع را در یک ردیف تکمیل کنید. در این شرایط من (به عنوان بازیکن دوم) ابدأ نمی‌توانم از ایجاد  $L_4$  توسط شما در حرکت چهارم، جلوگیری کنم. همچنین از آنجا که من تا به الان تنها سه حرکت انجام داده‌ام، پس قطعاً نمی‌توانم، برنده بازی باشم.

در بازی  $T_4$  هم شما (به عنوان بازیکن اول) می‌توانید برنده بازی باشید. بدیهی است که بهترین

برخی از حالات خاص لازم است. اکنون قصد داریم راهبرد برد برای این بازی را کشف کنیم. من می‌توانم با یک یا دو حرکت کاری کنم که شما نتوانید برنده این بازی باشید. شما شاید این موضوع را حدس زده باشید.

$a$ $b$ $c$	$a$ $b$ $c$	$a$ $b$ $c$

شکل ۲

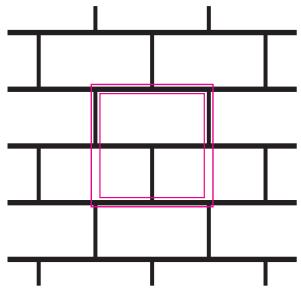
شکل ۲ سه حالتی را که باعث می‌شود، حریف شما برنده بازی نشود، نشان می‌دهد. در هر یک از حالات فوق حتی اگر من تمام حرکت‌های بعدی را به شما واگذار کنم، شما قادر به ایجاد  $N$  نخواهید بود.

بنابراین شما می‌باید در اولین حرکت خود  $b_1$  را اشغال کنید و همچنین مطمئن شوید که از بین  $b_1$  و  $b_2$  و  $b_3$  و  $a_1$  و  $a_2$  حداقل یکی را انتخاب کرده‌اید. توجه کنید، هنگامی که خانه  $b_1$  را اشغال می‌کنید، دیگر نباید نگران شکست باشید. حریف شما در هیچ شرایطی قادر نخواهد بود پیروز این میدان باشد. حال که شما خانه  $b_1$  را اشغال کرده‌اید، سوال این است که: آیا من می‌توانم مانع پیروزی شما در این بازی شوم؟ در حقیقت من دو گزینه برای انتخاب دارم: انتخاب یکی از چهار مربع واقع در مجاورت خانه  $b_1$  یا انتخاب یکی از چهار مربع گوش‌های. فرض کنید من  $a_1$  را انتخاب کنم شما از قبل می‌دانید که باید  $c_1$  را بگیرید. اکنون من تسلیم هستم، در حرکت سوم شما می‌توانید خانه  $b_1$  را بگیرید. حال به دو طریق متفاوت، یعنی با اشغال  $a_1$  یا  $c_1$  می‌توانید بازی را بپرید و یک شکل  $N$  ایجاد کنید حتی اگر من قبل از شما خانه  $b_1$  را در اختیار بگیرم، آن وقت شما خانه  $b_1$  را خواهید گرفت و باز هم به دو روش متفاوت، یعنی اشغال  $a_1$  یا  $c_1$  می‌توانید برنده بازی باشید.

شکل ۳ کلید موفقیت شما را، که شکل  $W$  است، نشان می‌دهد (قسمت مشخص شده مانند حرف  $W$  است و ۵ مربع دارد).

$a$ $b$ $c$	$a$ $b$ $c$

شکل ۳



شکل ۶

من دو مربع مجاور را ترکیب خواهم کرد و یک دومینو به وجود می‌آورم. اکنون جدول ما شیبیه به یک دیوار آجری شده است. حال در هر مرحله، وقتی شما مربعی را انتخاب می‌کنید، من مربع دیگر را در همان دومینو انتخاب خواهیم کرد. اکنون اگر قرار باشد که یک شکل  $O_4$  تشکیل دهید، حتماً می‌باید یک دومینوی کامل را در اختیار داشته باشید (مطابق شکل ۶)، حال آنکه تنها نصف آن را خواهید داشت. پس شما نمی‌توانید برنده شوید!

#### بخش پنجم:

#### بروژهای بیشتر

**مسئله ۱.** چهار شکل پیوسته متشكل از سه مربع یا کمتر از آن بیابید، طوری که مربع‌ها لبه‌به‌لبه به یکدیگر متصل باشند.

تذکرہ: این شکل‌ها «مونومینو»<sup>۱</sup> ( $O_1$ ), «دومینو»<sup>۲</sup> ( $I_4$ )، و «ترومینو»<sup>۳</sup> ( $I_3$  و  $V_3$ ) نامیده می‌شوند.

X-بازی کردن با این شکل‌ها چندان چالش برانگیز نخواهد بود. اگر صفحه بازی به اندازه کافی بزرگ باشد، یقیناً نفر اول برنده خواهد بود. زیرا شکل‌های فوق همگی بخشی از شکل‌هایی هستند که در این مقاله آن‌ها را بررسی کرده‌ایم. شکل‌هایی که در این نوشه بررسی کرده‌ایم، «ترومینو»<sup>۴</sup> نامیده می‌شوند. اگر همین طور ادامه دهیم، به «پنتومینوها»<sup>۵</sup> خواهیم رسید. بازی کردن با این شکل‌ها بسیار راقابتی و دشوار است. پنتومینوها شامل قطعاتی به نام‌های  $I_5$ ,  $L_5$ ,  $N_5$ ,  $T_5$ ,  $P_5$ ,  $U_5$ ,  $V_5$ ,  $X_5$ ,  $Y_5$  و  $Z_5$  هستند که همگی در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند. سولومون گولومب، نویسنده کتاب دوست‌داشتني «پلی‌مینوها»<sup>۶</sup>، به بررسی این شکل‌ها پرداخته است. کلمه «پلی‌مینو» به معنی شکل تشکیل شده از تعداد زیادی مربع است. بد نیست بدانید که غیر از پنتومینوها ما ۳۵ نوع هگزومینو<sup>۷</sup>

مکان برای شروع حرکت خانه  $c_4$  است. در این شرایط من یکی از پنج پاسخ ضروری را که شامل  $a_4$ ,  $a_3$ ,  $b_4$ ,  $b_3$  است، به حرکت شما می‌دهم. در مرحله دوم شما  $d_4$  را انتخاب می‌کنید. در حرکت سوم، هم می‌توانید  $c_4$  را انتخاب کنید که به ایجاد یک تهدید دوگانه در خانه‌های  $b_4$  و  $c_5$  منجر می‌شود، یا  $d_4$  را انتخاب کنید که باز هم تهدیدی دوگانه در خانه‌های  $e_4$  و  $d_5$  ایجاد می‌کند. در هر دو شرایط من نمی‌توانم از دستیابی شما به شکل  $T_4$  جلوگیری کنم.

			$O_3$			
۶		$X_6$	$X_3$			
۵	$O_5$	$X_5$	$X_4$	$X_2$	$O_4$	
۴			$O_1$	$X_1$		
۳				$O_2$		
۲						
۱						

a b c d e f g

شکل ۵

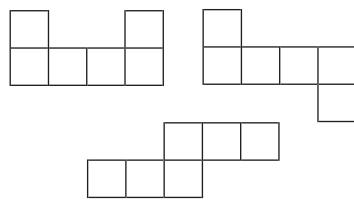
بین پنج بازی معرفی شده، تنها بازی که می‌توان آن را راقابتی واقعی دانست،  $I_4$  است. اگرچه در این بازی هم شما خواهید برد، اما این پیروزی را نمی‌توانید تا حرکت هشتم خود تحمیل کنید. در حین بازی این امکان وجود دارد که شما بتوانید یک تهدید دوگانه برای من (به عنوان حریف شما) ایجاد کنید. در شکل ۵ نمونه‌ای چالش برانگیز از این بازی را آورده‌ایم. چنانچه در حرکت هفتم، شما خانه  $c_4$  را انتخاب کنید، آن‌گاه توانسته‌اید یک تهدید دوگانه در خانه‌های  $a_4$  و  $e_4$  به وجود آورید. همچنین با انتخاب  $b_4$  نیز می‌توانید تهدیدی مشابه در خانه‌های  $b_4$  و  $d_5$  ایجاد کنید. بنابراین باز هم من نمی‌توانم مانع پیروزی شما بشو姆.

#### بخش چهارم:

#### بازی $O_4$

این بازی ویژگی بسیار عجیبی دارد. اگرچه به نظر می‌رسد که صفحه بازی بیشتر از حد نیاز است، با این حال شما نمی‌توانید پیروزی خود را در این بازی تحمیل کنید. من راهبردی بسیار ساده اما مؤثر دارم که مانع پیروزی شما در این بازی می‌شود؛ حتی اگر این بازی را در یک صفحه بی‌نهایت انجام دهیم. این ایده بسیار طریقی است که زیبایی ریاضیات را به نمایش می‌گذارد.

۱۰۸ نوع هپتومینو<sup>۹</sup> و ۳۶۹ عدد «اکتوومینو»<sup>۱۰</sup> داریم.



شکل ۹

**مسئله ۶.** برای نفر دوم که در حال بازی با هگزومینوهای واقع در شکل ۹ است، یک راهبرد دومینویی پیدا کنید. برای یکی از آن‌ها باید الگوی جدیدی پیدا کنید.



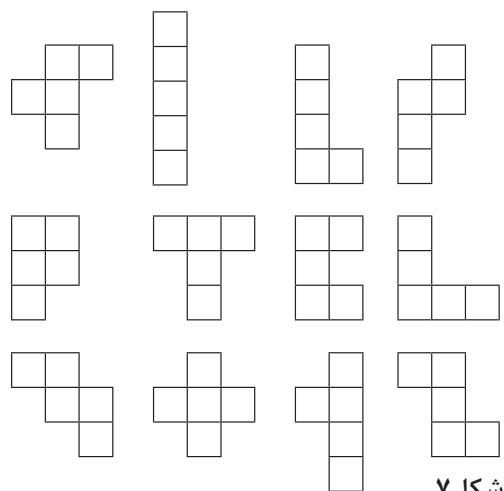
شکل ۱۰

**مسئله ۷.** احتمالاً به غیر از هگزومینوی نشان داده شده در شکل ۱۰، برای هیچ پلی‌مینوی دیگری که دارای شش و یا تعداد بیشتری مربع است، نفر اول راهبردی قطعی برای پیروزی ندارد. آیا نفر اول در بازی با این هگزومینو راهبرد برد دارد؟

**مسئله ۸.** در بررسی بازی  $P_4$  دیدیم که اگر این بازی در یک جدول  $2 \times 2$  بازی شود، یقیناً نفر اول نمی‌تواند برنده شود، چرا که فضای کافی برای گذاشتن قطعات وجود ندارد. این در حالی است که بعضی از بازی‌های دیگر را می‌توان در جدول کوچکتری هم بازی کرد. اکنون سؤال این است: آیا نفر اول می‌تواند پیروزی خود را در بازی  $P_4$  در یک جدول  $4 \times 4$  تحمیل کند؟ یا در یک بازی  $I_4$  در یک جدول  $6 \times 6$  راهبرد برد دارد؟

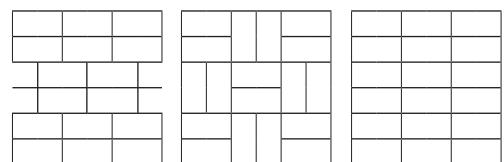
**مسئله ۲.** از آنجا که  $P_4$  را درون خود دارد، پس استدلای که در مورد دومینوهای در شکل ۶ برای بازی  $O_4$  آورده بودیم، اینجا هم کار می‌کند. به عبارت دیگر، حتی اگر صفحه نامتناهی باشد، باز هم نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که نفر اول برند نشود. از طرف دیگر، چهار پنتومینوی دیگر نیز هستند که اگرچه  $O_4$  را در برندارند، اما استدلای فوق درباره آن‌ها نیز صدق می‌کند. آن چهار پنتومینو را بباید.

**مسئله ۳.** نشان دهید که نفر اول چگونه می‌تواند در بازی  $N_6$  و در یک صفحه  $6 \times 6$  برنده شود. همچنین چگونه می‌تواند در بازی  $L_4$  و  $Y_4$  در یک صفحه  $7 \times 7$  پیروز شود؟



شکل ۷

**مسئله ۴.** هر یک از چهار پنتومینوی باقی‌مانده را (پنتومینوهایی که در سؤالات ۲ و ۳ بررسی نشده‌اند) به یکی از راهبردهای دومینویی (مانند بازی  $O_4$ ) که در شکل ۸ الگوهای آن‌ها داده شده است، متصل کنید.



شکل ۸

**مسئله ۵.** چه تعداد از هگزومینوهای پنتومینویی را در بردارند طوری که نفر دوم دارای یک راهبرد دومینویی است؟

\*پی‌نوشت‌ها:

- 1. monomino
- 2. domino
- 3. tromino
- 4. tetromino
- 5. pentomino
- 6. Solomon Golom

(ریاضیدان و مهندس برق آمریکایی که استاد دانشگاه کالیفرنیای جنوبی بود و بیشتر به خاطر ابداعاتی در بازی‌های ریاضی مشهور است. وی در سال ۲۰۱۶ درگذشته است).

- 7. polyminos
- 8. hexomino
- 9. heptomino
- 10. octemino

### بخش ششم: اطلاعات عمومی

این مقاله براساس مقاله بازی‌های ریاضی مارتین گاردنر (Martin Gardner) (نوشته شده است. مقاله مزبور در آوریل سال ۱۹۷۹ در مجله «Scientific American» به چاپ رسیده بود. همچنین کتابی در این زمینه به همراه موضوعات جذاب دیگری در حوزه ریاضی توسط انتشارات «W.H.Freeman and Company» در سال ۱۹۹۲ در نیویورک به چاپ رسیده است. لازم به ذکر است که اصل و اساس این کارها توسط فرانک هاراری (Frank Harary) که ریاضیدانی در زمینه تئوری گراف است، انجام شده است.

بابلیان این مقدار را  $\frac{3}{1}$  در نظر می‌گرفتند که برای اهداف آن‌ها تقریب خوبی بود. قدیمی‌ترین اثر شناخته شده درخصوص تقریب پی، «پاپیروس رایند»<sup>۱</sup> مربوط به مصر باستان<sup>۲</sup> است که قدمت آن به شانزده قرن پیش از میلاد می‌رسد. در این سنده، از مقدار  $\frac{16}{9}$  یا  $\frac{3}{1605}$  به عنوان تقریب  $\pi$  یاد شده است. فیلسوفان و ریاضی‌دانان یونان باستان از جمله ارشمیدس<sup>۳</sup> که در حدود ۲۲۰ سال پیش از میلاد می‌زیستند،  $\pi$  را عددی کمتر از  $\frac{3}{7}$  و بیشتر از  $\frac{22}{7}$  تخمین زده بودند. بعدها بطلمیوس<sup>۴</sup> در اسکندریه، مقدار تقریبی  $\frac{3}{1416}$  را به دست آورد. در حدود ۵۰۰ سال پس از میلاد، آریبهطه، ریاضی‌دان هندی، که روی جدول‌های مثلثاتی کار می‌کرد نیز همان مقدار  $\frac{3}{1416}$  را به کار می‌برد. چانگ چیتسو<sup>۵</sup>، ریاضی‌دان چینی، که در حدود ۴۷۰ میلادی می‌زیست، برای  $\pi$  مقداری بین  $\frac{3}{1415927}$  و  $\frac{3}{1415926}$  به دست آورده بود. این تقریب تا هزار سال پس از او بی‌رقیب بود، تا اینکه ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی، جمشید کاشانی، در کتاب «رساله محیطیه»، عدد پی را به کمک یک  $805306368$  ضلعی منتظم تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد که نوعی رکورددشکنی محسوب می‌شد.

$\pi = \frac{3}{1415926535897932}$  پی با دقت ۱۶ رقم اعشار

پس از آن، ریاضی‌دانان اقصا نقاط جهان برای محاسبه تقریبی عدد پی تلاش زیادی انجام دادند که نتایج آن محاسبه این عدد تا  $140$ ،  $200$  و  $500$  رقم اعشار بود، تا اینکه در  $1853$  میلادی، ویلیام شانکس<sup>۶</sup> توانست  $\pi$  را تا  $707$  رقم اعشار محاسبه کند. مسئله یافتن مقدار دقیق عدد پی داشمندان و ریاضی‌دانان را برای قرن‌های متتمادی مشغول و مجذوب خود ساخته بود تا اینکه یوهان هاینریش لامبرت<sup>۷</sup>، ریاضی‌دان سوئیسی، که در فاصله سال‌های  $1728$  تا  $1777$  می‌زیست، این مسئله را حل کرد. لامبرت ثابت کرد که عدد پی نمی‌تواند به صورت خارج قسمت دو عدد صحیح یا به صورت اعشاری با ارقام متناهی نوشته شود. در واقع، با به دست آوردن تقریب‌هایی با ارقام بیشتر،



### چکیده

در این مقاله، پس از پرداختن مختصر به «تاریخچه عدد پی» که یکی از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی است، با یک کار عملی، تقریبی از  $\pi$  به دست می‌آوریم و سپس راهکار ارشمیدس را برای محاسبه قطر زمین ارائه می‌کنیم.



متوجه: عباس قلعه پور اقدم  
دبیر ریاضی ارومیه

کلیدواژه‌ها: پی، دایره، قطر، زمین، اراتستن

### تاریخچه

مشهورترین مقدار ثابت در ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن است که به «عدد پی» موسوم است و با حرف یونانی  $\pi$  نمایش داده می‌شود:

$$\text{محیط} = \pi \text{ قطر}$$

## تجربه‌ای برای یافتن تقریبی از $\pi$

چون  $\pi$  نسبت محیط دایره به قطر آن است، پس اگر محیط دایره را با  $C$  و قطر آن را با  $d$  نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$C = \pi \times d$$

حال اگر شعاع این دایره را  $r$  فرض کنیم، با توجه به اینکه  $d = 2r$ ، به راحتی خواهیم داشت:

$$C = 2\pi r$$

حال که دانستیم یافتن مقدار دقیق  $\pi$  ناممکن است، با دخترم تصمیم گرفتیم آزمایشی ترتیب بدھیم تا مانیز تقریبی از عدد  $\pi$  یافته باشیم. بدین منظور، از چرخ دوچرخه کهنه‌ای با قطر  $63/7$  سانتی‌متر استفاده کردیم.

نقشه‌ای را روی لاستیک چرخ، در قسمتی که با زمین تماس داشت، انتخاب کردیم و با مازیک علامت گذاشتیم. روی زمین هم در نقطه مربوطه علامت گذاشتیم. سپس چرخ را  $20$  بار روی یک خط مستقیم به جلو چرخاندیم تا نقطه علامت گذاری شده دوباره به زمین برسد. مسافتی را که چرخ طی کرد، اندازه گرفتیم. این مقدار برابر  $39/69$  متر شد. عدد  $39/69$  را بر  $63/7$  تقسیم کردیم و عدد  $3/115384615$  را به عنوان تقریبی از  $\pi$  به دست آوردیم.

## راهکار اراتستن برای اندازه‌گیری محیط زمین

در میان پیشرفت‌های ریاضی یونان باستان، هیچ‌کدام جالب‌تر از محاسبه محیط و قطر زمین توسط «راتستن»<sup>۱</sup> نبوده است. اراتستن متوجه شده بود که در شهر «سین»<sup>۲</sup> (آسوان امروزی) واقع در مصر، در ظهر روز اول تابستان، نور خورشید به طور عمودی به درون چاه عمیقی که در آن شهر وجود داشت، می‌تابد و ته چاه را روشن می‌کند. او همچنین دقت کرده بود که در این زمان به خصوص، ستون‌های عمودی این شهر سایه‌ای از خود ندارند. معنای این مشاهدات، عمودی تابیدن پرتوهای خورشید در ظهر روز اول تابستان بر شهر «سین» بود. در صورتی که در همان روز در شهر اسکندریه، واقع در شمال سین، اراتستن شاهد بود که ستون‌های عمودی سایه دارند.

ما به  $\pi$  نزدیک و نزدیک‌تر می‌شویم، ولی هیچ مقداری نمی‌تواند دقیقاً برای  $\pi$  یافت شود. امروزه ما چنین عده‌هایی را ناگویا (گنگ) می‌نامیم. یونانیان باستان قبل از وجود اعداد گنگ پی برده بودند. آنان این مجموعه از اعداد را «عدد غیراندازه‌پذیر» یا «عدد اندازه ناپذیر» می‌نامیدند. برای مثال، آن‌ها می‌دانستند که طول قطر مربعی که طول ضلع آن واحد است، چنین عددی است. این مقدار که با  $\sqrt{2}$  نموده می‌شود و برابر عدد  $\sqrt{2}$  است، بهطوری که  $2^{\sqrt{2}}$ ، نمی‌تواند به صورت کسر بیان شود. یونانیان باستان گنگ بودن  $\sqrt{2}$  را نه به روش جبری که با روش هندسی اثبات کرده بودند.

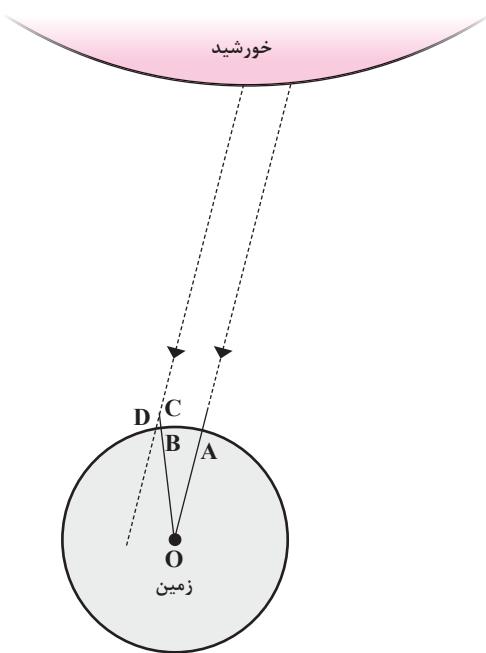
امروزه در مدارس از مقدار تقریبی  $3.14$  برای عدد  $\pi$  استفاده می‌کنیم که برای نوع خاصی از مسائل که در کلاس درس مورد بحث قرار می‌گیرند، تقریب خوب و کم‌خطایی محسوب می‌شود. اما برای محاسباتی که در پروژه‌های اساسی نظریه تعیین مسیر حرکت کشته و هوایپما، کاربردهای نظامی و سایر ملزمومات زندگی امروزه کاربرد دارند، به تقریب بهتری نیاز داریم. در این گونه موارد، غالباً  $\pi$  با ده رقم اعشار کافی است. حتی برای محاسبات در زمینه نجوم به بیشتر از پنجاه رقم اعشار بی نیاز نداریم، هر چند با قدرت ابرایانه‌های امروزی قادریم این عدد را با دقت بیشتر از صدها میلیون رقم اعشار محاسبه کنیم. اطلاعات زیادی در مورد عدد  $\pi$  در اینترنت قابل دسترس است که از آن جمله می‌توانید به آدرس‌های زیر مراجعه کنید:

۱) <http://www.angio.net/pi/digits.html>

۲) [http://archive.org/stream/pi\\_to\\_100000000\\_places/](http://archive.org/stream/pi_to_100000000_places/)

با مراجعه به سایتها ذکر شده و سایر منابع مربوط در اینترنت می‌توانید عدد  $\pi$  را با بیش از صد میلیون رقم اعشار به دست آورید. ما در اینجا این عدد را با  $20$  رقم اعشار برای شما ارائه می‌کنیم.

$\pi = 3.1415926535$	$2643383279$	$5028841971$
$6939937510$	$5820974944$	$5923078164$
$8628034825$	$3421170679$	$3282306647$
$938446095$	$5359408128$	$4811174502$
$8410270193$	$8521105559$	$6446229489$
$5493038196$		



در شکل، پرتوهای خورشیدی که به صورت موازی بر زمین می‌تابند، به نمایش گذاشته شده‌اند. نقاط A، O و B به ترتیب موقعیت‌های شهر آسوان، مرکز زمین و شهر اسکندریه هستند. در نقاط A و B به ترتیب ستون‌های عمودی در دو شهر آسوان و اسکندریه را رسم کرده‌ایم. همچنین، در این دو نقطه، مساحه‌ایی بر دایره نمایشگر زمین کشیده‌ایم تا با توجه به اینکه شعاع بر خط مماس در یک نقطه از دایره عمود است، رسم شکل راحت‌تر باشد. BD و BC به ترتیب ستون‌عمودی و سایه آن در اسکندریه هستند. زاویه  $\angle BCD$  زاویه تابش خورشید در اسکندریه در آن زمان به خصوص است که طبق محاسبه اراتستن  $7/2$  درجه بود. زاویه  $\angle AOB$  یعنی زاویه بین امتدادهای پرتوهای خورشید، به دلیل اینکه OC مورب دو خط موازی است، با زاویه  $\angle BCD$  برابر است و کمان AB (کمان و اصل دو شهر با زاویه مرکزی نظیرش یعنی  $\angle AOB$ ) برابر است.

۱. پاپیروس رایند (Rhind Mathematical Papyrus). طومار پاپیروسی با بلندی ۳۳ سانتی‌متر و عرض ۵۶۵ سانتی‌متر که در یک معبد در شهر تبس (Thebes) پیدا شده، پوزش‌ترین منبع اطلاعات در مورد ریاضیات مصر باستان است. طومار را در سال ۱۸۵۸ میلادی مرد اسکندری شاهزاده ۲۵ ساله‌ای به نام «هنری رایند» (Henry Rhind) که به‌خاطر مدواه به مصر رفته و در آنجا به باستان‌شناسی علاقمند شده بود، در بازاری در لوکسور (Luxor) مصر خرید. پس از مرگ زود هنگام رایند در ۳۰ سالگی، طومار در سال ۱۸۶۴ م به موزه لندن منتقال یافت و از آن زمان به این نام موسوم شد.

## 2. Ancient Egypt

۳. ارشمیدس (۲۸۷ ق.م تا ۲۱۲ ق.م) فیلسوف، ریاضی‌دان و منجم یونان باستان که از اهالی جزیره ساموس در دریای مدیترانه بود و در جوانی برای آموختن دانش به اسکندریه مصر رفت.
۴. بطلمیوس (۱۰۰ تا ۱۷۰ بعد از میلاد) ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و جغرافی‌دانی در اسکندریه مصر بود.
۵. چانگ چی تسو (Chung Chi Tsu)، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس چینی قرن پنجم میلادی.
۶. ویلیام شانکس (۱۸۱۲ تا ۱۸۸۲ میلادی) ریاضی‌دان آماتور انگلیسی که با فرمول  $\frac{\pi}{4} = \text{Arc tan}(\frac{1}{5}) - \text{Arc tan}(-\frac{1}{239})$  تا ۷۰ رقم که ۵۲۷ رقم آن صحیح بود، پی را محاسبه کرد.
۷. یوهان هاینریش لامبرت (Johann Heinrich Lambert)، فیلسوف و ریاضی‌دان سوئیسی.
۸. اراتستن منجم مدرسه اسکندریه مصر بود که به سال ۲۷۴ پیش از میلاد در آسوان کنونی متولد شد و در ۱۹۶ پیش از میلاد درگذشت.
۹. شهر سین (Cyrene city)، آسوان کنونی واقع در مصر است.

1. Kraw cewicz, Wieslaw, The Number  $\pi$  and the Earth's circumference, Pi In the sky, December 2000.

ولی در آن زمان به خصوص با اندازه‌گیری طول سایه و ارتفاع یکی از این ستون‌های عمودی، زاویه تابش نور خورشید را اندازه گرفت و عدد  $7/2$  درجه را بدست آورد. چون این زاویه با زاویه‌ای که امتدادهای دو ستون عمودی در دو شهر آسوان و اسکندریه ساخته بودند، برابر بود (دلیل این امر را در توضیح شکل آورده‌ایم)، متوجه شد زاویه‌ای مرکزی که امتدادهای دو ستون در مرکز زمین می‌سازند، برابر  $7/2$  درجه است.

این یعنی کمان و اصل بین دو شهر اندازه‌ای معادل  $7/2$  درجه دارد و چون فاصله دو شهر در آن زمان حدود  $833$  کیلومتر محاسبه شده بود، اراتستن با نوشتن تناسب  $\frac{7/2}{x} = \frac{833}{4165}$ ، مقدار x را که همان محیط زمین است را  $4165$  کیلومتر بدست آورد که با مقدار واقعی آن که حدود چهل هزار کیلومتر اختلاف است،  $1650$  کیلومتر دارد. دلیل این اختلاف محاسبه نادقیق فاصله دو شهر بود. در آن زمان، از واحد «Stadium» که معادل یک ششم کیلومتر است، استفاده می‌شد. همچنین، باید توجه داشت که مسیر بین دو شهر، به دلیل اینکه زمین کره کامل نیست، نمی‌تواند کمان دایره‌ای واقعی در نظر گرفته شود. در ادامه، اراتستن با تقسیم عدد  $4165$  بر عدد پی، قطر زمین را  $13257$  کیلومتر محاسبه کرد.

## تمرین

شما نیز با استفاده از وسائل ساده دایره‌ای شکل مانند لیوان، قابلمه، تشت و بشکه می‌توانید تقریبی از  $\pi$  بدست آورید. پس دست به کار شوید!

## پی‌نوشت‌ها\*

## ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

فروخته  
فروخته

تعطیلات عید تازه تمام شده بود و فرهاد کوچولوی ما به مدرسه رفته بود. معلم فرهاد از همه بچه‌ها خواست که از تعطیلات و ماجراهای آن برای بقیه تعریف کنند. فرهاد با تعریف داستان‌های خود از تعطیلات، دو معما برای آن‌ها به جا گذاشت:

### داستان اول:

امسال همه اعضای خانواده ما سه روز به مسافرت رفته بودند و من در خانه تنها بودم. شب‌ها به خانه عموهایم می‌رفتم. خانه‌های سه عمومی رأس‌های یک مثلث هستند که خانه ما درون آن قرار دارد. محیط این مثلث تقریباً ۱۲ کیلومتر است. از آنجا که می‌خواستم هر شب خانه یکی از عموها باشم، اول تصمیم گرفتم از خانه‌مان راه بیفهم و به خانه عمومی بزرگم بروم. سپس از آنجا به خانه عمومی وسطی و از آنجا به خانه عمومی کوچکم بروم. در نهایت هم به خانه‌مان برگردم.

بعد دیدم به این ترتیب مسیرهای دیگری هم دارم. مثلاً می‌توانم اول به خانه عمومی کوچک، بعد به خانه عمومی بزرگ و بعد به خانه عمومی وسطی بروم و در نهایت به خانه برگردم. با توجه به مقدار فاصله‌های خانه‌ها از هم، طول همه این مسیرها (را که شش مسیر مختلف بودند) محاسبه کردم و عدددهای حاصل را با هم جمع زدم و به عدد ۸۰ کیلومتر رسیدم. اما سرانجام طور دیگری عمل کردم: برای آنکه هر روز به خانه‌مان هم سری زده باشم، اول به خانه عمومی بزرگ رفتم و به خانه‌مان برگشتم، بعد به خانه عمومی وسطی رفتم و به خانه برگشتم و در نهایت به خانه عمومی کوچک رفتم و به خانه خودمان برگشتم. حالا می‌توانید بگویید در مجموع چند کیلومتر راه رفتی؟



### داستان دوم:

وقتی به خانه هر یک از عموهایم رفتم، آن‌ها محبت کردند و مقداری پول به عنوان عیدی به من دادند. پولی که هر کدام از آن‌ها به من دادند، ضرب صحیحی از ده هزار تومان بود. وقتی به خانه رسیدم، محاسبه عجیب و غریبی روی این سه عدد (مقدار پول هر یک از عموهایم) انجام دادم: ابتدا ۱۰ برابر مجموع پول عمومی بزرگ و عمومی وسطی را با پول عمومی کوچک جمع کردم. سپس حاصل را چهار برابر کردم و از این حاصل، ۳۶ برابر مجموع پول‌های عمومی وسطی و عمومی کوچک را کم کردم، ۳۳ برابر پول عمومی کوچک را به آن اضافه کردم، و ۶۰ درصد پول عمومی کوچک را هم از حاصل کم کردم. نتیجه مساوی  $1/852/000$  شد! حالا می‌توانید بگویید هر یک از عموها چقدر به من عیدی دادند؟!



## گفت و گوی مجله ریاضی رشد برهان با دکتر مجید میرزا وزیری استاد جوان ریاضی

# ریاضیات پژوهشی از زنگی ام شک

اشاره

« طفلکی بودام از ترس به خود می‌لرزید. وقتی تنها باشی و کسی در کنارت نباشد، این طور می‌شوی. فرقی نمی‌کند بزرگ باشی یا کوچک، آدم باشی یا بره. هرجا باشی و در هر سنی باشی، دوست داری کسی با تو باشد. اصل‌اشاید همه ما برای اینکه با کسی باشیم، اینجا هستیم. مدرسه هم با کوکو بود، و دریا هم با موج‌هایش. ».»

این بخشی از کتاب «گذشته‌ای که می‌آید»، نوشته مجید میرزا وزیری است و از همین جا می‌توان به طبع ناب ادبی ایشان پی برد. جالب آنکه این طبع داستان‌نویسی و داستان‌پردازی به یک ریاضی‌دان جوان تعلق دارد. در تاریخ داشته‌ایم ریاضی‌دانان و دانشمندانی که طبع شعر و داستان‌گویی داشته‌اند و نمونه بارز آن لوئیس کارول نویسنده داستان مشهور «آلیس در سرزمین عجایب» است که استاد ریاضی آکسفورد بود؛ و امروز مجید میرزا وزیری ریاضی‌دان جوان ایرانی نمونه بارز دیگری بر چند بعدی بودن شخصیت یک استاد ریاضی است.

مجید میرزا وزیری زاده اسفندماه ۱۳۵۰، تحصیلات ابتدایی و متوسطه خود را در تهران به اتمام رساند و برخلاف میل باطنی اش به تحصیل در رشته ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد ادامه داد و تحت تأثیر یکی از استادان آن دانشگاه، دکتر آدینه محمد نارنجانی (که خود از نام آوران عرصه ریاضی ایران و از شاگردان مکتب زنده‌یاد دکتر مصاحب است)، به ریاضیات علاقه‌مند شد و تا دکترای ریاضی از آن دانشگاه پیش رفت. ایشان ضمن تدریس ریاضیات در دانشگاه فردوسی مشهد، از پیشگامان ترویج ریاضیات در جامعه و به خصوص در میان جوانان و دانش‌آموزان است و به این منظور، علاوه بر تألیف چند کتاب که ریاضیات را در قالب داستان‌های لطیف به رشته تحریر در آورده‌اند، پژوهش‌های با عنوان مسابقه «شهر ریاضی» در مشهد (و بعداً چند شهر استان خراسان و در ادامه در چند استان کشور) از دهه ۱۳۷۰ شمسی به اجرا درآورده و به سبکی جذاب و منحصر به فرد، جوانان و دانش‌آموزان علاقه‌مند را با مفاهیم ریاضی آشنا کرده است. بدلیل همین روحیه شاداب و پرشور، میرزا وزیری به عنوان مسئول شاخه جوان انجمن ریاضی ایران انتخاب شده است (ایشان از اعضای پیوسته شورای انجمن ریاضی ایران است). دی‌ماه ۱۳۹۶ فرستی مغتنم دست داد تا با ایشان گفت و گویی صمیمی داشته باشیم. خلاصه‌ای از گفت و گوییمان را در ادامه می‌خوانید.

**شرقی:** امروز چهارشنبه ششم دی‌ماه ۱۳۹۶، در خدمت آقای دکتر مجید میرزا وزیری هستیم. اگر اجازه بدهید، سؤال نخست را از اینجا شروع کنیم که شما در بهمن‌ماه ۱۳۹۴ در ویژه برنامه‌ای با عنوان «حافظ و ریاضیات» در شبکه ۴ سیمای جمهوری اسلامی شرکت داشتید و در آنجا اشاره کردید که: نگاه ریاضی‌دانان به شعر از افراد عادی متفاوت است. وایرانستراوس هم جمله معروفی دارد و می‌گوید: «ریاضی‌دان باید تاحدودی هم شاعر باشد». آیا واقعاً نگاه ریاضی‌دان به شعر متفاوت است و اگر شما این ادعا را دارید، دلیلتان برای آن چیست؟

**میرزا وزیری:** می‌تواند متفاوت باشد، همان‌طور که نگاه‌شان به پدیده‌های دیگر هم ممکن است متفاوت باشد. ممکن است به نظم شعر توجه کنند، یا به تقارن‌های موجود در آن. یا ممکن است آن شعر، آن‌ها را به یاد یک قضیه ریاضی بیندازد. حتی نگاه ریاضی‌دان به ضرب المثل‌ها هم ممکن است متفاوت باشد. مثلاً با شنیدن ضربالمثل «قطره قطره جمع گردد و لانگهی دریا شود»، ممکن است ریاضی‌دان ناخودآگاه به یاد سری معروف به «سری همساز»<sup>۱</sup> بیفتد که گرچه اجزای آن کوچک و جزئی هستند، اما مجموع آن‌ها بی‌نهایت می‌شود!

**شرقی:** یعنی اگر اهل شعر باشند، با شنیدن یا خواندن شعر همین واکنش‌ها را ممکن است داشته باشند؟

**میرزا وزیری:** ممکن است اهل شعر هم نباشند، ولی واکنش‌شان نسبت به آن با افراد عادی متفاوت باشد. حتی تجربه‌من می‌گوید ریاضی‌دانان نسبت به دانشمندان علوم دیگر هم رفتار منحصر به فردی دارند و گاه حتی رفتارشان نسبت به پدیده‌های گوناگون متناقض هم بوده است!

**شرقی:** باز شما در همان برنامه گفتید که حافظ در شعرهایش به نوعی روش‌های ریاضی را به کار می‌برد است. مثلاً استفاده از کلیدواژه‌ها برای ساده و خلاصه کردن مفاهیم و مضامین طولانی، در یک یا چند کلمه، همان‌طور که ما در ریاضیات از عنوان‌های مثل تابع، حد، پیوستگی... برای تداعی مفاهیمی گستردۀ و طولانی استفاده می‌کنیم، حافظ هم در شعر خود از این عنوان‌ها بسیار استفاده می‌کند. حتی ادعا کردۀ اید که حافظ منطق و نظم ریاضی را هم در شعرهایش به کار می‌برده است. آیا شاهدی برای تأیید این موضوع دارید؟

**میرزا وزیری:** من ادعا نمی‌کنم که حافظ حتماً منطق ریاضی می‌دانسته و از آن استفاده می‌کرده است، ولی ظرفیف و پارادوکس‌های جالبی در شعرهایش به چشم می‌خورند، مثل این نمونه:

با که این نکته توان گفت که آن سنگین دل  
کشت ما را و دم عیسی مریم با اوست



فارسی را نوشت. یا مرحوم شهریاری که غیر از کارهای ریاضی داستان می‌نوشت و ترجمه هم می‌کرد.

● **میرزاوژیری:** شعر جنبه احساسی ادبیات است. اما شما در ادبیات و داستان‌نویسی هم ارتباط زیادی با ریاضیات می‌بینید. مثلاً شما داستان‌نویسی پلیسی را نگاه کنید. وقتی یک مسئله ریاضی را حل می‌کنیم، می‌بینیم که رابطه‌های ریاضی زیادی نوشته می‌شوند که به ظاهر هیچ ربطی به هم و به هدف نهایی مسئله ندارند، اما وقتی مسئله به طور کامل حل می‌شود، نقش این رابطه‌ها و فرمول‌ها را بهتر درک می‌کنید و می‌فهمید آن نوشته‌ها در واقع سرنخ‌هایی برای رسیدن به اثبات انتهایی هستند. در یک رمان پلیسی هم دقیقاً همین طور است و نوشته‌های بی‌ربط اولیه در حقیقت مقدمات یک کشف نهایی را توسط کارگاه پلیس سامان‌دهی می‌کنند.

پس ریاضی دان هم موقع حل یک مسئله انگار دارد مقدمات یک داستان پلیسی را سرهمندی می‌کند! ولذا ریاضی دان‌های بزرگ به لحاظ ادبی باید قوی باشند تا آنچه می‌نویسنند، توسط خواننده به خوبی درک شود. ولی وقتی به شعر می‌رسیم، اتفاقاً نباید به راحتی درک و فهمیده شود و اگر ایهام وجود داشته باشد و زبان دو پهلو به کار گرفته شود، بهتر است! و به نظر ادبی غالب‌تر است، در حالی که در ریاضیات این طور نیست.

■ **شرقی:** شما بارها گفته‌اید که حدود ۳۰ سال پیش زمانی که دانش‌آموز دیربرستانی بودید، با یک کتاب داستان مواجه شدید که فیزیک را به زبانی ساده شرح می‌داد. این به شما انگیزه داد تا فکر کنید، آیا ریاضیات را هم می‌شود این‌طور در قالب داستان توضیح داد و این‌ها

دم عیسی باید زنده کند، در حالی که اینجا دارد می‌کشد! یا می‌توان نمونه‌هایی آورد که انگار حافظ دارد با نوعی برهان خلف موضوعی را ثبات می‌کند. البته نمی‌توانم بگویم حتماً با منطق ریاضی و قواعد آن آشنایی داشته و از آن آگاهانه استفاده کرده است. هیچ قرینه تاریخی هم برای آن ندارم و علاقه‌ای هم به تعقیب موضوع نداشته‌ام.

■ **امیری:** به هر حال بسیاری از عرفای ما تاحدوی فلسفه خوانده بودند و از مبانی فلسفه، منطق است که آن هم قرابت‌هایی با منطق ریاضی دارد. پس می‌توان گفت که احتمالاً مطالعه یا حتی شنیدن از فلسفه تأثیرهایی در شعر این شاعران گذشته باشد.

■ **شرقی:** من ریاضی دانان به نسبت زیادی را می‌شناسم که به شعر علاقه داشته‌اند. مثلًا پروفیسور هشت روی دیوان شعر داشت، مرحوم حسین غیور که از استادان مسلم هندسه بود، شعرهای زیادی گفته بود... سؤالم این است که آیا ریاضیات که منطق محض است، با شعر که ریشه در احساس دارد، جور درمی‌آید؟

● **میرزاوژیری:** به نظرم یک وجه مشترک بین شعر و ریاضیات وجود دارد و آن نظم و تقارن است. البته یک وجه افتراق هم دارند و آن این است که ریاضیات با منطق رابطه محكمی دارد، در حالی که شعر باید لزوماً ریشه احساسی داشته باشد، ولی در ریاضیات احساس جایی ندارد.

من فکر می‌کنم این دو وجه در شخصیت خود معلم ریاضی هم وجود دارد. معلم ریاضی وقتی که درس می‌دهد، باید کاملاً با احساس باشد. یعنی مثل یک پدر دلسوز یا مادر فداکار با شاگردانش برخورد کند و اگر شاگرد چیزی را متوجه نشد، در نگاهش بخواند که او الان ناراحت است. بعد از کلاس بر سر او دست نواش بکشد و با او همدردی کند. اما همین معلم در مقام داوری و هنگام امتحان باید قاضی سختگیری باشد. بر اشتباهات خط قرمز بکشد، از آن‌ها نگذرد و کوچک‌ترین گذشتی در این مورد نداشته باشد.

بنابراین دو بعد متفاوت در زندگی معلم ریاضی وجود دارد: بعد احساسی که موقع تدریس است، و بعد منطقی و سختگیر که موقع امتحان گرفتن ظهور می‌کند. این دو بعد در وجود معلم ریاضی باید وجود داشته باشد، حتی اگر شاعر نباشد. اما اگر شاعر هم باشد و شعر هم بگوید چه بهتر!

■ **امیری:** البته اگر از شعر هم فراتر برویم و در سطح کلان به ادبیات بنگریم، بسیاری از ریاضی دانان با ادبیات ارتباط نزدیکی داشته‌اند، از جمله مرحوم مصاحب که استاد مسلم ریاضیات بود. اگرچه شعر نمی‌گفت، اما با ادبیات ارتباط زیادی داشت و خوب می‌نوشت و فرهنگ زبان

مسئله‌های را در این کتاب دیده‌ام و فهمیده‌ام. خودت هم می‌توانی با خواندن آن، راه حل را ببینی و متوجه شوی! این برخورد ایشان تأثیر خیلی مثبتی بر من گذاشت و باعث شد به طور مؤثری به ریاضیات علاقه‌مند شوم. از ترمه‌های سوم و چهارم به بعد دیگر راه افتادم و نمره‌هایم پیشرفت خوبی کرد. در انتهای دوره کارشناسی، کنکور کارشناسی ارشد شاگرد اول شدم و طبق قانونی که آن موقع بود، توانستم بدون گذراندن دوره کارشناسی ارشد، بی‌واسطه وارد دوره دکترای ریاضی شوم.

■ **شرقی:** گرایش دکترا بستان چه بود؟

**میرزا وزیری:** دکترا آنالیز ریاضی گرفتم.

■ **امیری:** استادان اثرگذارتران در دوره دانشگاه چه کسانی بودند؟

● **میرزا وزیری:** در درجه اول همان دکتر نارنجانی و بعد دکتر پور عبدالله که اخیراً فوت شد و دکتر نیکنام. تأثیر دکتر نارنجانی چنان بود که او اخر دوره کارشناسی با دختر ایشان ازدواج کرد و دامادشان شدم!

■ **شرقی:** بعد از این مرسیم به شهر ریاضی که پس از اتمام دوره دکترا آن را راهنمایی کردید. در این مورد هم توضیح بدهید.

● **میرزا وزیری:** من در سال ۱۳۷۸ دکترا گرفتم و آن موقع شهر ریاضی را راهنمایی نکردم. شهر ریاضی تقریباً سال ۱۳۸۱ راهنمایی شد، اما ایده آن را در سال ۱۳۷۸ با انتشار کتاب «با ذره تا مهر» ارائه کردم. در آن کتاب داستانی وجود دارد درباره شخصی که می‌خواهد به کشور «ریاضی» برود و باید وزیر بگیرد.

به سفارتخانه‌ای می‌رود که نگهبان آن فردی به نام آقای  $\pi$  است. سرانجام او وارد کشور ریاضی می‌شود و می‌بیند واحد پول آن‌ها مسئله‌های ریاضی است. هر کس که مسئله‌های بیشتری حل کند، پولدارتر است! برای خرید هم باید مسئله‌های ریاضی حل کنید!

بعد همین ایده‌ها را در مسابقه شهر ریاضی پیاده کردیم. اولین بار با مشارکت یکی از مدرسه‌ها این مسابقه را برگزار کردیم و ۲۱ نفر در آن شرکت کردند که هفت تیم سه نفری بودند. اسم آن هم «مسابقه تیمی ریاضی» بود و این حدود ۱۵ سال پیش بود. اسم شهر ریاضی را خود بچه‌ها روی آن گذاشتند.

■ **شرقی:** قدری در مورد آن بیشتر توضیح می‌دهید که اصلاً شهر ریاضی چیست و چه اتفاقاتی در آن می‌افتد؟

● **میرزا وزیری:** در واقع یک مسابقه ریاضی است. بچه‌ها به محض ورود به شهر ریاضی، برگه‌هایی را که روی آن‌ها تصویرهایی از ریاضی دانان وجود دارد یا جمله‌هایی از آنان نوشته شده است، می‌گیرند که حکم پول را دارند. بعد با آن می‌توانند مسئله بخزنند و اگر حل کنند، پول



به تألیف کتاب شما، البته سال‌های بعد، به نام «با ذره تا می‌نهاست مهر» منجر شد. شما آن زمان اصلاً حسن خاصی نسبت به ریاضیات داشتید یا خیر؟

● **میرزا وزیری:** موقعی که آن کتاب فیزیک را خواندم، هیچ علاقه‌ای به ریاضیات نداشتم، ولی جالب بود که از بعضی کتاب‌های ریاضی خوش‌نمی‌آمد؛ با اینکه از ریاضیات متنفر بودم!

■ **شرقی:** واقعاً متنفر بودید؟

● **میرزا وزیری:** من در کلاس دوم دبستان ریاضیات را تکماده کردم! یادم هست یک مسئله جمع داده بودند که انجام دهیم و باید هشت را به اضافه نه می‌کردیم. من فکر می‌کردم، انسان‌هایی که دتا انگشت دارند، چطور می‌توانند هشت را با نه جمع کنند؟! کلاً با ریاضیات میانه خوبی نداشتم. به دبیرستان که رفتم، در جبر و هندسه نمره‌های ضعیف فراوان داشتم، ولی بعضی از کتاب‌های ریاضی، مثلاً کتاب‌های پرویز شهریاری را خیلی دوست داشتم، اصلاً فکر نمی‌کردم زمانی ریاضیات بخش مهمی از زندگی ام شود.

■ **شرقی:** خب در دانشگاه نگاهتان به ریاضی چطور بود؟

● **میرزا وزیری:** ترم اول که بیشتر درس‌هایم پیش‌دانشگاهی بودند و واحدهای زیادی نگذراندم. در ترم دوم هم چندان علاقه‌ای به دروس ریاضی نداشتم، اما از ترم سوم به بعد تحت تأثیر یکی از استادانم، به ریاضیات علاقه‌مند شدم. درس مبانی ریاضیات را با آقای دکتر نارنجانی داشتم. من در مورد یک مسئله اشکال و ایراد داشتم، از ایشان پرسیدم. ایشان، اولاً برخلاف سایر استادانی که دیده بودم، گفت من راه حل را نمی‌دانم که این خودش نکته جالبی بود. ثانیاً هفتۀ بعد آمد کنار صندلی من -مرا پیش خودش صد‌انگشت - و کتابی به من داد و گفت: من راه حل



● **میرزا وزیری:** معماها و سرگرمی‌های ریاضی، به خاطر اینکه می‌توانند بدون درگیری با فرمول‌های ریاضی، با عامله مردم و حتی ناآشنایان با ریاضی و دانش آموزان غیرعلاقه‌مند به ریاضی هم ارتباط برقرار کنند، اهمیت خاصی در گسترش ریاضیات و ترویج آن بین مردم عادی دارند. مثلاً پارسال بچه‌ها به ما پیام دادند که آیا نمی‌خواهید برای شب یلدا مسئله مسابقه‌ای طرح کنید؟ این مارا به فکر انداخت و آدمیم معماهی مطرح کردیم با عنوان «جوچه‌هایت را بشمار!» که با بحث یلدا و آخر پاییز تناسب هم داشت. در معمای باید به عددی می‌رسیدند که تعداد جوچه‌هاییشان بود و تا آخر پاییز (یعنی ثانیه آخر آن شب) فرصل ارسال آن را داشتند. خب استقبال عمومی خیلی خوبی از آن به عمل آمد.

■ **امیری:** به عنوان سؤال آخر، مجله برهان را چقدر می‌شناسید و چه توصیه‌هایی برای بهبود کار آن دارد؟

● **میرزا وزیری:** من زمانی که دانشجوی کارشناسی بودم، یعنی در سال‌های آغاز انتشار برهان، با آن آشنا شدم. آن را می‌خواندم، مقالاتش را دنبال می‌کردم و از مطالعه آن لذت می‌بردم. امروز هم آن را مجله مفیدی می‌دانم. اما یک اشکال عمده این است که امروز دانش آموزان با نشریات کاغذی کمتر می‌توانند ارتباط برقرار کنند. اگر می‌شد، اپلیکیشن پیش‌خوان برهان برای گوشی‌های همراه ابداع شود و بچه‌ها بتوانند پیش از انتشار، بخش‌ها یا تیترهایی از آن را بخوانند، حتماً به خریدن و مطالعه مجله تشویق می‌شوند.

■ **امیری:** تشکر از وقتی که در اختیار ما قرار دادید.

● **میرزا وزیری:** من هم از شما سپاس‌گزارم.

بیشتری می‌گیرند. من ۱۲ ایراد متفاوت به امتحانات رایج مدرسه‌ای وارد می‌دانم که سعی کرده‌ام در مسابقه شهر ریاضی این ایرادات را رفع کنم.

مثلاً یکی از ایرادها این است که در یک امتحان معمولی، بچه‌ها باید قبل‌آماده شوند و در امتحان درس پس بدهنند. اما در شهر ریاضی از یکدیگر درس می‌گیرند. در امتحانات معمولی کسی نمی‌تواند به دیگری کمک کند، ولی در شهر ریاضی این امکان وجود دارد. ایراد مهم دیگر این است که در امتحانات عادی، اگر دانش آموز سؤال اول را نتواند درست پاسخ دهد، چهار اضطراب می‌شود و نمی‌تواند به سوالات دوم و سوم هم، به درستی پاسخ دهد و وقت هم که رو به اتمام می‌رود، استرس دانش آموزان بیشتر و بیشتر می‌شود. اما در شهر ریاضی این طور نیست. اگر دانش آموز سؤالی را نتواند حل کند، می‌تواند آن را به دیگر گروه‌ها بفروشد و حتی بالاتر از قیمت خرید بفروشد و سود کند! مثلاً سؤالی را که به قیمت ۳۰۰ پروف<sup>۲</sup> خریده، می‌تواند به قیمت ۴۰۰ پروف بفروشد و بدون آنکه آن را حل کند، ۱۰۰ پروف سود کند!

به تدریج که از مسابقه می‌گذرد، ارزش مسئله‌ها بیشتر می‌شود (مشابه واقعیت تاریخی آن که هرچه یک مسئله مدت زمان بیشتری حل نشده باقی می‌ماند، ارزش آن بیشتر و بیشتر می‌شود). مانند قضیه فرمای ۳۰۰ سال حل نشده باقی مانده بود و حل آن خیلی با ارزش بود، یا حدس گلدباخ که هنوز حل نشده است).

■ **امیری:** در مورد تأثیر معماها و بازی‌های ریاضی در آموزش ریاضی بگویید.

## پرسش‌های پیکارجو! ۳

چند عدد طبیعی سه رقمی  $\overline{abc}$   
وجود دارد که داشته باشیم:  
 $2\overline{abc} = \overline{bca} + \overline{cab}$

۹

۱۲

۱۵

۱۸

۲۱

# اثبات همروزی میانکهها

## و چند نتیجه دیگر به کمک مساحت‌ها

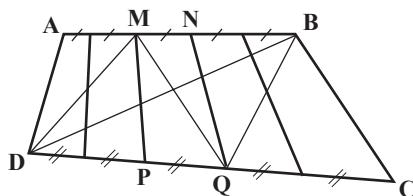
### مقدمه

یکی از مفهوم‌هایی که دانش آموزان از سال‌های گذشته با آن آشنا هستند، طریقه محاسبه مساحت مثلث است که نتیجه بلافصله اصول موضوعه مساحت است. درک درست این مفهوم ساده و کاربرد آن می‌تواند قضیه‌های زیادی را اثبات کند. در این نوشته با تمرکز روی فرمول محاسبه مساحت مثلث و با استفاده از قضیه‌های مطرح شده در کتاب درسی، تلاش کرده‌ایم توان این فرمول را در حل و اثبات‌های طیف وسیعی از مستله‌ها و قضیه‌ها نشان دهیم.

بحث را با بیان نتیجه ساده‌ای از کتاب هندسه (۱) پایه دهم رشتۀ ریاضی آغاز می‌کنیم.



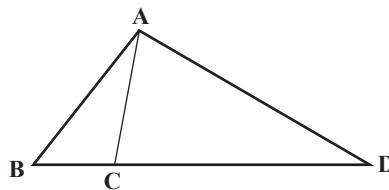
روح الله حسنی  
کارشناس ارشد ریاضی محض  
و دبیر ریاضی منطقه سنگر  
استان گیلان



شکل ۲

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle PMQ}}{S_{\triangle DMQ}} &= \frac{PQ}{DQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\triangle PMQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle DMQ} \\ \frac{S_{\triangle MNQ}}{S_{\triangle BMQ}} &= \frac{MN}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle BMQ} \\ \Rightarrow S_{\triangle MNPQ} &= S_{\triangle PMQ} + S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle DMQ} + \frac{1}{3} S_{\triangle BMQ} \\ &= \frac{1}{3} (S_{\triangle DMQ} + S_{\triangle BMQ}) = \frac{1}{3} S_{\triangle DMBQ} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BC}{CD}, \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{BC}{BD}$$



شکل ۱

**مثال ۱.** در شکل ۲، چهارضلعی ABCD محدب

است و اضلاع AB و CD هر یک به پنج قسمت متساوی تقسیم شده‌اند. مساحت چهارضلعی MNPQ چه کسری از مساحت چهارضلعی ABCD است؟

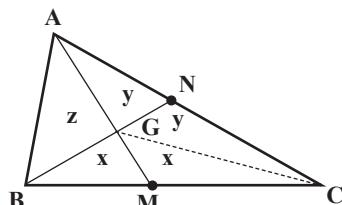
**حل:** از D به M و از Q به B وصل می‌کنیم. همچنین از Q به B و از D به A وصل می‌کنیم. بنابر نتیجه قبل داریم:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle DMB}}{S_{\triangle ABD}} &= \frac{MB}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{\triangle DMB} = \frac{3}{5} S_{\triangle ABD} \\ \frac{S_{\triangle DBQ}}{S_{\triangle BDC}} &= \frac{DQ}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow S_{\triangle DBQ} = \frac{3}{5} S_{\triangle BDC} \end{aligned}$$

## قضیه ۲

در هر مثلث، دو میانه یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

**اثبات:** فرض کنیم دو میانه  $AM$  و  $BN$  یکدیگر را در  $G$  قطع می‌کنند. قرار می‌دهیم  $S_{\triangle ABG} = z$  و داریم:



شکل ۴

$$\frac{S_{\triangle BGM}}{S_{\triangle GMC}} = \frac{BM}{CM} = 1 \Rightarrow S_{\triangle BGM} = S_{\triangle GMC} = x \quad (1)$$

$$\frac{S_{\triangle AGN}}{S_{\triangle GNC}} = \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow S_{\triangle AGN} = S_{\triangle GNC} = y \quad (2)$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{BM}{MC} = 1 \Rightarrow S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}$$

$$\Rightarrow x + z = x + 2y \Rightarrow z = 2y \Rightarrow S_{\triangle ABG} = 2S_{\triangle AGN}$$

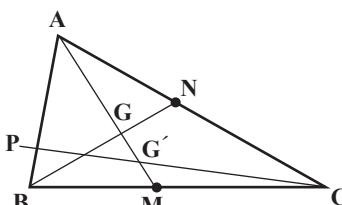
$$\Rightarrow \frac{GN}{BG} = \frac{S_{\triangle AGN}}{S_{\triangle ABG}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{به همین ترتیب می‌توان نشان داد: } \frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$$

## نتیجه ۲

در هر مثلث سه میانه همسر اند.

**اثبات:** فرض کنیم در مثلث  $ABC$ ، دو میانه  $AM$  و  $BN$  یکدیگر را در  $G$ ، و دو میانه  $CP$  و  $AM$  یکدیگر را در  $G'$  قطع کنند. بنا به قضیه ۲ داریم:



شکل ۵

$$\Rightarrow S_{\triangle DMBQ} = S_{\triangle DMB} + S_{\triangle DBQ} = \frac{3}{5} S_{\triangle ABD} + \frac{3}{5} S_{\triangle BDC} \\ = \frac{3}{5} (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}) = \frac{3}{5} S_{\triangle ABCD} \quad (2)$$

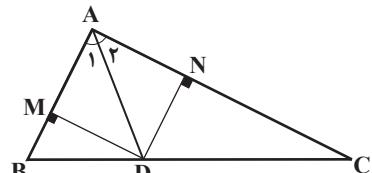
اکنون از (۱) و (۲) داریم:

$$S_{\triangle MNPQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle DMBQ} = \frac{1}{3} (\frac{3}{5} S_{\triangle ABCD}) = \frac{1}{5} S_{\triangle ABCD}$$

## قضیه ۱. (قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی)

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض حکم  
 $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



شکل ۲

**اثبات:** می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است. از  $D$  پای نیمساز بر  $AC$  و  $AB$  عمود کرده پای ارتفاعها را به ترتیب  $M$  و  $N$  نامیم. بنابراین  $DM = DN$ ، پس:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} DM \times AB}{\frac{1}{2} DN \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر نتیجه بیان شده در آغاز مطلب

داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

گرچه این قضیه با استفاده از قضیه تالس در کتاب درسی اثبات شده است. اما این اثبات با کمک مساحت هم خالی از لطف نیست. به عنوان تمرين و با استفاده از مساحت مثلث نشان دهید:

## تمرين

نیمساز هر زاویه خارجی مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

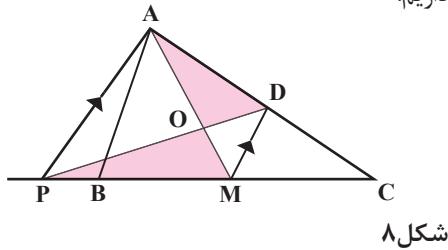
$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

از طرف دیگر، چون  $AX$  و  $YM$  موازی‌اند، بنابر  
قضیه شبه‌پروانه داریم:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOP} &= S_{\triangle XOM} \Rightarrow S_{\triangle CXY} = S_{\triangle XOM} + S_{\triangle MOYC} \\ &= S_{\triangle AOP} + S_{\triangle MOYC} = S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \end{aligned}$$

**مثال ۳.** در مثلث  $ABC$ ،  $M$  وسط ضلع  $BC$  است  
و نقطه‌ای دلخواه روی امتداد ضلع  $BC$  از طرف  $B$   
است. از  $M$  خطی به موازات  $AP$  رسم می‌کنیم تا  
را در  $D$  قطع کند. مساحت مثلث  $PDC$  چه کسری از  
مساحت مثلث  $ABC$  است؟

**حل:** از  $P$  به  $D$  وصل می‌کنیم تا  $AM$  را در  $O$  قطع  
کند. چون  $DM$  موازی  $AP$  است، بنابر قضیه شبه‌پروانه  
داریم:



شکل ۸

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOD} &= S_{\triangle POM} \\ \Rightarrow S_{\triangle PDC} &= S_{\triangle POM} + S_{\triangle ODCM} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle ODCM} = S_{\triangle AMC} \end{aligned}$$

اما چون  $AM$  میانه است، بنابراین:  
 $S_{\triangle AMC} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$   
 در نتیجه:  $S_{\triangle PDC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

**مثال ۴.** در مثلث  $ABC$ ،  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  به ترتیب بر  
اضلاع  $AB$ ،  $BC$  و  $AC$  طوری واقع‌اند که  
 $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  در نقطه  $O$  درون مثلث هم‌رس باشند. نشان  
دهید:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1 \quad (\text{رابطه ژرگون})$$

**حل:** از  $A$  و  $O$  بر  $BC$  عمود می‌کنیم و پای عمودها  
را به ترتیب  $H$  و  $K$  نامیم.

$$\begin{cases} \frac{GM}{AG} = \frac{1}{2} \\ \frac{G'M}{AG'} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{G'M}{AG'} \Rightarrow \frac{GM}{AG+GM} = \frac{G'M}{AG'+G'M} \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{G'M}{AM}$$

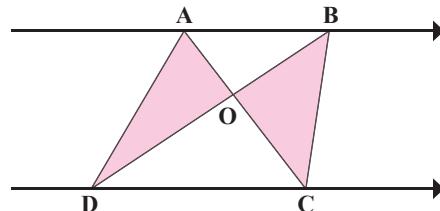
پس:  $G'M = GM$ . یعنی  $G'$  و  $G$  برهمنطبق‌اند.

لذا هر سه میانه در  $G$  هم‌رس‌اند.

قضیه زیر به عنوان ویژگی مساحت در کتاب درسی  
هندسه (۱) پایه دهم رشته ریاضی بیان شده است. این  
قضیه به «قضیه شبه‌پروانه‌ای» معروف است.

### قضیه ۳

فرض کنیم دو خط  $AB$  و  $CD$  موازی باشند،  
بهطوری که دو خط  $AC$  و  $BD$  در نقطه‌ای مانند  $O$   
یکدیگر را قطع کنند. مساحت دو مثلث  $OAD$  و  $OBC$   
با هم برابرند.

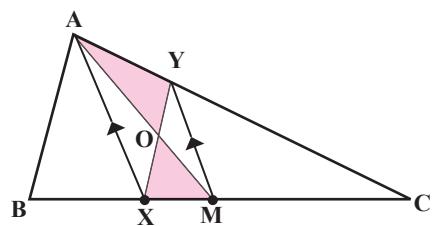


شکل ۶

**مثال ۲.** از نقطه  $X$  واقع بر ضلع  $BC$  از مثلث  $ABC$  به طوری که مثلث  $ABC$  به دو ناحیه  
هم مساحت تقسیم شود.

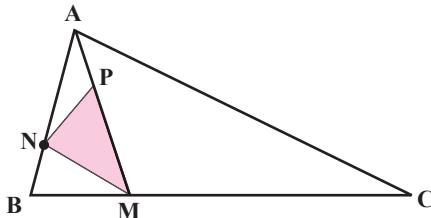
**حل:** فرض می‌کنیم  $M$  وسط ضلع  $BC$  باشد. از  $M$  به  
موازات  $AX$  خطی رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در  $Y$   
قطع کند. خط گذرنده از  $XY$  جواب مسئله است. چون

$AM$  میانه است، پس:



شکل ۷

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{3}CM}{\frac{4}{3}CM} = \frac{1}{4} \\
 \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle AMN}} \cdot \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABM}} \cdot \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

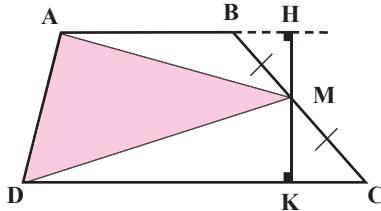


شکل ۱۰

**مثال ۶.** در ذوزنقه ABCD، M وسط ساق BC است. مساحت مثلث AMD چه کسری از مساحت ذوزنقه است.

**حل:** از M بر دو قاعده خطی عمود می‌کنیم تا آن‌ها را در H و K قطع کند. HK ارتفاع ذوزنقه است. دو مثلث CMK و BHM به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم همنهشت هستند، بنابراین:

$$HM = MK = \frac{HK}{2}$$

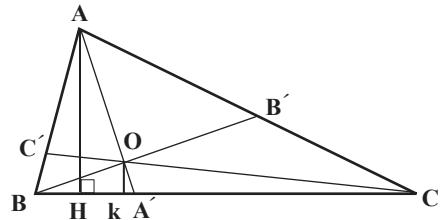


شکل ۱۱

- منابع\*
- اصلاح پذیر، بهمن و قهرمانی، محمدحسین (۱۳۸۵).
  - آموزش هندسه ۱. انتشارات مبتکان، تهران، چاپ هشتم.
  - حاجی بابایی و همکاران (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۲، پایه سوم ریاضی و فیزیک، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، تهران، چاپ بیست و نهم، نادر، کرد، حسین؛ بازویی، صادق (۱۳۸۵).
  - حاجی زاده، رحیمی، زهرا و همکاران (۱۳۹۵)، کتاب درسی هندسه ۱ (ویژه دانش آموزان ممتاز)، انتشارات خوشخوان، تهران، چاپ سوم.
  - حاجی زاده، رحیمی، زهرا و همکاران (۱۳۹۵)، کتاب درسی هندسه (۱) پایه دهم ریاضی و فیزیک، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، تهران، چاپ اول.

$$\stackrel{\Delta}{AH}: OK \parallel AH$$

$$\Rightarrow \frac{OA'}{AA'} = \frac{OK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}OK \cdot BC}{\frac{1}{2}AH \cdot BC} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}$$



شکل ۹

به همین ترتیب می‌توان نشان داد:  $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}}$  و  $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}$ . بنابراین:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}} = 1$$

**مثال ۵.** نقاط M، N و P را به ترتیب روی

AM و AB، BC و BN و AP =  $\frac{1}{2}AM$

مساحت مثلث MNP چه کسری از مساحت مثلث

ABC است؟

**حل:**

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle AMN}} &= \frac{MP}{AM} = \frac{AM - AP}{AM} = \frac{AM}{AM} - \frac{AP}{AM} \\
 &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{AN}{AB} = \frac{AN}{AN + BN} = \frac{AN}{AN + \frac{1}{2}AN} \\
 &= \frac{AN}{\frac{3}{2}AN} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM + CM} = \frac{\frac{1}{3}CM}{\frac{1}{3}CM + CM} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

# زوجیت در اعداد صحیح

زوجیت در عددهای صحیح اشاره دارد به اینکه هر عدد صحیح یا فرد است یا زوج. عدد صحیح  $n$  فرد است، هرگاه باقی‌مانده تقسیم آن بر ۲ مساوی یک باشد؛ و آن به شکل  $n=2k+1$  است. در غیر این صورت، عدد  $n$  زوج و به شکل  $n=2k$  است.

مجموع دو عدد زوج است، اگر هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. حاصل ضرب دو عدد زوج است، اگر حداقل یکی از آن عددها زوج باشند. این خواص به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{array}{ll} \text{فرد} = \text{فرد} \pm \text{زوج} & \text{زوج} = \text{فرد} \pm \text{زوج} \\ \text{زوج} = \text{زوج} \times \text{زوج} & \text{زوج} = \text{فرد} \pm \text{فرد} \\ \text{فرد} = \text{فرد} \times \text{فرد} & \text{زوج} = \text{فرد} \times \text{زوج} \end{array}$$

## مقسوم‌علیه‌ها (شمارنده‌ها)

فرض کنیم  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح باشند که  $a \neq 0$  باشد. در این صورت، به  $a$  مقسوم‌علیه  $b$  گفته می‌شود (بیان می‌شود  $a|b$ )، اگر یک عدد صحیح چون  $k$  وجود داشته باشد، به طوری که:  $b=ka$ . مقسوم‌علیه  $n$  را «مقسوم‌علیه بدیهی» می‌نامیم، هرگاه مساوی با ۱ یا خود  $n$  باشد. در غیر این صورت آن را «مقسوم‌علیه نابدیهی» می‌نامیم. مقسوم‌علیه سرِ برای  $n$  مقسوم‌علیه‌ی غیر از خود  $n$  است.

**تعریف عدد اول:** عدد اول آن است که فقط مقسوم‌علیه‌های بدیهی دارد. تعداد عددهای اول نامحدود است. قضیه اساسی حساب بیان می‌دارد که هر عدد صحیح می‌تواند به حاصل ضرب عددهای اول تجزیه شود.

## لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Parity	زوجیت
2. Integer	صحیح
3. Remainder	باقی‌مانده
4. Odd	فرد
5. Even	زوج
6. divisor	مقسوم‌علیه
7. Product	ضرب
8. Trivial	بدیهی
9. Prime number	عدد اول
10. Infinite	نامحدود، بی‌کران، بی‌نهایت

## Parity of Integers

The parity of an integer refers to whether the integer is odd or even. An integer  $n$  is odd if there is a remainder of one when it is divided by two, and it is of the form  $n=2k+1$ . Otherwise, the number is even and of the form  $n=2k$ .

The sum of two numbers is even if both are even or both are odd. The product of two numbers is even if at least one of the numbers is even. These properties are expressed as.

$$\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$$

$$\text{even} \pm \text{odd} = \text{odd}$$

$$\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$$

$$\text{even} \times \text{even} = \text{even}$$

$$\text{even} \times \text{odd} = \text{even}$$

$$\text{odd} \times \text{odd} = \text{odd}$$

## Divisors

Let  $a$  and  $b$  be integers with  $a \neq 0$  then  $a$  is said to be a divisor of  $b$  (denoted by  $a|b$ ) if there exists an integer  $k$  such that  $b=ka$ .

A divisor of  $n$  is called a trivial divisor if it is either 1 or  $n$  itself; otherwise it is called a nontrivial divisor. A proper divisor of  $n$  is a divisor of  $n$  other than  $n$  itself.

## Definition (Prime Number)

A prime number is a number whose only divisors are trivial. There are an infinite number of a prime number.

The fundamental theorem of arithmetic states that every integer number can be factored as the product of prime numbers.

ترجمه برای دانش آموزان

## 2.2 Divisibility, Primes, and Composites

The starting point for the theory of numbers is divisibility.

**Definition 2.2.1.** If  $a, b$  are integers we say that  $a$  divides  $b$ , or that  $a$  is a factor or divisor of  $b$ , if there exists an integer  $q$  such that  $b=aq$ . We denote this by  $a|b$ . Then  $b$  is a multiple of  $a$ . If  $b>1$  is an integer whose only factors are  $\pm 1, \pm b$  then  $b$  is a prime; otherwise,  $b>1$  is composite.

The following properties of divisibility are straightforward consequences of the definition.

### Theorem 2.2.1

- (1)  $a|b \Rightarrow a|bc$  for any integer  $c$ .
- (2)  $a|b$  and  $b|c$  implies  $a|c$ .
- (3)  $a|b$  and  $a|c$  implies that  $a|(bx+cy)$  for any integer  $x, y$ .
- (4)  $a|b$  and  $b|a$  implies that  $a=\pm b$ .
- (5) If  $a|b$  and  $a>0, b>0$  then  $a<b$ .
- (6)  $a|b$  if and only if  $ca|cb$  for any integer  $c \neq 0$ .
- (7)  $a|0$  for all  $a \in \mathbb{Z}$  and  $0|a$  only for  $a=0$ .
- (8)  $a|\pm 1$  only for  $a=\pm 1$ .

## آموزشی

دکتر محرم نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



### اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به طور فعال به حل آن‌ها پردازید و راه حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل  $150\text{ dpi}$ ) و یا تایپ کنید و بفرستید. در بیان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به پهترین‌ها جواز نفیسی اهدا می‌شود.

۳۶۴. بدون استفاده از ماشین حساب و رایانه مشخص کنید که  $N=22499$  اول است یا مرکب.

(فرستنده: فریبا بکرانی)

۳۶۵. در یک اگذیه‌فروشی  $12^{\circ}$  مشتری سفارش داده‌اند. نیمی از آن‌ها حداقل یک همبرگر سفارش داده‌اند. یک‌چهارم آن‌ها حداقل یک سالاد سفارش داده‌اند، و یک‌سوم آن‌ها فقط نوشیدنی سفارش داده‌اند. در این فروشگاه فقط همبرگر، سالاد، نوشیدنی فروخته می‌شود. چندتا از مشتری‌ها همبرگر و نوشیدنی سفارش داده‌اند، اما سالاد سفارش نداده‌اند؟

۳۶۶. در یک دانشگاه،  $\frac{1}{6}$  از دانشجویان در دوره کارشناسی ارشد درس می‌خوانند و  $\frac{4}{6}$  از دانشجویان در دوره کارشناسی.

همچنین، تعداد دانشجویان دوره دکترا سه برابر تعداد دانشجویان سال‌های سوم و چهارم کارشناسی است. تعداد دانشجویان سال‌های اول و دوم کارشناسی برابر است با: ۱۳۸. تعداد کل دانشجویان را به دست آورید.

### بخش اول: مسئله‌ها

۳۶۱. نشان دهید در نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$  هرگر رقم ۸ ظاهر نمی‌شود.

(فرستنده: فریبا بکرانی)

۳۶۲. عدد طبیعی  $n$  را بیابید به طوری که:

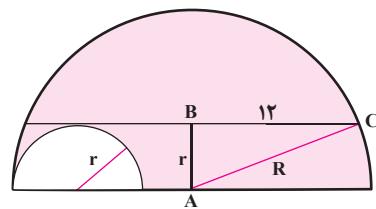
$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 10.$$

(فرستنده: فریبا بکرانی)

۳۶۳. حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید:

$$S_1 = \cos^{\circ} 1 + \cos^{\circ} 2 + \dots + \cos^{\circ} 90^{\circ}$$
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{99}{100}$$

(فرستنده: فریبا بکرانی)

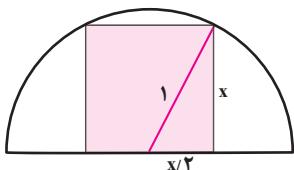


شکل ۱

مطابق شکل ۳، مساحت ناحیه رنگی برابر است با:

$$\frac{\pi}{2}(R^2) - \frac{\pi}{2}r^2 = \frac{\pi}{2}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{2}144 = 72\pi$$

.۳۳۲ در شکل های ۲ و ۳ دو نیم دایره یکسان رسم شده اند. یک مربع به مساحت  $S_1$  در نیم دایره اول و دو مربع به مساحت  $S_2$  (هر کدام) مطابق شکل در نیم دایره دوم محاط شده اند. نسبت  $S_1$  به  $S_2$  را به دست آورید.



شکل ۲

مطابق شکل ۲ داریم:

$$x^2 + \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5}$$

$$y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}$$

در نتیجه نسبت  $S_1$  به  $S_2$  برابر است با:  $\frac{8}{5}$

.۳۳۳ همه زوج عددهای حقیقی  $(a,b)$  را بیابید، به طوری که:

$$a+b=a \text{ و } ab=\frac{a}{b}$$

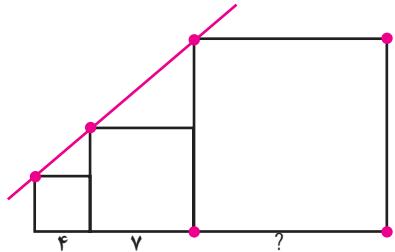
از تساوی  $ab=\frac{a}{b}$  نتیجه می شود  $b=1$  یا  $-1$  است ( $a$  نمی تواند صفر باشد). اگر  $b=1$  باشد، آن گاه باید داشته باشیم:  $a+1=a$  که  $a=-1$  نتیجه جواب ندارد. اگر  $b=-1$  باشد، آن گاه:  $a=(-1)+(-1)=2$  که نتیجه می دهد:  $a=\frac{1}{2}$ .

.۳۳۴ ثابت کنید هر عدد طبیعی فرد غیر از یک می تواند طول یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با طول اضلاع طبیعی باشد.

با توجه به تساوی  $2n+1 = 2k+1$  که در آن داریم:  $2k+2k = 2k+1$ ، خواهیم داشت:

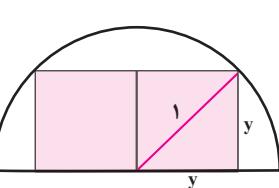
$$(2n+1)^2 = (k+1+k)((k+1)-k) = (k+1)^2 - (k)^2$$

.۳۶۷ سه مربع مطابق شکل ۱ در کنار هم رسم شده اند. اندازه ضلع دو مربع کوچکتر  $4$  و  $7$  است و سه رأس مربعها (مطابق شکل ۱) در یک راستا هستند. طول ضلع مربع بزرگتر را به دست آورید.



شکل ۱

.۳۶۸ به ازای چه مقدارهای صحیحی از  $x$ ، مقدار تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$  عددی صحیح است؟

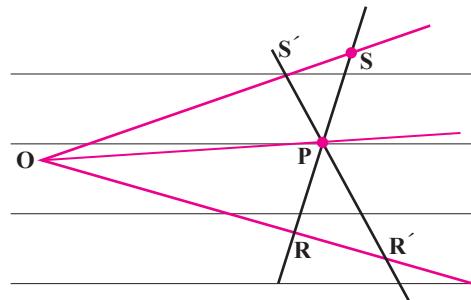


شکل ۲

.۳۶۹ ۱۰۰ سنگریزه روی میز وجود دارد. دونفر بازی زیر را ترتیب می دهند. هر نفر در نوبت خود بین ۵ تا ۱۰ سنگریزه برمی دارد. برنده کسی است که آخرین سنگریزه ها را بردارد. برنده کیست و راهبرد (استراتژی) برد او چیست؟

.۳۷۰ در شکل ۲،  $OP$  نیمساز زاویه  $ROS$  است و دو خط راست گذرنده از  $P$  دو ضلع زاویه را در نقاط  $R$ ،  $S$  و  $S'$  قطع کرده اند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{|OR|} + \frac{1}{|OS|} = \frac{1}{|OR'|} + \frac{1}{|OS'|}$$



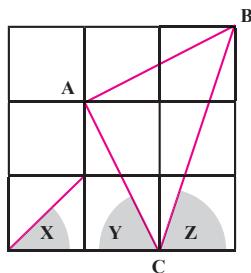
شکل ۲

## بخش دوم: راه حل ها

.۳۳۱ در شکل ۱ دو نیم دایره رسم شده اند و وتری به طول  $24$  بر نیم دایره کوچکتر مماس است. اگر این وتر موازی قطر افقی نیم دایره ها باشد، مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟

تقسیم می‌شود. در برش سوم بهتر است طوری خط برش را در نظر بگیریم که از تقاطع دو خط برش قبلی نگذرد. در این صورت پیتزا به ۷ قسمت تقسیم می‌شود. خط برش چهارم نیز بهتر است از تقاطع هیچ دو خط برش قبلی نگذرد که در این صورت ۱۱ قسمت تشکیل خواهد شد. می‌توان ثابت کرد: با  $\frac{n^2 + n}{2}$  خط برش پیتزا به  $n^2 + n$  قسمت تقسیم می‌شود.

۳۳۹. مجموع سه زاویه‌ای را که در شکل ۵ می‌بینید، به دست آورید.



شکل ۵

با توجه به شکل ۵، مثلث ABC قائم الزاویه و متساوی الساقین است. در نتیجه:  $\angle ACB = \angle x = 45^\circ$ . بنابراین مجموعه سه زاویه پرایم  $180^\circ$  است.

۳۴. در شکل ۶، چهل چوب کبریت در یک شبکه چیده شده‌اند. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم تا هیچ مربع دو شکای باقی نماند؟

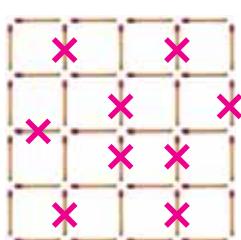
از چوبکبریت‌های بیرونی باید حداقل یک چوبکبریت را حذف کنیم. فرض کنید  $k$  چوبکبریت از چوبکبریت‌های بیرونی و  $1$  چوبکبریت از چوبکبریت‌های داخلی حذف کنیم. هر چوبکبریت بیرونی یک مربع  $1 \times 1$ ، و هر چوبکبریت داخلی  $2$  مربع  $1 \times 1$  را حذف می‌کند. در نتیجه:  $k + 2l \geq 16$

$$k + 2l \geq 16 + k$$

$$\frac{2}{2}(k+l) \geq 16 + l$$

$$k + l \geq 8 + \frac{l}{2}$$

پس:  $\frac{l}{2} \geq 8 - k$ . در نتیجه حداقل  $1$  برابر  $9$  است



شکار

در نتیجه  $k+1$  طول ضلع مثلث قائم الزوایهای با طول وتر  $n+1$  است.

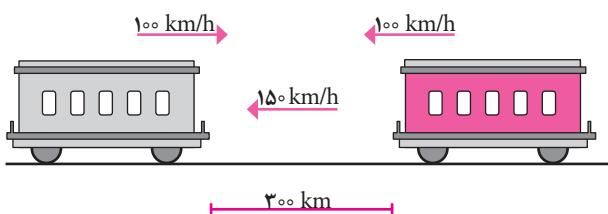
۳۳۵- اگر مجموع سه عدد دو رقمی  $aa$ ,  $bb$  و  $cc$ , عدد سه رقمی  $\overline{abc}$  باشد، رقم  $c$  را پیدا کنید.  $a$ ,  $b$  و  $c$  سه رقم متمایز هستند.

سه عدد  $\overline{aa}$ ,  $\overline{bb}$  و  $\overline{cc}$  مضرب ۱۱ هستند. در نتیجه:  
 $(a+b+c) = 10 \cdot a + 1 \cdot b + c$   
 $b+1 \cdot c = 89$  و  $a = 1$ .  $b+1 \cdot c = 89a$   
در نتیجه:  $c = 8$  و  $b = 9$

**۱۳۳۶- اگر همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را پشتسر هم در یک دیف بینویسیم، کدام رقم کمتر ظاهر می‌شود؟**

اگر عددہا را به فرم ۹۹۹، ۰۰۱، ۰۰۲، ... و ۰۰۰ بنویسیم،  
همه رقم‌ها به تعداد مساوی ظاهر خواهند شد. در نتیجه اگر  
عددہا را به فرم ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰۰۰ بنویسیم، رقم صفر کمتر از  
دیگر ارقام ظاهر خواهد شد.

۲۳۷ مطابق شکل ۴، دو قطار با سرعت  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  ۱۰۰ به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. دقیقاً زمانی که فاصله آن‌ها ۳۰۰ کیلومتر است، یک حشره از جلوی یکی از آن‌ها به سمت دیگری پرواز می‌کند و وقتی به دومی رسید، باز می‌گردد. سرعت حشره  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  ۱۵ است. حشره با رسیدن به هر قطار جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به سمت قطار دیگر حرکت می‌کند. حشره چه مسافتی را طی می‌کند؟



شکا ۴

چون دو قطار با سرعت  $\frac{km}{h} = \frac{100}{5} = 20$  حرکت می‌کنند،  
 $\frac{300}{200} = \frac{3}{2}$  ساعت طول می‌کشد تا دو قطار به هم برسند.  
 در این مدت حشره  $1/5 \times 15 = 3$  کیلومتر طی خواهد کرد.

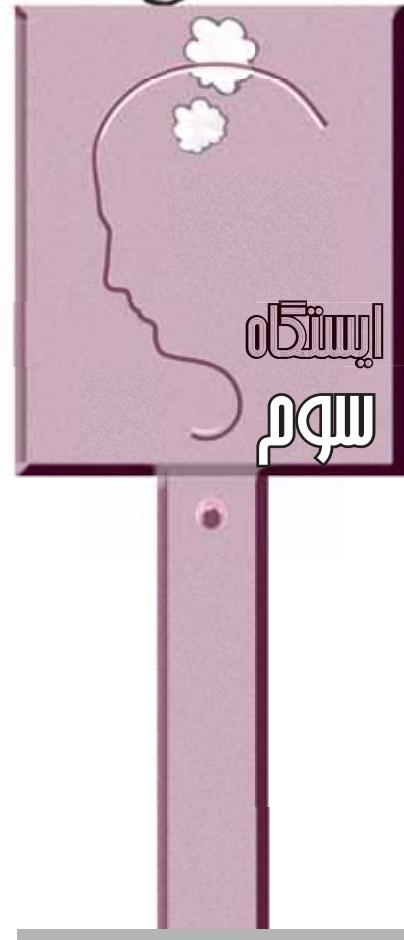
۳۳۸. یک پیتزای دایره‌ای شکل را با ۴ برش به حداقل چند قسمت می‌توان تقسیم کرد؟

د، بـش، اوـ، به دو قـسـمت و دـ، بـشـ، دـومـ به جـهـاـ، قـسـمت

## لطیفه های ریاضی

### لطیفة اول:

استاد آمار هر روز از فروشگاهی که نزدیک خانه اش بود، یک بسته نان می خرید و به محض ورود به خانه، آن را وزن می کرد و با عدد نوشته شده روی آن مقایسه می کرد. یک هفته گذشت و استاد مشاهده کرد که در همه روزها، وزن نان خریده شده از وزن برچسب خورده روی آن بیشتر است. در اینجا استاد با پلیس تماس گرفت و از صاحب فروشگاه شکایت کرد! پلیس به فروشگاه آمد و از استاد علت شکایتش را پرسید. استاد گفت: «بدیهی است که توزیع وزن بسته نان ها باید نرمال باشد! پس اگر وزن نانی که من خریده ام، هفت روز متواتر بیشتر از وزن درج شده روی آن باشد، حتماً نان فروخته شده به تعدادی از مشتریان کمتر از وزن درج شده است و این دلیل شکایت من از ایشان است!»



### لطیفة سوم:

علم: برای پیچاندن یک لامپ برق در سرپیچ خودش، وجود چند معلم ریاضی لازم است؟  
شاگرد ۱: هیچ! آنها این کار را به عنوان تمرین به ما واگذار می کنند!  
شاگرد ۲: هیچ! آنها فقط ثابت می کنند که این کار شدنی است!  
شاگرد ۳: یک نفر. یکی از آنها ثابت می کند. برای این کار یک و فقط یک نفر کافی است!  
شاگرد ۴: هر تعداد. بدیهی است که یک نفر می تواند این کار را انجام دهد. اما اگر فرض کنیم  $k$  نفر بتوانند این کار را بکنند،  $k+1$  نفر هم حتماً می توانند این کار را انجام دهند. پس با استقراری ریاضی ثابت می شود هر تعداد نفر می توانند!  
شاگرد ۵: اگر معلم هندسه باشند، هیچ کدام، زیرا می خواهند این کار را فقط با خط کش و پرگار انجام دهند!  
شاگرد ۶: اگر معلم ترکیبیات باشند، این کار را به راههای گوناگونی می توانند انجام دهند!

روزی یک مهندس، یک ریاضی دان و یک فیزیک دان با پدیده ای خنده دار مواجه شدند. مهندس بعد از کمی ورانداز کردن و محاسبه ذهنی به خنده دار بودن موضوع پی برد و با صدای بلند قهقهه زد.

فیزیک دان کمی مکث کرد و بعد پوز خنده زد. او به این فکر می کرد که همه شواهد تجربی درست بودن طنزآمیز موضوع را تأیید می کنند و پس از آن به این نتیجه رسید که این موضوع می تواند منشأ خلق یک مقاله شود!

اما ریاضی دان کمی بیشتر فکر کرد و در انتهای لبخندی زد! او ابتدا به موضوع خوب دقت کرد، بعد براورد کرد که آیا طنزآمیز بودن این پدیده قابل تعمیم به حالت های مشابه هم هست یا خیر. در نهایت هم نتیجه گرفت که چنین نیست. یعنی این پدیده فقط در همین یک مرتبه طنزآمیز است و آن گاه به آن خنید!

# ریاضی لذت‌بخش

## در کلاس خانم جمشیدی

### بخش ۳ دنباله‌های فاری – کسرها به ترتیب مقدار

## اشاره



آناهیتا کامیجانی  
دبير رياضي رودهن

کلاس‌هایش را دوست دارد. خانم جمشیدی را می‌گوییم، دبیر ریاضی مان. تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشیدی با بقیه کلاس‌هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.

اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش!» به همین خاطر تصمیم گرفتیم کلاس‌های ریاضی مان و تمام صحبت‌های ردوبل شده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.

محدودیت‌هایی قرار دهیم. مخرج کسرها را کوچک‌تر بودیم. می‌خواستیم زودتر بدانیم درباره چه مطلبی برایمان طرح سؤال می‌کند. انتظار به پایان رسید و خانم جمشیدی مانند همیشه با لبخندی مهربان به کلاس وارد شد. همگی از سر جایمان بلند شدیم؛ به احترام خانم جمشیدی، به احترام دانایی.

باران گفت: «ین خیلی ساده است:  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ .»  
مهتاب متفکرانه گفت: «کسر  $\frac{2}{4}$  هم جزء این‌هاست؟»  
خانم جمشیدی پاسخ داد: «نه عزیزم،  $\frac{2}{4}$  با  $\frac{1}{2}$   
مساوی است که در بین کسرها وجود دارد. کسرهایی که باران گفت دنباله فاری (Farey) از مرتبه ۴ یا به اختصار  $F_4$  نامیده می‌شود که از نام زمین‌شناس معروف، جان فاری (John Farey)، گرفته شده است. او در سال ۱۸۱۶ در مجله «philosophical» در مورد این کسرها نوشت. البته قبل از او ریاضی‌دانی به نام چارلز هارلس (Charles Haros) مقاله‌ای درباره این مطلب در سال ۱۸۰۲ نوشته بود. حال در مورد دنباله بعدی چه می‌توان گفت؟ از مرتبه ۵؟

من گفتم: «به این صورت می‌شه:  
 $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

روزی پاییزی بود و منتظر کلاس خانم جمشیدی بودیم. می‌خواستیم زودتر بدانیم درباره چه مطلبی برایمان طرح سؤال می‌کند. انتظار به پایان رسید و خانم جمشیدی مانند همیشه با لبخندی مهربان به کلاس وارد شد. همگی از سر جایمان بلند شدیم؛ به احترام خانم جمشیدی، به احترام دانایی.

باران با همان اشتیاق پرسید: «امروز راجع به چی صحبت می‌کنیم؟»  
خانم جمشیدی گفت: «می‌خواهیم کسرهای بین  $\frac{1}{1}$  را به ترتیب مقدارشان مرتب کنیم.»  
من پرسیدم: «امکانش هست؟ یعنی کوچک‌ترین کسر بزرگ‌تر از صفر وجود دارد؟»  
خانم جمشیدی پاسخ داد: «نه عزیزم، کوچک‌ترین کسر وجود ندارد. مهم نیست مقدار دو کسر چقدر باشد. مثلاً بین  $\frac{1}{100000}$  و  $\frac{1}{1000000}$  بی‌نهایت کسر وجود دارد. شما می‌توانید بازه را به اجزای کوچک تقسیم کنید.

مهم نیست چقدر کوچک باشد.»  
مهتاب پرسید: «پس چطور می‌توانیم کسرها را به ترتیب مقدار مرتب کنیم؟»  
خانم جمشیدی پاسخ داد: «ما برای خودمان باید

خانم جمشیدی گفت: «سؤال خوبی است. برای نوشتمن آنها اول چک می‌کنیم که آیا جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم کسری به ما می‌دهد که بین دو کسر قبلی باشد که با آنها شروع کردیم؟ بیایید فرض کنیم دو کسر مثبت داریم که به صورت  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  هستند؛ به طوری که

$$\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$$

حال مقدار  $\frac{p}{q} - \frac{a}{b}$  را بدست می‌وریم. «باران گفت: «می‌شود:  $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$  که جوابش به این صورت است:

$$\frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)}$$

حالا چطور بفهمیم که این کسر مثبت است یا منفی؟»

من گفتم: «اگر بدانیم:  $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} < 0$ ، آن وقت  $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$  مثبت و برابر  $\frac{bc - ad}{bd}$  است. بنابراین  $bc - ad$  مثبت است که کسر  $\frac{bc - ad}{b(b+d)}$  را هم مثبت می‌کند.»



خانم جمشیدی گفت: «درسته و دنباله بعدی هم به راحتی به دست می‌آید. فکر می‌کنید چرا؟» مهتاب جواب داد: «چون کسرهای جدید از  $\frac{1}{1}$  شروع می‌شوند و  $\frac{5}{5}$  هم کسر آخر است. اما چطور می‌شود جایگاه آنها را متوجه شد؟»

باران گفت: «برای مقایسه دو کسر از مخرج مشترک استفاده می‌کنیم، درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، مانند وقتی که شما می‌خواهید کسرها را با هم جمع کنید یا از هم کم کنید. من می‌خواهم شما به تفاضل کسرهای مجاور هم دقت کنید. مثلاً در  $F_5$ ,  $\frac{1}{3}$  چقدر می‌شود؟»

مهتاب گفت: «می‌شود:  $\frac{1}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6}{15}$ .»

خانم جمشیدی گفت: «درست است. با استفاده از این مطلب ترتیب صحیح را در  $F_7$  پیدا کنید. این راه سریع‌تری است که به شما کمک می‌کند، کسرهای جدید را در جای درست آنها قرار دهید. تمام تفاضلهای بین کسرهای مجاور را پیدا کنید. دنباله فاری  $F_7$  به صورت زیر است:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{6}{7}$$

تفاضلهای هم به صورت زیرند:

$$\frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{14}, \frac{1}{35}$$

بقیه مشابه همین هاست؛ به ترتیب عکس این کسرها. من گفتم: «تفاضلهای همگی صورشان ۱ و مخرج‌هایشان هم حاصل ضرب مخرج‌های دو کسر مجاور است.»

مهتاب گفت: «من چیز جالبی متوجه شدم: به نظر می‌آید، کسرهای جدید از دو کسر مجاورشان به دست می‌آیند؛ مثلاً:  $\frac{1+1}{2} = \frac{2}{2+5}$  و  $\frac{1+3}{7} = \frac{4}{4+3}$ . فقط کافی است صورت و مخرج کسرها را جمع کنید تا کسر جدیدی به دست آورید. البته برای کسر اول و آخر انگار این طور نیست، چون کسر مجاور برای آنها نداریم.»

خانم جمشیدی گفت: «حق با شمامست، ولی می‌شود کسر  $\frac{1}{7}$  را به عنوان اولین کسر و کسر  $\frac{1}{1}$  را به عنوان کسرهای مجاور در نظر گرفت.»

باران گفت: «وقتی می‌خواهید کسرهای جدیدی در  $F_7$  بسازید، مخرج‌ها باید تا ۷ نوشه شوند. اما آیا برای  $F_8$  هم همین طور است؟ تمام صورت‌های تفاضلهای کسرهای مجاور برابر ۱ هستند؟»

من گفتم: «مقدار  $n$  هم از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\ll n = \frac{bs + dr}{bc - ad}$$

خانم جمشیدی گفت: «بله دقیقاً. از این موضوع

می‌فهمیم که دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  دو کسر مجاور در دنباله  $F_{n-1}$  هستند و صورت تفاضل آنها برابر ۱ است و مخرجش حاصل ضرب مخرج آن هاست.»

$$\text{مهتاب گفت: «یعنی: } \frac{c-a}{d-b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}$$

بنابراین:  $bc-ad=1$

من هم سریع نتیجه‌گیری کردم: «پس داریم:  $\ll n = bs + dr$  و  $m = as + cr$

خانم جمشیدی نگاه مهربانی به من کرد و پاسخ داد:

«بله و کسر جدید  $\frac{m}{n}$  را می‌توانیم به صورت  $\frac{as+cr}{bs+dr}$  بنویسیم.»

باران پرسید: «آیا احتمال دارد این کسر ساده شود؟

آیا  $r$  و  $s$  می‌توانند عامل مشترک غیر از ۱ داشته باشند؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «سؤال خوبی است، اما

خیر. مثل  $\frac{r}{s}$  که نمی‌توانست در  $\frac{p}{q}$  ظاهر شود، چون ساده می‌شود،  $\frac{m}{n}$  هم نمی‌تواند ساده شود و این یعنی  $r$  و  $s$  عامل‌های مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند. اگر این طور بود، آنها عامل مشترک داشتند. در مورد مقدارهای  $r$  و  $s$  چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «بله و  $r$  و  $s$  هر دو می‌توانند برابر ۱ باشند که

در این صورت،  $\frac{a+c}{b+d}$  برابر  $\frac{m}{n}$  می‌شود و می‌دانیم بین  $\frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b}$  قرار دارد.»

من گفتم: «بله و در واقع تنها احتمال ممکن است.

چون اگر  $r$  و  $s$  هر دو بیشتر از ۱ باشند، با تساوی

$bs+dr=n$ ، مقدار  $b+d$  باید کمتر از  $n$  باشد. در این

صورت،  $\frac{a+c}{b+d}$  همین الان هم بین  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  قرار دارد و کسر جدیدی نیست.»

خانم جمشیدی گفت: «آفرین! و البته  $r$  و  $s$  همان صورت‌های تفاضل‌ها بین کسرهای جدید و کسرهای مجاورند. این ویژگی در تمام دنباله‌های فاری صادق خواهد بود. حال آیا ما می‌توانیم کسرهای مجاور  $\frac{3}{8}$  را در

خانم جمشیدی گفت: «کاملاً درست است. شما

می‌توانید چک کنید که  $\frac{c}{d} - \frac{p}{q}$  هم مثبت است یا نه که

آن را به عنوان تمرین به خودتان واگذار می‌کنم.»

مهتاب سؤال کرد: «پس ثابت شد که هر کسر

جدید از جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم از

کسرهای مجاور به دست می‌آید؟»

خانم جمشیدی جواب داد: «خیر عزیزم، ما هنوز این

موضوع را ثابت نکرده‌ایم. همچنین ثابت نکرده‌ایم که

تفاضل کسرهای مجاور همیشه صورتشان برابر ۱ است.

ما این مطالب را برای دنباله  $F_7$  ثابت کردیم و برای  $F_8$  هم

می‌توانیم ثابت کنیم. اما این‌ها دنباله خاصی از دنباله‌های

فاری هستند. پس باید برای همه دنباله‌ها برقرار باشند تا

به عنوان یک اصل کلی قبولشان کنیم. مثلاً فرض کنیم

در دنباله فاری  $F_{n-1}$  برقرار هستند و برای دنباله فاری  $F_n$

ثبت کنیم.»

فرض می‌کنیم  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  دو کسر مجاور در دنباله

فاری  $F_{n-1}$  هستند و کسر  $\frac{m}{n}$  بین آن‌هاست که کسر

جدیدی است. می‌خواهیم تفاضل بین کسر جدید و

کسرهای مجاور آن را بررسی کنیم.»

باران گفت: «پس شما می‌خواهید مقدار  $\frac{m}{n} - \frac{a}{b}$  را به دست بیاورید؟ حاصلش به صورت  $\frac{bm-an}{bn}$  می‌شود.

$$\text{و همین‌طور: } \frac{c}{d} - \frac{m}{n} = \frac{cn-dm}{dn}$$

خانم جمشیدی گفت: «بله و این تفاضل‌ها را  $\frac{r}{bn}$

$$\text{و } \frac{s}{dn} \text{ می‌نامیم.}$$

من پرسیدم: «پس داریم  $bm-an=r$  و  $cn-dm=s$  درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «درست است و می‌خواهیم  $m$  و  $n$  را بر حسب بقیه به دست آوریم.»

مهتاب متفکرانه گفت: «برای این کار می‌توانیم اولین معادله را در  $c$  و دومی را در  $a$  ضرب کنیم که معادله‌های

زیر به دست می‌آیند:

$$anc-adm=as, bcm-acn=cr$$

بعد آن‌ها را جمع می‌کنیم و به دست می‌آوریم:  $bcm-adm=cr+as$ .

باران گفت: «یعنی داریم:  $(bc-ad)m=as+cr$

$$\text{بنابراین: } m = \frac{as+cr}{bc-ad}$$

$F_1$  و  $F_5$  پیدا کنیم؟»

مهتاب گفت: «برای دنباله فاری  $F_1$  کاری ندارد، ولی برای  $F_5$  راه زیادی در پیش داریم.»

خانم جمشیدی با لبخندی گفت: «من هم انتظار ندارم شما دنباله  $F_5$  را به طور کامل بنویسید. این کار را با تفاضل کسرهای مجاور انجام می‌دهیم. فرض کنید دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  قبیل و بعد  $\frac{3}{8}$  باشند. درباره  $\frac{a}{b} - \frac{3}{8}$  چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «باید برابر  $\frac{1}{8b}$  باشد. پس داریم:  $\frac{3b - 8a}{8b} = \frac{1}{8b}$ . بنابراین:  $3b - 8a = 1$ . اما این یک معادله و دو مجهول است.»

خانم جمشیدی گفت: «در واقع همین طور است. برای دنباله‌های فاری مختلف راه حل‌های متفاوتی وجود دارند، آیا شما می‌توانید راهی کلی برای همه عده‌ها پیدا کنید؟»

من گفتم: «مثلاً فرض کنیم:  $a=11$  و  $b=3$ .

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، حال اگر ما قرار دهیم:  $a=1+x$ ،  $b=3+y$  و  $y$  چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «به دست می‌آوریم:  $1=(1+x)-(3+y)=2x-y$ »

بنابراین:  $3y=8x$

خانم جمشیدی گفت: «بنابراین  $x$  باید مضرب ۳ باشد و  $y$  هم مضرب ۸. فرض کنیم:  $x=3k$  و  $y=8k$  که  $y=8k$  و  $x=3k$  باشد.

## پیکارجو! ۴ پرسش‌های

روستاهای A، B و C روی یک خط راست واقع نیستند. در روستای A ۱۰۰ دانش‌آموز، در روستای B ۲۰۰ دانش‌آموز و در روستای C ۳۰۰ دانش‌آموز داریم. مدرسه مشترک سه روستا را کجا بسازیم تا مجموع مسافت‌هایی که همه دانش‌آموزان برای رسیدن به مدرسه می‌پیمایند، حداقل باشد؟

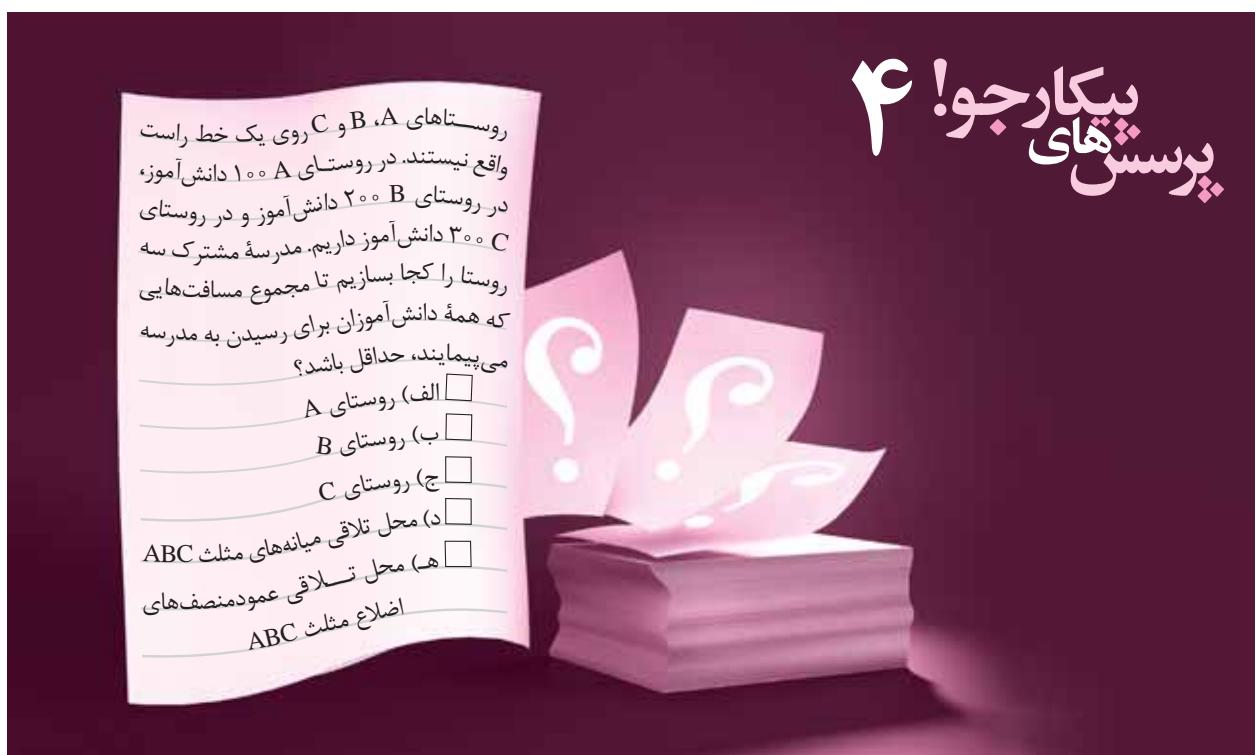
(الف) روستای A

(ب) روستای B

(ج) روستای C

(د) محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC

(ه) محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC

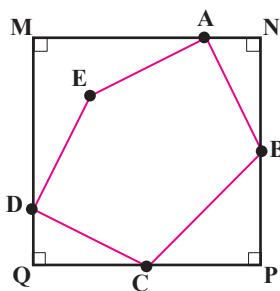




## هندسه ۱

۸. در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، قطر بزرگ، ذوزنقه را به دو مثلث تفکیک کرده که مساحت مثلث قائم‌الزاویه، دو برابر مساحت مثلث دیگر است. اگر قاعده کوچک و ارتفاع ذوزنقه برابر باشند، اندازه زاویه‌های داخلی آن را بدست آورید.

۹. در شکل ۱،  $MNPQ$  مربع است و نقاط  $A$  و  $D$  ضلعی را که روی آن واقع‌اند، به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده‌اند و  $B$  و  $C$  نیز وسط‌های  $MQ$  و  $PQ$  هستند. همچنین،  $E$  نقطه‌ای است که از  $MN$  و  $MQ$  به فاصله‌ای مساوی  $\frac{1}{4}$  ضلع مربع واقع است. مساحت پنج ضلعی  $ABCDE$  چه کسری از مساحت مربع است؟



شکل ۱

۱۰. دو صفحه  $P$  و  $Q$  در خط  $d$  مشترک‌اند. نقطه  $A$  روی صفحه  $P$  و غیرواقع بر  $d$  و نقطه  $B$  روی صفحه  $Q$  و غیرواقع بر  $d$  مفروض‌اند. خط  $AB$  نسبت به  $d$  چه وضعی دارد و چرا؟

۱. روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید و بگویید چرا این روش درست کار می‌کند.

۲. با یک مثال نقض نشان دهید این حکم کلی نادرست است: «در هر مثلث، هر ارتفاع از میانه نظیر همان رأس کوتاه‌تر است.»

۳. با استدلال استنتاجی درستی این حکم را ثابت کنید: «در هر مثلث، اگر دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر، از ارتفاع نظیر ضلع کوچک‌تر، کوچک‌تر است.»

۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قطعه تقسیم کرده که یکی از آن‌ها  $4$  برابر دیگری است. نسبت اضلاع زاویه قائم‌های مثلث را بدست آورید.

۵. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ارتفاع  $AH$  را رسم کرده‌ایم. اگر  $M$  و سط  $N$  و سط  $AH$  باشد، ثابت کنید:  $BN \cdot AH = AM \cdot BH$

۶. ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، هر قطر، آن را به دو مثلث با محیط‌های برابر تفکیک کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۷. در مثلث  $ABC$ ، ارتفاع  $AH$  را رسم کرده‌ایم و می‌دانیم:  $BC = 2AC = 4CH$ . اندازه زاویه‌های مثلث را بدست آورید.

۴. ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۵. دو نقطه A و B به فاصله ۱۳ واحد از یکدیگر و به فاصله‌های ۴ و ۹ از خط d واقع‌اند. نقطه M روی d چنان است که:  $MA+MB$  کمترین مقدار ممکن است. این مقدار را به‌دست آورید.

۶. در مثلث ABC، مجانس‌های مثلث را نسبت به مرکز تجانس B و C و ضریب  $k > 0$  رسم می‌کنیم. اگر مجانس B در تبدیل اول، B' مجانس C در تبدیل دوم باشد، ثابت کنید  $B'C'$  مجانس BC نسبت به مرکز A است. ضریب تجانس چیست؟

۷. (الف) قضیه میانه‌ها در مثلث را بیان و اثبات کنید.  
 (ب) مستطیل ABCD با مرکز تقارن O مفروض است. ثابت کنید برای نقطه دلخواه M در صفحه داریم:  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .  
 (الف) قطر مستطیل است.

۸. (الف) در مثلث ABC،  $d_a$  طول نیمساز رأس A است. ثابت کنید:

$$d_a = \frac{\sqrt{bc} \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

(ب) در مثلث ABC،  $\hat{A} = 12^\circ$  و  $AD$  نیمساز رأس A است.  
 ثابت کنید:  $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ .

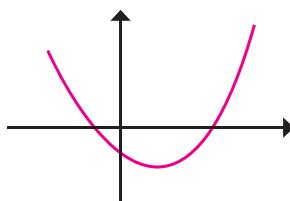
۹. در مثلث به اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵، نقطه‌ای که از دو ضلع کوچک مثلث به فاصله‌های ۶ و ۴ واحد است، از ضلع بزرگ مثلث چه فاصله‌ای دارد؟

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ( $\hat{B} = 90^\circ$  و  $\hat{A} = 30^\circ$ ) نیمساز A، BC را در D قطع کرده است.  
 (الف) طول CD را برحسب a به‌دست آورید.  
 (ب) به کمک قضیه سینوس‌ها مقدار  $\sin 75^\circ$  را به‌دست آورید.

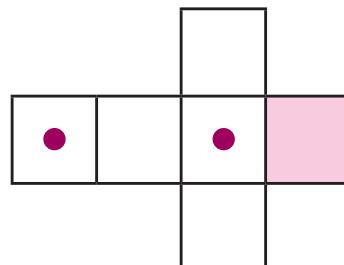
## حسابان ۱

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

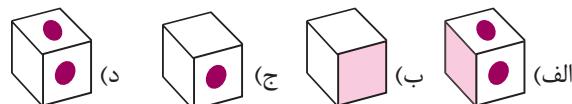
(الف) اگر برای سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  نمودار زیر داده شده باشد، آن‌گاه  $abc < 0$



۱۱. کدام‌یک از مکعب‌های زیر مربوط به گسترده شکل ۲ است؟



شکل ۲

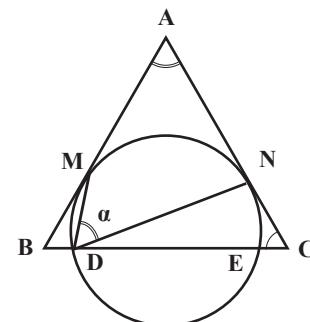


۱۲. نسبت حجم‌های دو شکلی را به‌دست آورید که از دوران یک مربع حول قطر آن و حول ضلع آن پدید می‌آیند.

۱۳. استوانه‌ای را توسط صفحه‌ای موازی ارتفاع آن و به فاصله نصف شعاع قاعده استوانه از آن، برش داده‌ایم. نسبت مساحت مقطع حاصل به مساحت جانبی استوانه را به‌دست آورید.

## هندسه ۲

۱. در شکل ۳، اصلاح AB و AC بر دایره مماس‌اند. اگر داشته باشیم:  $\hat{C} = 55^\circ$  و  $\hat{A} = 6^\circ$ ، اندازه  $\hat{a}$  را به‌دست آورید.



شکل ۳

۲. دایره‌های C و C' در نقاط A و B متقاطع‌اند و قطر AD از دایره C بر دایره C' مماس است. امتداد DB دایره C' را در E قطع کرده است. اگر  $AB=BD$  باشد، وسط DE را به‌دست آورید.

۳. ذوزنقه‌ای در دایره‌ای محاط است، به‌طوری که قاعده بزرگ ذوزنقه قطری از دایره است و قاعده کوچک ذوزنقه و یکی از ساق‌های آن با شعاع دایره برابرند. فاصله مرکز دایره و نقطه تلاقی قطرهای ذوزنقه را برحسب شعاع دایره به‌دست آورید.

۱۱. معادله لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_4(m^3 + 4m + 1) - \log_4(m^3 - \frac{1}{4}) = 3$$

۱۲. نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۲۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۶۴ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۲۰ سال باقی می‌ماند، چند میلی‌گرم است.

۱۳. در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویه مرکزی  $\theta$  برابر  $3\pi$  سانتی‌متر است.

(الف) مقدار  $\theta$  چند رادیان است؟

(ب) این زاویه حدوداً چند درجه است.

۱۴. اگر  $\alpha$  و زاویه‌ای حاده باشد، مقدار عددی عبارت‌های

زیر را به‌دست آورید:

(الف)  $\cos(\frac{11\pi}{2} - \alpha)$

(ب)  $\sin 2\alpha$

(پ)  $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$

۱۵. نمودار  $y = 1 - \sin x$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید.

۱۶. با استفاده از نمودار تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، حد تابع  $f$  را در نقطه  $x=0$  بررسی کنید.

۱۷. آیا تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  در  $x=1$  حد دارد؟ چرا؟

۱۸. حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

(الف)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

۱۹. نمودار تابع  $f(x) = [x] + [-x]$  را رسم کنید و با توجه به آن

مجموعه نقطه پیوستگی تابع را مشخص کنید.

۲۰. مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری ببایید که تابع  $f$  در  $x=-2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} & x < -2 \\ a & x = -2 \\ 3x + b & x > -2 \end{cases}$$

ب) معادله  $-1 = \sqrt{x+1}$  جواب حقیقی ندارد.

پ) اگر دو تابع دامنه‌هایشان مساوی باشد، آن دو تابع مساوی‌اند. ت) انتهای کمان متناظر دو رادیان در ربع اول دایره مثبتاتی قرار می‌گیرد.

ث) بازه  $(-1, 3)$  یک همسایگی محدود عدد  $\frac{3}{2}$  است.

۱۵. مجموع  $n$  جمله اولیه یک دنباله حسابی  $S_n = 2n^3 + 2n$  است مجموع جملات پنجم و ششم آن چقدر است؟

۱۶. معادله درجه دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن  $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$  و  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  باشند.

۱۷. نقاطی را روی محور طول‌ها ببایید که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۲ و ۵ روی این محور برابر  $10^\circ$  باشد.

۱۸. معادلات دو ضلع مربع  $-4y = 3x - 6x + 5 = 0$  و مساحت این مربع چند واحد سطح است.

۱۹. (الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

(ب) برد تابع را با توجه به آن مشخص کنید.

(پ) آیا  $f$  یک به‌یک است؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} -|x| & x \leq -1 \\ x^2 - 1 & x > -1 \end{cases}$$

۲۰. نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  را در بازه  $(-1, 3)$  رسم کنید.

۲۱. اگر

$$f = \{(0, 0), (1, -1), (2, 1)\}$$

$$g = \{(2, -1), (1, 1), (3, 2), (0, 0)\}$$

توبع زیر را مشخص کنید:

۲۱.  $f \circ g$

(ب)  $f \circ g$

۲۲. (الف) نمودار تابع  $y = 3^x - 3$  را رسم کنید.

ب) اگر این نمودار محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره خط AB چقدر است؟

۲۳. به روش هندسی نشان دهید، معادله  $1 = x \times 2^x$  فقط یک جواب دارد.

## ریاضی ۲ (تجربی)

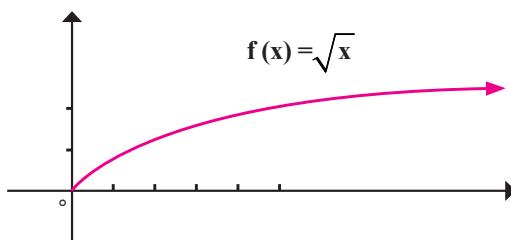
۸. الف) نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  را رسم کنید.  
 ب) دامنه و برد این تابع را بنویسید.  
 پ) محل تقاطع این نمودار را با محورهای مختصات مشخص کنید.  
 ت) آیا این تابع یکبهیک است؟ چرا؟

۹. الف) اگر  $\log_2 3 \approx 1.58$  و  $\log_2 48 \approx 5.6$ ، مقدار تقریبی عبارت زیر را بیابید.

$\log 1500$

- ب) معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.  
 $\log_2(x+1) + \log_2 x = \log_2 6$

۱۰. با استفاده از نمودار زیر، حاصل عبارت‌های خواسته شده را بنویسید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$

ت)  $f(0)$

۱۱. حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 9}{2x - 6}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x]}{x}$

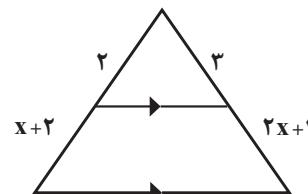
پ)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - 2}{x}$

۱۲. پیوستگی تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x > 2 \\ -1 & x = 2 \\ 3-x^2 & x < 2 \end{cases}$  را در نقطه  $x=2$  بررسی کنید.

۱. الف) معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(-2, 1)$  گذشته و با خط  $y = 3x - 1$  موازی باشد.

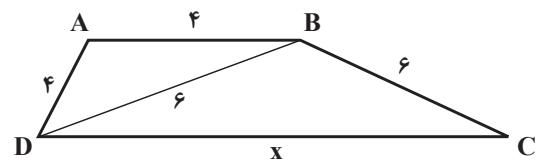
ب) معادله  $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3$  را حل کنید.

۲. در شکل ۱ مقدار  $x$  را محاسبه کنید.



شکل ۱

۳. در شکل ۲ چهارضلعی ABCD ذوزنقه است. طول CD را محاسبه کنید.



شکل ۲

۴. دامنه تابع‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $f(x) = \frac{-2x - 4}{x^2 - 2x + 3}$

ب)  $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

۵. اگر  $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\}$  و  $g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2})\}$  باشند.

- الف) تابع  $g - 2f$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) مقدار  $\frac{f}{g}(0)$  را محاسبه کنید.

۶. مقدار عددی عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف)  $\tan(-\frac{37\pi}{4})$

ب)  $\sin(-\frac{121\pi}{6})$

۷. نمودار تابع  $y = -2\cos(x - \frac{\pi}{3})$  را رسم کنید.

۳. عده‌های مثبت  $a$ ,  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید که عده‌های  $3, a, b, c, 27$  جمله‌های متوالی دنباله هندسی باشند.

۴. برجی از نقطه‌های  $A$  و  $B$  که در فاصله ۲۷ متری از یکدیگر و در یک طرف برج قرار دارند، با زاویه  $30^\circ$  و  $45^\circ$  دیده می‌شود. ارتفاع برج را به دست آورید.

۵. اگر  $\sin \alpha \geq \cos \alpha$ ، در چه ناحیه‌ای و بین چه زاویه‌هایی قرار دارد؟

۶. درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

۷. اگر  $1 < a < 0$ ، حاصل عبارت زیر را بنویسید:

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

۸. اگر  $a = \sqrt[5]{0.000027}$ ،  $a = \sqrt[3]{\dots}$  را بحسب  $a$  به دست آورید.

۹. عبارت  $-2x^3 + x^2 - 2x^3$  را تجزیه کنید.

۱۰. سه برابر مقدار مثبتی از معکوس آن، دو واحد کمتر است. این مقدار را پیدا کنید.

۱۱. اگر  $A = (-2, -1)$  رأس یک سهمی باشد و خط  $y = 7$  نمودار سهمی را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع کند، نقطه دیگر برخورد این خط با سهمی و معادله سهمی را تعیین کنید.

۱۲. اگر مجموعه جواب نامعادله  $x^3 \geq 2x + 8$  برابر باشد،  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

## آمار و احتمال (پایه دهم)

۱. کدام یک گزاره است؟

(الف)  $x^3 - 3 > x + 1$

(ب) رقم دهم  $\sqrt{2}$  در بسط اعشاری، عدد ۷ است.

۲. در مجموعه عده‌های حقیقی، مجموعه جواب کدام یک از گزاره‌نماهای زیر تهی است.

(الف)  $x + |x| = 2x$

(ب) عدد  $10^{-5^a}$  بر ۲ بخش پذیر است. ( $a \in \mathbb{Z}$ )



۱۳. اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که  $P(A) = \frac{2}{5}$  و  $P(B) = \frac{1}{2}$ ، آن‌گاه  $P(A \cup B)$  را به دست آورید.

۱۴. احتمال قبولی باران و بهار در کنکور سراسری به ترتیب برابر  $80\%$  و  $60\%$  است. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید.

(الف) هر دوی آن‌ها در کنکور قبول شوند.

(ب) حداقل یکی از آن‌ها قبول شود.

۱۵. جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

(الف) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، واریانس آن‌ها ...

(ب) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، واریانس آن‌ها ...

(پ) واحد واریانس برابر با ... واحد داده موردنظر است.

(ت) جذر واریانس را ... می‌نامند.

## ریاضی ۱ (پایه دهم)

۱. مجموعه اعداد گویای بین دو عدد ۲ و ۳ متناهی است یا نامتناهی؟ چرا؟

۲. در گروی زیر، شکل  $n^{\text{th}}$  شامل چند نقطه است؟



۱۰. اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه  $S$  باشند و داشته باشیم:

$$P(B - A) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(A | B) = \frac{2}{5}$$

آورید.

۱۱. در یک منطقهٔ خاص، احتمال اینکه شخصی حداقل ۸۰ سال عمر کند،  $75\%$  و احتمال اینکه شخصی از ۹۰ سال بیشتر زنده بماند،  $63\%$  است. اگر شخصی به تصادف از افراد ۸۰ ساله این منطقه انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد حداقل ۹۰ سال عمر می‌کند؟

۱۲. پنج باتری سالم با دو باتری معیوب مخلوط شده‌اند. برای یافتن باتری‌های سالم، همهٔ باتری‌ها را بدون جای‌گذاری امتحان می‌کیم. احتمال اینکه دو باتری معیوب در سه آزمایش اول مشخص شوند، چقدر است؟

۱۳. در یک شرکت،  $5\%$  مردان و  $2\%$  زنان درامدی بسیار بالا دارند. اگر  $30\%$  کارکنان این شرکت زن باشند، با چه احتمالی فردی که به تصادف انتخاب شده است و درامد بالایی دارد، زن است؟

۱۴. از جعبه‌ای با ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم و سپس آن را همراه با ۲ مهره از همان رنگ به جعبه بر می‌گردانیم. اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم، احتمال آنکه این مهره آبی باشد چقدر است؟

۱۵. نشان دهید که گزاره زیر همواره درست است.

$$p \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \vee q]$$

۱۶. همارزی زیر را ثابت کنید:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۱۷. نقیض گزاره زیر را بنویسید:

$$\forall a, b \in R, [ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)]$$

۱۸. اگر سه عضو از اعضای مجموعه  $A$  کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن به اندازه ۱۱۲ تا کم می‌شود. مجموعهٔ توانی  $A$  دارای چند عضو است؟

۱۹. درستی گزاره‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$A \subseteq B \wedge A' \subseteq B \Rightarrow B = U$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

۲۰. در شلیک به یک هدف، احتمال اصابت اولین گلوله  $37\%$  و برای دومین گلوله  $53\%$  است. در صورتی که احتمال اصابت هر دو گلوله  $21\%$  باشد، با چه احتمالی فقط یکی از دو گلوله به هدف اصابت خواهد کرد؟

۲۱. در یک تاس احتمال روشندن  $3$ ، نصف احتمال رو شدن سایر عددهای است. در یک پرتاب این تاس، چه قدر احتمال دارد که عددی بزرگ‌تر از  $4$  ظاهر نشود؟

## \* پیکارجو! ۵ پرسش‌های

می‌خواهیم با سه رنگ آبی، قرمز و سبز هفت ناحیه درون شکل سمت راست را رنگ‌آمیزی کنیم؛ به طوری که ناحیه‌های همسایه رنگ‌های متفاوتی داشته باشند (ناحیه‌ای که فقط در یک نقطه اشتراک دارد، همسایه نیستند). انجام این کار به چند طریق ممکن است؟

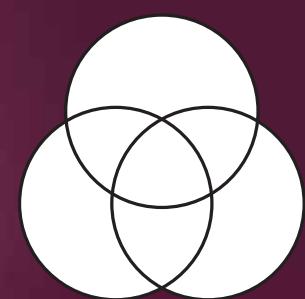
(الف)  ۶۴

(ب)  ۷۴

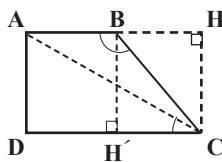
(ج)  ۸۴

(د)  ۹۰

(ه)  ۹۶

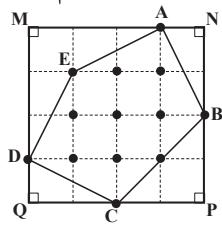


\*\*اصل سؤال مربوط به  
المبادراتی ریاضی ایران  
است و فرسنگ سوال و  
راه حل آن، آقای محمد رضا  
پوئید از شیراز است.

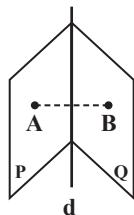


۹. می‌توانیم مربع را به ۱۶ مربع کوچک تفکیک و از قضیه پیک استفاده کنیم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{6}{2} + 7 - 1 = 9$$



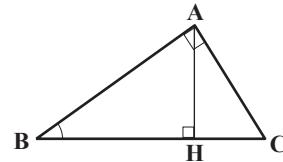
۱۰.  $d \parallel AB$  باشد، زیرا اگر  $AB$  با  $d$  موازی باشد، چون  $A \in P$  و  $d \in P$ ، آن‌گاه  $AB$  باید  $AB$  روی  $P$  باشد. در حالی که:  $B \notin P$  و  $A \in P$  متقاطع باشند و نقطه تقاطع آن‌ها را  $C$  بنامیم (که  $C$  روی  $A$  و  $B$  نیست)، آن‌گاه  $C$  و  $B$  روی یک خط قرار می‌گیرند و چون  $d$  و  $B$  روی این خط قرار دارند و  $d$  دو نقطه از این خط روی  $P$  و روی  $Q$  است، پس این خط روی  $P$  و  $Q$  است. پس  $P$  و  $Q$  برهمنطبقاند که چنین نیست.



۱۱. فقط گزینه (ج) می‌تواند درست باشد، زیرا با توجه به گسترده شکل، وجه‌هایی که علامت  $\bullet$  را دارند باید روبروی هم باشند. پس گزینه‌های الف و د نمی‌توانند درست باشند. همچنین وجه هاشور خورده در دو وجه، مجاور وجه‌هایی است که علامت  $\bullet$  را دارند و این دو وجه هم روبروی هم هستند. پس گزینه ب هم نمی‌تواند درست باشد.

$$r^r + r^r = a^r \Rightarrow a^r = 2r^r, r = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad .12$$

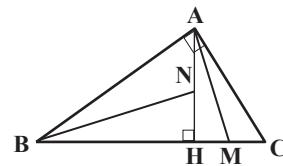
$$\begin{aligned} V_r &= 2 \times \frac{1}{3} \pi r^r \cdot r = \frac{2}{3} \pi r^r = \frac{2}{3} \pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} a \times \frac{1}{2} a \\ &= \frac{\pi \sqrt{2}}{6} a^r \quad \text{و} \quad V_i = \pi a^r \times a = \pi a^r \Rightarrow \\ \frac{V_i}{V_r} &= \frac{\pi a^r}{\frac{\pi \sqrt{2}}{6} a^r} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$



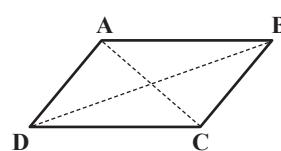
۵. می‌دانیم مثلث‌های  $ACH$  و  $ABH$  متشابه‌اند و در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است:

$$\Delta ACH \sim \Delta ABH \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AH}{BH}$$

$$\Rightarrow AM \cdot BH = AH \cdot BN$$



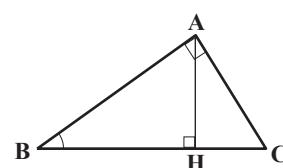
۶. طبق فرض داریم:  
 $AB + BC + AC = AD + CD + AC$   
 $\Rightarrow AB + BC = AD + CD$



و به همین ترتیب:  $BC + CD = AB + AD$ . با جمع کردن دو طرف این تساوی و حذف مقادیر مساوی از دو طرف، نتیجه می‌شود:  $AB = CD$  و  $AD = BC$ . یعنی در این چهارضلعی اضلاع روبرو و مساوی‌اند و در نتیجه متوازی‌الاضلاع است.

۷. طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} BC &= 2AC, AC = 2CH \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH}, \hat{C} = \hat{C} \\ \Rightarrow \Delta ACH &\sim \Delta ABC \\ \Rightarrow \hat{BAC} &= \hat{AHC} = 90^\circ, BC = 2AC \\ \Rightarrow \hat{B} &= 30^\circ, \hat{C} = 60^\circ \end{aligned}$$

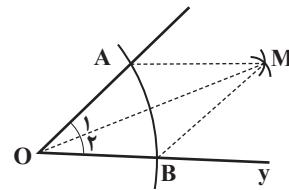


$$\begin{aligned} S_{ACD} &= 2S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot CD = 2 \times \frac{1}{2} CH \cdot AB, \\ AD &= CH \Rightarrow CD = 2AB, AB = DH' \\ \Rightarrow CH' &= DH' = BH' \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ, \hat{B} = 135^\circ \end{aligned}$$



## هندسه ۱

۱. به مرکز  $O$  و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند.



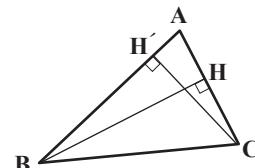
سپس به مرکز  $A$  و  $B$  و به همان شعاع دو کمان دیگر می‌زنیم تا همیگر را در نقطه  $M$  قطع کنند.  $MO$  نیمساز زاویه  $xoy$  است. به دلیل اینکه:

$$\begin{aligned} MA &= MB = OA = OB = R, OM = OM \\ \Rightarrow \Delta OAM &\sim \Delta OBM \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{aligned}$$

(ضض)

۲. کافی است مثلث متساوی‌الساقین ( $AB = AC$ ) را مثال بزنیم. میانه و ارتفاع رأس  $A$  برهمنطبق و در نتیجه مساوی‌اند.

$$\begin{aligned} AB > AC \Rightarrow \frac{AB}{AC} > 1, S_{ABC} &= \frac{BH \times AC}{2} = \frac{CH' \times AB}{2} \\ \Rightarrow \frac{BH}{CH'} &= \frac{AB}{AC} > 1 \Rightarrow BH > CH' \end{aligned}$$

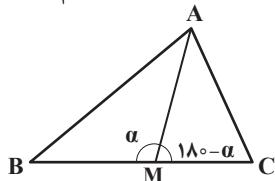


$$\begin{aligned} BH &= 4CH, AB^r = BC \cdot BH, AC^r = BC \cdot CH \\ \Rightarrow \frac{AB^r}{AC^r} &= \frac{BC \cdot BH}{BC \cdot CH} = \frac{BH}{CH} = 4 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = 2 \end{aligned}$$

بنابراین  $B'C'$  مجانس  $BC$  به مرکز  $A$  و ضریب  $-1$  است. (K-1)

**الف**) در هر مثلث دو برابر مربع هر میانه به اضافه نصف مربع ضلع وارد بر آن متساوی مجموع مربعات دو ضلع مجاور میانه است.

$$2AM^2 + \frac{BC^2}{4} = AB^2 + AC^2$$



اثبات به کمک قضیه کسینوس‌ها:

$$\begin{cases} AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos \alpha \\ AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cdot \cos(180 - \alpha) \end{cases}$$

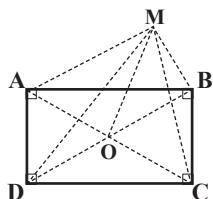
$MB = MC$  و  $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$ . و چون:

با جمع کردن طرفین فوق، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AM^2 + 2MB^2 = 2AM^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \\ &= 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \end{aligned}$$

ب)  $MO$  در مثلث‌های  $MBD$  و  $MAC$  میانه است و طبق قضیه میانه‌ها داریم:

$$\begin{cases} MA^2 + MC^2 = MO^2 + \frac{AC^2}{4} \\ MB^2 + MD^2 = MO^2 + \frac{BD^2}{4} \end{cases}$$



و چون قطرهای مستطیل برابرند، پس:  $AC = BD$  و در نتیجه:

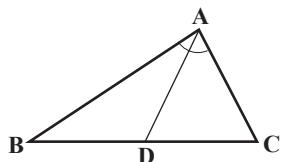
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

**الف**) مسئله کتاب درسی (صفحه ۷۵).

**ب)** به کمک قضیه **(الف)** داریم:

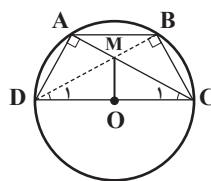
$$AD = \frac{\sqrt{AB \cdot AC} \cdot \cos 60^\circ}{AB + AC} = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$



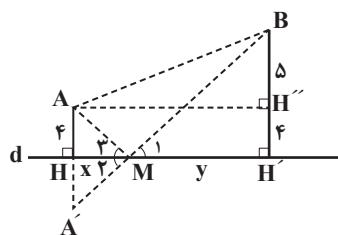
$$\Rightarrow MO = \frac{MD}{2}, OD = \frac{\sqrt{r}}{2} \Rightarrow MD = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{r}}{3}$$



**۴.** قضیه کتاب درسی (صفحه ۴۸).

**۵.** چنانچه از کتاب درسی می‌دانیم، برای یافتن نقطه  $M$  باید بازتاب  $A$  (A')d را بیابیم و آن را به  $B$  وصل کنیم، نقطه برخورد  $M$  و  $A'B$  است و داریم:



$\hat{M}_1 = \hat{M}_r = \hat{M}_t$  و  $AM + MB = A'M + MB = A'B$  بنابراین:

$$\Delta AMH \sim \Delta BMH' \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{MH}{MH'} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{9}$$

$$\Delta ABH' : BH''^2 + AH''^2 = AB^2 \Rightarrow 4^2 + (x+y)^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow x+y=12$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{48}{13}, y = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{4^2 + x^2} = \frac{4\sqrt{313}}{13}$$

$$MB = \frac{9}{13}\sqrt{313} \Rightarrow AM + MB = \sqrt{313}$$

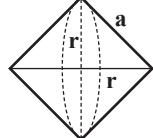
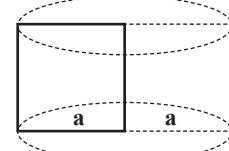
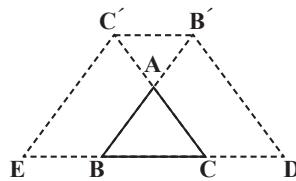
**۶.** مطابق فرض داریم:

$$\begin{cases} BD = K \cdot BC \\ BB' = K \cdot BA \end{cases} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BB'}{BA}$$

$\Rightarrow B'D \parallel AC$  و  $AB' = (K-1)AB$

$$\begin{cases} CC' = K \cdot CA \\ CE = K \cdot CB \end{cases} \Rightarrow AC' = (K-1)AC$$

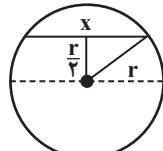
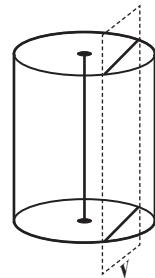
$$\Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = (K-1) \Rightarrow B'C' \parallel BC, \frac{B'C'}{BC} = (K-1)$$



.۱۳

$$\begin{aligned} x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow y = 2x = \sqrt{3}r \\ \Rightarrow S_{\text{مقطع}} = y \cdot h = \sqrt{3}hr \end{aligned}$$

$$S_{\text{استوانه}} = 2\pi rh \Rightarrow \frac{S_{\text{مقطع}}}{S_{\text{استوانه}}} = \frac{\sqrt{3}hr}{2\pi rh} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$



## ۲ هندسه

$$\hat{A} = 60^\circ, \hat{C} = 55^\circ \Rightarrow \hat{B} = 65^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{NE} - \widehat{MD}}{2} = 65^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MN} + \widehat{NE} - \widehat{MD} = 130^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{MD} - \widehat{NE}}{2} = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MN} + \widehat{MD} - \widehat{NE} = 110^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{MN} = 240^\circ, \widehat{MN} = 120^\circ, \hat{\alpha} = \frac{\widehat{MN}}{2} = 60^\circ$$

**۲.** به کمک روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

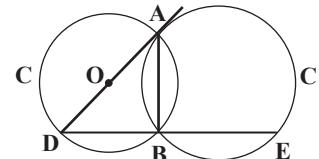
$$DA^2 = DB \cdot DE$$

$$= DB(DB + BE) = 2DB^2 \Rightarrow$$

$$DA = \sqrt{2}DB, \hat{ABD} = 90^\circ = \frac{\widehat{DA}}{2}$$

$$\Rightarrow DA^2 = AB^2 + DB^2 \Rightarrow 2DB^2 = AB^2 + DB^2$$

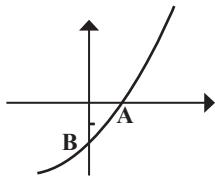
$$\Rightarrow DB = AB$$



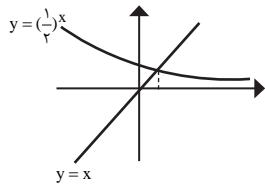
**۳.** می‌دانیم هر ذوزنقه محاطی متساوی الساقین است (تمرین کتاب درسی). پس طبق فرض

داریم:  $AD = AB = BC = r, CD = 2r, \hat{CAD} = \hat{CBD}$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{CD}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACD : CD = 2AD \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 90^\circ$$



۱۰. معادله  $x \times 2^x = 1$  را به صورت  $x \times 2^x = 1$  می نویسیم و نمودار دو تابع  $y_1 = (\frac{1}{2})^x$  و  $y_2 = x$  را رسم می کنیم، نمودار دو تابع یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند. پس معادله  $x \times 2^x = 1$  یک جواب مثبت دارد.



۱۱

$$\log_{\frac{m^r + 4m + 1}{m^r - 1}} = 3 \Rightarrow \frac{m^r + 4m + 1}{m^r - 1} = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow 8m^r - 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

پس از آزمایش جوابها فقط  $m = 1$  قابل قبول است.

۱۲. اگر جرم بر حسب میلی گرم را با  $m(t)$  نشان دهیم، داریم:

$$m(t) = 64 \times 2^{\frac{-t}{2}}$$

$$m(2000) = 64 \times 2^{\frac{-2000}{2}} = 64 \times 2^{-1000} = \frac{64}{10^{24}}$$

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{2000}{1000} = 2 \text{ رadian}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow D = \frac{360^\circ \times 180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ \times 180^\circ}{\pi} \approx 172$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{الف) } \cos(\frac{11\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{11\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(-\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$= \cos(-\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times -\frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\text{پ) } \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

۱۵. نمودار  $y = \sin x$  را می کشیم، سپس قرینه آن را نسبت به محور  $x$  رسم می کنیم و

معادله قدرمطلقی را حل می کنیم:

$$x > 5 \Rightarrow x + 2 + x - 5 = 10 \Rightarrow x = \frac{13}{2}$$

$$-2 \leq x \leq 5 \Rightarrow x + 2 - (x - 5) = 10 \Rightarrow 7 = 10 \text{ غیرممکن}$$

$$x < -2 \Rightarrow -x - 2 - x + 5 = 10 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

نقاط به طول های  $\frac{7}{2}$  و  $\frac{13}{2}$  روی محور طولها در شرایط مسئله صدق می کنند.

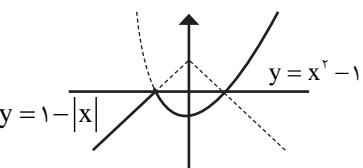
۱۶. دو خط موازی آند و فاصله دو خط موازی فوق طول ضلع مرربع است.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 3x - 4y + \frac{5}{2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{طول ضلع مرربع} = \frac{|10 - \frac{5}{2}|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ مساحت مرربع}$$

۱۷. برد تابع  $R$

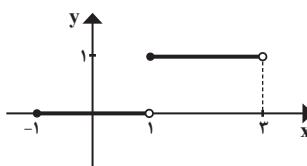
یک به یک نیست. خط  $y = k$  که در آن  $f$  نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می کند.



$$-1 \leq x < 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} < 2$$

$$\cdot \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

$$1 \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$



۱۸.  $D_f \cap D_g = \{0, 1, 2\}$

$f+g = \{(0, 0), (1, -1), (2, 2)\}$

$fog = \{(0, -1), (1, 1), (2, 2)\}$

$$A: \begin{cases} y = 3^x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

$$B: \begin{cases} y = 3^x - 3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

$A(1, 0)$ ,  $B(0, -2)$

$$AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

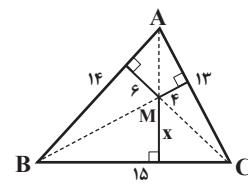
۹. نقطه  $M$  را به سه رأس مثلث وصل می کنیم.

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 13 + \frac{1}{2} \times 6 \times 14 + \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \frac{158}{2} = 79$$

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = 21, S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = 84$$

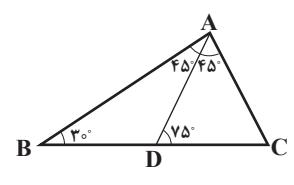
$$\Rightarrow \frac{158}{2} + 68 = 84 \Rightarrow \frac{158}{2} = 16, x = \frac{32}{5}$$



(۱۰. الف)

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{CD}{CD + BD} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow CD = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$



(ب)

$$\Delta ACD: \frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}} = \frac{a}{\sin 75^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

## حسابان ۱

۱. (الف) درست (ب) درست  
ت) نادرست (ث) نادرست

$$a_\delta + a_\epsilon = S_\delta - S_\epsilon =$$

$$3(6)^\gamma + 2(6) - (3(4)^\gamma + 2(4)) = 64$$

$$S = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 4$$

$$P = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

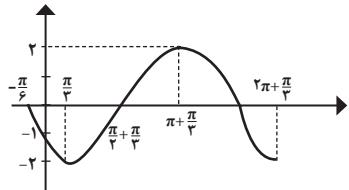
۱۵. فرض کنیم  $x$  نقطه‌ای دلخواه روی محور طولها با شرایط فوق باشد. داریم:

$$|x+2| + |x-5| = 10$$

الف)  $\tan(-\frac{3\pi}{4}) = -1$

ب)  $\sin(-\frac{11\pi}{6}) = +\frac{1}{2}$

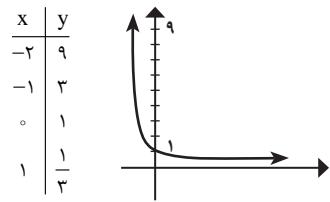
$y = -2 \cos(x - \frac{\pi}{3})$



.٦

.٧

(الف)



ب)  $D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

پ) محل تقاطع با محور عرضها نقطه  $(1, 0)$  و محور طولها را قطع نمی‌کند.  
ت) اینتابع یک‌به‌یک است، زیرا هر خط موازی با محور  $x$  نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

الف)  $\log_{10} 1500 = \log 3 + \log 5 + \log 100 = 9$   
 $= 0.48 + 0.69 + 2 = 3.17$

ب)  $\log_2(x^2 + x) = \log_2 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$

ب) وجود ندارد  
الف) وجود ندارد  
پ) وجود ندارد  
ت) وجود ندارد

.٩

الف)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{2} = 3$

وجود ندارد (ب)

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|-2}{x} = \frac{-1}{1} = -1$

.١٢

در  $x \rightarrow 1^+$  پیوسته نیست  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow$

مستقل اند

$B, A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(B') = \frac{5}{6}$

## ریاضی ۲ (تجربی)

A(1, -2)

(الف)

$y = 2x - 1 \Rightarrow m = 2, y = mx + h$

$\Rightarrow -2 = 2(1) + h \Rightarrow h = -4 \Rightarrow y = 2x - 4$

(ب)  $(\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x})^2 = 4$

$\Rightarrow (x+3) + (2-x) + 2\sqrt{(x+3)(2-x)} = 4$

$\Rightarrow 2\sqrt{6-x-x^2} = 4 \Rightarrow 6-x-x^2 = 4$

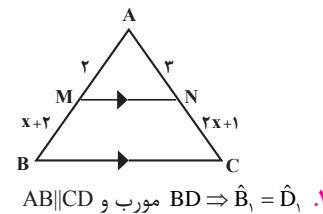
$\Rightarrow x = 1, -2$

هر دو مقدار در معادله اصلی صدق می‌کنند.  
بنابراین هر دو جواب معادله هستند.

۲. با استفاده از قضیه تالس داریم:

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{2}{x+2} = \frac{3}{2x+1}$

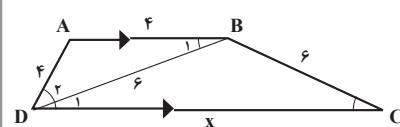
$\Rightarrow 2(2x+1) = 3(x+2) \Rightarrow x = 4$



AB||CD مورب و  $BD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$

$AB = AD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}$

$BD = BC \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}_1$



پس دو زاویه از مثلث ABD با دو زاویه از مثلث BCD برابر است. بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 9$

الف)  $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

ب)  $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (3-x)(3+x) \geq 0 \Rightarrow D_g = [-3, 3]$

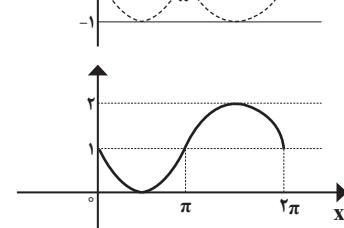
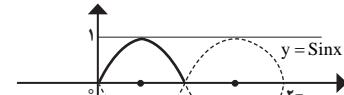
الف)  $D_f = \{0, 1, 3, -2, -1\}, D_g = \{2, -1, \frac{1}{4}, 1\}$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{-1, 1\}$

$\Rightarrow 2f - g = \{(-1, -2), (1, -\frac{1}{4})\}$

ب)  $(\frac{f}{g})(1) = -\frac{2}{3}$

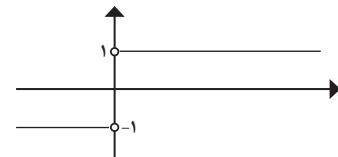
به اندازه یک واحد در راستای محور  $y$ ها به بالا منتقل می‌کنیم.



$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

تابع در  $x=0$  حد ندارد.



$D_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

از آنجا که تابع  $f$  در همسایگی چپ نقطه  $x=1$  تعريف نشده است، پس در این نقطه حد ندارد.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{x^2-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{(x+1)(x-2)}$

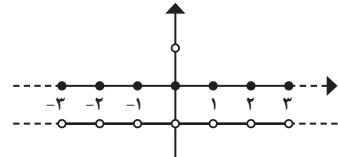
$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{2}{3}$

(ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}\sin \frac{x}{2}}{\sin x} = \sqrt{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}\left|\sin \frac{x}{2}\right|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2}\sin \frac{x}{2}}{\sin x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x) = \begin{cases} \cdot & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

دامنه پیوستگی  $= \mathbb{R} - \mathbb{Z}$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)} = 4$

$\Rightarrow f(-\infty) = a = 4$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4 \Rightarrow b + 2(-\infty) = 4 \Rightarrow b = 1$

۱۴

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

**۱۵** (الف) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد.

(ب) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، واریانس آنها در مجدد آن ضرب خواهد شد.

(پ) واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده موردنظر است.

(ت) جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند.

## پاسخ سوالات ریاضی ۱ (پایه دهم)

$$\text{و } P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{1}{3}$$

و داریم:

$$P((A-B) \cup (B-A)) = P(A-B) + P(B-A) \\ = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{اگر } a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ که } P(\tau) = \frac{1}{6} P(a) \quad .9 \\ P(\tau) = x$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow 2x + 2x + x + 2x + 2x + 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow P(\{1, 2, 3, 4\}) = 2x + 2x + x + 2x = 7x = \frac{7}{11} \quad .10$$

$$P(A | B) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5} P(B)$$

$$P(B-A) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P(B) - \frac{1}{5} P(B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{6} \quad .11$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5} = \frac{1}{14} \quad .12$$

اگر  $D_1, D_2, D_3$  پیشامدهای معیوب بودن

و  $G_1, G_2, G_3$  پیشامدهای سالم بودن باشند، در این صورت پیشامدهای مطلوب  $D_1 \cap D_2 \cap D_3$  هستند.

پس:

$$P[G_1 \cap D_2 \cap D_3] \\ = P(G_1 \cap D_2 \cap D_3) + P(D_1 \cap G_2 \cap D_3) \\ = P(G_1)P(D_2 | G_1)P(G_3 | G_1 \cap D_2) \\ + P(D_1)P(G_2 | D_1)P(D_3 | D_1 \cap G_2) \\ = \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} \approx \frac{1}{9} \quad .13$$

$$P(W | B) = \frac{P(B | W)P(W)}{P(W)P(B | W) + P(M)P(B | M)} \\ = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} \approx \frac{1}{4} \quad .14$$

$$P(A) = \frac{5}{13} \times \frac{7}{15} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{15} = \frac{75}{195} = \frac{15}{39} \quad .14$$

$$a^r = \frac{1}{1000} \cdot 27 \Rightarrow a^r = 27 \Rightarrow 27\sqrt[3]{a} = 1000 \cdot a\sqrt{a} \\ \Rightarrow \sqrt[3]{a} = \frac{1000a\sqrt{a}}{27} \quad .9$$

$$2(x^r - 1) - (x^r - x) = 2(x-1)(x^r + x + 1) - x(x-1) \\ = (x-1)(2x^r + 2x + 2 - x) = (x-1)(2x^r + x + 2) \quad .10$$

$$3x = \frac{1}{x} - 2 \Rightarrow 3x^r = 1 - 2x \Rightarrow 3x^r + 2x - 1 = 0, \\ \Delta = 4 + 12 = 16 \\ x = \frac{-2 \pm 4}{6}, x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad .11$$

$$y = ax^r + bx + c \quad x = -\frac{b}{ra} = -1 \Rightarrow b = 2a \\ \Rightarrow y = ax^r + 2ax + c \\ x = -1, y = -2 \Rightarrow \begin{cases} a - 2a + c = -2 \\ 16a - 8a + c = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} c - a = -2 \\ 8a + c = 7 \end{cases} \\ \Rightarrow a = 1, c = -1, b = 2 \\ y = x^r + 2x - 1, y = 7 \Rightarrow x^r + 2x - 1 = 7 \\ \Rightarrow x^r + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \\ \Rightarrow x = -4 \text{ یا } x = 2 \quad .12$$

$$x^r \geq 2x + 8 \Rightarrow x^r - 2x + 1 \geq 9 \Rightarrow (x-1)^r \geq 9 \\ \Rightarrow |x-1| \geq 3 \Rightarrow a = 1, b = 3$$

## پاسخ سوالات آمار و احتمال

۱. (الف) گزاره نیست. (ب) گزاره است.

(ب)

۲. از جدول ارزشی استفاده کنید.

۳. از جدول ارزشی استفاده کنید.

$$\exists a, b \in R, [ab = 0 \wedge (a \neq 0 \wedge b \neq 0)] \quad .5$$

$$2^{n-r} = 2^n - 112 \Rightarrow n = 7 \quad \text{اگر } |A|=n \quad .6$$

$$\text{پس } |P(A)| = 2^7 = 128 \quad .6$$

(الف)

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ A' \subseteq B \end{cases} \Rightarrow A \cup A' \subseteq B \Rightarrow U \subseteq B \Rightarrow B = U \quad .7$$

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' \\ = (A \cap B) \cap (A' \cup C') \\ = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] \\ = A \cap B \cap C' = A \cap (B-C) \quad .7$$

$$\cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha \geq 1 \Rightarrow 45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ \cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha \leq 1 \Rightarrow 90^\circ < \alpha \leq 135^\circ \quad .5$$

$$\Rightarrow 45^\circ \leq \alpha \leq 135^\circ$$

۶. صورت و مخرج کسر سمت چپ را در عبارت  $(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)$  ضرب می‌کنیم و به کمک اتحاد مزدوج داریم:

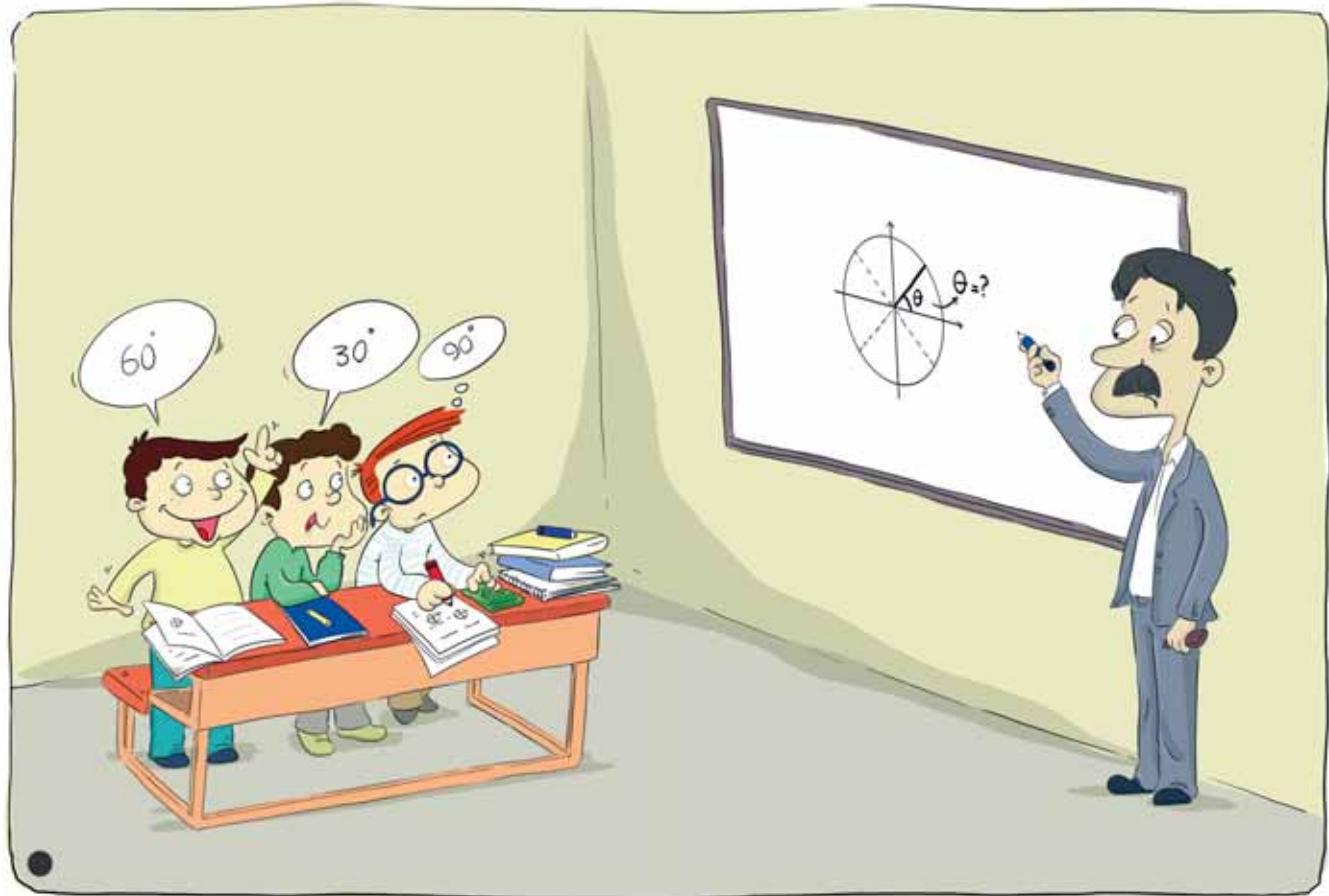
$$\frac{(\sin \alpha + 1)^2 - \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1} = \frac{\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - 1} \\ = \frac{2\sin \alpha (\sin \alpha + 1)}{2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad .7$$

$\sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > a$  در نتیجه: و در نتیجه:

$$A = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} + \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} = 0$$

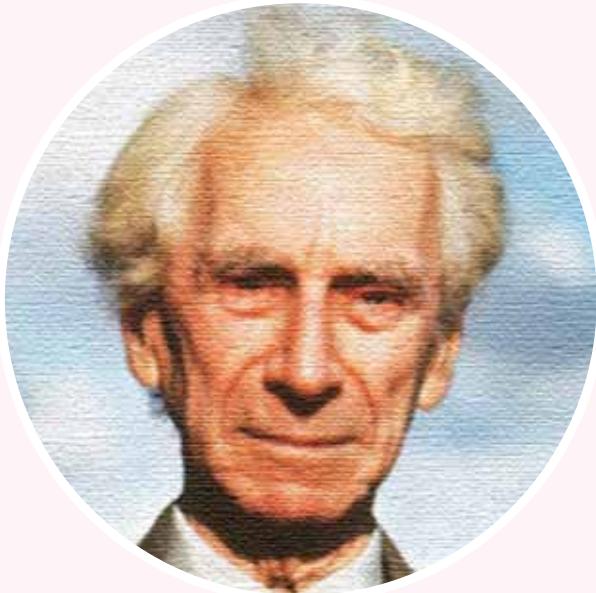






## دلیذپر ریاضیات

# پارادوکس راسل



سؤال این است: آیا آرایشگر می‌تواند صورت خودش را اصلاح کند؟! اگر بگوییم بله، پس آرایشگر از جمله کسانی است که خودشان صورتشان را اصلاح می‌کنند و لذا طبق آن قرارداد نمی‌تواند صورتش را آنجا اصلاح کند! اگر هم بگوییم خیر، پس آرایشگر از کسانی است که خودشان صورتشان را اصلاح نمی‌کنند و طبق همان قرارداد می‌تواند آنجا صورت خودش را اصلاح کند!



برتراند آرتور ویلیام راسل<sup>۱</sup> (۱۸۷۲-۱۹۷۰)، فیلسوف، منطق‌دان و ریاضی‌دان انگلیسی قرن بیستم و از دانشمندان بنام این قرن است و در کنار ریاضیات و منطق که رشتة اصلی و کاریاش بود، کارهای ادبی معتبری هم در دفاع از «آزادی بیان» انجام داد که به دریافت جایزه نوبل ادبیات در سال ۱۹۵۰ انجامید. در سال ۱۹۰۱ راسل یکی از مهم‌ترین کشفیاتش را در بحث نظریه مجموعه‌ها ارائه کرد که به «پارادوکس راسل» موسوم شد. موضوع این پارادوکس به این شرح است: «مجموعه S را که شامل همه مجموعه‌هایی است که عضو خودشان نیستند، در نظر بگیرید:

$$S = \{A | A \notin A\}$$

اگر  $S \in S$  باشد، پس  $S$  عضو  $S$  است و در نتیجه باید در شرایط  $S$  صدق  $\exists S \in S$  کند و ویژگی اعضای  $S$  را داشته باشد؛ یعنی:  $\forall S \in S$  (اما فرض کرده بودیم  $S \in S$ ). اما اگر بگوییم خیر، پس  $S$  عضو  $S$  نیست، بنابراین ویژگی اعضای  $S$  را دارد (عضو خودش نیست). بنابراین می‌تواند عضو  $S$  باشد، یعنی:  $\exists S \in S$

این پارادوکس پایه‌های نظریه مجموعه‌ها را به لرزه درآورد و باعث تغییراتی در ساختار آن برای رفع این مشکل شد. برای مثال، فرض شد که هیچ مجموعه‌ای عضو خودش نیست و مجموعه‌ای که شامل همه مجموعه‌های عالم باشد وجود ندارد. این شرط باعث شد که مجموعه  $S$  در پارادوکس فوق، تعریف نشده باشد.

راسل خودش در سال‌های بعد صورت‌های عامیانه‌تری را از پارادوکس معروف‌ش ارائه داد تا برای عامه مردم هم قابل فهم باشد. یکی از این صورت‌ها چنین است:

«آرایشگری در محل کسب و کارش تابلوی نصب کرده بود به این مضمون: در اینجا فقط صورت کسانی اصلاح می‌شود که خودشان صورتشان را اصلاح نکنند!»

\* پی‌نوشت‌ها

1. Bertrand Arthur William Russell

۲. اغلب مجموعه‌هایی که می‌شناسید، عضو خودشان نیستند (توجه کنید که عضویت و زیرمجموعه بودن با هم اشتباه نشود. مثلاً اگر:  $A = \{1, 2\}$ ، بدینهی است که:  $A \subseteq A$ ، ولی:  $A \notin A$ ) بنابراین به نظر می‌رسد هیچ مجموعه‌ای نتوان معرفی کرد که عضو خودش باشد. به این ترتیب،  $S$  در واقع مجموعه همه مجموعه‌های عالم است.



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کanal سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)