برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

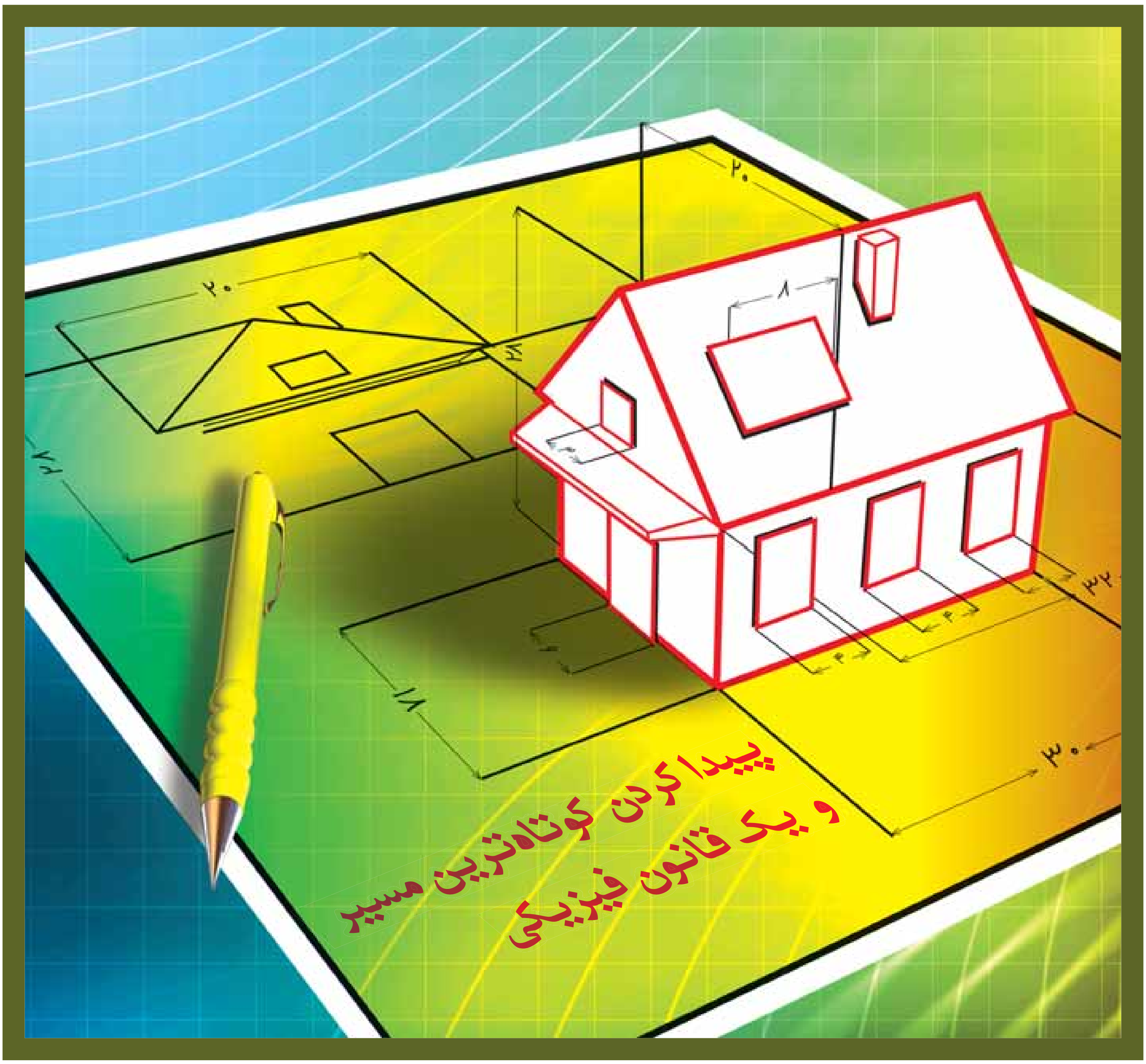
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد ۷

■ دورهٔ بیست و هفتم
■ شمارهٔ ۱۰۹
■ فروردین ۱۳۹۷
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



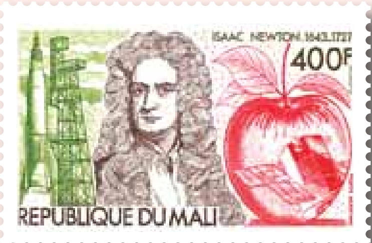
- تاریخ‌های پالیندروم در سال‌های چهاررقمی
- قضیهٔ پیک در حالت‌های خاص
- اثبات هندسی رابطهٔ هرون
- فرهاد کوچولو و دوستانش در اردوی تفریحی عید نوروز
- کاربرد ریاضیات دبیرستان در اقتصاد

آیزاک نیوتن

احسان یارمحمدی

۱

۲



۳

۴

۵

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ ریاضی رشد برهان دورهٔ دوم متوسطه است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان مورد نظر به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ وی می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

مجسمهٔ آیزاک نیوتن
در موزهٔ تاریخ طبیعی
دانشگاه آکسفورد

آیزاک نیوتن، ریاضی‌دان، اخترشناس، فیزیک‌دان و فیلسوف بی‌بدیل انگلیسی است که به عقیدهٔ بسیاری از کارشناسان صاحب بزرگ‌ترین فکر و ذهن علمی در طول تاریخ بشریت است. نیوتن با بنیان‌گذاری قوانین حرکت اجسام، قانون جهانی گرانش، حساب دیفرانسیل و انتگرال، و همچنین ارائهٔ برهان‌های ریاضی برای اثبات قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر، بر روند پیشرفت تحولاتی که در آن روزگار به انقلاب علمی در اروپا شهرت یافت، تأثیرات عمیق و شگرفی گذاشت.

۱. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۹ در لهستان
۲. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در فرانسه
۳. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۷۷ در جمهوری مالی
۴. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۸۷ در شاهزاده‌نشین موناکو
۵. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۷۷ در جمهوری بِنین

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهفتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۹
■ فروردین ۱۳۹۷
■ شمارهٔ ۷
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی
آزادبه فرزان
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
نشانی امور مشترکین:
تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۷۵۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

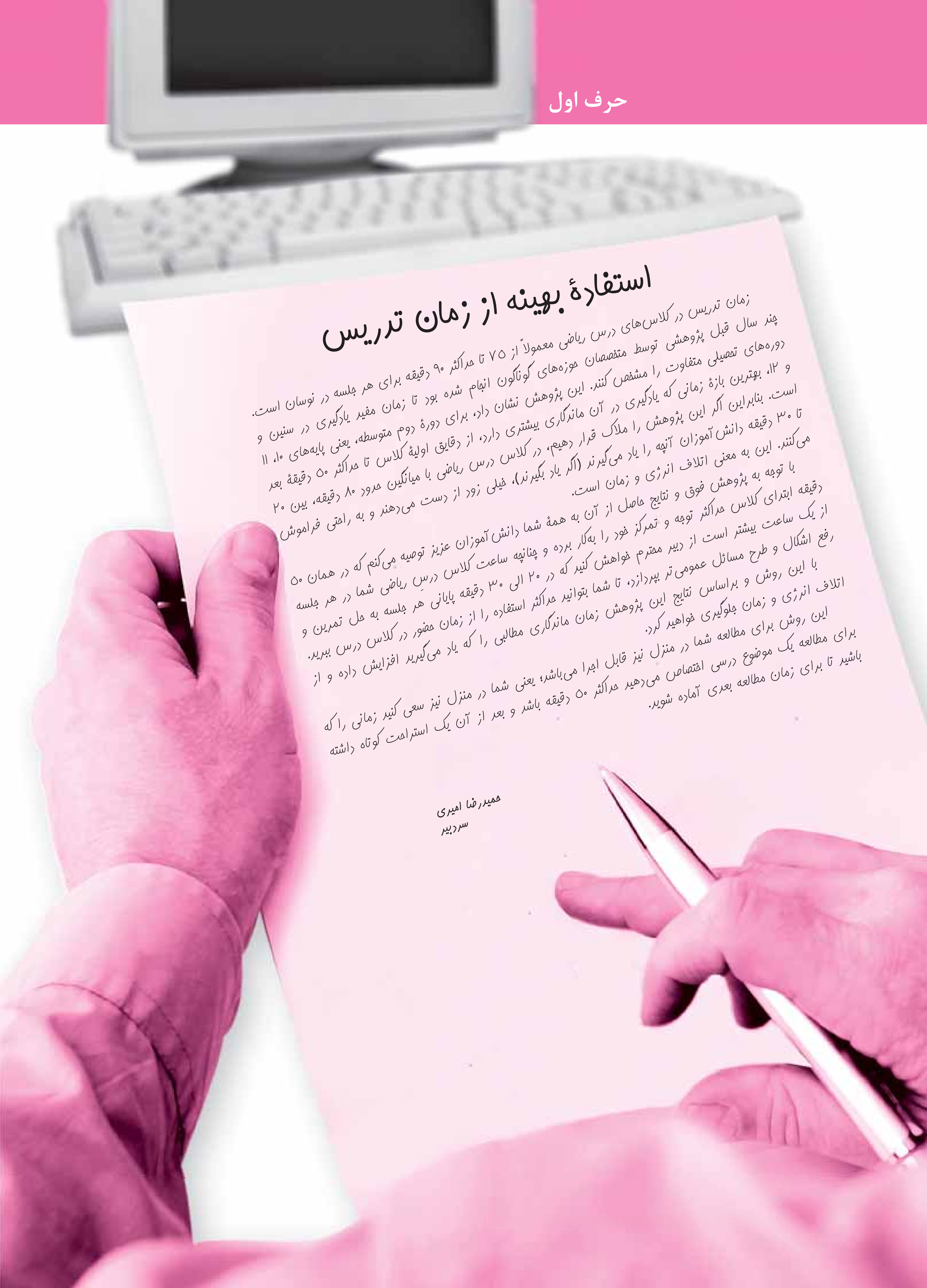
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲



استفادهٔ بهینه از زمان تدریس

زمان تدریس در کلاس‌های درس ریاضی معمولاً از ۷۵ تا حداکثر ۹۰ دقیقه برای هر جلسه در نوسان است.

چند سال قبل پژوهشی توسط متخصصان حوزه‌های گوناگون انجام شده بود تا زمان مفید یادگیری در سنین و دوره‌های تحصیلی متفاوت را مشخص کنند. این پژوهش نشان داد، برای دورهٔ دوم متوسطه، یعنی پایه‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲، بهترین بازهٔ زمانی که یادگیری در آن ماندگاری بیشتری دارد، از دقایق اولیهٔ کلاس تا حداکثر ۵۰ دقیقهٔ بعد است. بنابراین اگر این پژوهش را ملاک قرار دهیم، در کلاس درس ریاضی با میانگین حدود ۸۰ دقیقه، بین ۲۰ تا ۳۰ دقیقه دانش‌آموزان آنچه را یاد می‌گیرند (اگر یاد بگیرند)، خیلی زود از دست می‌دهند و به راحتی فراموش می‌کنند. این به معنی اتلاف انرژی و زمان است.

با توجه به پژوهش فوق و نتایج حاصل از آن به همهٔ شما دانش‌آموزان عزیز توصیه می‌کنم که در همان ۵۰ دقیقه ابتدای کلاس حداکثر توجه و تمرکز خود را به‌کار برده و چنانچه ساعت کلاس درسِ ریاضی شما در هر جلسه از یک ساعت بیشتر است از دبیر محترم خواهش کنید که در ۲۰ الی ۳۰ دقیقه پایانی هر جلسه به حل تمرین و رفع اشکال و طرح مسائل عمومی‌تر بپردازد، تا شما بتوانید حداکثر استفاده را از زمان حضور در کلاس درس ببرید. با این روش و براساس نتایج این پژوهش زمان ماندگاری مطالبی را که یاد می‌گیرید افزایش داده و از اتلاف انرژی و زمان جلوگیری خواهید کرد.

این روش برای مطالعه شما در منزل نیز قابل اجرا می‌باشد؛ یعنی شما در منزل نیز سعی کنید زمانی را که برای مطالعه یک موضوع درسی اختصاص می‌دهید حداکثر ۵۰ دقیقه باشد و بعد از آن یک استراحت کوتاه داشته باشید تا برای زمان مطالعه بعدی آماده شوید.

حمیدرضا امیری
سردبیر

ریاضی لذت‌بخش

در کلاس خانم جمشیدی

بخش ۲ بیشترین مساحت با محیط مفروض

آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی رودهن

اشاره

کلاس‌هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می‌گویم، دبیر ریاضی‌مان.
تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشـــیدی با بقیهٔ کلاس‌هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.
اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شـــدیم که در حال درس دادن است. روش او بســـیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شـــدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش»! به همین خاطر تصمیم گرفتم کلاس‌های ریاضی‌مان و تمام صحبت‌های ردوبدل شده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.

جلسهٔ دوم: شنبه ۲۰ آبان ۱۳۹۶

امـــروز می‌خواهم جلســـهٔ دوم «ریاضی لذت‌بخش» و صحبت‌هایمان را در آن جلسه با شما سهیم شـــوم. امیدوارم شما هم مانند ما عمیقاً این مطالب را یـــاد بگیرید و از آن لذت ببرید.

***

خانم جمشـــیدی مطابـــق معمول با لبخندی وارد کلاس شـــد. پس از ســـلام و احوال‌پرسی گفت: «امروز می‌خواهیم به یک کشاورز کمک کنیم». ما با تعجب به یکدیگر نگاه کردیم. خانم جمشیدی ادامه داد: «اگر یک کشـــاورز بخواهد حصاری مستطیلی با استفاده از ۴۰۰ متر نرده درست کند، طول و عرض آن چقدر باید باشد؟»

من سریع گفتم: «یک مربع با ابعاد ۱۰۰ متر و مساحت ۱۰۰۰۰ متر مربع! اما آیا این بهترین حالت است؟»

مهتاب هم فکری کرد و گفت: «او باید مســـتطیلی به ابعاد ۱۵۰ متـــر در ۵۰ متر بســـازد. البته مساحت زمینش در این حالت فقط ۷۵۰۰ متر مربع می‌شود».

باران هم گفت: «اگر ابعاد ۱۰۱ متر در ۹۹ متر باشـــند، چطور؟ مساحت هم ۹۹۹۹ متر مربع می‌شود».

مهتـــاب گفـــت: «به نظـــر می‌آید مربع بزرگ‌ترین مساحت را دارد و مستطیل‌های دیگر مســـاحت‌های کوچک‌تـــری دارند. اما چطور می‌شود این را ثابت کرد؟»

خانم جمشیدی با نگاهی مهربان گفت: «بیایید محیـــط را $4a$ بنامیم به جای ۴۰۰ متر. ایـــن طـــوری حالتی کلـــی را در نظر گرفته‌ایم. پس اگر زمین یک مربع بود، اضلاع آن a می‌شد. حالا اگر به جای طول، $a+x$ قرار دهیم چه می‌شود؟»

من گفتم: «در این صـــورت عرض باید $a-x$ باشد تا محیط $4a$ شود».

باران هم حرف مرا تکمیل کرد و گفت: «پس مســـاحت هـــم $(a+x)(a-x)$ یا همان a^2-x^2 می‌شود».

مهتاب گفت: «یعنی از a^2 کمتر می‌شود، مگر اینکه $x=0$ بشود و هر چقدر x بزرگ‌تر باشد، مساحت کوچک‌تر می‌شود.»

موضوعی به نظر من رســـید: «حتی اگر x منفی باشـــد؟ البته منطقی نیســـت که x منفی باشـــد، چون ما $a+x$ را طول مستطیل گرفتیم».

خانم جمشـــیدی حرف مرا تأیید کرد و گفـــت: «بله و در هر حالتی با x منفی هم x^2 همچنان مثبت می‌شود. مربع، مستطیلی است با بیشترین مساحت به ازای محیط مفروض.

به زبان ریاضی، اگر دو متغیر، مجموع ثابت داشته باشند، بیشترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به دست می‌آید که مقادیر آن‌ها مساوی باشد».

مهتاب پرسید: «برای بیش از دو عدد هم این موضوع صادق است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، اگر همهٔ عددها مثبت باشند، فرض کنید شما n عدد دارید با حاصل‌جمع na که a میانگین آن‌هاست. اگر همهٔ عددها مساوی آن باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها چقدر می‌شود؟»

باران متفکرانه گفت: «همهٔ عددها باید مساوی a باشند، پس حاصل ضربشان a^n است».

خانم جمشیدی ادامه داد: «درست است. حال اگر عددها مساوی نباشند، حداقل یک عدد کمتر از a و حداقل یک عدد بیشتر از a هست، به شرطی که a میانگین آن‌ها باشد. فرض کنیم کوچک‌ترین عدد را l و بزرگ‌ترین عدد را h بنامیم. اگر l را بزرگ‌تر و به همان میزان h را کوچک‌تر کنیم، حاصل‌ضرب lh چه می‌شود؟»

من گفتم: «شبیه ساختن یک مستطیل با محیط ثابت است که تقریباً مربع باشد. پس حاصل‌ضرب بزرگ‌تر می‌شود».

خانم جمشیدی هم گفت: «دقیقاً همین‌طور است و اگر lh افزایش پیدا کند، حاصل‌ضرب همهٔ عددها چه می‌شود؟»

مهتاب جواب داد: «آن هم افزایش پیدا می‌کند، البته در صورتی که حاصل‌ضرب بقیهٔ عددها مثبت باشد».

خانم جمشیدی ادامه داد: «درست است و به همین دلیل هم ما تأکید می‌کنیم که عددهای مربوطه همه مثبت باشند. بنابراین با نزدیک کردن عددهای انتهایی l و h به طرف هم به ازای یک مقدار مساوی، یکی از آن‌ها را مساوی a به دست می‌آوریم و بعد دست نگه می‌داریم».

باران گفت: «پس حالا عدد غیر a یکی کمتر داریم».

مهتاب که فکرش مشغول شده بود، پرسید: «پس حالا ممکن است همهٔ عددها با a مساوی باشند یا نه، دوباره این روند را با کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددها ادامه می‌دهیم؟»

خانم جمشیدی جواب داد: «دقیقاً! و عددها دیگر آن عددهای دفعهٔ قبل نیستند. در هر مرحله حاصل‌ضرب بیشتر می‌شود و با اولین عددی که مساوی a بشود هم روند را متوقف می‌کنیم».

من هم همین‌طور نتیجه‌گیری کردم: «پس بالاخره همهٔ عددها مساوی a می‌شوند و حاصل‌ضرب هم می‌شود a^n که بزرگ‌ترین حاصل‌ضرب است. پس ثابت شد!»

خانم جمشیدی گفت: «بله، این اثبات متعلق به پروفسور **پولیا**ست و برای حل مسائل ماکزیمم‌سازی به‌کار می‌رود. مثلاً فرض کنید شما می‌خواهید یک جعبهٔ مکعب‌مستطیل شکل را طراحی کنید که بیشترین حجم را داشته باشد و مساحت آن عدد مشخصی باشد. جعبه باید چه شکلی باشد؟»

باران گفت: «حدس می‌زنم باید مکعب باشد، اما چطور می‌شود ثابت کرد؟»

خانم جمشیدی در جواب باران گفت:

«بسیار خب، ابعاد را l، w و h می‌نامیم. مساحت جانبی و حجم چقدر می‌شود؟»

مهتاب گفت: «حجم $l.w.h$ می‌شود و مساحت جانبی هم $۲lw+۲lh+۲wh$ است».

خانم جمشیدی گفت: «درست است و چون مساحت جانبی ثابت است، پس مقدار $lw+lh+wh$ هم ثابت است. حالا اگر سه مقدار lw، lh، wh را به جای اینکه با هم جمع کنید، در هم ضرب کنید، چی به دست می‌آید؟»

من گفتم: «می‌شود $l^۲w^۲h^۲$ که مربع حجم است».

مهتاب هم ادامه داد: «چه جالب شد! پس اگر مقدارهای lw، lh و wh را مساوی فرض کنیم، مربع حجم بیشترین مقدار خودش را اختیار می‌کند و بنابراین حجم هم بیشترین مقدار خودش را دارد».

خانم جمشیدی گفت: «پس باید طول، عرض و ارتفاع را مساوی فرض کنید و یک مربع به دست می‌آید».

باران گفت: «یک سؤال دربارهٔ مسئله کشاورز دارم که می‌خواست یک حصار مستطیلی درست کند. حصار هر شکلی می‌تواند داشته باشد یا نه فقط مستطیل؟ می‌تواند شکل دیگری داشته باشد با مساحتی بزرگ‌تر از مربع؟»

من گفتم: «فکر می‌کنم باید دایره‌ای شکل باشد! اما حدس می‌زنم اثباتش سخت باشد».

خانم جمشیدی گفت: «درواقع با آنچه که قبلاً انجام داده‌اید، خیلی سخت نیست. حداقل نشان داده‌اید هر شکلی که دایره نیست، می‌تواند با یک متغیر به شکلی تبدیل شود که مساحت بیشتری با محیط مشابه داشته باشد. فرض کنید کل طول حصار را L بنامیم. از نقطهٔ دلخواه A شروع می‌کنیم و فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}L$ را طی می‌کنیم تا به نقطهٔ B برسیم. حال یک خط مستقیم AB تصور کنید و دو طرف حصار را در نظر بگیرید. بین طرف راست و چپ AB طرفی را انتخاب کنید که مساحت بیشتری داشته باشد و نرده‌کشی طرف دیگر را طوری تغییر دهید که قرینهٔ قسمت با مساحت بزرگ‌تر نسبت به خط AB شود».

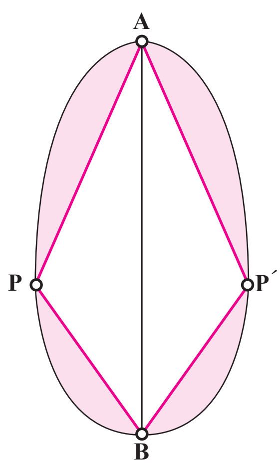
من پرسیدم: «اگر هر دو طرف مساحت‌های مشابه داشتند چطور؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «در این دو حالت دو طرف را نسبت به AB قرینه کنید تا جایگزین یکدیگر شوند. چیزی که الان داریم یک منحنی بستهٔ نرده‌کشی شده است که نسبت به AB متقارن است. فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی در یکی از طرفین باشد و P' تصویر متقارن آن نسبت به AB باشد. اگر زاویهٔ APB قائمه باشد، دربارهٔ دایره‌ای به قطر AB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟»

مهتاب گفت: «باید از P رد بشود. ما قبلاً یاد گرفته‌ایم که مستطیل قطرهای مساوی دارد که یکدیگر را نصف می‌کنند».

خانم جمشیدی گفت: «صحیح است. دایره از همهٔ نقاطی مثل P که زاویهٔ APB قائمه باشد، رد می‌شود. اگر برای همهٔ نقاط حصار به‌کار برود، حصار به شکل دایره درمی‌آید».

باران متفکرانه گفت: «پس اگر دایره نباشد، یعنی نقطه‌هایی داریم که $A\hat{P}B$ زاویهٔ قائمه نیست».



خانم جمشیدی نگاهی به من کرد و گفت: «حالا تصور کنید قسمت‌های هاشور خورده در شکل از تختهٔ سه‌لا ساخته شده‌اند و در نقاط A، P، B و P' آزادانه به هم متصل‌اند، با فضای خالی APBP' که شما می‌توانید A و B را به طرف هم بکشید یا از هم جدا کنید».

مهتاب گفت: «پس مساحت تختهٔ سه‌لا ثابت می‌ماند، ولی مساحت داخلی تغییر می‌کند».

خانم جمشیدی جواب داد: «و قسمت داخلی از دو مثلث همنهشت APB و AP'B تشکیل شده است».

بهار پرسید: «در هر مثلث دو ضلع ثابت است، ولی زاویه‌های رأس‌های $\hat{P}$ و $\hat{P}'$ می‌توانند تغییر کنند، درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، حال شما چطور می‌توانید از مساحت مثلث استفاده کنید؟»

باران گفت: «AP را به‌عنوان قاعده می‌گیریم و ارتفاع را از رأس B بر AP عمود می‌کنیم».

مهتاب گفت: «ارتفاع ممکن است کوتاه‌تر از BP باشد، مگر وقتی که زاویهٔ P قائمه باشد. یعنی اگر زاویهٔ P قائمه نباشد، با حرکت دادن نقطه‌ها به طرف هم یا دور کردن نقطه‌ها از هم کاری می‌کنیم تا زاویهٔ P قائمه بشود و این حرکت مساحت هر مثلث را افزایش می‌دهد».

خانم جمشیدی هم نتیجه‌گیری پایانی را با لبخند گفت: «دقیقاً همین‌طور است که می‌گویی و این یعنی کل مساحت داخلی منحنی بدون تغییر محیط افزایش پیدا می‌کند و این موضوع نشان می‌دهد که منحنی‌های غیردایره هرگز مساحت ماکزیمم را به ازای محیط مفروض ندارند».

***

امیدوارم که از حل این مسئلهٔ زیبا لذت برده باشید.

تاریخ‌های پالیندروم در سال‌های چهاررقمی

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی ارومیه

مقدمه

واژهٔ انگلیسی «Palindrome» (پالیندروم) که معادل فارسی آن «واروخوانه» یا «قلب مستوی» است، به کلمه‌ها، جمله‌ها یا عددهایی اطلاق می‌شود که مقلوبشان با خودشان یکی است. یعنی از دو طرف (راست به چپ و چپ به راست) دقیقاً به یک شکل خوانده می‌شوند. بهتر است در فارسی آن‌ها را «خودمقلوب» بنامیم.

نمونه‌هایی از کلمه‌های خودمقلوب عبارت‌اند از: «گرگ، رادار، شپش، مادام».

نمونه‌هایی از عددهای خودمقلوب عبارت‌اند از: «۲۲، ۳۴۳، ۸۷۷۸، ۲۰۱۳۳۱۰۲».

تعداد عددهای پالیندروم زیاد نیست. با اصل شمارش به راحتی مشخص می‌شود که به ترتیب ۹ و ۹۰ عدد دورقمی و سه‌رقمی خودمقلوب وجود دارد. این فراوانی به‌طور نسبی با بالا رفتن تعداد ارقام کاهش می‌یابد.

از آنجا که نمایش تاریخ ایام به وسیلهٔ یک سلسله از عددها صورت می‌پذیرد، در این مقاله موضوع تاریخ‌های خودمقلوب سال‌های چهاررقمی، به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از عددهای هشت‌رقمی، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بخش اول که ترجمه و تشریح است، این موضوع را در تاریخ میلادی مورد بررسی قرار می‌دهد و در ادامه تاریخ‌های خودمقلوب هجری خورشیدی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در اینجا به‌عنوان یادآوری، ماه‌های میلادی را به ترتیب با ذکر تعداد روزها می‌آوریم:

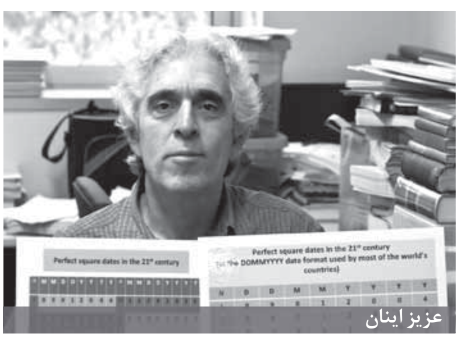
۱. ژانویه (۳۱ روز)؛ ۲. فوریه (۲۸ روز و در سال‌های کبیسه ۲۹ روز)؛ ۳. مارس (۳۱ روز)؛ ۴. آوریل (۳۰ روز)؛ ۵. مه (۳۱ روز)؛ ۶. ژوئن (۳۰ روز)؛ ۷. ژوئیه (۳۱ روز)؛ ۸. اوت (۳۱ روز)؛ ۹. سپتامبر (۳۰ روز)؛ ۱۰. اکتبر (۳۱ روز)؛ ۱۱. نوامبر (۳۰ روز)؛ ۱۲. دسامبر (۳۱ روز)

کلیدواژه‌ها: پالیندروم، عزیز اینان، تقویم میلادی، تقویم خورشیدی، اصل شمارش

نمایش تاریخ میلادی

نمایش تاریخ سال‌های چهاررقمی در اغلب کشورهای دنیا با فرمت DD/MM/YYYY (یا: DD.MM.YYYY و یا: DD-MM-YYYY) انجام می‌پذیرد که در آن دو رقم اول (DD)، عدد روز (D حرف اول Day)، دو رقم بعدی (MM) عدد ماه (M حرف اول Month) و چهار رقم آخر (YYYY) عدد سال (Y حرف اول Year) را نشان می‌دهند. (ایالات متحده آمریکا از جمله معدود کشورهایی است که از مُدل MM/DD/YYYY استفاده می‌کند که درواقع مکان ماه و روز جابه‌جا شده است).

اگر ممیزهای (/، .، یا -) بین رقم‌ها را حذف کنیم، تاریخ مربوط به یک شبانه‌روز در سال‌های چهاررقمی، یک دنبالهٔ عددی هشت رقمی به فرم DDMMYYYY خواهد بود. مثلاً تاریخ‌های هیجدهم مارس دو هزار و پانزده و پنجم دسامبر ۱۹۹۷ به ترتیب با ۱۸۰۳۲۰۱۵ و ۰۵۱۲۱۹۹۷ نمایش داده می‌شوند. روز تولد **مارتین گاردنر**[۳] مشهورترین ریاضی‌دان آمریکایی قرن بیستم که در زمینهٔ معماهای ریاضی کار می‌کرد، بیست و یکم اکتبر هزار و نهصد و چهارده است که به‌صورت ۲۱۱۰۱۹۱۴ خواهد بود.


عزیز اینان

معرفی نویسنده

عزیز اینان، متولد ترکیه، دکترای الکترونیک از «دانشگاه استنفورد»[۱] و در حال حاضر استاد «دانشگاه ایالتی پورتلند»[۲] است. وی از حل معماهای ریاضی لذت می‌برد و به‌عنوان یک سرگرمی به این کار می‌پردازد. جالب است که اینان در خلال پرداختن به انواع پازل‌های ریاضی متوجه یک ویژگی معماگونهٔ هندسی در نام خود نیز شده است. بدین ترتیب که اگر در نام و نام خانوادگی وی، یعنی «AZIZ INAN»، در هر دو کلمه جای حرف‌های صدادار (A و I) را عوض کنیم و سپس حرف‌های بی‌صدا (Z و N) را به اندازهٔ ۹۰ درجه بچرخانیم، جای نام و نام خانوادگی او عوض می‌شود.

تاریخ‌های پالیندروم

حال که با نمایش تاریخ سال‌های چهاررقمی به‌صورت DDMMYYYY آشنا شدیم، پرسشی که به ذهن می‌رسد این است که: «آیا برخی از این دنباله‌های هشت رقمی اعداد می‌توانند خودمقلوب باشند یا نه؟» پاسخ مثبت است و این تاریخ‌های به‌خصوص، تاریخ‌های پالیندروم نامیده می‌شوند. برای مثال، همان‌طور که در ادامه خواهیم دید، در فرمت DDMMYYYY اولین تاریخ پالیندروم قرن ۲۱ در دهم فوریه ۲۰۰۱ ظاهر می‌شود. زیرا این تاریخ که به‌صورت ۱۰۰۲۲۰۰۱ نمایش داده می‌شود عددی خودمقلوب است.

جالب است که عدد ۱۰۰۲۲۰۰۱ در فرمت MMDDYYYY نیز اولین تاریخ خودمقلوب قرن ۲۱ است. البته این عدد در این فرمت مربوط به روز دیگری، یعنی دوم اکتبر ۲۰۰۱ است.

باید توجه داشت که تاریخ‌های خودمقلوب بسیار نادرند؛ تعدادشان کم است و گاه برای قرن‌ها ظاهر نمی‌شوند. حال برای یافتن این موارد نادر شرایط لازم را برای اینکه یک دنبالهٔ هشت رقمی عددها مربوط به تاریخ سال‌های چهاررقمی با فرمت DDMMYYYY یک تاریخ پالیندروم باشد، بررسی می‌کنیم. در آغاز برای متمایز ساختن ارزش مکانی رقم‌ها، آن‌ها را به‌صورت $D_1D_2M_1M_2Y_1Y_2Y_3Y_4$ اندیس‌گذاری می‌نماییم. حال برای اینکه دنبالهٔ اخیر پالیندروم باشد، باید $D_1=Y_4$، $D_2=Y_3$، $M_1=Y_2$ و $M_2=Y_1$ باشد. در نتیجه خودمقلوب‌ها به فرم $D_1D_2M_1M_2M_2M_1D_2D_1$ خواهند بود. برای یافتن تمامی موارد مورد نظر جدول ۱ را با توجه به آنچه در ادامه می‌آید، ترتیب داده‌ایم.

الف. محدودیت متغیرها

- D_1 رقم دهگان در عدد روز است و چون تعداد روزهای ماه‌های میلادی از ۳۱ تجاوز نمی‌کند، لذا تنها حالت‌های ممکن برای D_1 عبارت‌اند از: ۰، ۱، ۲، ۳. از طرف دیگر، Y_4 رقم یکان در عدد سال است و می‌تواند از ۰ تا ۹ هر عددی را اختیار کند، ولی برای پالیندروم بودن باید با D_1 برابر باشد. پس حالات ممکن برای Y_4 عبارت‌اند از: ۰، ۱، ۲، ۳.
- D_2 رقم یکان در عدد روز است. Y_3 هم رقم دهگان در عدد سال است. هر دو می‌توانند ۰ تا ۹ را اختیار کنند، لیکن برای خودمقلوب بودن باید با هم هماهنگ باشند؛ یعنی D_2 هر مقدار باشد، Y_3 هم باید همان باشد.
- M_1 رقم یکان در عدد ماه است و چون ۱۲ ماه داریم، پس تنها حالت‌های ممکن برای M_1 عبارت‌اند از: ۰ و ۱. Y_2 هم رقم صدگان در عدد سال است و باید با M_1 برابر باشد. لذا تنها حالت‌های ممکن برای Y_2 نیز عبارت‌اند از: ۰ و ۱.
- M_2 رقم یکان در عدد ماه است و به وضوح ۰ تا ۹ را می‌تواند اختیار کند، لیکن برای پالیندروم بودن باید با Y_1 برابر باشد. از طرف دیگر، Y_1 برای چهاررقمی بودن سال باید ناصفر باشد، لذا M_2 و Y_1 هماهنگ با هم می‌توانند ۱ تا ۹ باشند.

ب. شرح جدول

جدول ۸ سطر و ۹ ستون دارد. در ستون اول، حالت‌های ممکن برای D_1 به سه دسته تقسیم شده‌اند (۰، ۲، ۱ و ۳). دلیل آن خاص بودن هر یک از این سه حالت است. $D_1=0$ خاص است، زیرا با صفر بودن D_1 دیگر D_2 نمی‌تواند صفر باشد. (چرا؟) همچنین، چون با صفر بودن M_1، به‌طور مشابه M_2 نمی‌تواند صفر باشد، با مجزا کردن $M_1=0$ و $M_1=1$ برای $D_1=0$ دو سطر از جدول اشغال می‌شود.

به همین ترتیب می‌توانید سطرهای دیگر جدول را رمزگشایی کنید و لذت ببرید! لازم به ذکر است که ستون آخر که سرستون آن با N مشخص شده است، تعداد تاریخ‌های پالیندروم تولید شده توسط هر سطر را نشان می‌دهد. نتایج این ستون نیز به سادگی با اصل شمارش قابل محاسبه هستند.

ج. برخی نتایج جالب

- تاریخ‌های خودمقلوب صرفاً در سال‌های چهاررقمی که به کمتر از ۴ ختم می‌شوند، ظاهر می‌گردند. (چرا؟) بدین ترتیب سال‌هایی چون ۲۰۱۶، ۲۰۱۷، ۲۰۱۸ و ۲۰۱۹ فاقد چنین تاریخ‌هایی هستند.

- اگر Y_1 بزرگ‌تر از ۲ باشد، Y_2 باید صفر باشد؛ چون:

$$Y_1 > 2 \Rightarrow M_2 > 2 \Rightarrow M_2 = 3,4,5,6,7,9 \Rightarrow M_1 = 0 \Rightarrow Y_2 = 0$$

این یعنی تاریخ‌هـــای خودمقلـــوب در هزاره‌های دوم و ســـوم (۳۰۰۰ـ۱۰۰۱) فقط در دو قرن نخستین هـــر هـــزاره می‌توانند ظاهر شـــوند. به عبـــارت دیگر، تاریخ‌های پالیندروم کـــه بین هزاره‌های چهارم تا دهم (۱۰۰۰۰ ـ ۳۰۰۱) می‌افتنـــد، فقط می‌توانند در اولین قرن هر هزاره ظاهر شوند.

N	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	$M_2=Y_1$	$M_1=Y_2$	$D_2=Y_3$	$D_1=Y_4$
۸۱	۰	۱→۹	۰	۱→۹	۱→۹	۰	۱→۹	۰
۱۸	۰	۱→۹	۱	۱, ۲	۱, ۲	۱	۱→۹	۰
۱۸۰	۱, ۲	۰→۹	۰	۱→۹	۱→۹	۰	۰→۹	۱, ۲
۴۰	۱, ۲	۰→۹	۱	۱, ۲	۱, ۲	۱	۰→۹	۱, ۲
۸	۳	۰	۰	۱, ۳→۹	۱, ۳→۹	۰	۰	۳
۵	۳	۱	۰	۱, ۳, ۵, ۷, ۸	۱, ۳, ۵, ۷, ۸	۰	۱	۳
۱	۳	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۳
۱	۳	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۳

جدول ۱

با محاســـبهٔ مجموع اعداد ســـتون آخر مشـــخص می‌شود که جمعاً ۳۵۴ تاریخ خودمقلوب در بازهٔ زمانی نه هزار ساله که بالغ بر حدود سه میلیون روز می‌شود، وجود دارد.

تاریخ‌های خودمقلوب قرن ۲۱

قرن بیست‌ویکم در فرمت DDMMYYYY دارای ۲۹ تاریخ پالیندروم است که سه مورد را ذکر می‌کنیم و اســـتخراج بقیـــه را از جدول (۱) بر عهـــده خواننده می‌گذاریم.

- دهم فوریهٔ دو هزار و یک با نمایش: ۱۰۰۲۲۰۰۱.
- بیستم فوریهٔ دو هزار و دو با نمایش: ۲۰۰۲۲۰۰۲.
- یکم فوریهٔ دو هزار و ده با نمایش: ۱۰۲۲۰۱۰.

تاریخ‌هـــای خودمقلـــوب در تقویـــم هجری خورشیدی

در ایران برای نمایش تاریـــخ ایام از تقویم هجری خورشـــیدی با فرمـــت YYYY/MM/DD اســـتفاده می‌کنیم. مثـــلاً هجدهم خرداد یک هزار و ســـیصد و پنجاه و شـــش به‌صورت ۱۳۵۶/۰۳/۱۸ نوشته می‌شود که با برداشتن ممیزها دنبالهٔ هشت رقمی ۱۳۵۶۰۳۱۸ را خواهیم داشت.

پس‌ازاندیس‌گذاری‌فرمت $Y_1Y_2Y_3Y_4M_1M_2D_1D_2$ را خواهیم داشـــت که بـــرای خودمقلوب بـــودن باید تســـاوی‌های $Y_1=D_2$، $Y_2=D_1$، $Y_3=M_2$ و $Y_4=M_1$ را داشـــته باشـــیم. با این اوصاف خودمقلوب‌ها به‌صورت $D_2D_1M_2M_1M_1M_2D_1D_2$ خواهنـــد بـــود. حال برای یافتن تمامـــی تاریخ‌هـــای خودمقلوب در ســـال‌های چهاررقمی خورشـــیدی (۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ خورشیدی)، جدول ۲ را بـــا توجه به آنچه در ادامـــه می‌آید ترتیب می‌دهیم:

M_1 رقم دهگان عدد ماه اســـت و چون شمارهٔ ماه از دوازده تجاوز نمی‌کنـــد، تنها مقدارهای ممکن برای M_1 عددهـــای صفر و یک خواهند بود. اما $M_1=0$ حالت خاصی اســـت، زیرا ناصفر بـــودن M_2 را ایجاب می‌کند. (چرا؟) پـــس با در نظر گرفتن دو حالـــت برای M_1، دو حالت برای M_2 پدید می‌آید. برای پالیندروم بودن باید تساوی $Y_4=M_1$ برقرار باشـــد، پس تنها حالات ممکن برای Y_4 فقط ۰ و ۱ هستند. این یعنی:

- تاریخ‌های خودمقلوب مربوط به سال‌های چهاررقمی خورشـــیدی فقط در ســـال‌هایی که به ۰ یا ۱ ختم می‌شوند، ظاهر می‌گردند.

Y_1 رقم هزارگان عدد ســـال است و نمی‌تواند صفر باشـــد، زیرا در غیر این صـــورت $Y_1Y_2Y_3Y_4$ نمی‌تواند چهاررقمی باشـــد. برای خودمقلوب بودن باید تساوی $D_2=Y_1$ برقرار باشـــد و این یعنی D_2 باید ناصفر باشد. به عبارت دیگر:

- تاریخ‌های خودمقلوب تقویم خورشـــیدی در روزهای دهم، بیستم و سی‌ام ماه ظاهر نمی‌شوند.

Y_2 رقم صدگان عدد سال است که برای خودمقلوب بودن باید با D_1 برابر باشد. پس تنها مقادیر ممکن برای Y_2، عددهای ۰، ۱، ۲ و ۳ خواهند بود. این یعنی:

- تاریخ‌های خودمقلوب خورشـــیدی تنها در قرن‌های اول، دوم، ســـوم و چهارم هر هزاره ظاهر می‌شـــوند. برای مثال، اکنون که در هزارهٔ دوم (۲۰۰۰ ـ ۱۰۰۱) خورشیدی به ســـر می‌بریم، تمامی خودمقلوب‌های احتمالی در این هزاره در بازهٔ زمانی ۱۰۰۱ تا ۱۳۹۹ خواهنـــد بود. بـــه عبارت دیگـــر، از ۱۴۰۰ تا ۲۰۰۰ پالیندرومی نخواهیم داشت.

N	$D_۲$	$D_۱$	$M_۲$	$M_۱$	$Y_۴=M_۱$	$Y_۳=M_۲$	$Y_۲=D_۱$	$Y_۱=D_۲$
۸۱	۱⟶۹	۰	۱⟶۹	۰	۰	۱⟶۹	۰	۱⟶۹
۲۷	۱⟶۹	۰	۰ ,۱ ,۲	۱	۱	۰ ,۱ ,۲	۰	۱⟶۹
۱۶۲	۱⟶۹	۱ ,۲	۱⟶۹	۰	۰	۱⟶۹	۱ ,۲	۱⟶۹
۵۴	۱⟶۹	۱ ,۲	۰ ,۱ ,۲	۱	۱	۰ ,۱ ,۲	۱ ,۲	۱⟶۹
۶	۱	۳	۶, ...,۱,۲	۰	۰	۶, ...,۲,۱	۳	۱

جدول ۲

مجمـــوع عددهای ســـتون N نشـــان می‌دهند که تنهـــا ۳۳۰ تاریخ پالیندروم از ســـال ۱۰۰۱ تا ۱۰۰۰۰ خورشـــیدی وجود دارند. درخصوص ســـطر آخر جدول لازم به یادآوری است که در تقویم خورشیدی تنها شش ماه اول سال سی و یک روزه هستند. نیز با توجه به اینکه روز ســـی‌ام هیچ ماهی نمی‌تواند خودمقلوب باشـــد، لذا بحث درخصوص سی روزه بودن اسفندماه در سال‌های کبیسه نیز به بررسی نیاز نداشت.

تاریخ‌های خودمقلوب قرن ۱۴

از ۳۳۰ تاریخ خودمقلوب تقویم خورشیدی، تعداد ۴۲ مـــورد در هزارۂ دوم می‌افتنـــد و از این تعداد فقط شـــش مورد به قرن چهاردهم (۱۳۰۱ تا ۱۳۹۹) تعلق دارند که عبارت‌اند از:

۱. ســـی و یکـــم فروردین هـــزار و ســـیصد و ده (۱۳۱۰۰۱۳۱)

۲. سی و یکم اردیبهشـــت هزار و سیصد و بیست (۱۳۲۰۰۲۳۱)

۳. ســـی و یکم خـــرداد هزار و ســـیصد و ســـی (۱۳۳۰۰۳۳۱)

۴. ســـی و یکـــم تیـــر هـــزار و ســـیصد و چهل (۱۳۴۰۰۴۳۱)

۵. ســـی و یکـــم مرداد هـــزار و ســـیصد و پنجاه (۱۳۵۰۰۵۳۱)

۶. ســـی و یکم شـــهریور هزار و ســـیصد و شصت (۱۳۶۰۰۶۳۱)

همچنین اولین تاریـــخ خودمقلوب قرن چهاردهم به یکم دی ماه ســـال هزار و یک بـــا نمایش دنباله‌ای ۱۰۰۱۱۰۰۱ برمی‌گردد.

تمرین

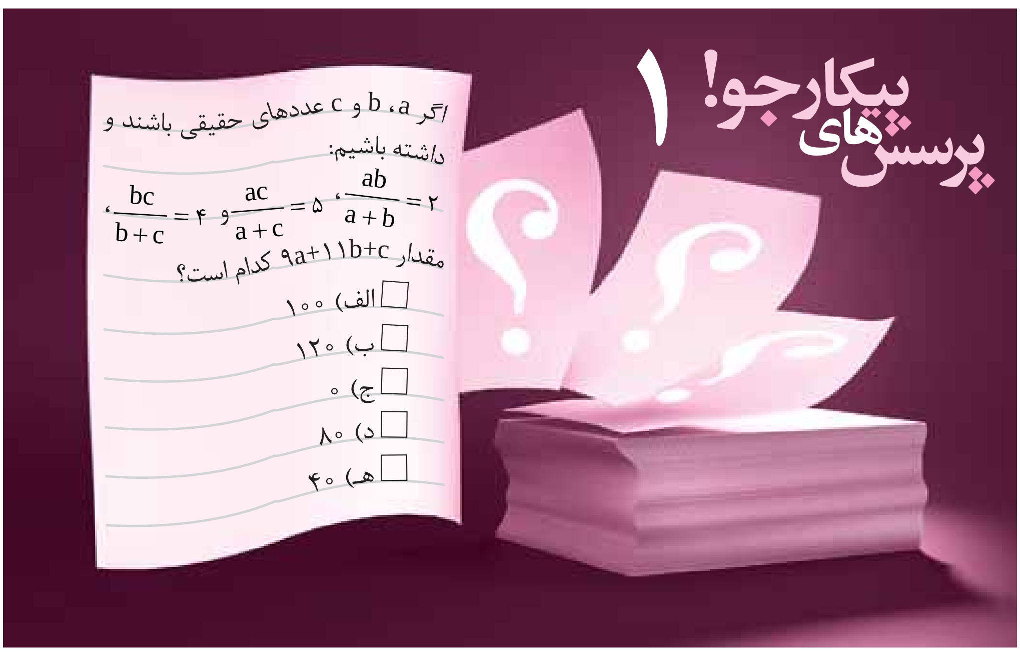
تعداد تاریخ‌های خودمقلوب سال‌های چهاررقمی میلادی در فرمت MMDDYYYY را پیدا کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. Stanford university
2. Portland State university
3. Martin Gardner

منبع

1. Inan, Aziz, Palindrome Dates in Four-Digit years. Pi in the Sky, Issu 14, 2010.



- **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی
- **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی
- **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
- **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی
- **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری
- **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت
- **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
- **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

گامی به‌سوی آگاهی و دوراندیشی

احسان یارمحمدی

اشاره

***ابونصر محمدبن محمد فارابی*، از بزرگ‌ترین دانشـــمندان ایران‌زمین است که در زمینه‌های فلسفه، منطق، جامعه‌شناسی، پزشکی، ریاضیات، موسیقی و دانش‌نامه‌نویسی صاحب سبک بوده و آثار ارزنده‌ای را به جامعهٔ دانش و فرهنگ عرضه داشته است. در این مقاله با معرفی مستند «*ابونصر محمد فارابی*» از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها» قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شـــخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به این منظور، نخست به ارائهٔ ســـطرهایی از کتاب «*گاهی به تاریخ ریاضیات در ایران*» به قلم زنده‌یاد پرویز شهریاری (۱۳۹۱ ـ ۱۳۰۵) می‌پردازیم که چاپ نخســـت آن در سال ۱۳۸۵ توسط «انتشارات علمی و فرهنگی» به زیور طبع آراســـته شده است. در ادامه نیز به ارائهٔ مطالبی از مستند مزبور خواهیم پرداخت.**

محمد معروف بـــه **ابونصر فارابی** در «وسیج» فاراب واقع در ترکمنستان شوروی پیشـــین متولد شـــد. فاراب بعدها به «اُترار» تغییر نام یافت. این شـــهر همان جایی است که حاکم آن فرســـتادگان مغول را که برای صحبت در باب تجـــارت به آنجا آمده بودند، به دستور سلطان **محمد خوارزمشاه** کشت. ســـفیر **چنگیز** هم که بـــرای پرس‌وجو نزد ســـلطان محمد رفته بود، کشـــته شد و این موضوع بهانه‌ای به دســـت چنگیز داد که در ۶۱۴ هجری قمری به اُترار حمله کند که بعد از محاصرهٔ شـــهر آنجا را فتـــح کرد و بعد به مرکز خوارزمشاهیان لشکر کشید و سرانجام این قضیه موجب تسخیر ایران شد.

فارابی بیشتر عمر خود را در بغداد گذراند و در ســـال ۳۳۰ هجـــری قمـــری به دعوت **سیف‌الدوله همدانی** به «حلب» نزد او رفت. او به شـــام و مصر هم سفر کرد و سرانجام در دمشـــق از دنیا رفت. فارابی در تمامی زندگی خود کار دولتی نداشت و خیلی ساده و با لباسی صوفیانه زندگی می‌کرد. در فلسفه معتقد بود بین فلســـفهٔ **افلاطون** و **ارســـطو** اختلافی نیست. در سیاست آرای اهل مدینهٔ فاضله را نوشـــت و برای رهبر آن ۱۲ شرط گذاشت. او نوشـــت: «رهبر مدینهٔ فاضله باید خوش‌فهم، خوش‌حافظه، تیزهـــوش، خوش‌بیان، هوادار آموزش، دشمن شهوت‌پرســـتی، راست‌گو، بزرگ‌طبع، بی‌اعتماد به مال دنیا، هوادار عدل و دشمن ظلم و ستم، مقاوم در برابر زور، و با اراده و جسور باشد».

معروف اســـت که **پورسینا** بارها کتاب **«مابعدالطبیعه»** (متافیزیک) **ارســـطو** را خوانده بود و نتوانسته بود، مضمون آن را درک کند. او سرانجام با راهنمایی یک کتاب‌فروش (به زبان آن روزگار، وراق)، به تفسیر فارابی در این باره دســـت یافت و به یاری آن، توانست مفهوم‌های دشوار آن کتاب را دریابد. فارابی، یکی از بنیان‌گذاران دانش و فلسفه در شرق، در زمینـــهٔ ریاضیات هم کارهای زیادی انجام داده و شاخه‌های متفاوت ریاضیات زمان خود را به جلو برده است. فارابی به‌طور جدی دربارهٔ موضوع‌های مهم مربوط به «روش‌شناســـی ریاضیـــات» کار کـــرد و نمونه‌هـــای عالی از کاربـــرد روش‌ها و نظریه‌هـــای ریاضی را در حل مسئله‌های گوناگون دانش‌های طبیعی

و صنعت (اخترشناسی، نظریهٔ موسیقی، نور، معماری و مانند آن) ارائه کرد. سرانجام هم بررسی‌هایی به کلی تازه در ریاضیات نظری انجام داد. می‌بینیم که موفقیت‌های فارابی در ریاضیات، در هر سه زمینه‌ای است که به‌طور دقیق به هم بستگی دارند: روش‌شناسی؛ کاربرد عملی؛ جنبهٔ نظری.

جالب‌ترین جنبه‌ها از نظر تاریخ نظری ریاضی، بررسی‌های فارابی در مثلثات و هندسه است. فارابی در کتاب خود به نام «**شرح مجسطی**»، یکی از نخستین کسانی است که تانژانت و کتانژانت را در دایرهٔ مثلثاتی وارد و قضیهٔ سینوس‌ها و تانژانت‌ها را برای مثلث کروی قائم‌الزاویه ثابت کرد. فارابی در رساله‌ای که در زمینهٔ هندسه نوشته است، برای نخستین بار در تاریخ ریاضی، به صورتی منظم، مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را مطرح می‌کند که از میان آن‌ها، به‌ویژه مسئله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی که به یاری پرگار ثابت رسم می‌شوند. رسم سهمی، رسم چندضلعی‌های منتظم و همچنین رسم روی کره را می‌توان جالب دانست.

فارابی در کتاب موسیقی خود که نام اصلی آن «**موسیقی الکبیر**» است، ابتدا صوت‌شناسی را از نظر فیزیکی مطرح می‌کند و گونه‌های متنوع آواهای طبیعی و غیرطبیعی را شرح می‌دهد. بعد به گونه‌های متفاوت سازهایی که در زمان او معمول بوده‌اند، می‌پردازد. سر آخر نیز، موسیقی را از نظر علمی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد. او به ظاهر نخستین نت موسیقی را به‌صورت عدد می‌آورد و مجموعه‌ای از موسیقی‌ای را که در زمان او موجود بوده یا از پیشینیان باقی مانده بود، ضبط می‌کند. فارابی، درواقع برای نخستین بار در جهان، موسیقی علمی را مطرح کرده و این افتخاری برای ایرانیان است که نخستین کتاب موسیقی علمی در ایران و به وسیلهٔ فارابی نوشته شده است.

***

مطالب این کتاب از آن نظر سودمند است که چون آدمی بخواهد علمی را از این علم فرا گیرد و در آن به پژوهش بپردازد، بداند که به چه کاری می‌پردازد و در چه چیزی پژوهش می‌کند و او را از این پژوهش چه سودی فراهم می‌شود. دانستن این مقدمات سبب می‌شود که انسان برای فراگیری هر دانش و فنی با آگاهی و دوراندیشی گام بردارد (فارابی، احصاءالعلوم).

در گذر تاریخ و هم‌گام با توسعهٔ علم و غنی‌تر شدن گنجینهٔ معرفت بشری، موضوع شناسایی علوم و طراحی مرزهای معرفتی و هویتی میان آن‌ها دارای اهمیت زیادی بود. از گذشته‌های دور تا به امروز، فیلسوفان و اندیشمندان به ارائهٔ ایده‌ها و معرفی نگرش‌های هستی‌شناسانهٔ خود دربارهٔ این موضوع پرداخته‌اند و طبقه‌بندی‌های متفاوتی از علوم ارائه داده‌اند که بیان‌کنندهٔ فضای دانشی و نگاه ایدئولوژیک آن‌ها با یک جریان در یک زمان خاص به دنیای علم و تحولات آن بوده است. منشأ تمامی این طبقه‌بندی‌ها اندیشه‌های فلسفی عمیقی بوده‌اند که به نوعی از فضای غالب در حوزهٔ تحولات فکری بشری در زمان خاص مطرح شدنشان سرچشمه گرفته بودند. در صدر تاریخ و در حکومت یونان علم یکی بود و به آن فلسفه می‌گفتند. لفظ فلسفه به مجموعهٔ دانش‌های نظری و علمی بشر گفته می‌شود. کسانی مثل **فیثاغورس** خود را فیلسوف می‌نامیدند و امثال افلاطون و ارسطو بر تمام علوم زمان خود احاطه داشتند. دانشمندان یونانی به موضوع تقسیم‌بندی علوم بیش از دیگران توجه کرده‌اند. افکار ارسطویی سرآمد تفکر در این زمینه است.

پس از ظهور اسلام و تأکید این دین بر علم‌اندوزی و معرفت‌افزایی، دانشمندان زیادی تلاش کردند تا با بهره‌گیری از جهان‌بینی توحیدی و تعالیم وحی طبقه‌بندی‌های جامعی از علوم زمانهٔ خویش ارائه کنند. کوشش مسلمانان برای طبقه‌بندی علوم از قرن سوم با کار **کِندی**

که ریاضی‌دان، منجم و فیلسوف عرب بود، آغاز شد و پس از آن این کوشش افزایش یافت. از آن پس با نهضت ترجمه، علمای اسلامی به ویژه فارابی، ابن سینا، **غزالی** و دیگران دربارهٔ رده‌بندی علوم بحث کردند. در آغاز مبنای طبقه‌بندی تقسیم ارسطویی بود. بعضی از دانشمندان به همهٔ علوم توجه داشتند. بعضی‌ها به دلیل علاقه‌های مذهبی فقط به علوم شرعی توجه کردند و از منظر شرع به سایر علوم نگریستند. بعضی‌ها با الهام از قرآن و عقاید دینی بین آنچه که از یونان آمده و آنچه که در عقاید دینی وجود دارد، تلفیقی به وجود آوردند: فارابی از این دست افراد است. بدین ترتیب طبقه‌بندی رفته رفته کامل‌تر شد. علوم اسلامی بر علوم قدیمی افزوده شد و معرفت دینی و مابعدالطبیعی به معنی عرفان بالاترین درجه را پیدا کرد.

ابونصر محمدابن محمد فارابی، معروف به فارابی، از فیلسوفان اسلامی و دومین فیلسوف برجسته پس از کِندی در سده‌های سوم و چهارم هجری است. وی نخستین کسی است که در اسلام علوم را به‌صورت کامل طبقه‌بندی کرده و حدود هر یک را نشان داده و شالودهٔ هر شاخه از تعلیم را تثبیت کرده است. معلم اول را ارسطو می‌دانستند که همین کار را در زمان‌های باستانی کرده و سابقه‌ای برای فیلسوفان بر جای گذاشته بود. برجسته‌ترین کتاب فارابی با عنوان احصاءالعلوم، با **برشمردن دانش‌ها** به طبقه‌بندی علوم و معرفی شاخه‌های گوناگون دانش می‌پردازد. به سبب همین نوشتار او را «معلم ثانی» خوانده‌اند و در مقام بعد از ارسطو قرار داده‌اند.

علی‌اکبر دهخدا به نقل از **بدیع‌الزمان فروزان‌فر** می‌نویسد: اسم پدر او **عرفان** و نام جدش **زلوق** است. تولد او ۲۱۸ شمسی در فاراب بوده است. فارابی نیمهٔ اول زندگی خود را در فاراب گذراند. پدرش از سرداران

سپاه بود و توانست که بهترین آموزگاران را به تعلیم‌وتربیت او بگمارد. نخست به تعلیم علوم دینی و لغوی پرداخت و مهارت فراوان کسب کرد. در راه کسب دانش سختی بسیار تحمل کرد. شب‌ها در نور چراغ پاسبانان شهر کتاب می‌خواند و غالباً تا صبح بیدار می‌ماند. زندگی محدود و محقر او به خوابیدن کنار رودخانه‌ها و باغ‌ها گذشت. این محدودیت‌های مادی، اگرچه بیشتر در سال‌های جوانی بر او تحمیل شد، اما پس از آن نیز وی با همهٔ دانش و شهرت خویش همچنان ساده می‌زیست.

دوران زندگی ابونصر فارابی هم‌زمان با فروپاشی و ضعف خلافت عباسی است. خاندان‌های بزرگِ وزیران خراسان، مانند **«برمکیان»** که در دربار خلافت عباسی از علم و اندیشه حمایت می‌کردند، از میان رفته بودند. خاندان‌های دانش‌دوست و هنرپرور خراسان، چون «**سامانیان**» **و** «**آل بویه**» نیز هنوز قدرت چندانی نداشتند. در چنین احوالی، بزرگانی چون ابونصر فارابی در جست‌وجوی حامی و مشوق دانش ناچار به دیارهای دور سفر می‌کردند و گاه چون او ناچار از سرزمین‌هایی که در آن مورد آزار و تهدید بودند، می‌گریختند. از همین رو فارابی در جوانی از ماوراءالنهر به قصد تحصیل علوم به بغداد رفت و علوم منطق و فلسفه را فرا گرفت.

فارابی در انواع علوم بی‌همتا بود. چنان‌که دربارهٔ هر علمی از علوم زمان خویش کتاب نوشت و از کتاب‌های وی معلوم می‌شود که در علوم زبان، ریاضیات، کیمیا، هیئت، علوم نظامی، موسیقی، طبیعیات، الهیات، علوم مدنی، فقه و منطق دارای مهارت بسیار بوده است. به عبارت دیگر، در حکمت، کار کِندی را فارابی تکمیل کرد. در فلسفهٔ اسلامی سیمایی جالب‌تر و در عین حال ساده‌تر از او نیست. نه مثل کِندی از طبقهٔ اشراف بود، نه مثل ابن‌سینا به خدمت سلاطین و امرا علاقه‌ای نشان داد. قناعت او حتی از زهد صوفیه هم بالاتر بود. ابن‌سینا او را استاد خود می‌شمارد و **ابن‌رشد** و دیگر حکمای اسلام و عرب برایش احترام زیادی قائل بودند.

فارابی پس از سال‌ها زندگی در بغداد، به مصر رفت. سپس در حلب و دمشق ماند و به تألیف و تعلیم همت گمارد. آثار فارابی منشأ تفسیرهای فراوان شد. در سال ۱۶۳۸ مجموعهٔ کاملی از ترجمه‌های لاتین فارابی در پاریس انتشار یافت. ابونصر فارابی در ۸۰ سالگی در دمشق درگذشت و با آنکه فقط چند نفر جنازهٔ او را تشییع کردند. مجموعه‌ای گران‌قدر از آثار خود را به زبان عربی بر جای گذاشت. اما نه عرب، که فیلسوف و نابغهٔ خراسانی و از جمله شخصیت‌های برجسته و کم‌نظیری است که آثار و افکارش اثری جهانی داشته است.

در پایان از اشاره به مطالب بیشتری که در مستند «سرزمین ستاره‌ها: ابونصر محمد فارابی» گنجانده شده است، خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران‌زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

هوشنگ شرقی

فرهاد کوچولو و دوستانش در اردوی تفریحی عید نوروز!

نوروز باستانی در راه است! به همین مناسبت بد ندیدیم که ایستگاه اندیشهٔ این شماره را به داستانی در این زمینه اختصاص دهیم تا ماجرای جالب آن را بخوانید و در عین حال با معماهایی که در قالب داستان و در متن ماجرا رخ می‌دهند، چالش کنید. مطمئن باشید از ورزش و تفریح اندیشه در این ایام فراغت لذت خواهید برد!

***

مسئولان مدرسه‌ای که فرهاد کوچولو در آن درس می‌خواند، تعدادی از دانش‌آموزان را با خود به اردوی تفریحی ـ آموزشی برده‌اند. فرهاد کوچولو که از دانش‌آموزان ممتاز و فعال مدرسه است، در این اردو حضور دارد و با دوستان خود مشغول تفریح و بازی است. یکی از شب‌ها، فرهاد و دوستانش دور هم جمع بودند و مشغول بازی‌های فکری بودند که یکی از بچه‌ها پیشنهاد کرد، هر یک از آن‌ها داستانی از زندگی خودش را برای دیگران تعریف کند و ضمن آن معمایی را طرح کند تا بقیه آن را حل کنند. به این ترتیب ماجرای ما شروع شد!

سن پدربزرگ کاوه!

ابتدا کاوه شروع به تعریف کرد: «چند روز پیش روز تولد پدربزرگم بود. مادرم برای خوش‌حال کردن او ابتکار جالبی به خرج داد. او دو نوع کیک خرید و روی هر کدام دو نوع شمع چید. روی کیک اول شمع‌های قرمز و آبی قرار داده بود و می‌گفت: هر شمع قرمز معادل ۱۰ سال عمر و هر شمع آبی معادل هفت سال عمر است. روی کیک دوم شمع‌های سبز و زرد قرار داده بود و می‌گفت: هر شمع سبز معادل ۹ سال عمر و هر شمع زرد معادل ۵ سال عمر است.

همچنین دیدم که او روی کیک اول ۸ شمع و روی کیک دوم ۱۰ شمع قرار داده است. حالا بگویید پدربزرگم دقیقاً چند سال سن دارد».

بچه‌ها به فکر فرو رفتند و هر کدام خودکار و کاغذی برداشتند و مشغول محاسبه شدند. ناگهان فرهاد کوچولو گفت: «نمی‌شود به دقت جواب داد، مگر اینکه اطلاعات بیشتری بدهی!»

کاوه گفت: «راستی یادم رفت که بگویم، پدرم ۵۰ ساله است».

شهریار گفت: «خب چه ربطی به پدربزرگت دارد؟»

فرهاد گفت: «بسیار خب، حالا فهمیدم پدربزرگت چند سال دارد» و جواب را به کاوه گفت. او هم درستی آن را تأیید کرد. راستی بچه‌ها پدربزرگ کاوه چند سال دارد؟

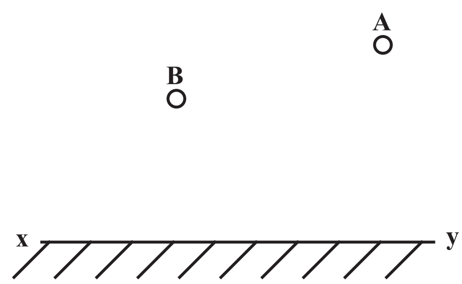
پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر و یک قانون فیزیکی

برای دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم ریاضی

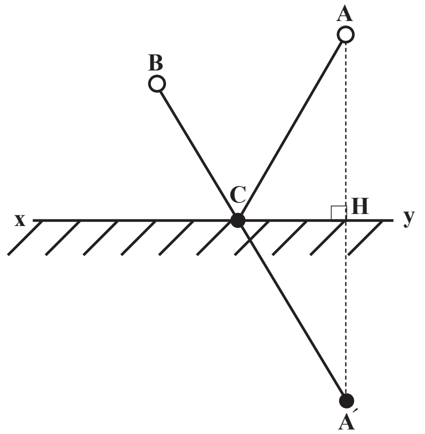
سیمین افروزان
دبیر ریاضی منطقهٔ ۲ تهران

می‌دانیم کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه، اندازهٔ پاره‌خط راستی است که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند. در کتاب هندسهٔ یازدهم مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه با شرط عبور از نقطهٔ سوم واقع بر یک خط، مسائلی هستند که به کمک بازتاب حل می‌شوند. به مسئلهٔ زیر توجه کنید:

مسئله: فرض کنید xy یک سطح صاف صیقلی (آینهٔ تخت) است که نقاط A و B در یک طرف آن قرار دارند. اگر پرتو نور از نقطهٔ A بر آینه بتابد و هنگام انعکاس از آینه از نقطهٔ B عبور کند، چه مسیری را طی می‌کند؟

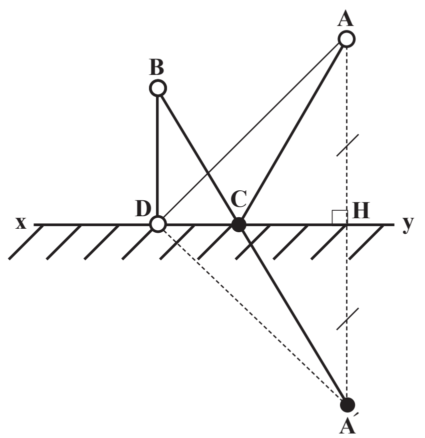


پاسخ: با توجه به اینکه نور در کمترین زمان ممکن مسیری را طی می‌کند و کمترین زمان، مستلزم کمترین مسافت است، پاسخ مسئله مسیری است که مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ A و B از نقطهٔ برخورد با آینه کمترین مقدار باشد. برای یافتن این نقطه از A بر xy عمودی رسم می‌کنیم و آن را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ 'A امتداد می‌دهیم. نقطهٔ 'A بازتاب نقطهٔ A نسبت به xy است و 'A'B، آن را (xy را) در نقطهٔ C قطع می‌کند. AB+CB مسیر مورد نظر مسئله است.



در کتاب هندسهٔ (۲)، در مسئله‌ای موسوم به «مسئلهٔ هرون» با استفاده از قضیهٔ نامساوی مثلث به درستی این مطلب پرداخته و ثابت می‌شود، برای هر نقطه دلخواه دیگری مانند D روی xy داریم:

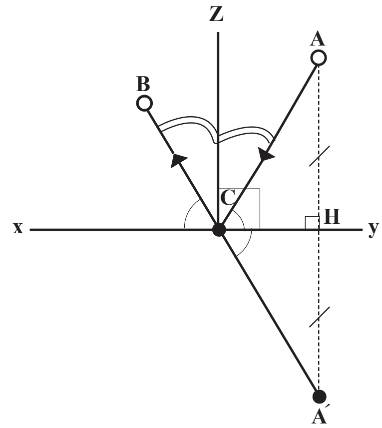
$AD+DB > AC+CB$



توجه کنید که چون xy در تبدیل بازتاب نسبت به آینه عمودمنصف 'AA است، داریم: AC=A'C. پس AC+CB با A'B که کوتاه‌ترین فاصله بین تصویر A(A') و B محسوب می‌شود، برابر است.

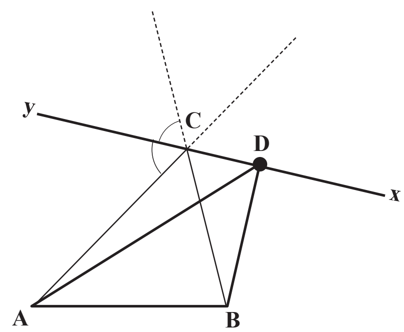
نتیجهٔ فیزیکی

پرتو نوری که از نقطهٔ A بر آینه می‌تابد، xy را در نقطهٔ C قطع می‌کند که در آن نقطه داریم: $B\hat{C}x = A\hat{C}y$. بنابراین متمم‌های این دو زاویه، یعنی زاویهٔ تابش و بازتابش با یکدیگر مساوی هستند؛ یعنی: $Z\hat{C}A = Z\hat{C}B$.

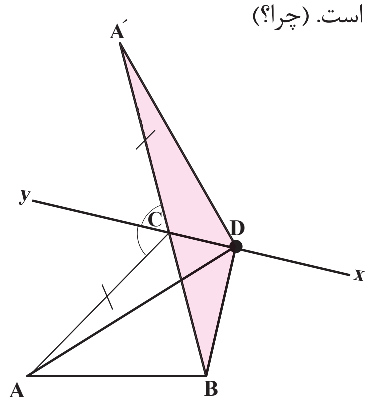


نتیجهٔ هندسی

در هر مثلث، مجموع فاصله‌هـــای هر نقطهٔ دلخواه روی نیم‌ســـاز زاویهٔ خارجی متناظر یکـــی از رأس‌ها از دو رأس دیگر، از مجموع دو ضلعی که شـــامل آن رأس هستند، بیشتر است: $AD+DB > AC+CB$



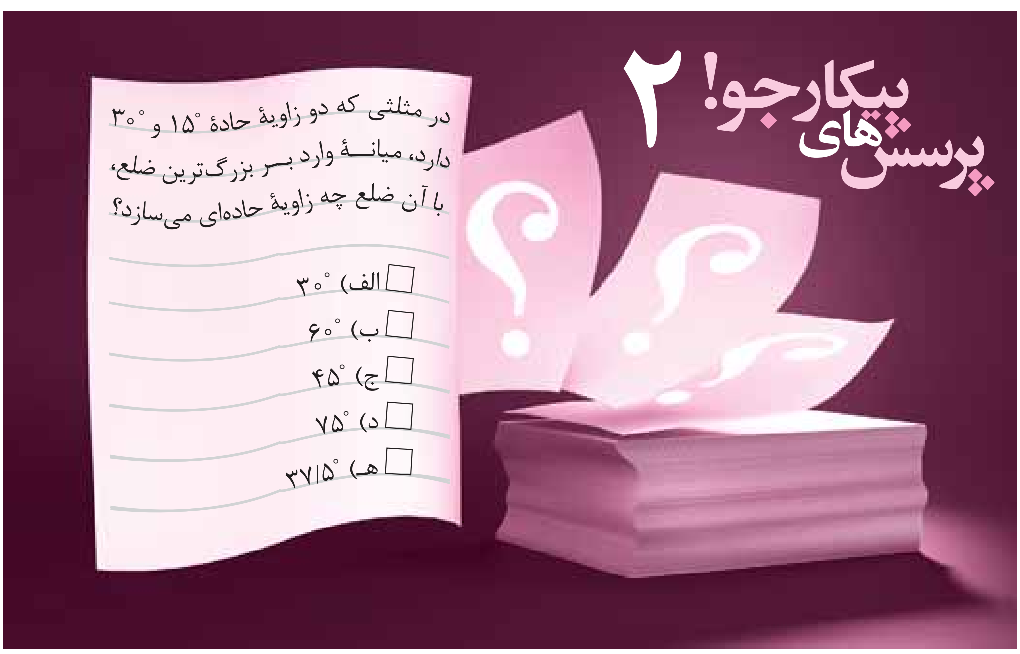
برای اثبات این مطلـــب، از رأس C ضلع BC را تا نقطهٔ 'A امتداد می‌دهیم. با نوشتن نامساوی مثلث در مثلث 'BDA به نتیجهٔ مطلب خواهید رسید. درواقع 'A تصویر A نسبت به نیم‌ساز خارجی رأس C (xy محور بازتاب) است. (چرا؟)



نتیجه‌گیری نهایی

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مســـیر بین دو نقطهٔ A و B با شـــرط عبور از نقطهٔ سوم واقع بر یک خط، کافی است تصویر A را نســـبت به خط مورد نظر پیدا کنیم ('A). محل تلاقی 'A'B با خط مفروض، نقطهٔ سوم مورد نظر مسئله است.

در کتاب درسی به مســـئلهٔ کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه با شرط عبور از چند نقطه نیز پرداخته شده است که ایدهٔ آن همان تصویرســـازی به کمک تبدیل بازتاب و پیدا کردن کوتاه‌ترین فاصله بین آخرین تصویر و نقطهٔ دوم است.



تدوین و تنظیم: **محمدرضا امیری**

گفت‌وگوی مجله ریاضی رشد برهان با
محمدکاظم فقیه خراسانی
رتبهٔ ۲ کنکور سراسری رشتهٔ ریاضی ۱۳۹۶

ریاضیات خواندنی نیست!

اشاره

محمدکاظم فقیه خراسانی در یکی از مدرسه‌های دولتی شهر یزد و در رشـــتهٔ ریاضی تحصیل کرده است و بنا به گفتهٔ خودش برای آنکه هزینهٔ اضافی به خانواده‌اش تحمیل نکند، در هیچ کلاس کنکوری شرکت نکرد، و با تلاش خودش به نتیجه رسید. او اکنون با همت بلندش، به مقصود نائل شده است!

■ **در کنکور چند درصد سؤالات درس ریاضی را درست زدید؟ چه درسی را بیشتر درست زدید؟**

● در درس ریاضی فقط یک غلط داشتم و ۹۷/۶۰ درصد درست زدم.

■ **ریاضیات در طول تحصیل برای شـــما چه جایگاهی داشته است؟**

● همیشه ریاضی را دوســت داشتم و در پرورش ذهنم خیلی اثر داشته است.

■ **از دورهٔ ابتدایی ریاضیات را دوست داشتید یا بعداً به آن علاقه‌مند شدید؟**

● هیچ‌وقــت از ریاضی بدم نیامده اســت، ولــی از اول راهنمایی علاقه به آن در من تشدید شد.

■ **آیا معلمانتان در این علاقهٔ شما نقش داشته‌اند؟**

● بله، معلم اول راهنمایی که خیلی دوســـتش داشتم و باعث بیشتر شدن علاقهٔ من به ریاضی شد.

■ **بین معلمان ریاضی معلمی بوده است که روش خاصی داشته باشد و باعث همین علاقهٔ شما یا باعث فهمیدن بهتر ریاضی توسط شما شده باشد؟**

● شـــیوهٔ یکی از معلمانم بود کـــه مثال‌های زیادی حل می‌کرد، اما تمرکز زیادم سر کلاس و تمرینم در خانه باعث علاقه و فهم بیشتر من شد.

■ **شما در یادگیری ریاضیات بیشتر اهل نوشتن بودید یا خواندن؟**

● خب ریاضی را که اصلاً نمی‌شـــود خواند. باید مثال و تمرین حل کرد. یعنی حل کردن مسئله تأثیر دیگری دارد.

■ **در المپیاد هم شرکت کردید؟**

● حقیقتاً من به دلایلی تا سال دوم با اینکه شناختی هم نداشتم، در رشتهٔ تجربی درس خواندم. سال سوم تغییر رشته دادم و متأسفانه خیلی دیر متوجه المپیاد شدم.

■ **چه روش مطالعه‌ای در درس ریاضی داشتید؟**

● اول اینکه سر کلاس خیلی تمرکز داشتم. سر کلاس خیلی از مسائل را جلوتر از بقیه حل می‌کردم. هیچ‌وقت هم به راه‌حل اکتفا نمی‌کردم و خودم مســائل را حل می‌کردم.

■ **چه عواملی باعث موفقیت شما شد؟**

● اول لطف خداوند بود، بعد هم تلاش و سماجت خیلی زیاد و محیط خیلی خوبی که خانواده فراهم کرده بودند.

■ **شغل پدرتان چیست؟**

● شغل آزاد دارند و مادرم هم خانه‌دار هستند.

در چه رشته‌ای می‌خواهید در دانشگاه تحصیل کنید؟

اول می‌خواستم برق بخوانم، ولی الان مهندسی نرم‌افزار شریف.

توصیه‌ای برای بچه‌ها ندارید؟

خیلی تلاش کنید، عرق بریزید و زحمت بکشید و به نتیجه هم خیلی فکر نکنید. مهم تلاش است و اینکه خودتان را هم محدود نکنید. مثلاً من تا سال سوم خیلی اهل درس خواندن نبودم، در حالی‌که خیلی‌ها شروع کرده بودند و خیلی درس‌ها را تمام کرده بودند.

خب، معدل دیپلم شما چند بود؟

۱۹/۹۷. سال چهارم آن‌قدر سؤال می‌پرسیدم که تمام معلم‌هایم را خسته کرده بودم.

خب بعد از لیسانس و فوق‌لیسانس تصمیم دارید چکار کنید؟ به استان خودتان برمی‌گردید؟ یا حتی قصد خروج از کشور را ندارید؟

به استان خودم که نه. حقیقتاً خیلی اهل تدریس نیستم و بیشتر کارهای پژوهشی را دوست دارم. به خارج از کشور هم اگر بروم، امیدوارم که برگردم و این موضوع همیشه در ذهنم باشد.

بله، من هم توصیه‌ام به شما همین است.، امیدوارم که برگردید و به همین کشور خدمت کنید. ممنونم از اینکه وقت گذاشتید.

خواهش می‌کنم. ممنون از شما.

کاربرد ریاضیات دبیرستان در اقتصاد

جابر مختاری دهقادی
دبیر ریاضی استان لرستان
شهرستان دورود

اشاره

چند سالی است که ریاضی می‌خوانید. در دورهٔ اول متوسطه با مباحثی مثل معادلهٔ خط و حل معادلهٔ درجهٔ یک آشـــنا شدید. در دورهٔ دوم متوســـطه نیز حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و بالاتر و تابع درجهٔ ۲ و تابع خطی مطرح می‌شود و در همهٔ این سال‌ها خیلی از هم‌کلاسی‌های شما دانش‌آموزان عزیز از ما می‌پرسند: معادله خط و تابع به چه درد می‌خورند؟ چطوری به وجود آمده‌اند؟ و چه کاربردی دارند؟ حتی بعضی از شماها به شوخی می‌گویید: دانشمندان بی‌کار بوده‌اند!

البته به شما حق می‌دهم، چون انسان باهوش و خردمند به دنبال چرایی هر پدیده‌ای می‌گردد. با مطالعهٔ تاریخ علم متوجه می‌شوید که بسیاری از مطالب علمی را انسان با توجه به نیازش کشف کرده است که این موضوع در مورد ریاضی هم صدق می‌کند. در این مقاله با ارائهٔ چند مثال ساده کاربرد این مطالب را در اقتصاد بیان می‌کنیم و به این سؤال شما مختصر پاسخی می‌دهیم.

مقدمه

در ایـــن مقاله کاربردی از معادلهٔ خط و حل معادله و تابع را در اقتصاد مطرح خواهیم کرد. اما نخست چند تعریف مقدماتی را از علم اقتصاد بیان می‌کنیم. می‌دانیم در هر کارخانـــه‌ای مقدار تولید محصول و عرضهٔ آن به بازار، به قیمت محصول، کیفیت آن، و قدرت خرید مردم بستگی دارد. در هر کارخانه‌ای هزینه‌ها (مخارج) به دو دسته تقسیم می‌شوند که عبارت‌اند از: هزینه‌های متغیر و هزینه‌های ثابت.

هزینه‌های ثابت

هزینه‌هایی هستند که با تغییر حجم تولید تا سطح مشـــخصی از تولید تغییر نخواهند کرد. باید بدانید که به‌طور کلی هزینه‌های ثابت مشخصاتی دارند که هرگاه در هزینه‌ای مشاهده شـــد، می‌توان آن را به‌عنوان این گروه از هزینه‌ها طبقه‌بندی کرد. مشـــخصات مزبور از این قرارند:

۱. هزینه‌ها در ســـطوح متفاوت تولید در کل ثابت هستند.

۲. سهم هزینهٔ ثابت یک واحد کالا با افزایش تعداد تولید کالا کاهش می‌یابد و برعکس.

۳. کنتـــرل وقوع ایـــن هزینه‌هـــا از طریق مدیران اجرایی صورت می‌پذیرد.

نمونه‌های بارز و مشخص این هزینه‌ها عبارت‌اند از: حقوق مدیران تولید؛ استهلاک ساختمان و ماشین‌آلات؛ بیمهٔ ساختمان و ماشـــین‌آلات؛ اجاره محل کارخانه؛ و سایر موارد مشابه.

مثال ۱. فرض کنید هزینهٔ اجارهٔ کارخانه‌ای ماهانه ۱۵۰ میلیون ریال است. اولاً هزینهٔ اجاره در کل ثابت است. یعنی چه یک عدد کالا تولید شود، چه ۱۰۰۰ عدد، هیچ‌گونه تغییری در کل این هزینه به وجود نخواهد آمد. ثانیاً با افزایش تولید، سهم هزینهٔ هر یک واحد کالا کاهش پیدا می‌کند. فرض کنید تولید کارخانه ۱۰۰ عدد باشد. اگر بخواهیم بگوییم سهم هر واحد کالا از کل ۱۵۰ میلیون ریال هزینهٔ اجاره چقدر است، به این صورت عمل می‌شود: ۱۵۰۰۰۰۰=۱۰۰÷۱۵۰۰۰۰۰۰۰ که سهم هر کالا ۱۵۰۰۰۰۰ ریال خواهد شد. یا اگر ۲۵۰ عدد کالا تولید شود، سهم اجارهٔ هر یک واحد کالا ۶۰۰۰۰۰=۲۵۰÷۱۵۰۰۰۰۰۰۰ ریال تعیین می‌شود. ملاحظه می‌کنید که با افزایش تعداد تولید، سهم یک واحد کالا از هزینهٔ ثابت کاهش پیدا می‌کند.

مجدداً تأکید می‌شود، هزینه‌های ثابت در کل در سطوح متفاوت تولید ثابت است، ولی با افزایش تولید سهم هر یک واحد تولید کاهش خواهد یافت. و برعکس با کاهش تولید، سهم هر یک واحد تولید از هزینهٔ ثابت افزایش می‌یابد. در ضمن رخ دادن هزینه‌های ثابت و مبلغ آن‌ها در اختیار و وابسته به تصمیم‌گیری مدیران اجرایی است.

هزینه‌های متغیر

هزینه‌های متغیر هزینه‌هایی هستند که کل مبلغ آن‌ها با تغییر در سطح تولید و میزان تولید تغییر می‌کند. یعنی با افزایش مقدار تولید و حجم تولید، این هزینه‌ها در کل افزایش می‌یابند و با کاهش در میزان تولید، این هزینه‌ها در کل کاهش خواهند یافت. نمونهٔ مشخص این هزینه‌ها مواد مستقیم و دستمزد مستقیم هستند.

هزینه‌های متغیر نیز ویژگی‌ها و مشخصه‌هایی به شرح زیر دارند:

۱. این هزینه‌ها در کل ارتباط مستقیم با تولید دارند. یعنی با افزایش تولید، افزایش و با کاهش تولید، کاهش می‌یابند.

۲. هزینهٔ متغیر یک واحد کالا ثابت است، حتی اگر تعداد تولید نیز کاهش یا افزایش پیدا کند.

۳. به شکل ساده و آسان قابل تخصیص به دایرهٔ تولید هستند.

در ادامه مشخصه‌های هزینه‌های متغیر را در مثال۲ بررسی می‌کنیم.

مثال ۲. فرض کنید برای ساخت ۴ عدد میز ۶ متر مربع چوب نیاز است. حال اگر بخواهیم ۸ عدد میز تولید کنیم، حتماً به ۱۲ متر مربع چوب که مواد اولیه و مستقیم تولید محسوب می‌شود، نیاز داریم. می‌بینید که با افزایش میزان تولید، هزینهٔ مواد مستقیم نیز افزایش پیدا خواهد کرد. ولی باید توجه داشته باشید، برای ساخت یک میز، ۱/۵ متر مربع چوب نیاز است. (۱/۵=۴÷۶) که هیچ‌گاه با افزایش تولید، میزان مواد مستقیم ساخت یک واحد تغییر نمی‌کند. یعنی ساخت یک عدد میز حتماً ۱/۵ متر مربع چوب نیاز دارد و با چوب کمتر و یا با چوب بیشتر نمی‌توان میز ساخت. بنابراین هزینهٔ مواد مستقیم در یک واحد، ثابت است. در ضمن این هزینه به راحتی قابل پیش‌بینی در ساخت محصول است و می‌توان هزینهٔ چوب مصرفی را در ساخت میز مشاهده کرد.

مثال ۳. هزینه‌های ثابت و هزینه‌های متغیر یک نانوایی را بنویسید.

✦**پاسخ:** هزینه‌های ثابت عبارت‌اند از: اجارهٔ مغازه، اجارهٔ انبار آرد، هزینهٔ تلفن، حقوق کارگران نانوایی، هزینه‌های بیمهٔ آتش‌سوزی، و هزینهٔ استهلاک دستگاه‌های موجود در نانوایی.

هزینه‌های متغیر نیز عبارت‌اند از: هزینهٔ خرید آرد، نمک و افزودنی‌های دیگر، هزینهٔ آب، برق و گاز که همهٔ این موارد به میزان تولید بستگی دارند.

تمرین

هزینه‌های ثابت و متغیر یک کارگاه شیرینی‌پزی را مشخص کنید..

مثال ۴. خاطره‌ای را برای شما دانش‌آموزان عزیز نقل می‌کنم. روزی در دفتر دبیرستان نشسته بودم، خواهرم که کارمند حسابداری یک فروشگاه است زنگ زد و گفت کالایی داریم که قیمت فروش آن ۱۴۴۰ تومان ثبت شده است. فروشگاه ۲۰ درصد سود روی کالا محاسبه می‌کند، ولی در حال حاضر فاکتور خرید مفقود شده است و قیمت خرید کالا را نمی‌دانم. چگونه باید آن را محاسبه کنم؟ اگر دقت کنید، این مشکل برای هر فروشگاهی ممکن است پیش بیاید. برای پیدا

کردن مجهول مسئله ابتدا باید مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم.

فرض کنید قیمت خرید کالا x باشد. در این صورت سود فروشگاه $۰/۲۰x$ و مجموع قیمت خرید و سود برابر با قیمت فروش است. به عبارت دیگر: $x+۰/۲۰x=۱۴۴۰$ که همان معادلهٔ درجه یک است و ما باید آن را حل کنیم:

$$x+۰/۲۰x=۱۴۴۰$$

$$۱/۲۰x=۱۴۴۰$$

$$x=\frac{۱۴۴۰}{۱/۲۰}=۱۲۰۰$$

پس قیمت خرید کالا ۱۲۰۰ تومان است.

تمرین

در یک کارخانهٔ تولید نوعی خودکار، وقتی قیمت یک خودکار ۱۰۰۰ تومان است، روزانه ۴۰۰۰۰ عدد فروخته (تقاضای بازار) می‌شود و در صورتی که ۸۰۰ تومان باشد، ۶۰۰۰۰ تقاضا می‌شود. تابع تقاضای این محصول را بنویسید (هر کارخانه‌ای بازاریاب و مدیر فروش دارد که مسئولیت ارزیابی بازار با آن‌هاست).

راهنمایی. معادلهٔ خطی را که از نقاط (۱۰۰۰ و ۴۰۰۰۰) و (۸۰۰ و ۶۰۰۰۰) می‌گذرد، بنویسید. x نشان‌دهندهٔ تقاضا و y نشان‌دهندهٔ قیمت کالاست.

مثال ۵. کارخانهٔ قند وقتی قیمت قند ۲۵۰۰ تومان باشد، ۱۰۰۰۰۰ کیلو قند به بازار عرضه می‌کند و وقتی قیمت ۳۰۰۰ تومان می‌شود، ۱۲۰۰۰۰ کیلو قند به بازار عرضه می‌کند. معادلهٔ عرضه را بنویسید.

معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ (۲۵۰۰ و ۱۰۰۰۰۰) و (۳۰۰۰ و ۱۲۰۰۰۰) می‌گذرد، می‌نویسیم:

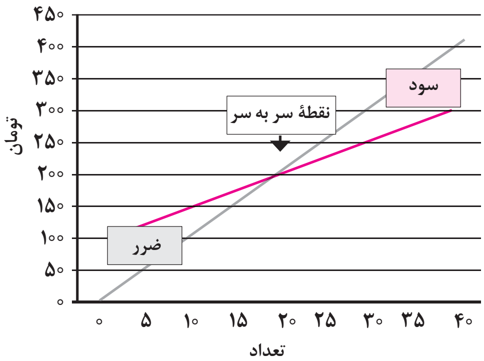
$$m=\frac{۱۲۰۰۰۰-۱۰۰۰۰۰}{۳۰۰۰-۲۵۰۰}=۴۰$$

$$y-۲۵۰۰=۴۰(x-۱۰۰۰۰۰)$$

$$y=۴۰x-۳۹۹۷۵۰۰$$

نقطهٔ سر به سر

در اقتصاد نقطه‌ای را که در آن قیمت کالای عرضه شده با قیمت کالای تقاضا شده برابر است، نقطهٔ سر به سر می‌گویند. هر واحد تجاری باید نقطهٔ سر به سر را برای خود محاسبه کند، زیرا این کار به آن‌ها نشان می‌دهد، تعداد کالاهای تولید شده‌ای که باید بفروشند تا بتوانند هزینه‌های ثابت و متغیر صورت گرفته را جبران کند، چقدر است.

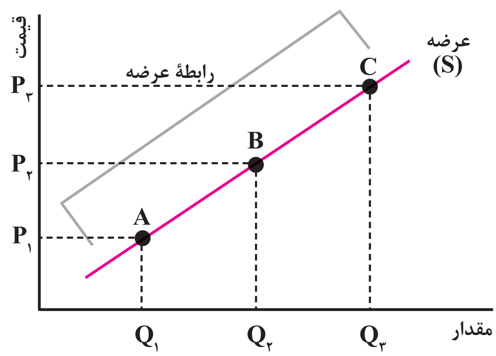


فرض کنید در یک بنگاه اقتصادی تولید کیف دستی، هزینهٔ کل ساخت ۱۰ کیف در یک ماه ۲۰۰ هزار تومان شده است. اگر صاحب این کسب و کار بتواند تمامی این ۱۰ کیف را به قیمت ۲۰ هزار تومان بفروشد، به نقطهٔ سر به سر رسیده است. یعنی ۲۰۰ هزار تومان درامد داشته است که با میزان کل هزینه‌ها برابر است. به بیان دیگر، نه سود کرده است و نه زیان. پیدا کردن و تحلیل نقطهٔ سر به سر صاحب این کسب و کار نشان می‌دهد که اگر این فرد در هر سری از تولیداتش موفق به فروش تمام کیف‌ها به قیمت ۲۰ هزار تومان نشود، ضرر می‌کند و برای ادامهٔ کارش احتیاج دارد، یکی یا چند تا از موارد زیر را به‌کار گیرد:

- هزینه‌های ثابتش را کاهش دهد (مثل هزینهٔ اجارهٔ کارگاه تولیدی).
- هزینه‌های متغیرش را کاهش دهد (هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای تولید هر کیف).
- قیمت فروش هر کیف را افزایش دهد.

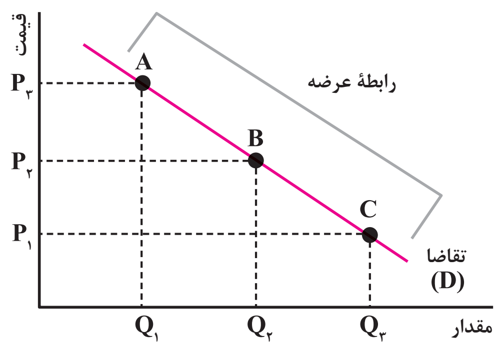
معادلهٔ عرضه

قانون عرضه بیانگر این واقعیت است که بین مقدار عرضه یک کالا و قیمت آن رابطهٔ مستقیمی وجود دارد. بدین معنی که اگر قیمت یک کالا افزایش یابد، مقدار عرضهٔ آن نیز افزایش می‌یابد. نمودار ۲ رابطهٔ عرضه را نشان می‌دهد.



معادلهٔ تقاضا

قانون تقاضا بیان می‌کند، در صورت برابر بودن سایر عوامل، هرچه قیمت یک کالا بالاتر باشد، افراد کمتری متقاضی آن کالا خواهند بود. مقداری از کالا که خریداران با قیمتی بالاتر می‌خرند، کمتر است. در نتیجه، مردم به‌طور طبیعی از خرید محصول چشم‌پوشی می‌کنند. نمودار زیر نشان می‌دهد که شیب منحنی به سمت پایین حرکت می‌کند (شیب منفی).



مثال ۶. اگر معادله‌های تقاضا و عرضه به‌صورت زیر باشند، نقطهٔ سر به سر (تعادل بازار) را به دست آورید.

معادلهٔ عرضه: $y=۲/۵\,x+۱/۵$

معادلهٔ تقاضا: $y=-x+۵$

> **راهنمایی.** دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل دهید و پاسخ را به دست آورید (پاسخ: $y=۴$ و $x=۱$).

مثال ۷. بخش تحقیق و بازاریابی یک شرکت پس از بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالا که توسط شرکت تولید می‌شود، معادلهٔ تقاضا را مدل‌سازی ریاضی می‌کند و به مدیریت تحویل می‌دهد.

معادلهٔ تقاضا: $x=۶۰۰۰-۳۰p$

که در آن، x تعداد کالا و p قیمت بر حسب تومان است. بخش مالی شرکت هزینهٔ تمام شدهٔ تولید (معادلهٔ هزینه) همان کالا را به‌صورت $c=۷۲۰۰۰+۶۰x$ ارائه کرده و مدیریت شرکت درصدد پیدا کردن مقدار تولیدی است که بیشترین سود را عاید شرکت کند.

از معادلهٔ تقاضا قیمت p را به دست می‌آوریم:

$$p=\frac{۶۰۰۰-x}{۳۰}=۲۰۰-\frac{۱}{۳۰}x. \qquad (۱)$$

تابع درامد به‌صورت حاصل‌ضرب تعداد کالا در قیمت فروش است:

$$R(x)=x.p\Rightarrow$$

$$R(x)=x(۲۰۰-\frac{۱}{۳۰}x)=۲۰۰x-\frac{۱}{۳۰}x^۲$$

تابع سود حاصل تفاضل هزینه از درامد است و آن را با $p(X)$ نشان می‌دهیم:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

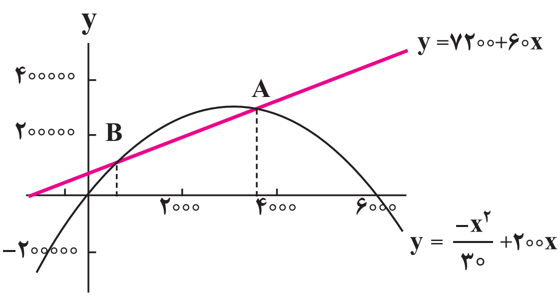
$$P(x)=۲۰۰x-\frac{۱}{۳۰}x^۲-(۷۲۰۰۰+۶۰x)$$

$$P(x)=-\frac{۱}{۳۰}x^۲+۱۴۰x-۷۲۰۰۰$$

در نگاه اول ممکن است فکر کنید هرچه تولید و فروش کالای مورد نظر بیشتر باشد، سود شرکت بیشتر می‌شود و به این همه ریاضی و حساب و کتاب نیازی نیست. حال با اطلاعاتی که از تابع درجهٔ ۲ داریم، می‌دانیم نمودار تابع $P(x)$ سهمی رو به پایین است و مقدار ماکزیمم در نقطهٔ $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۴۰}{۲(\frac{-۱}{۳۰})}=۲۱۰۰$ دارد.

یعنی شرکت برای به دست آوردن بیشترین سود باید ۲۱۰۰ تا از کالای مورد نظر تولید کند که در این صورت $p(۲۱۰۰)=۷۵۰۰$ تومان سود می‌کند. در ضمن قیمت فروش هرکدام از کالاهای تولیدی از رابطه حساب می‌شود که برابر است با: $p=۲۰۰-\frac{۱}{۳۰}(۲۱۰۰)=۱۳۰$ تومان و درامد حاصل از فروش این ۲۱۰۰ کالا $R(۲۱۰۰)=۲۷۳۰۰۰$ تومان می‌شود. حال باید توجه داشت که ماکزیمم درامد وقتی حاصل می‌شود که شرکت ۳۰۰۰ عدد کالا تولید کند و در این صورت درامد شرکت $R(۳۰۰۰)=۳۰۰۰۰۰$ تومان می‌شود. جالب است که بدانید، با این تولید سود شرکت $p(۳۰۰۰)=۴۸۰۰۰$ می‌شود. یعنی شرکت اگر ۳۰۰۰ تا از محصول تولید کند، کمتر سود می‌کند. حال اگر

نمودار تابع هزینه و درامد را رسم کنیم و با دقت به آن فکر کنیم، همهٔ این مطالب را می‌بینیم.



سهمی، نمودار تابع درامد و خط نمودار تابع هزینه است. محل برخورد دو نمودار x=۶۰۰ و x=۳۶۰۰ است که نشان‌دهندهٔ نقطهٔ سر به سر، یعنی نقاط A و B هستند (درامد و هزینه برابر و به عبارت دیگر، سود شرکت صفر تومان است).

تمرین ۱

اگر شرکت ۶۰۰ عدد کالا تولید کند، باید به چه قیمتی بفروشد تا ضرر نکند؟

تمرین ۲

با چه تولیدی درامد شرکت صفر می‌شود.

تمرین ۳

در چه بازه‌ای از تولید شرکت سود می‌کند

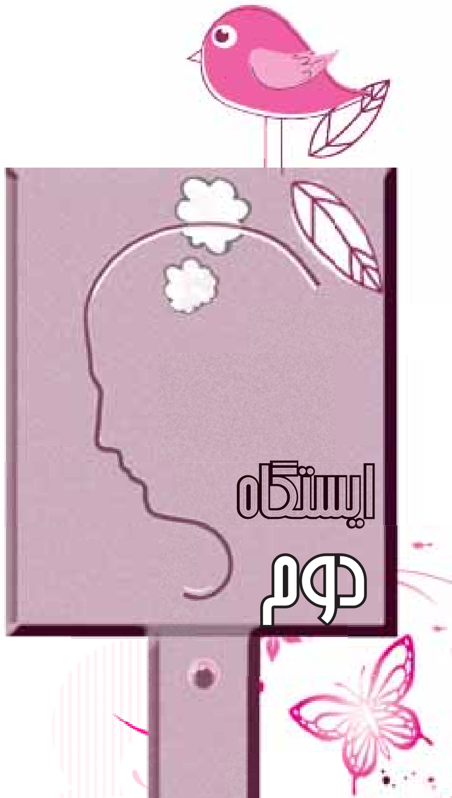
نتیجه

در حل مثال‌ها روشن شد که مطالب ریاضی، به‌خصوص معادله و تابع، در زندگی روزمره و رشته‌های دانشگاهی اقتصاد و بازرگانی کاربرد دارد. ولی نکته اینجاست که ما باید مدل‌سازی را یاد بگیریم و بتوانیم مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم تا آموخته‌های خود را با زندگی روزمره تطبیق دهیم و در این صورت احساس نیاز به یادگیری در ما ایجاد می‌شود. همان‌طور که دیدید، از معادلهٔ خط و حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی، معادلهٔ درجهٔ یک، تابع درجهٔ ۲ و نمودار تابع استفاده شد. بسیاری از مباحث را شما می‌خوانید، ولی بعداً و در سال‌های بعد یا دوره‌های تحصیلی بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنید.

منابع

۱. پورکاظمی، محمدحسین (۱۳۹۲). **ریاضیات عمومی و کاربردهای آن** (ج۲). نشر نی. تهران. چاپ شانزدهم.

۲. آقامیری، احسان (۱۳۹۲). **اقتصاد خرد**. انتشارات راهیان ارشد. تهران. چاپ اول.



سن پدربزرگ بابک!

بابک در ادامه گفت: «اتفاقاً من هم می‌خواهم معمایی دربارهٔ سن پدربزرگم مطرح کنم! پدربزرگی دارم که معلم ریاضی بازنشسته و خیلی هم بامزه است و هرچه که از او بپرسیم، پاسخ آن را در قالب یک معمای ریاضی به خودمان برمی‌گرداند! چند روز پیش برادر بزرگم از او پرسید: بابا جان! شما چند سال دارید؟ پدربزرگم گفت: سن من چهار برابر سن تو است، ولی نکتهٔ جالب این است که اگر جای رقم‌های سن هر دویمان عوض شود، سن تو سه برابر سن من می‌شود! حالا بگویید پدربزرگ و برادر من هر یک چند سال دارند».

فرهاد گفت: «معمای جالبی است و فکر می‌کنم از معمای کاوه سخت‌تر است».

سپس همه دست به خودکار و کاغذ بردند و پس از مدتی شهریار جواب را به دست آورد. فرهاد ضمن تأیید جواب او گفت: «راه‌حل تو بیشتر آزمایشی و تجربی است، اگر بتوانی جواب را با محاسبهٔ دقیق ریاضی به دست آوری، باارزش‌تر است».

راستی بچه‌ها شما می‌توانید این کار را انجام دهید؟

وصیت عجیب پدربزرگ مازیار!

مازیار در ادامه گفت: «خوش به حال شما که پدربزرگتان زنده است و می‌توانید از او بگویید. اما پدربزرگ من چندی پیش فوت کرد!»

بچه‌ها فاتحه‌ای برای پدربزرگ مازیار خواندند و او ادامه داد: «پدربزرگم در یکی از روستاهای زادگاهش زمینی داشت که به شکل یک هشت‌ضلعی بود که همه اضلاع آن با هم برابرند».

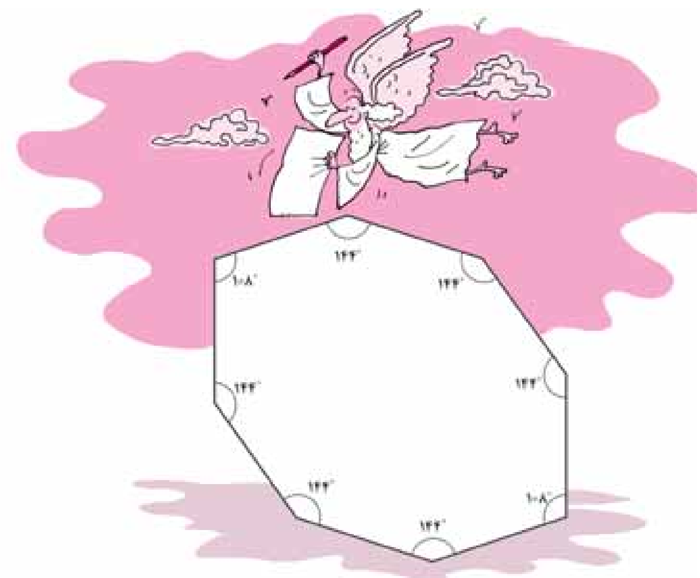
جمشید گفت: «یعنی هشت‌ضلعی منتظم!»

فرهاد گفت: «نه جمشید! مگر نمی‌دانی که یک چندضلعی را فقط وقتی منتظم می‌گویند که اضلاع آن همگی با هم برابر و زاویه‌های داخلی آن هم همه با هم برابر باشند؟ آیا این هشت‌ضلعی، منتظم بود؟»

مازیار گفت: «نه! و مشکل همین جا بود».

بچه‌ها گفتند: «چه مشکلی؟!»

مازیار گفت: «زاویه‌های این هشت‌ضلعی به این صورت که برایتان می‌کشم، ۱۴۴° و ۱۰۸° هستند».



فرهاد گفت: «بگذارید ببینم... مجموعشان جور در می‌آید یا خیر.... خب شش تا ۱۴۴° و دو تا ۱۰۸° می‌شود...»

مازیار گفت: «من قبلاً حساب کرده‌ام! درست در می‌آید. می‌شود ۱۰۸۰° که مجموع زاویه‌های داخلی هر هشت‌ضلعی است. اما مسئلهٔ ما این نیست. پدربزرگم وصیت کرده است که این زمین به تساوی بین پدرم و پنج عمویم تقسیم شود. حالا این شش برادر مانده‌اند که چطور این کار را انجام دهند! آیا شما می‌توانید با حل این معما به آن‌ها کمک کنید؟»

بچه‌ها سخت به فکر فرو رفتند و شروع به خط‌کشی‌های متفاوت کردند. اما پس از مدتی همگی خسته شدند. فرهاد گفت: «واقعاً معمای سختی است. جای طرح آن اینجا نبود. من از تو وقت می‌خواهم و به تو قول می‌دهم وقتی به خانه برگشتم، به کمک پدرم و با طرح یک نقشهٔ دقیق و با ابزار دقیق که اینجا در دسترس ما نیست، مشکل پدر و عموهایت را حل کنم؛ طوری که وصیت پدربزرگت هم عملی شود».

بچه‌ها شما چطور؟ حاضرید در این ایام تعطیلات نوروزی روی این مسئلهٔ زیبا وقت بگذارید؟!

حمیدرضا امیری

مجموعه‌ها

مثال ۳. اگر A، B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت داریم:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(این خاصیت توزیع‌پذیری اشتراک در رابطهٔ اجتماع نامیده می‌شود.)

اثبات

قسمت ۱. $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

فرض کنیم: $x\in A\cap(B\cup C)$. می‌خواهیم ثابت کنیم: $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

چون: $x\in A\cap(B\cup C)$، پس: $x\in A$ و $x\in(B\cup C)$. بنابراین: $x\in A$ و $x\in B$ یا $x\in C$.

چون می‌دانیم $x\in A$، می‌توانیم دو حالت در نظر بگیریم: یا $x\in A$ و $x\in B$، یا $x\in A$ و $x\in C$. بنابراین، یا: $x\in(A\cap B)$ و یا: $x\in(A\cap C)$. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که: $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

قسمت ۲. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

فرض کنیم: $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. می‌خواهیم ثابت کنیم: $x\in A\cap(B\cup C)$.

از آنجا که: $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$، پس یا $x\in(A\cap B)$ و یا $x\in(A\cap C)$. بنابراین، یا: $x\in A$ و $x\in B$ و یا: $x\in A$ و $x\in C$. یعنی در هر حالت: $x\in A$، و $x\in B$ یا $x\in C$. لذا داریم: $x\in A$ و $x\in(B\cup C)$. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که: $x\in A\cap(B\cup C)$.

با اتمام اثبات در دو قسمت فوق داریم:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

خاصیت توزیع‌پذیری	**1. Distributive Property**
اشتراک	**2. Intersection**
اجتماع	**3. Union**
اثبات کردن	**4. To Prove**
بنابراین، پس	**5. Therefore**
استنتاج، نتیجه گرفتن	**6. Conclude**
بنابراین، آنگاه	**7. Thus**
در نظر گرفتن	**8. To Consider**

EXAMPLE 3. If A, B, and C are any three sets, then

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

(This is known as the distributive property of the intersection with respect to the union.)

Proof

Part 1. $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)(A\cap C)$

Let $x\in A\cap(B\cup C)$. We want to prove that $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Because $x\in A\cap(B\cup C)$, then $x\in A$ and $x\in(B\cup C)$. Therefore, $x\in A$ and either $x\in B$ or $x\in C$.

Because we know that $x\in A$, we can consider two cases: either $x\in A$ and $x\in B$, or $x\in A$ and $x\in C$. Thus, either $x\in(A\cap B)$ or $x\in(A\cap C)$. Therefore, we can conclude that $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Part 2. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$

Let $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. We want to prove that $x\in A\cap(B\cup C)$.

As $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, that either $x\in(A\cap B)$ or $x\in(A\cap C)$. Thus, either $x\in A$ and $x\in B$, or $x\in A$ and $x\in C$. Therefore, in any case $x\in A$, and either $x\in B$ or $x\in C$. Thus, $x\in A$ and $x\in(B\cup C)$. Therefore, we can conclude that $x\in A\cap(B\cup C)$.

By the conclusions proved in the two formentioned parts, we have that

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

ترجمه برای دانش‌آموزان

EXAMPLE 4. Let $A=\{x\in Z|$is a multiple of 5$\}$ and $B=\{x\in Z|x$ is a multiple of 7$\}$. Then

$$A\cap B=\{x\in Z|x \text{ is a multiple of } 35\}.$$

Proof

Part 1. $A\cap B\subseteq\{x\in Z|x$ is a multiple of 35$\}$.

Let $x\in A\cap B$. Then $x\in A$ and $x\in B$. This implies that x is a multiple of 5 and it is a multiple of 7. Therefore, $x=5n$ and $x=7m$ with n and m integer numbers.

If we combine these two equalities, we obtain $5n=7m$.

As 5 and 7 are prime numbers, 5n is divisible by 7 only if n is divisible by 7. Thus $n=7k$ for some integer number k. Therefore, $x=5n=5(7k)=35k$ for some integer number k. This means that x is a multiple of 35.

Part 2. $\{x\in Z|x$ is a multiple of 35$\}\subseteq A\cap B$.

Let x be a multiople of 35. Therefore, $x=35t$ for some integer number t.

Thus, x is divisible by 5 (so $x\in A$) and it is divisible by 7 (so $x\in B$). This implies that $x\in A\cap B$. Therefore, the two sets are equal.

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۵۱. کوچک‌ترین مقدار x را بیابید، به‌طوری که: $[x]+[2x]+[3x]+[4x]=15$.

۳۵۲. میانگین n عدد صحیح متوالی که از n شروع می‌شوند برابر ۹۴ است. مطلوب است مقدار n.

۳۵۳. اندازهٔ زاویه‌های یک پنج‌ضلعی محدب عددهای صحیح هستند و یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. چند مقدار متفاوت برای اندازهٔ زاویه‌ها وجود دارد؟

۳۵۴. فاصلهٔ دو نقطهٔ تقاطع منحنی‌های $x+y=7$ و $x^2+y=7$ را به‌دست آورید.

۳۵۵. مجموع پنج توان متوالی از ۲ از ۱۳۹۷ بیشتر است. اولین جملهٔ بین آن‌ها کدام است؟

۳۵۶. کوچک‌ترین عدد صحیح x را بیابید، به‌طوری که $x^2-30x-175$ عددی اول باشد.

۳۵۷. مجموع تمام ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^6-6x^4+11x^2-6=0$ را به‌دست آورید.

۳۵۸. اگر عدد ۱۳۹۷ را در مبنای n بنویسیم، به‌صورت ۱۰۷۰ نمایش داده می‌شود. n چقدر است؟

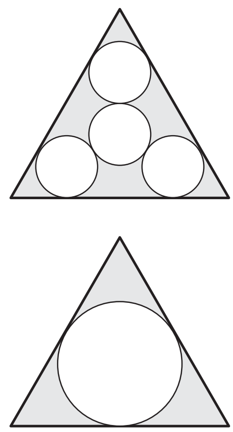
۳۵۹. جواب‌های معادلهٔ $(x+2)^4+x^4=82$ را به‌دست آورید.

۳۶۰. اگر $f(2)=5$ و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم: $f(x).f(x+1)=3$، مطلوب است مقدار $f(10)$.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۳۲۱. در شکل ۱ دو مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع برابر مفروض‌اند. در مثلث اول ناحیهٔ خارج دایرهٔ محاطی رنگ شده است و در شکل دوم ناحیهٔ خارج از چهار دایرهٔ یکسان که مطابق شکل برهم مماس هستند. کدام‌یک از دو ناحیهٔ رنگی بزرگ‌تر است؟

مطابق شکل چهار مثلث کوچک‌تر با مثلث اصلی متشابه هستند. در نتیجه مساحت رنگ شده در هر مثلث کوچک‌تر برابر یک‌چهارم مساحت رنگی مثلث اصلی است. در نتیجه مساحت رنگی دو شکل داده شده برابرند.



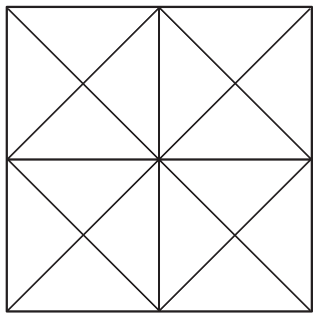
شکل۱

۳۲۲. در شکل زیر به جای مربع‌ها می‌توانیم علامت + یا - بگذاریم، اما حداکثر از سه علامت - می‌توانیم استفاده کنیم.
چند راه برای پرکردن خانه‌ها وجود دارد؟

۱□۲□۳□۴□۵□۶□۷□۸□۹□۱۰=۳۵

مجموع عددهای ۱ تا ۱۰ برابر است با ۵۵. در نتیجه مجموع عددهایی که کم می‌شوند باید برابر ۱۰ باشد. با توجه به علامت مثبت ۱، تنها جواب با سه علامت منفی {۵,۳,۲} است. با دو علامت منفی جواب‌ها {۲,۸}، {۳,۷} و {۴,۶} هستند و با یک علامت منفی تنها جواب {۱۰} است. در نتیجه در کل ۵ راه وجود دارد.

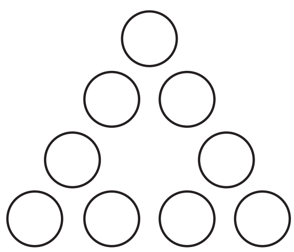
۳۲۳. چند مثلث در شکل ۲ وجود دارد؟



شکل۲

اگر هر مثلث کوچک را مثلثی واحد در نظر بگیریم، ۱۶ مثلث واحد وجود دارد. همچنین ۱۶ مثلث با مساحت دو برابر، ۸ مثلث با مساحت چهار برابر و ۴ مثلث با مساحت هشت برابر وجود دارد. در نتیجه تعداد کل مثلث‌ها برابر است با ۴۴.

۳۲۴. عددهای ۱ تا ۹ را درون دایره‌ها (شکل ۳). طوری نوشته‌ایم که مجموع اعداد هر ضلع برابر ۱۷ شود. مجموع اعداد روی رأس‌ها را بیابید. چند روش برای نوشتن ۹ عدد وجود دارد؟



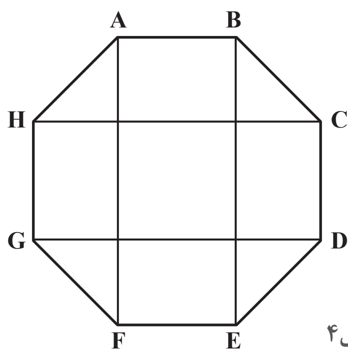
شکل۳

مجموع همهٔ خانه‌ها برابر است با ۴۵ و مجموع سه ضلع برابر است با ۵۱. اما در مجموع سه ضلع، رئوس را ۲بار شمرده‌ایم. پس مجموع اعداد سه رأس برابر است با ۶. برای نوشتن سه رأس، ۶=!۳ حالت وجود دارد. سپس اعداد ۴ تا ۹ را باید در ۶ خانهٔ باقی‌مانده طوری بنویسیم که مجموع هر ضلع ۱۷ شود. اگر ۹ را با ۴ جفت کنیم، آن‌گاه باید ۸ را با ۶ و ۷ را با ۵ در نظر بگیریم و 2^3 حالت برای نوشتن سه جفت روی اضلاع امکان وجود دارد. اگر ۹ را با ۵ جفت کنیم، آن‌گاه باید ۸ را با ۴ و ۷ را با ۶ در نظر بگیریم،

که در اینجا نیز $۲^۳$ حالت برای نوشتن آن‌ها وجود دارد. بنابراین در کل ۹۶=(۸+۸)۶ راه برای نوشتن ۹ رقم وجود دارد.

۳۲۵. در شـــکل ۴ چه کســـری از هشت‌ضلعی منتظم رنگ شده است؟

اگر ضلع هشت‌ضلعی را واحد در نظر بگیریم، مســاحت رنگ شده نصف مســاحت مستطیل ABEF اســت. از طرف دیگر، مساحت ABEF برابر ۳ و مســاحت هشت‌ضلعی برابر ۷ است. در نتیجه نسبت مساحت رنگی به کل مساحت برابر است با: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۱۴}$.



شکل۴

۳۲۶. یک ظرف شیشـــه‌ای پر از عسل ۷۵۰ گرم وزن دارد. اگر یک‌سوم عسل را خالی کنیم، وزن ظرف به ۵۵۰ گرم می‌رسد. وزن ظرف خالی چقدر است؟

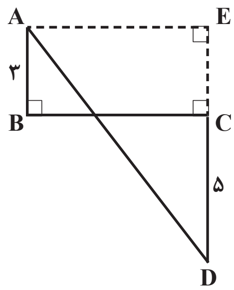
وزن یک‌سوم عســل برابر ۲۰۰=۵۵۰-۷۵۰ گرم اســت. پس وزن عسل برابر ۶۰۰ گرم و وزن ظرف برابر ۱۵۰ گرم است.

۳۲۷. دو عدد طبیعی هستیم که حاصل ضربمان برابر ۱۰۰۰ است، اما هیچ‌کدام سمت راست خود رقم صفر نداریم. مـــا چه عددهایی هستیم؟

چـــون رقم یکان ما صفر نیســـت، پس به ده بخش‌پذیر نیستیم. بنابراین یکی از ما فقط عامل اول ۵ و دیگری فقط عامل اول ۲ را داریم. پس ما دو عدد $۲^۳$ و $۵^۳$ هستیم.

۳۲۸. در شـــکل ۵، BC=۶. اندازهٔ AD را به‌دست آورید.

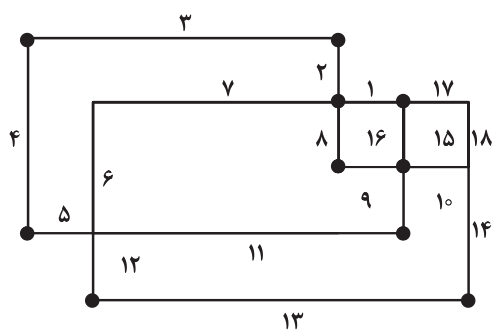
با توجـــه به شـــکل ۵، AE و DE به ترتیب برابـــر ۶ و ۸ خواهند بـــود. در نتیجه طبق قضیهٔ فیثاغورس AD برابر است با: $\sqrt{۸^۲+۶^۲}=۱۰$.



شکل۵

۳۲۹. آیا می‌توان شکل ۶ را با یک حرکت خودکار رسم کرد؟ در واقع مجاز نیستیم خودکار را از روی کاغذ برداریم تا زمانی که شکل کامل شود.

مطابق شکل ۶ پاره‌خط‌ها را طبق شماره طی می‌کنیم.



شکل۶

۳۳۰. اگر x عددی حقیقی باشـــد، کمترین مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$y=\left|\left|\left|x-۱۰\right|+۱۰\right|-۱۰\right|+۱۰$$

اگـــر بخواهیـــم y مینی‌مـــم شـــود، باید $\left|\left|x-۱۰\right|+۱۰\right|-۱۰$ برابـــر صفر باشـــد. در نتیجه $\left|\left|x-۱۰\right|+۱۰\right|$ باید برابر ۱۰ شود. یعنی $|x-۱۰|$ باید صفر باشد. پس x=۱۰ و کمترین مقدار y برابر ۱۰ است.

وصیت پدربزرگ شهریار!

شهریار در ادامه گفت: «داستان من هم شبیه داستان پدربزرگ مازیار است. من هم پدربزرگی داشتم که چند سال پیش عمرش را به شما داد و او هم زمینی در شهرمان داشت. ولی شکل زمین او به این عجیبی نبود! زمین او از دو قطعهٔ مربع‌شکل به هم چسبیده مثل این شکل، تشکیل شده بود.

اما وصیت او عجیب‌تر بود! او وصیت کرده بود که با رسم سه خط راست در این زمین، آن را به پنج قطعه تقسیم کنند و هر قطعه را به ترتیب بزرگی و به ترتیب سن به یکی از پنج پسرش بدهند».

کاوه گفت: «خب این کار که خیلی آسان است!»

شهریار گفت: «اجازه بده! اما او چیز دیگری هم گفته بود. او گفته بود که این تقسیم‌بندی طوری باشد که از کنار هم قرار دادن این پنج قطعه بتوان یک مربع دیگر ساخت!»

کاوه گفت: «آه! حالا مسئله سخت شد!»

ولی فرهاد گفت: «نه فکر نمی‌کنم سخت باشد. من شنیده‌ام همیشه می‌توان هر دو مربع دلخواه را با برش‌های مناسب به قطعاتی تقسیم کرد که از کنار هم قرار دادن آن‌ها مربع بزرگ‌تری درست شود. فکر می‌کنم این مسئله بی‌ارتباط با آن مسئله نباشد».

پس از اندکی خط‌کشی و امتحان کردن، فرهاد موفق به حل این مسئله شد و آن را به همه نشان داد. شهریار گفت: «بله درست است، اتفاقاً پدر و عموهایم نیز همین‌طور عمل کردند و یکی از آن پنج قطعه به پدرم رسید و هنوز هم آن را دارد و در آن کشاورزی می‌کند».

آیا شما هم می‌توانید این مسئله را حل کنید؟

- ریاضی‌دان کسی است که یک فنجان قهوه را به یک قضیه تبدیل می‌کند!

«پال اردیش ریاضی‌دان معاصر مجاری»

- ریاضیات هنر دادن یک اسم به چیزهای متفاوت است!

«هنری پوآنکاره ریاضی‌دان فرانسوی»

- ریاضی‌دانان شبیه فرانسوی‌ها هستند. هرچه به آن‌ها بگویید، آن‌ها به زبان خودشان ترجمه می‌کنند و فوراً معنی کاملاً متفاوتی از آن به دست می‌آورند!

«گوته شاعر آلمانی»

- ریاضی‌دان مرد کوری است که در اتاقی تاریک به گربه‌ای سیاه که وجود ندارد، خیره شده است!

«چارلز داروین زیست‌شناس انگلیسی»

- هیچ شاخه‌ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به‌کار نرود.

«نیکلای لباچفسکی»

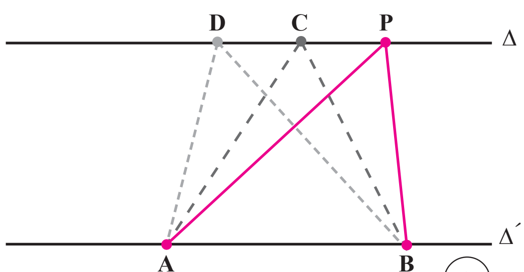
- هدف اصلی تمام تحقیقات در جهان باید کشف نظام منطقی جهان باشد که خداوند در آن قرار داده است و آن را به زبان ریاضیات بر ما آشکار ساخته است.

«یوهانس کپلر»

قضیهٔ پیک در حالت‌های خاص

خشایار کاویانپور
دانشجوی
کارشناسی ارشد ریاضی

با قضیهٔ پیک در فصل سوم هندسه دهم آشنا شده‌اید. می‌خواهیم به کاربرد و یافتن مساحت‌ها در مسائلی که به قضیهٔ پیک مربوط‌اند، بپردازیم. ابتدا به دو نکتهٔ کلیدی اشاره می‌کنیم:



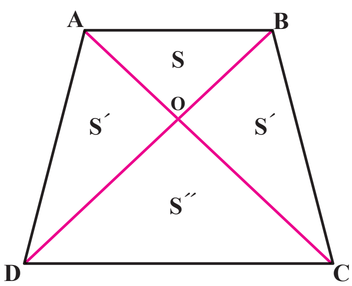
۱

الف) دو خط موازی Δ و Δ´ مفروض‌اند. اگر نقاط A و B را واقع بر Δ´ در نظر بگیریم، آن‌گاه از هر نقطهٔ متعلق به Δ مانند P، C و D به A و B وصل کنیم، مساحت مثلث‌های PAB، CAB و DAB با هم برابر است:

$$\Delta \parallel \Delta' \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{PAB}} = S_{\overset{\Delta}{CAB}} = S_{\overset{\Delta}{DAB}}$$

ب) در هر ذوزنقه مانند ABCD داریم: (O محل تلاقی قطرها)

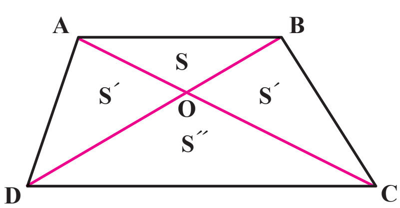
$S'^2 = SS''$ (قضیهٔ شبه پروانه)



۲

اثبات: با توجه به الف داریم:

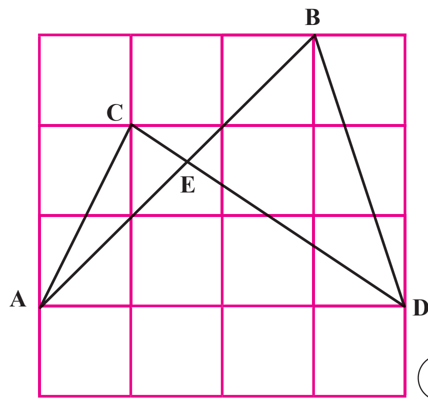
$$S_{ABC} = S_{ABD} \Rightarrow S_{ABC} - S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOB}$$
$$\Rightarrow S_{AOD} = S_{BOC} = S', A\hat{O}B = C\hat{O}D = \alpha$$
$$S_{AOB} \times S_{COD} = (\frac{1}{2}AO.OB.\sin\alpha)(\frac{1}{2}OC.OD.\sin\alpha)$$
$$= (\frac{1}{2}OB.OC.\sin\alpha)(\frac{1}{2}AO.OD.\sin\alpha)$$
$$= (\frac{1}{2}OB.OC.\sin(180-\alpha))(\frac{1}{2}AO.OD.\sin(180-\alpha))$$
$$= S_{AOD}.S_{OBC} = S' \times S' = S'^2 \Rightarrow S.S'' = S'^2$$



۳

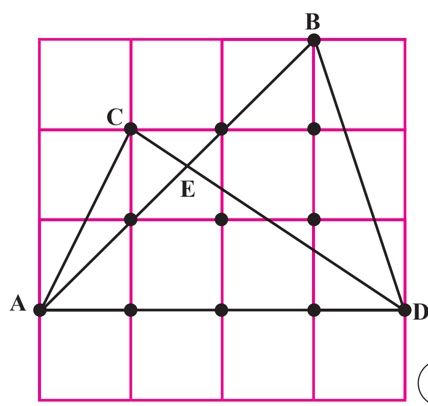
حال به حل چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱. در شــکل ۴ پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را در E قطع کرده‌اند که E شــبکه‌ای نیست. حاصل $S_{\overset{\Delta}{BED}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}}$ را بیابید.



۴

حل: E شــبکه‌ای نیســت، ولی نقاط A، B، C و D شبکه‌ای هســتند. از D به A وصل می‌کنیم. دو مثلث BAD و CAD شــبکه‌ای هســتند و در مثلث EAD مشترک‌اند. لذا:



۵

$$S_{\overset{\Delta}{BAD}} - S_{\overset{\Delta}{CAD}} = S_{\overset{\Delta}{BED}} + \cancel{S_{\overset{\Delta}{EAD}}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}} - \cancel{S_{\overset{\Delta}{EAD}}}$$
$$= S_{\overset{\Delta}{BED}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}} \quad (۱)$$

با استفاده از دستور پیک داریم:

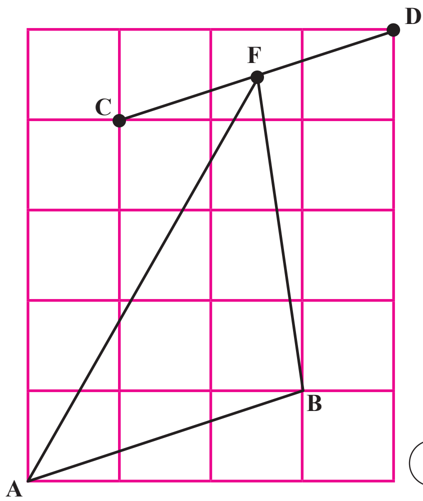
$$S_{\overset{\Delta}{BAD}} = \frac{۸}{۲} + ۳ - ۱ = ۶, S_{\overset{\Delta}{CAD}} = \frac{۶}{۲} + ۲ - ۱ = ۴$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$S_{\overset{\Delta}{BED}} - S_{\overset{\Delta}{CEA}} = ۶ - ۴ = ۲$$

(می‌توانســتیم از B به C وصل کنیم و مسئله را از این راه هم حل کنیم.)

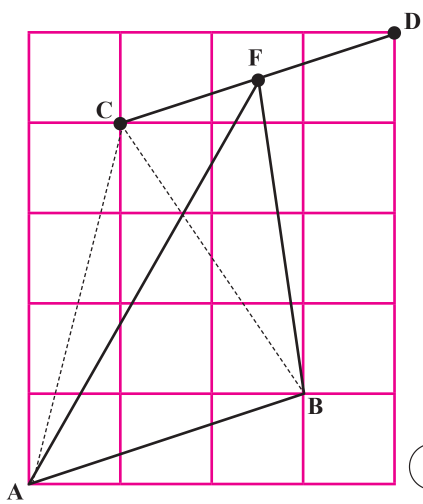
مثال ۲. در شــکل ۶ که بخشی از یک شبکه را نشان می‌دهد، نقــاط A، B، C و D شــبکه‌ای‌اند ولی F شبکه‌ای نیست. اگر: CF=FD مساحت مثلث FAB چقدر است؟



۶

حل: ابتدا توجه می‌کنیم کــه AB و CD موازی‌اند (زیرا شیب‌های یکسانی دارند). با توجه به قسمت (الف)، چون AB و CD موازی‌اند و F نقطه‌ای روی CD است، اگــر از C به A و B وصل کنیم، مســاحت مثلث‌های FAB و CAB برابر است: $S_{\overset{\Delta}{FAB}} = S_{\overset{\Delta}{CAB}}$

مثلث CAB شبکه‌ای اســت و ۳ نقطهٔ مرزی و ۵ نقطهٔ درونی دارد. بنابراین:

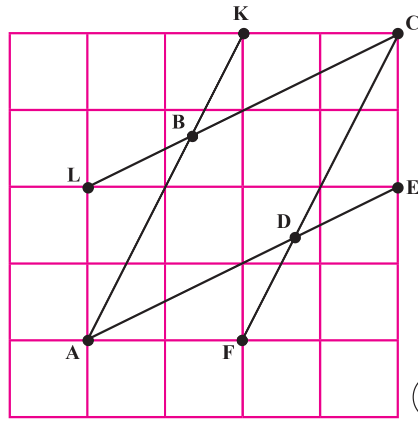


۷

$$S_{\overset{\Delta}{FAB}} = \frac{۵}{۲} + ۳ - ۱ = ۴/۵$$

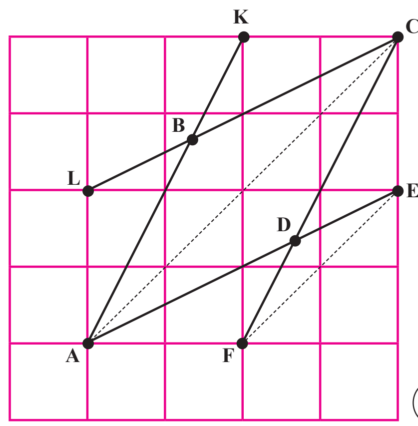
(می‌توانستیم از D به A و B وصل کنیم و مسئله را از این راه هم حل کنیم.)

مثال ۳. در شبکهٔ شکل ۸ مساحت چهارضلعی ABCD را که در آن نقاط A و C شبکه‌ای هستند، اما B و D شبکه‌ای نیستند، بیابید.



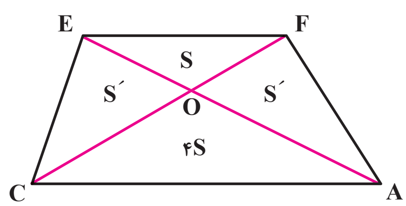
۸

حل: ابتدا توجه کنید: $CD \| AB$ و $CB \| AD$. یعنی ABCD متوازی‌الاضلاع است. از C به A و از E به F وصل می‌کنیم EF و CA موازی‌اند. لذا چهارضلعی FECA ذوزنقه است. از طرف دیگر، داریم: AC=۲EF. (چرا؟) از تشابه $\overset{\Delta}{EDF}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم:



۹

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}{S_{\overset{\Delta}{EDF}}} = (۲)^۲ = ۴$$



۱۰

طبق قضیهٔ شبه پروانه در ذوزنقه داریم:

$$S'^{۲} = S \times ۴S \Rightarrow S' = ۲S$$

مساحت ذوزنقهٔ شبکه‌ای FECA:

$$A = \frac{۱۰}{۲} + ۲ - ۱ = ۶$$

بنابراین:

$$۹S = ۶ \Rightarrow S = \frac{۶}{۹} \Rightarrow ۴S = \frac{۲۴}{۹} = \frac{۸}{۳}$$

حال توجه می‌کنیم که:

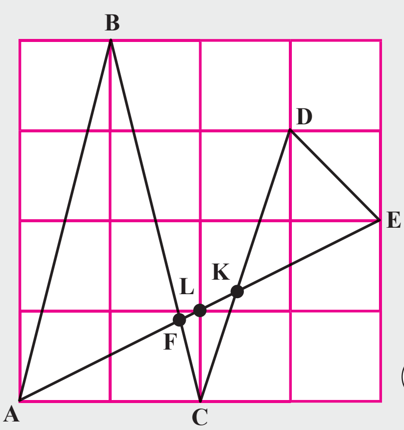
$$S_{\overset{\Delta}{ADC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ADCB}}$$

در نهایت مساحت متوازی‌اضلاع ADCB برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ADCB}} = ۲ \times \frac{۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

تمرین

در شبکهٔ شکل ۱۱ پاره‌خط AE، پاره‌خط‌های DC و BC را در نقاط غیرشبکه‌ای K و F قطع کرده است و از نقطهٔ شبکه‌ای L می‌گذرد. حاصل $S_{\overset{\Delta}{ABF}} + S_{\overset{\Delta}{DEK}} - S_{\overset{\Delta}{CFK}}$ چقدر است؟



۱۱

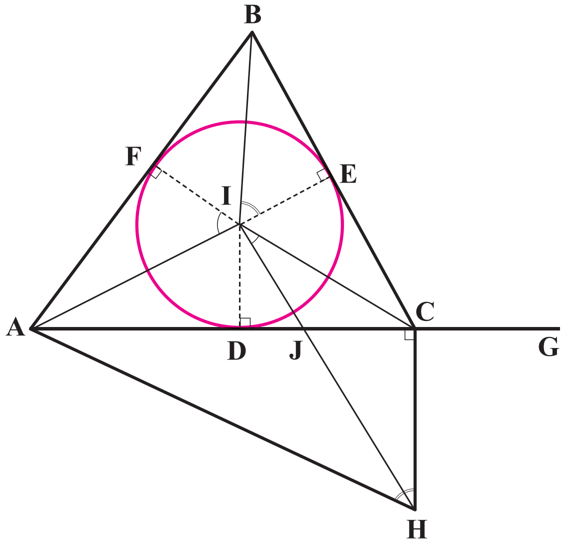
پاسخ: ۴

***منبع**

Euclidean and Transformational Geometry: Adeductive inquiry.

مراد کریمی شهمارودی، دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرکرد

اثبات هندسی رابطهٔ هرون



اشاره

رابطهٔ هرون فرمولی است که با استفاده از آن می‌توان مساحت یک مثلث را با داشتن طول‌های اضلاع و بدون داشتن طول ارتفاع آن به‌دست آورد. تاکنون به روش‌های جبری و مثلثاتی اثبات‌هایی از قضیهٔ هرون ارائه شده است. در این مقاله این رابطه به روش هندسی اثبات می‌شود. در رابطهٔ هرون، P نصف محیط مثلث و a، b و c برابر اضلاع مثلث هستند.

اثبات

برای اثبات رابطهٔ هرون باید مراحل زیر را انجام دهیم:

مرحلهٔ اول (طریقهٔ ترسیم شکل): فرض کنید که دایرهٔ محاطی، به مرکز I و شعاع r بر اضلاع AC=b، BC=a و AB=c در نقاط D، E و F مماس باشد. بر امتداد AC، G را چنان اختیار می‌کنیم که: CG=BE. اکنون پاره‌خط IH را بر AI عمود کنید تا AC را در J و خط عمود بر AC (در نقطهٔ C) را در H قطع کند.

مرحلهٔ دوم (استفاده از داده‌های شکل): پاره‌خط‌های ID=IE=IF، به‌دلیل اینکه شعاع‌های دایره محاطی‌اند، با هم برابرند. همچنین می‌دانیم از هر نقطهٔ خارج یک دایره فقط دو مماس می‌توان بر آن رسم کرد که طول آن‌ها با هم برابرند. پس: AD=AF، BF=BE و CD=CE. می‌دانیم از چهار نقطهٔ I، C، H و A یک دایره می‌گذرد (چرا؟). از این‌رو زاویه‌های CHA و AIC مکمل یکدیگرند. از طرف دیگر، اگر P را نصف محیط تعریف کنیم، طبق آنچه از کتاب درسی می‌دانیم:

$$ID = r = \frac{S}{P},\quad S = Pr$$

مرحلهٔ سوم: ثابت می‌کنیم: $B\hat{I}E = A\hat{H}C$. می‌دانیم در نقطه I مجموع زاویه‌ها ۳۶۰° درجه است؛ یعنی:

$$B\hat{I}F + B\hat{I}E + C\hat{I}E + C\hat{I}D + B\hat{I}F + A\hat{I}D = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲B\hat{I}E + ۲C\hat{I}D + ۲A\hat{I}D = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow B\hat{I}E + C\hat{I}D + A\hat{I}D = ۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{C\hat{I}D + A\hat{I}D = A\hat{I}C} B\hat{I}E + A\hat{I}C = ۱۸۰^\circ$$

$B\hat{I}E, A\hat{I}C$ مکمل یکدیگرند.
$A\hat{I}C, A\hat{H}C$ مکمل یکدیگرند.
$\Rightarrow B\hat{I}E = A\hat{H}C$

مرحلهٔ چهارم: نشان می‌دهیم: AG=P.

$$۲P = AB + AC + BC = AF + BF + AD + CD + BE + CE$$
$$= (AF + AD) + (BF + BE) + (CD + CE)$$
$$= ۲AD + ۲BE + ۲CD = ۲(AD + BE + CD)$$
$$\xrightarrow{AG = AD + DC + CG} ۲P = ۲AG \Rightarrow P = AG$$

مرحلهٔ پنجم: از تناسب بین اضلاع در مثلث‌های متشابه برای به‌دست آوردن رابطه استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{BIE} \sim \overset{\Delta}{AHC} &\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{CH}{IE}\ (۱) \\ DIJ \sim HCJ &\Rightarrow \frac{CH}{ID} = \frac{JC}{DJ}\ (۲) \end{aligned}\right\} \overset{ID=IE}{\Rightarrow}$$

$$\frac{AC}{BE} = \frac{JC}{DJ} \xrightarrow{BE=CG} \frac{AC}{CG} = \frac{CJ}{DJ}$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{AC + CG}^{AG}}{CG} = \frac{\overbrace{CJ + DJ}^{CD}}{DJ} \Rightarrow \frac{AG}{CG} = \frac{CD}{DJ}$$

$$\Rightarrow \frac{AG^۲}{CG \times AG} = \frac{CD \times AD}{DJ \times AD}$$

$$\Rightarrow \frac{AG^۲}{CG.AG} = \frac{CD \times AD}{ID^۲} \Rightarrow AG^۲.ID^۲ = AG.CG.CD.AD$$

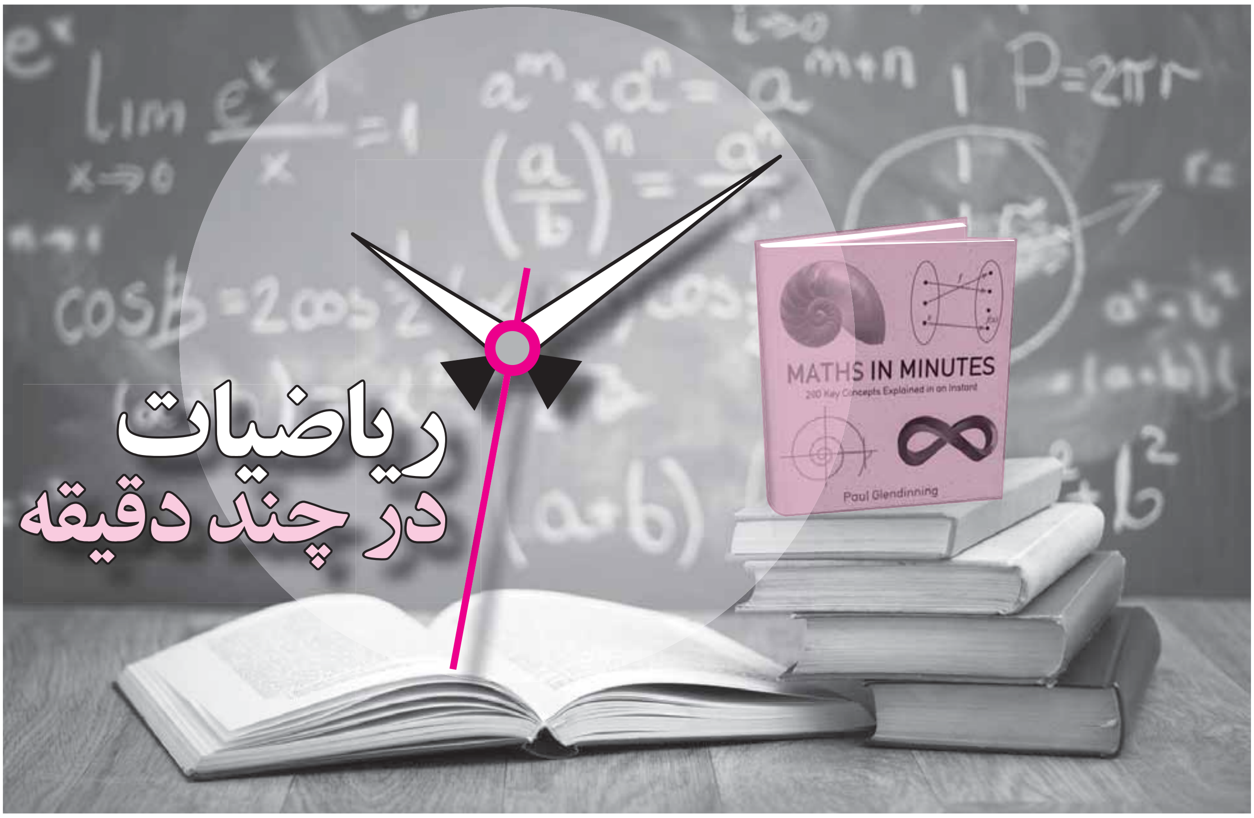
$$\Rightarrow (AG.ID)^۲ = AG.CG.CD.AD \Rightarrow (AG.ID = P.r = S)$$

$$\Rightarrow S^۲ = AG.CG.CD.AD \Rightarrow S = \sqrt{AG.CG.CD.AD}$$

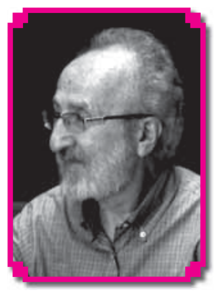
$$= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$ (رابطهٔ هرون)

$$\left|\begin{aligned} &AG = p \\ &CG = AG - AC = P - b \\ &AD = AG - (CD + CG) = AG - (CE + BE) = P - a \\ &CD = AG - (AD + CG) = AG - (AF + BF) = P - c \end{aligned}\right.$$

پال گلِندینینگ



ریاضیات در چند دقیقه



ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور**

معرفی هندسه

هندســـه، مطالعهٔ شکل، اندازه، موقعیت و فضاست. این بررسی، به شکل کلاسیکش که توسط **اقلیدس،** ریاضی‌دان یونانی، در حدود ۳۰۰ ق.م تأسـیس شـد، مبتنی بر فهرست‌هایی از اشیا، و فرض‌هایی موسوم به «اَکسیوم» که از آن‌ها جمیع نتایج حاصل می‌شد، است. کتابِ با نفوذِ «مقدمات» اثر اقلیدس، پنج اکسیوم را به این شرح فهرست کرده بود:

۱. بین هر دو نقطه یک خط می‌توان رسم کرد.

۲. یک پاره‌خط را می‌توان در هر یک از دو جهت آن گسترش داد.

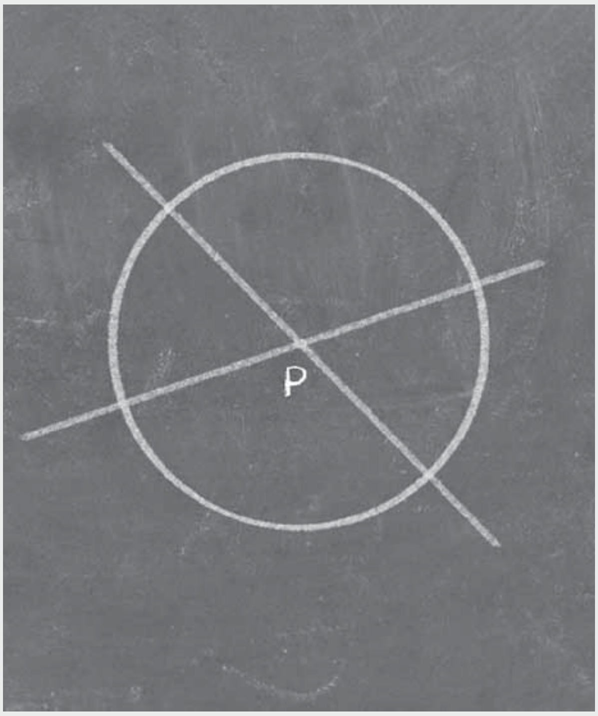
۳. به مرکز هر نقطه با هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد.

۴. هر دو زاویهٔ قائمه‌ای برابرند.

۵. به ازای هر خط راسـت مفروض و نقطه‌ای غیرواقع بـر آن، دقیقاً یک خط، موسـوم به خط موازی، موجود است که خط اصلی را قطع نمی‌کند.

قابل توجه اسـت که اکسـیوم‌های اقلیدس از تعدادی کلمه و عبـارت، از قبیل خط، زاویهٔ قائمه و شـعاع، بدون توضیح یا تعریف آن‌ها، اسـتفاده می‌کننـد. در نتیجـهٔ تأثیـر کارهـای اقلیدس، اکسـیوم‌های جدیدی در اواخر سـدهٔ ۱۸۰۰ برای توسعهٔ هندسه در قالبی دقیقاً منطقی معرفی شدند.

خط‌ها و زاویه‌ها



خط و زاویه دو مفهوم از اساسی‌ترین مفاهیم هندسهٔ اقلیدسی‌اند. اکسیوم پنجم اقلیدس بر این است که: با معلوم بودن یک خط راست و یک نقطهٔ غیرواقع بر آن خط، جمیع خط‌های ممکن گذرنده از آن نقطه، به استثنای یکی، خط مفروض را قطع می‌کنند. به عبارت دیگر، خط‌های معمولی تقاطع می‌کنند، و خط‌های موازی، نامتقاطع شونده و غیرمعمولی‌اند.

مفهوم زاویه از آنجا به وجود آمد که وسیله‌ای برای توصیف چگونگی تقاطع خط‌ها باشد. فرض می‌کنیم، چنان‌که در شکل ۱ نشان داده‌ایم، دو خط در نقطهٔ P متقاطع باشند. در این حالت دایرهٔ به مرکز P، توسط این خط‌ها به چهار قطعه تقسیم می‌شود. اگر این قطعات از نظر سطح برابر باشند، آن‌گاه گفته می‌شود که خط‌های مزبور متعامد و زاویه‌های مربوطه قائمه‌اند. این موضوع با اکسیوم چهارم اقلیدس مرتبط است.

در حالت‌های عمومی‌تر، زاویه‌ها با درجه اندازه‌گیری می‌شوند و از طریق توابع مثلثاتی نقشی اساسی در زمینه‌هایی ایفا می‌کنند که ظاهراً با هندسه ارتباطی ندارند.

اندازه‌گیری زاویه‌ها

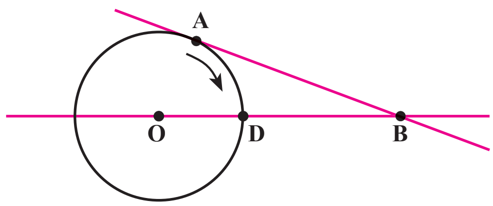
از لحاظ تاریخی اندازه‌گیری زاویه‌های بین دو خط شامل رسم دایره‌ای دور نقطهٔ تقاطع آن دو خط و تقسیم آن به تعدادی قطعه یا واحدهای برابر است. منجمان باستانی ماوراءالنهر مفهوم استفاده از ۳۶۰ قسمت از چنین تقسیمی را که امروزه به‌عنوان درجه می‌شناسم، معرفی کردند. آن‌ها واحدهای زمان، یعنی درجه را به ۶۰ دقیقهٔ برابر، هر یک شامل ۶۰ ثانیهٔ برابر نیز زیرتقسیم کردند. زیرتقسیم‌های کوچک مزبور برای اجتناب از اشتباه با واحدهای زمان، غالباً به‌عنوان دقیقه‌های کمان و ثانیه‌های کمان شناخته می‌شوند. به این ترتیب، اندازهٔ یک زاویه با مشخص کردن اینکه چند درجه، دقیقه و ثانیهٔ کمان را تشکیل داده است، به دست می‌آید.

استفاده از عددهای ۶۰ و ۳۶۰ در این زمینه بسیار مناسب است، زیرا ۶۰ می‌تواند توسط عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، یا ۶ شمرده شود و باز عددی تمام حاصل کند. اما این واحدهای خاص برای اندازه‌گیری زاویه مبنای اساسی نیستند. ایدهٔ اصلی در این امور آن است که می‌توانیم به زاویه به‌عنوان نسبتی از یک دایره نگاه کنیم که توسط دو خط سازندهٔ آن زاویه محصور شده است.

دکتر محرم نژاد ایردموسی

چند مسئله از حد در زمینه‌های گوناگون

در کتاب حسابان یا ریاضی ۲ با مفهوم حد تاحدودی آشنا شده‌اید. می‌خواهیم با ذکر چند مثال به درک بیشتری از مفهوم حد برسیم. از یک مثال هندسی شروع می‌کنیم.



مثال ۱. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع واحد مفروض است. خطی افقی از مرکز می‌گذرانیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. خط دیگری در نقطه A بر دایره مماس می‌کنیم تا خط افقی را در نقطهٔ B قطع کند. حال نقطهٔ A را روی دایره به نقطهٔ D نزدیک می‌کنیم. طول دو پاره‌خط AB و DB چه تغییری می‌کنند؟ با نزدیک شدن A به D، پاره‌خط‌های AB و DB کوچک‌تر می‌شوند و طول آن‌ها به سمت صفر می‌رود. حال می‌خواهیم ببینیم نسبت $\frac{AB}{DB}$ به سمت چه عددی می‌رود. چه حدسی می‌زنید؟ صورت و مخرج این کسر هر دو در حال کاهش هستند و به سمت صفر می‌روند، اما نسبت آن‌ها چه‌طور؟ برای حل این مسئله و یافتن $\lim\limits_{A\to D}\frac{AB}{DB}$، ابتدا باید مقدار کسر را برحسب یک متغیر مناسب نمایش دهیم.

فرض کنید: $|DB|=x$. در این صورت: $|OB|=1+x$ و در مثلث قائم‌الزاویه OAB خواهیم داشت:

$$AB=\sqrt{OB^2-OA^2}=\sqrt{(1+x)^2-1}=\sqrt{x^2+2x}$$

در نتیجه:

$$\lim_{A\to B}\frac{AB}{DB}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

با نزدیک شدن x به صفر، $\frac{2}{x}$ به سمت $+\infty$ می‌رود و حد فوق $+\infty$ خواهد بود. بنابراین: $\lim\limits_{A\to D}\frac{AB}{DB}=+\infty$.
یعنی این نسبت با نزدیک شدن نقطهٔ A به B، به سمت $+\infty$ می‌رود.

مثال ۲. معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+2x+1=0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید a عددی در بازه $(0,1)$ است. اگر دلتای معادله را محاسبه کنید، خواهید دید:

$$\Delta=b^2-4ac=4-4a>0$$

پس معادله دو ریشه دارد. x_1 را ریشهٔ بزرگ‌تر و x_2 را ریشهٔ کوچک‌تر فرض کنید. می‌خواهیم بررسی کنیم که با میل کردن a به صفر، x_1 و x_2 به سمت چه عددی می‌روند:

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{4-4a}}{2a}\Rightarrow \lim_{a\to 0^+}(x_1)=\lim_{a\to 0^+}\frac{\sqrt{4-4a}-2}{2a}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{(\sqrt{4-4a}-2)(\sqrt{4-4a}+2)}{2a(\sqrt{4-4a}+2)}$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\frac{4-4a-4}{2a(\sqrt{4-4a}+2)}=\lim_{a\to 0^+}\frac{-4a}{2a(\sqrt{4-4a}+2)}=-\frac{1}{2}$$

پس با میل کردن a به صفر از سمت راست، ریشهٔ بزرگ‌تر به $-\frac{1}{2}$ میل می‌کند. دقت کنید که $-\frac{1}{2}$ ریشهٔ معادلهٔ $2x+1=0$ است. حال حد ریشهٔ کوچک‌تر را پیدا کنیم. می‌دانیم: $x_1x_2=\frac{1}{a}$.

در نتیجه:

$$\lim_{a\to 0^+} x_2 = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{x_1 a} = \lim_{a\to 0^+}\frac{-2}{a}$$

با نزدیک شدن a به صفر، مخرج کسر کوچک و کوچک‌تر می‌شود. در نتیجه $\frac{-2}{a}$ به سمت $-\infty$ می‌رود! به عنوان تمرین می‌توانید بررسی کنید که با میل کردن a به عدد ۱، ریشه‌ها به سمت چه اعدادی می‌روند.

مثال ۳. دنبالهٔ زیر از عددهای حقیقی را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots$$

این دنباله را دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم. شاید کنجکاو شده باشید که حد این دنباله وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود، چقدر است، فرض کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. یعنی بی‌نهایت رادیکال تودرتو نوشته‌ایم (این عمل غیرممکن است اما برای لحظه‌ای فرض کنید که بی‌نهایت بار رادیکال نوشته‌اید). پس:

$$L=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$L^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}$$

جملهٔ دوم طرف راست همان L است. (چرا؟) در نتیجه: $L^2=L+2$. با حل این معادله به ریشه‌های $L=2$ و $L=-1$ می‌رسیم. اما ریشه ۱- قابل قبول نیست. پس: $L=2$.

یک نکتهٔ جالب دیگر درباره این دنباله آن است که همهٔ جملات دنباله گنگ هستند. اما حد دنباله عددی گویاست.

مثال ۴. دنبالهٔ زیر از عددهای حقیقی را در نظر بگیرید:

$$\frac{[\sqrt{2}]}{1},\frac{[2\sqrt{2}]}{2},\frac{[3\sqrt{2}]}{3},\ldots$$

جملهٔ عمومی این دنباله برابر است با: $a_n=\frac{[n\sqrt{2}]}{n}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید: همه جملات دنباله اعدادی گویا هستند. حال حد دنباله را در نظر بگیریم. این دنباله به سمت چه عددی می‌رود؟

می‌دانیم: $x-1<[x]\le x$. در نتیجه:

$$n\sqrt{2}-1<[n\sqrt{2}]\le n\sqrt{2}$$

با تقسیم طرفین نامساوی بر n خواهیم داشت:

$$\sqrt{2}-\frac{1}{n}<\frac{[n\sqrt{2}]}{n}\le\sqrt{2}$$

از طرف دیگر: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-\frac{1}{n})=\sqrt{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}$

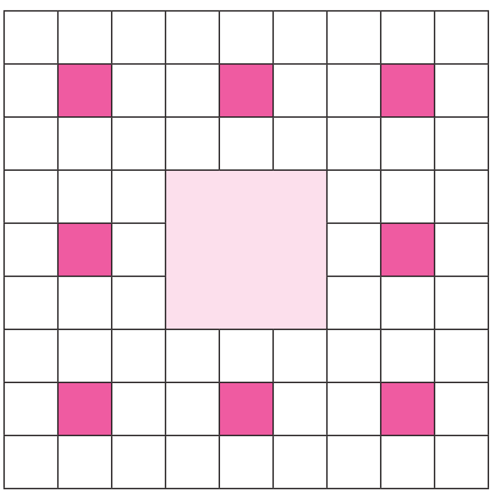
. در نتیجه طبق قضیهٔ فشردگی باید داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[n\sqrt{2}]}{n}=\sqrt{2}$$

(قضیهٔ فشردگی بیان می‌کند که اگر دنباله‌ای بین دو دنبالهٔ دیگر محصور باشد و آن دو دنباله حد یکسانی داشته باشند، آن‌گاه دنبالهٔ محصور بین آن دو هم ناچاراً به حد آن دو میل می‌کند.)

مشاهده می‌کنید که در اینجا دنباله‌ای با جملات گویا به عددی گنگ میل می‌کند.

مثال ۵. مربعی به ضلع ۱ مفروض است. در مرحلهٔ اول آن‌را به ۹ مربع کوچک‌تر به ضلع $\frac{1}{3}$ افراز و مربع وسط را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم هر کدام از ۸ مربع رنگ نشده را به ۹ مربع کوچک‌تر افراز و مربع وسط را رنگ می‌کنیم. می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر این مراحل را تا بی‌نهایت تکرار کنیم، چه کسری از مربع رنگ خواهد شد.



راه حل: در پایان مرحلهٔ اول مساحت رنگ شده برابر $\frac{1}{9}$ است. در پایان مرحلهٔ دوم مساحت رنگ شده برابر

$S=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}$ است. بنابراین با ادامهٔ این مراحل تا بی‌نهایت مساحت رنگ شده برابر خواهد شد:

$$S=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2\times\frac{1}{9}+\ldots$$

حال به محاسبهٔ S می‌پردازیم:

$$S=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}+\frac{1}{9}\times\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots\right)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}S\Rightarrow S=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}S\Rightarrow S-\frac{8}{9}S=\frac{1}{9}\Rightarrow S=1$$

یعنی کل مساحت مربع رنگ خواهد شد!

مثال ۶. دنبالهٔ فیبوناچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_1=F_2=1,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geq 3)$$

نسبت جملات متوالی این دنباله، یعنی $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ وقتی n به $+\infty$ میل می‌کند، به چه عددی نزدیک می‌شود؟

راه حل: فرض کنید: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=L$. در این صورت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}\right)=L$.

بنابراین: $1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=L$. اما: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=L$.

در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\frac{1}{L}$$

پس باید داشته باشیم: $1+\frac{1}{L}=L$. با حل این معادله به مقدار L می‌رسیم:

$$1+\frac{1}{L}=L\Rightarrow L^2-L-1=0\Rightarrow L=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

چون: $\frac{F_{n+1}}{F_n}>0$. پس: $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. یعنی نسبت جملات متوالی دنبالهٔ فیبوناچی به عدد طلایی میل می‌کند.

مثال‌های فوق نشان می‌دهند، حد توابع یا حد دنباله‌ها ممکن است عددهایی دور از انتظار باشند، اما محاسبهٔ حد به کمک قوانین و قضایای حد، این امکان را فراهم می‌کند که بتوانیم رفتار حدی توابع و دنباله‌ها را کشف کنیم.

در پایان چند مسئله برای حل توسط شما ارائه می‌کنیم:

مسئلهٔ ۱. دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2},\ldots$$

۱. جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

۲. حد جملهٔ عمومی را وقتی که n به $+\infty$ میل می‌کند، به‌دست آورید.

مسئلهٔ ۲. معادلهٔ $x^2+ax+1=0$ مفروض است، به‌طوری که: $a>2$.

۱. نشان دهید معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

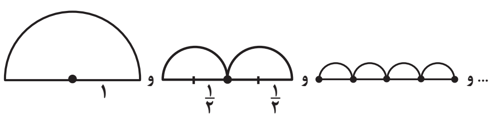
۲. وقتی: $a\to 2^+$، ریشهٔ بزرگ‌تر به سمت چه عددی می‌رود؟ ریشهٔ کوچک‌تر چطور؟

۳. وقتی: $a\to+\infty$، ریشهٔ بزرگ‌تر به سمت چه عددی می‌رود؟

مسئلهٔ ۳. می‌دانیم: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. در اینجا x برحسب رادیان است. اگر x برحسب درجه باشد، آن‌گاه حد فوق چه عددی خواهد شد؟

مسئلهٔ ۴. به نظر شما مقدار $[0/\overline{9}]$ چقدر است؟

مسئلهٔ ۵. در دنبالهٔ تصویری زیر، در هر مرحله نیم‌دایره‌های مرحلهٔ قبل را با دو نیم‌دایره کوچک‌تر عوض کرده‌ایم. مجموع محیط و مجموع مساحت نیم‌دایره‌های هر مرحله به سمت چه عددی می‌روند؟



مسئلهٔ ۶. دنبالهٔ هندسی $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ مفروض است.

۱. اگر S_n مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ a_n باشد، S_n را برحسب n به‌دست آورید.

۲. ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

مسئلهٔ ۷.

۱. ثابت کنید مثلثی با طول اضلاع $x+1$، $x+2$ و $x+3$ وجود دارد $(x\in R^+)$.

۲. فرض کنید Δ_x مثلثی با طول اضلاع قسمت قبل باشد، با میل کردن x به صفر، شکل مثلث Δ_x به چه شکلی تبدیل می‌شود؟

وصیت پدربزرگ جمشید!

جمشید در ادامه گفت: «من هم پدربزرگی داشتم که سال‌ها پیش از دنیا رفته بود. او هم زمینی داشت که در آن صیفی‌کاری کرده بود. زمین او دقیقاً مربع‌شکل بود و دور تا دور زمین را با درختان گردو که سال‌ها قبل نهال آن‌ها را کاشته بود، پوشانده بود. یعنی روی هر ضلع آن تعداد زیادی درخت گردو کاشته بود. او قبل از آنکه از دنیا برود، وصیت کرده بود که زمین او را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند و هر قسمت مال پدرم و یکی از سه عمویم باشد».

کاوه گفت: «خب اینکه کار خیلی ساده‌ای است و چند راه دارد. مثلاً می‌توانستند قطرهای مربع را رسم کنند. و با این کار آن را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند. یا اینکه...»

جمشید گفت: «بله درست است و پدر و عموهایم هم همین فکر را می‌کردند، ولی وقتی سَرِ زمین رفتند، چیز عجیبی دیدند! عده‌ای از خدا بی‌خبر درختان دور تا دور زمین را کنده و برده بودند! و فقط روی هر ضلع مربع یک درخت باقی مانده بود. حالا پدر و عموهایم اصلاً نمی دانستند زمین پدربزرگ شامل چه قسمت‌هایی بوده است! یعنی از هر ضلع مربع فقط یک نقطه را در اختیار داشتند. پس ابتدا باید حدود زمین را مشخص می‌کردند و بعد آن را بین خودشان تقسیم می‌کردند. آیا شما می‌توانید بگویید آن‌ها چه کار کردند؟»

فرهاد گفت: «راستی که مسئلهٔ دشواری است و مناسب این ساعت که نزدیک خواب است، نیست!»

جمشید گفت: «چی شد؟! حالا که خودت نمی‌توانی مسئله را حل کنی، بهانه می‌آوری؟!»

فرهاد گفت: «نه جدی می‌گویم! خیلی مسئلهٔ خوبی است، ولی حل آن آسان نیست. آیا خودت جوابش را می‌دانی؟»

جمشید گفت: «بله، البته یکی از عموهایم که مهندس عمران است، جواب آن را پیدا کرد و خودش هم تأکید کرد که مسئلهٔ دشواری است».

فرهاد گفت: «پس اجازه بده بیشتر روی آن فکر کنیم و تا آخر اردو وقت بده تا شاید آن را حل کنیم. حالا قبل از خواب، من معمای خودم را که آسان‌تر است، مطرح کنم».

بچه‌ها موافقت کردند و بعدها مسئله را حل کردند. آیا شما هم می‌خواهید به این مسئلهٔ زیبا فکر کنید؟

هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

هندسهٔ ۱

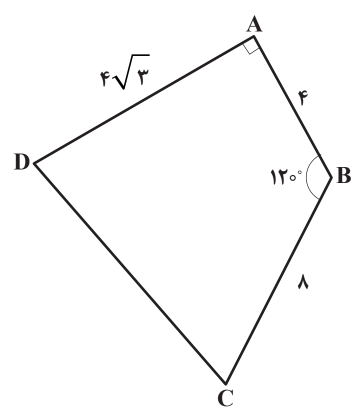
۱. نشــان دهید اگر ســه خط دوبه‌دو متقاطع باشند و در یک نقطه همرس نباشند، آن‌گاه هر سه در یک صفحه قرار دارند.

۲. A، B، C و D چهار نقطه در فضا هســتند. نشان دهید این چهار نقطــه در یک صفحه قرار ندارند، اگر و تنها اگر AB و CD متنافر باشند.

۳. در فضا دو خط عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

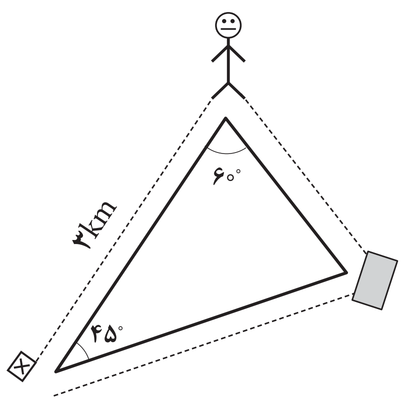
هندسهٔ ۲

۱. در شــکل ۱ داریم: $\hat{A}=90^\circ$ ، $\hat{B}=120^\circ$، $AB=4$، $AD=4\sqrt{3}$ و $BC=8$. مطلوب است تعیین مساحت چهارضلعی و طول قطر AC.



شکل ۱

۲. **علــی** ســر یــک دوراهــی ایســتاده کــه شــامل دو خیابان است کــه بــا هــم زاویــهٔ °۶۰ می‌ســازند. در انتهــای یکــی از دو خیابان کتابخانــه‌ای قــرار دارد کــه علــی بــا آن ۳ کیلومتــر فاصلــه دارد. در انتهــای خیابــان دوم هــم یــک پــارک واقع اســت. بیــن پارک و کتابخانــه خیابــان افقــی دیگری وجــود دارد که بــا خیابان اول زاویــهٔ °۴۵ می‌ســازد. علــی از پارک چــه فاصلــه‌ای دارد؟ پارک و کتابخانــه بــا هم چــه فاصلــه‌ای دارند؟



شکل ۲

۳. زمینــی بــه شــکل ذوزنقــه‌ای اســت کــه قاعده‌هــای آن ۵ و ۱۳ متــر و ســاق‌های آن ۳ و ۷ متــر هســتند. اولاً زاویه‌هایــی را کــه ســاق کوچک بــا قاعده‌ها می‌ســازد، بیابیــد. ثانیاً مســاحت زمین را به‌دســت آوریــد.

آمار و احتمال

۱. یــک کارمند اداره، زمان تقریبی رســیدن به محل کار خود را در دو دورۀ ۱۵ روزه که با خودروی شــخصی و اتوبوس طی کرده، به صورت زیر نوشته است:

خودرو: ۱۳, ۱۴, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۱, ۲۲, ۲۲, ۲۴, ۲۵, ۲۷, ۲۸, ۳۰, ۳۳, ۴۳

اتوبوس: ۱۶, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۸, ۲۰, ۲۰, ۲۱, ۲۱, ۲۳, ۲۸, ۳۰

با رسم نمودار جعبه‌ای به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) کدام وسیلۀ نقلیه او را سریع‌تر به محل کار می‌رساند؟

ب) کدام وسیله برای رسیدن به مقصد مطمئن‌تر است؟

۲. ۱۵ داده آماری با واریانس ۱۲، با ۱۰ دادۀ دیگر با واریانس ۷/۶ را ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه یکســان باشند، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل کدام است؟

۳. اگــر ۲۰ دادۀ آمــاری را دو برابـر و سـپس ۷ واحـد از هـر کـدام کـم کنیـم، ضریـب تغییـرات جدیـد، ۱/۵ برابـر ضریـب تغییرات داده‌هـای قبلـی می‌شـود. مجمـوع داده‌هـای اولیـه را به‌دسـت آورید.

۴. **الف)** آمار استنباطی به چه معناست؟

ب) اریب در نمونه‌گیری را چگونه می‌توان کاهش داد؟

۵. برای هر یــک از موضوع‌های زیر، کدام‌یک از روش‌های گردآوری داده را پیشنهاد می‌کنید؟

الف) علت ترک تحصیل جوانان در یک دهۀ اخیر؛

ب) میزان درامد شهرداری در ۵ سال اخیر؛

ج) میزان استقبال مردم از یک فیلم در سینما.

ریاضی دهم (رشته ریاضی ـ تجربی)

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم. تعداد پیشامدهای ناتهی را که با پیشامد $\{۱,۳,۵\}$ ناسازگار هستند، به‌دست آورید.

۲. از مجموعــۀ عددهای $\{۱,۲,...,۷۰\}$، عــددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد مضرب ۳ یا ۸ باشد؟

۳. در پرتاب دو تاس چقدر احتمال دارد که اختلاف اعداد رو شــده زوج باشد و عدد دوم از عدد اول کوچکتر نباشد؟

۴. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) قد افراد (کوتاه قد ـ قد متوسط ـ بلندقد)

ب) گروه خونی (A^+، A^-، B^+ و...)

ج) میزان بارندگی یک شهر (برحسب میلی‌متر)

ریاضی ۲ (تجربی)

۱. اگر A و B دو پیشــامد از فضای نمونه‌ای S باشــند، به‌طوری که داشته باشــیم: $P(A)=۰/۲$، $P(B)=۰/۲۲$ و $P(B|A)=۰/۷$، آن‌گاه $P(B'|A')$ برابر چه عددی می‌شود؟

۲. کارمنــدان یک اداره دارای تحصیلاتی طبق جدول زیر هســتند. احتمال آنکه کارمند آقایی تحصیلات دانشــگاهی داشــته باشد، چقدر است؟

	آقا	خانم
تحصیلات دانشگاهی	۱۵	۱۰
تحصیلات کمتر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

۳. میانگین ده دادۀ آماری ۳۳/۵ اســت. اگــر دو دادۀ ۳۴ و ۴۱ را از آن داده‌ها حذف کنیم، میانگین هشــت دادۀ باقی‌مانده را به‌دست آورید.

۴. در ۶۰ دادۀ آماری، میانگین ۸ و انحراف معیار ۴/۲ محاســبه شده اســت. اگر به تمام داده‌ها ۱۶ واحد اضافه شــود، ضریب تغییرات داده‌های جدید را به‌دست آورید.

حسابان

۱. یک چرخ خودرو در حال حرکت در هر ثانیه ۲ دور می‌چرخد. اگر شعاع چرخ ۳۰ سانتی‌متر باشد و هنگام حرکت میخی به لاستیک آن فرو رود (مبدأ مختصات را روی مرکز چرخ در نظر بگیرید):

الف) پس از طی چه زاویه‌ای میخ به ارتفاع ۱۵ ســانتی‌متری از سطح زمین می‌رسد؟

ب) پــس از اینکه چرخ ۸۷۰° چرخید، میــخ به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد و چرخ خودرو چه مسافتی را طی می‌کند؟

۲. معادلۀ $|x|+\sin x=۱$ در بازۀ $[-\pi,\pi]$ چند جواب دارد؟

۳. می‌دانیم هر تابع و معکــوس آن یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. با اســتفاده از این نکته و یک ابتکار مناسب جواب‌های حقیقی معادلۀ $x=۲(۲-x^۳)^۳$ را به‌دست آورید.

۴. می‌دانیــم: $۷^۴\simeq ۲۴۰۰$، $\log ۲\simeq ۳۰۱$ و $\log ۳=۰/۴۷۷$. در این صورت مقدار تقریبی $\log ۷$ را حساب کنید.

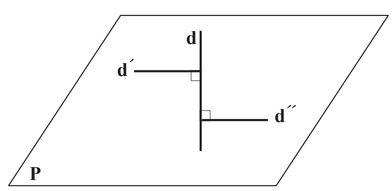
۵. طول ســه ضلع مثلثی ۱، $\log ۲$ و $\log n$ اســت. چند عدد طبیعی به‌جای n می‌تواند قرار گیرد؟

هندسهٔ ۱

۱. این سه خط را $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم: $L_۱$ و $L_۲$ در A، $L_۲$ و $L_۳$ در B و $L_۳$ و $L_۱$ در C متقاطع باشند. از $L_۱$ و $L_۲$ صفحهٔ P می‌گذرد. چون A روی این دو خط قرار دارد، پس: $A\in P$، چون B روی $L_۲$ واقع است، پس: $B\in P$، و چون C روی $L_۱$ است، پس: $C\in P$. بنابراین هر سه نقطهٔ A، B و C روی P هستند. چون از هر یک از سه خط، دو نقطه روی صفحهٔ P است، پس تمام خط هم روی صفحهٔ P است. بنابراین $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ هر سه روی P هستند.

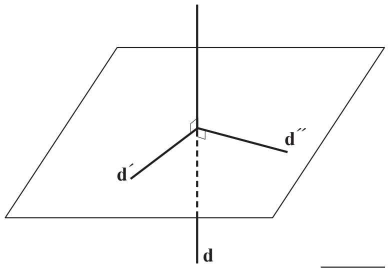
۲. **الف)** اگر A، B، C و D روی یک صفحه نباشند، از سه تا از آن‌ها، مثلاً A، B و C، یک صفحه منحصربه‌فرد مثل P می‌گذرد و: $D\notin P$ پس AB و CD نمی‌توانند در یک صفحه باشند و در نتیجه متنافرند.
ب) اگر AB و CD متنافر باشند، آن‌گاه در یک صفحه نیستند. لذا A، B، C و D هم در یک صفحه قرار ندارند.

۳. اگر d، d´ و d˝ سه خط باشند و داشته باشیم: $d\perp d'$ و $d\perp d''$، آن‌گاه اگر d´ و d˝ در یک صفحه باشند و d هم در همان صفحه باشد، در این حالت داریم: $d'\|d''$ (شکل ۳).



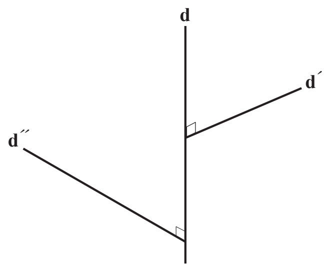
شکل ۳

اما اگر d´ و d˝ در یک صفحه باشند و d در این صفحه نباشد، آن‌گاه d´ و d˝ متقاطع‌اند و d بر صفحه شامل آن‌ها عمود است (شکل ۴).



شکل ۴

حالت سوم این است که d و d´ در یک صفحه نباشند و هر دو بر d عمود باشند که در این صورت متنافرند (شکل۵).



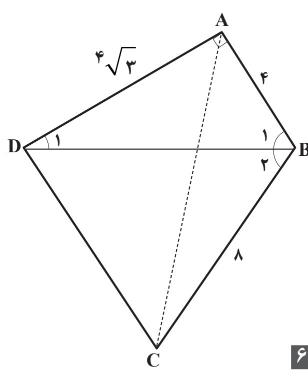
شکل ۵

هندسهٔ ۲

۱. قطر BD را رسم می‌کنیم (شکل۶). در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:

$$BD^۲=AB^۲+AD^۲=۱۶+۴۸=۶۴$$
$$\Rightarrow BD=۸, AB=\frac{BD}{۲}\Rightarrow \hat{D}_۱=۳۰^\circ,\hat{B}_۱=۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}_۲=۶۰^\circ, BD=BC=۸\Rightarrow$$

BCD متساوی‌الاضلاع

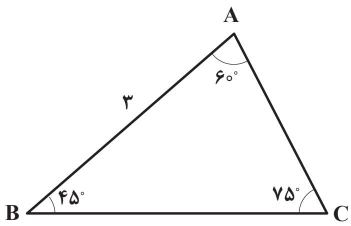


شکل ۶

$$\Rightarrow S_{BCD}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۶۴=۱۶\sqrt{۳},$$
$$S_{ABD}=\frac{AB\times AD}{۲}=\frac{۴\times۴\sqrt{۳}}{۲}=۸\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow S_{ABCD}=۲۴\sqrt{۳}$$
$$\Delta ABC: AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲AB.BC.\cos۱۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow AC^۲=۱۶+۶۴-۲\times۴\times۸\times(-\frac{۱}{۲})=۱۱۲$$
$$\Rightarrow AC=۴\sqrt{۷}$$

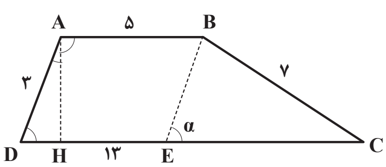
۲.

$$\frac{AB}{\sin ۷۵}=\frac{AC}{\sin۴۵}=\frac{BC}{\sin ۶۰}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$
$$\Rightarrow AC=۳\sqrt{۳}-۳\approx ۲/۱km$$
$$BC=\frac{۹-۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{۹\sqrt{۲}-۳\sqrt{۶}}{۲}\approx ۲/۷km$$



شکل ۷

۳. از B، BE را موازی AD رسم می‌کنیم. ABED متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه: BE=AD=۳، DE=AB=۵ و EC=۱۳-۵=۸. در مثلث BEC به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:



شکل ۸

$$BC^۲=BE^۲+CE^۲-۲BE.CE.\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۴۹=۹+۶۴-۲\times۳\times۸\times\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat D=۶۰^\circ,\hat A=۱۲۰^\circ\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$
$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{۲}\times AH=\frac{۱۳+۵}{۲}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

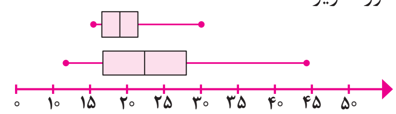
آمار و احتمال

۱. برای هر یک از وسایل داریم:

خودرو: $\min=۱۳, Q_1=۱۸, Q_2=۲۲, Q_3=۲۸, \max=۴۳$

اتوبوس: $\min=۱۶, Q_1=۱۷, Q_2=۱۸, Q_3=۲۱, \max=۳۰$

و نمودار جعبه‌ای برای این دو وسیله به صورت زیر است:



در استفاده از اتوبوس، میانه برابر ۱۸ است، بنابراین در ۵۰ درصد موارد، زمان مسافرت با این وسیله کمتر از ۱۸ دقیقه است. در حالی‌که این عدد برای خودروی شخصی ۲۲ دقیقه است. پس اتوبوس سریع‌تر از خودروی شخصی است. از سوی دیگر، دامنهٔ میان چارکی برای خودرو و اتوبوس عبارت است از:

خودرو: $IQR=Q_3-Q_1=۲۸-۱۸=۱۰$

اتوبوس: $IQR=Q_3-Q_1=۲۱-۱۷=۴$

بنابراین، زمان رسیدن به مقصد برای اتوبوس در ۵۰ درصد موارد کمتر از ۴ دقیقه است، در حالی‌که این زمان برای ماشین شخصی ۱۰ دقیقه است. پس اتوبوس وسیلهٔ نقلیهٔ مطمئن‌تری نسبت به خودروی شخصی است.

۲.

$$\begin{cases} \sigma_1^2=۱۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۵}\sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i-\bar{x})^2=۱۲ \\ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۵}(x_i-\bar{x})^2=۱۸۰ \\ \sigma_2^2=۷/۶ \Rightarrow \frac{۱}{۱۰}\sum_{i=۱}^{۱۰}(y_i-\bar{x})^2=۷/۶ \\ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۱۰}(y_i-\bar{x})^2=۷۶ \end{cases}$$

پس:

$$\sigma^2=\frac{۱}{۲۵}\left(\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{x})^2\right)$$

$$=\frac{۱}{۲۵}(۱۸۰+۷۶)=\frac{۲۵۶}{۲۵} \Rightarrow \sigma=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

۳.

$$\frac{۲\sigma}{۲\bar{x}-۷}=۱/۵\frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{۲}{۲\bar{x}-۷}=\frac{۳}{۲\bar{x}} \Rightarrow \bar{x}=\frac{۲۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x_1+...+x_{۲۰}=۲۰\left(\frac{۲۱}{۲}\right)=۲۱۰$$

۴. الف) فرایند نتیجه‌گیری دربارهٔ پارامترهای جامعه براساس نمونه، «آمار استنباطی» است.

ب) با به‌کارگیری روش‌های نمونه‌گیری مناسب و در نظر گرفتن مشخصات واحدهای جامعه.

۵. الف) مصاحبه؛ ب) دادگان؛ ج) مشاهده.

ریاضی دهم

۱. اگر A پیشامدی باشد که با $\{۱,۳,۵\}$ ناسازگار است، باید داشته باشیم: $A\cap\{۱,۳,۵\}=\varnothing$.

پس: $A\subseteq\{۲,۴,۶\}$ و می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه عبارت است از: $۲^۳-۱=۷$.

۲. اگر A مجموعهٔ عددهای مضرب ۳ و B مجموعهٔ عددهای مضرب ۸ باشند، $A\cap B$ مجموعهٔ عددهای مضرب ۲۴ است و داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۲۳}{۷۰}+\frac{۸}{۷۰}-\frac{۲}{۷۰}=\frac{۲۹}{۷۰}$$

۳.

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۵),(۴,۴),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۶)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$$

۴. الف) کمّی گسسته

ب) کیفی اسمی؛

ج) کمّی پیوسته.

ریاضی ۲ (تجربی)

۱.

$$P(B'|A')=\frac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\frac{P(A\cup B)'}{P(A')}$$

$$=\frac{۱-(P(A)+P(B)-\overbrace{P(A\cap B)}^{P(B|A).P(A)})}{۱-P(A)}$$

$$=\frac{۱-(۰/۲+۰/۲۲-۰/۷\times۰/۲)}{۱-۰/۲}=\frac{۹}{۱۰}$$

۲.

A = پیشامد دارا بودن تحصیلات دانشگاهی

B = پیشامد مرد بودن شخص موردنظر

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱۵}{۱۵+۹۰}=\frac{۱}{۷}$$

۳.

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \Rightarrow ۳۳/۵=\frac{x_1+x_2+...+x_{۱۰}}{۱۰}$$

$$\Rightarrow x_1+...+x_{۱۰}=۳۳۵ \Rightarrow \bar{x}_1=\frac{۳۳۵-(۳۴+۴۱)}{۸}=۳۲/۵$$

۴.

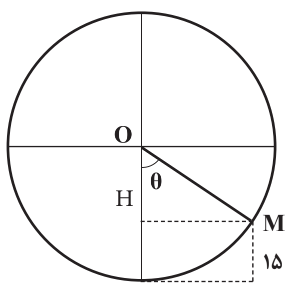
$$\begin{cases}\bar{x}_1=۸ \\ \sigma_1=۴/۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\bar{x}_2=۸+۱۶=۲۴ \\ \sigma_2=\sigma_1=۴/۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow (CV)_2=\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}=\frac{۴/۲}{۲۴}=۰/۱۷۵$$

حسابان ۱

۱. الف)

$$\cos\theta=\frac{OH}{OM}=\frac{۱۵}{۳۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۶۰^\circ$$



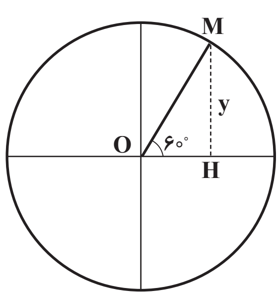
شکل ۱

ب)

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{y}{OM}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{y}{۳۰} \Rightarrow y=۱۵\sqrt{۳}$$

ارتفاع از سطح زمین $=۳۰+۱۵\sqrt{۳}$



شکل ۲

محیــط یک دور چرخ بر اثر چرخیدن برابر $۲\pi\times۳۰=۶۰\pi$ است.

$$۸۷۰^\circ=۲\times۳۶۰^\circ+۱۵۰^\circ$$

حال میزان چرخش ۱۵۰° را برحسب طول محیط دایره به‌دست می‌آوریم:

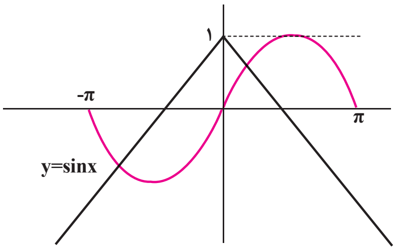
$$\begin{array}{c|c} ۳۶۰^\circ & ۶۰\pi \\ ۱۵۰^\circ & x \end{array} \Rightarrow x=\frac{۱۵۰\times۶۰\pi}{۳۶۰}=۲۵\pi$$

$$\text{مسافت}=۲\times(۲\pi r)+۲۵\pi=۴\pi\times۳۰+۲۵\pi=۱۴۵\pi\,cm$$

۲. نمودار توابــع $y=۱-|x|$ و $y=\sin x$ را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شــکل۳ مشــخص شده اســت، در دو نقطه یکدیگــر را قطع می‌کنند.

لذا معادلهٔ $|x|+\sin x=۱$ دارای دو جواب در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ است.



شکل ۳

۳. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۲-x^۳)^۳=۲-x$$

$$(۲-x^۳)=\sqrt[۳]{۲-x}$$

دو تابــع $y_۱=\sqrt[۳]{۲-x}$ و $y_۲=۲-x^۳$ وارون (معکوس) یکدیگرنــد. برای حل معادلهٔ $y_۱=y_۲$ کافی است معادلهٔ $y_۲=x$ را حل کنیم:

$$۲-x^۳=x$$

$$x^۳+x-۲=۰$$

$$x^۳-۱+x-۱=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)=۰$$

$$(x-۱)(x^۲+x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \\ x^۲+x+۲=۰ \end{cases}$$

($\Delta<۰$ جواب حقیقی ندارد)

۴. می‌توان نوشت:

$$۷^۴\simeq۲۴۰۰=۲^۳\times۳\times۱۰^۲$$

$$\log۷^۴\simeq\log(۲^۳\times۳\times۱۰^۲)$$

$$۴\log۷\simeq۳\log۲+\log۳+۲\log۱۰$$

$$\log۷\simeq\frac{۳(۰/۳۰۱)+۰/۴۷۷+۲}{۴}=۰/۸۴۵$$

۵. شــرط آنکه ســه عدد مثبت a، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند، آن است که:

$$|b-c|<a<b+c$$

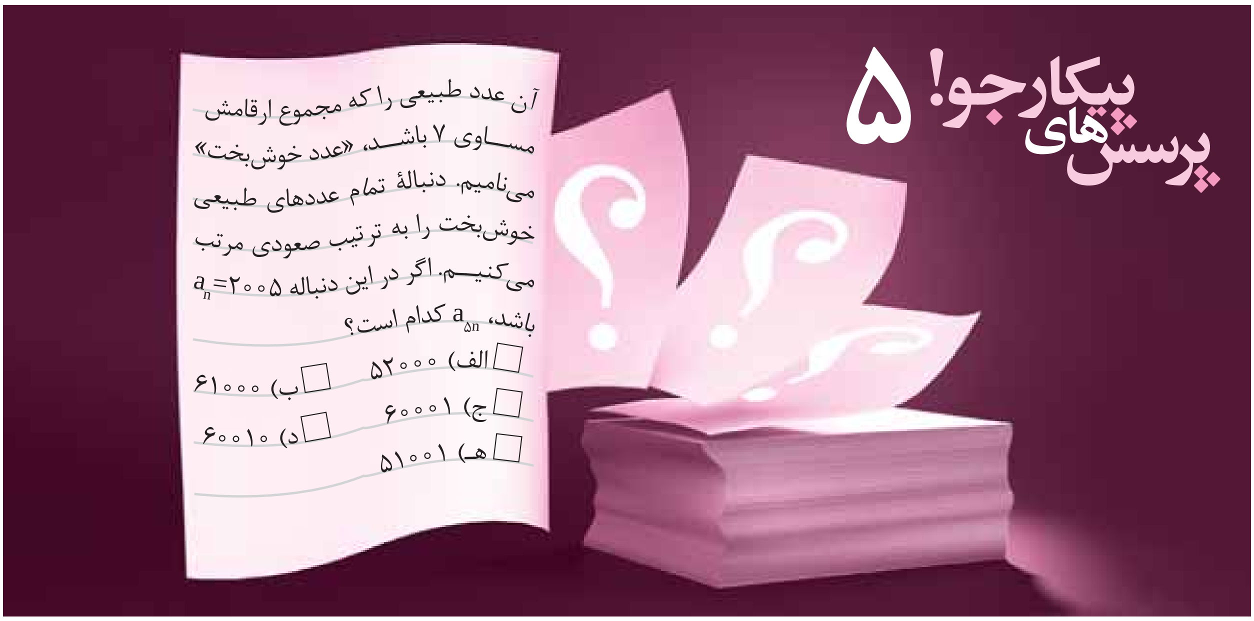
$$|۱-\log۲|<\log n<۱+\log۲$$

$$\log۵<\log n<\log۲۰$$

$$۵<n<۲۰$$

$$n=۶,۷,...,۱۹\Rightarrow$$

۱۴ عدد طبیعی برای n وجود دارد.



پدربزرگ بدبین و نوهٔ فضول!

فرهاد آخرین معمای آن شب را به سبک بقیه و به نقل از پدربزرگش مطرح کرد: «من هم پدربزرگی دارم. پدربزرگم خیلی مهربان است، ولی کمی هم بدبین است. مخصوصاً نسبت به من، چون کمی کنجکاو هستم، بدبین‌تر است و فکر می‌کند که من امانت‌دار نیستم و ممکن است به چیزهایی که مربوط به اوست و وسایل شخصی‌اش سرک بکشم. یک بار او می‌خواست جعبه‌ای در بسته را به من بدهد تا به پدرم برسانم. پدربزرگم چند قفل و کلید هم داشت، ولی به من اعتماد نداشت که در جعبه را با قفل ببندد و کلید آن را به من تحویل دهد تا به پدرم برسانم. پس چه باید می‌کرد؟»

بابک گفت: «اینکه کاری ندارد. می‌توانست در جعبه را با یک قفل ببندد و جعبه را بدون کلید به تو بدهد تا به پدرت برسانی. بعد دوباره پیش او برگردی و کلید آن را به تو بدهد تا برای پدرت ببری».

فرهاد گفت: «اتفاقاً جعبه برای چند قفل جا داشت و می‌توانست به جای یک قفل، چند قفل به آن بزند. ولی مشکل این بود که اصلاً به من اعتماد نداشت و می‌ترسید که جعبه را به خانه ببرم و به پدرم نشان ندهم و بعد که کلید را به دست آوردم، در آن را باز کنم و محتویات آن را ببینیم و بعد دوباره قفل بزنم و به پدرم بدهم!»

کاوه گفت: «عجب پدربزرگ بدبینی داری! پس چه کار کرد؟»

فرهاد گفت: «معمای من هم همین است دیگر! شما بگویید چه کار کرد.»

جمشید گفت: «آن‌قدرها هم که می‌گفتی آسان نیست!»

فرهاد گفت: «آسان است، ولی در عین حال جالب هم هست. اگر کمی فکر کنید، پاسخ آن را می‌یابید. در ضمن این را هم بگویم که پدربزرگم تلفن هم نداشت و هیچ تماسی هم با پدرم نگرفت، ولی به مقصودش هم رسید!»

شما هم می‌توانید بگویید او چگونه به مقصود خود رسید؟!

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱

با معکوس کردن کسرها نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{5}\\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

و با جمع این سه معادله خواهیم داشت:

$$2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{10+4+5}{20}=\frac{19}{20}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{19}{40}$$

و از کم کردن این تساوی از سه معادلهٔ اولیه خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{c}=\frac{19}{40}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{40}\Rightarrow c=-40\\ \frac{1}{b}=\frac{19}{40}-\frac{1}{5}=\frac{11}{40}\Rightarrow b=\frac{40}{11}\\ \frac{1}{a}=\frac{19}{40}-\frac{1}{4}=\frac{9}{40}\Rightarrow a=\frac{40}{9}\end{array}\right\}\Rightarrow 9a+11b+c=40$$

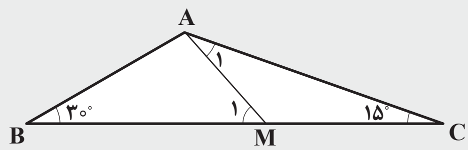
(گزینهٔ هـ)

۲

بدیهی است که $\hat{A}=135^\circ$ و با نوشتن قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AC}{\frac{1}{2}}\Rightarrow BC=\sqrt{2}AC$$
$$\Rightarrow BC^2=2AC^2\Rightarrow BC\times\frac{BC}{2}=AC^2$$
$$\Rightarrow AC^2=MC.BC\Rightarrow \frac{AC}{MC}=\frac{BC}{AC},\hat{C}=\hat{C}$$
$$\Rightarrow \Delta AMC\sim\Delta ABC\Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_1\Rightarrow \hat{A}_1=30^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{C}=45^\circ$$

(گزینهٔ ج)



۳

اگر این عددها را $\overline{xy}$ بنامیم، طبق فرض داریم:

$$\overline{xy}=x^2+y^2+1\Rightarrow 10x+y=x^2+y^2+1$$
$$\Rightarrow x^2-10x+(y^2-y+1)=0$$
$$\Delta=100-4(y^2-y+1)\ge 0$$
$$\Rightarrow y^2-y+1\le 25\Rightarrow y^2-y-24\le 0\Rightarrow y\le 5$$

همچنین برای آنکه $x\in Z$ باشد، لازم است y^2-y-24 مربع کامل باشد که فقط به ازای $y=5$ چنین می‌شود. با این فرض نتیجه می‌شود:

$$x^2-10x+21=0\Rightarrow (x-7)(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x=7 \text{ یا } x=3$$

و دو عدد ۳۵ و ۷۵ با این ویژگی به دست می‌آیند که مجموع آن‌ها مساوی ۱۱۰ است (گزینهٔ ب).

۴

با ساده کردن فرض نتیجه می‌شود:

$$49a-245=41-7b-c\Rightarrow 49a+7b+c=286$$
$$\Rightarrow (abc)_7=286$$

حال کافی است عدد ۲۸۶ را در مبنای ۷ بنویسیم تا a و b و c مشخص شوند:

$$(abc)_7=(556)_7\Rightarrow a=5,b=5,c=6$$
$$\Rightarrow \overline{abc}=556=42\times 13+10\Rightarrow r=10$$

(گزینهٔ ج)

۵

می‌دانیم که تعداد جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $x_1+x_2+...+x_n=m$ برابر است با: $\binom{m+n-1}{m}$، $(x_i\ge 0)$. همچنین اگر شرط $x_i\ge 1$ را داشته باشیم، تعداد جواب‌ها برابر است با: $\binom{m+n-2}{m-1}$ (چرا؟) با توجه به این موضوع تعداد عددهای طبیعی k رقمی خوش‌بخت برابر است با تعداد جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $x_1+x_2+...+x_k=7$ با شرط $x_1\ge 1$ و $x_2,x_3,...,x_k\ge 0$ که برابر است با: $P(k)=\binom{k+5}{6}$. بنابراین: $P(1)=1$ (تنها عدد خوش‌بخت یک رقمی، خود ۷ است)، $P(2)=7$ و $P(3)=28$.

و تعداد عددهای چهاررقمی خوش‌بخت هم که رقم سمت چپ آن‌ها ۱ باشد، برابر است با تعداد جواب‌های نامنفی معادلهٔ سیالهٔ $x+y+z=6$ که می‌شود: $\binom{6+3-1}{6}=28$. و چون ۲۰۰۵ نخستین عدد چهاررقمی خوش‌بخت است که با رقم ۲ شروع می‌شود، پس تا قبل از ۲۰۰۵، به اندازهٔ $P(1)+P(2)+P(3)+28$، یعنی ۶۴ عدد خوش‌بخت وجود دارد و در نتیجه ۲۰۰۵، شصت‌وپنجمین عدد خوش‌بخت است: $a_{65}=2005$. بنابراین مطلوب مسئلهٔ ما a_{325} است. حال داریم:

$$P(4)=\binom{9}{6}=84,\ P(5)=\binom{10}{6}=210,\ \sum_{k=1}^{5}P(k)=330$$

پس کافی است، شش عدد آخر پنج‌رقمی خوش‌بخت را مرور کنیم:

$$a_{330}=70000, a_{329}=61000, a_{328}=60100,$$
$$a_{327}=60010, a_{326}=60001, a_{325}=52000$$

(گزینهٔ الف)

ایستگاه اول

اگر روی کیک اول x شمع قرمز و y شمع آبی چیده شده باشد، و روی کیک دوم z شمع سبز و t شمع زرد قرار داده باشد، طبق مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ z+t=10 \\ 10x+7y=9z+5t \end{cases}$$

و از معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود:

$$7\underbrace{(x+y)}_{8}+3x=5\underbrace{(z+t)}_{10}+4z \Rightarrow 3x+56=50+4z$$

$$\Rightarrow 4z=3x+6 \Rightarrow 4z=3(x+2)$$

بنابراین z باید مضرب ۳ باشد و با توجه به اینکه: $z+t=10$، پس: $z<10$. لذا: ۹ یا ۶ یا ۳$=z$.

به ازای $z=3$ داریم: $x=2$، $y=6$ و $t=7$ از آنجا: $10x+7y=62$.

به ازای $z=6$ داریم: $t=4$ و $x=6$، $y=2$ و: $10x+7y=74$.

و به ازای $z=9$ داریم: $x=10$ که غیرقابل قبول است.

پس پدربزرگ کاوه ۶۲ سال یا ۷۴ سال دارد و با توجه به سن پدرش، تنها جواب قابل قبول ۷۴ سال است.

ایستگاه دوم

✦ اگر سن پدربزرگ $\overline{xy}$ و سن برادربزرگ $\overline{zt}$ باشد، داریم:

$$\overline{xy}=4\overline{zt},\ \overline{tz}=3\overline{yx}$$

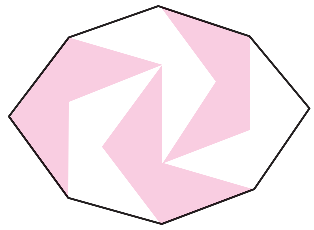
$$\Rightarrow \begin{cases} 10x+y=4(10z+t) \\ 10t+z=3(10y+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+y=40z+4t \\ 10t+z=30y+3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10(x-4z)=4t-y \\ 10(t-3y)=3x-z \end{cases}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $4t-y$ و $3x-z$ هر دو باید مضرب ۱۰ باشند؛ برای مثال: $4t-y=10$ و $3x-z=10$ که از آنجا داریم: $x-4z=1$ و $t-3y=1$ که نتیجه می‌شود: $x=\frac{39}{11}$ که غیرقابل قبول است.

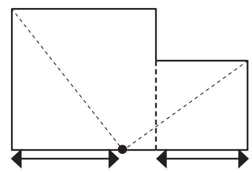
با امتحان کردن مقادیر دیگر نتیجه می‌شود: $4t-y=30$ و $3x-z=20$ و از آنجا داریم: $x-4z=3$ و $t-3y=2$ و در نتیجه: $x=7$، $y=2$، $z=1$ و $t=8$. یعنی پدربزرگ بابک ۷۲ سال و برادرش ۱۸ سال دارد.

✦تقسـیم مناسب چنین اسـت که در شـکل می‌بینید. آیا می‌توانید اندازه‌های زوایای داخلی این شش پنج‌ضلعی هم‌نهشت را به دست آورید؟

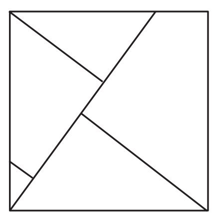


ایستگاه سوم

تقسیم متناسب با شرایط مسئله چنین است:



و از کنار هم قرار دادن این پنج قطع مربع زیر حاصل می‌شود.

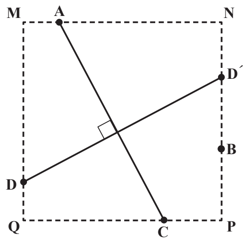


ایستگاه چهارم

این یک مسئله، دشوار هندسـه اسـت! در واقع از هر ضلع یک مربع، یک نقطه در اختیار داریم و می‌خواهیم مربع را رسم کنیم. برای این کار به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

اگر این چهار نقطه A، B، C و D باشند، AC را رسم می‌کنیم. سپس از D عمودی بر آن رسـم می‌کنیم و ´DD را مساوی AC جدا می‌کنیم.

´D را به B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. اولین ضلع مربع روی امتداد D´B است. سـپس از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم تا دو ضلع دیگر مربع به دست آیند و از D بر این دو ضلع عمود می‌کنیم تا مربع رسم شود. علت درستی عمل را بررسی کنید.



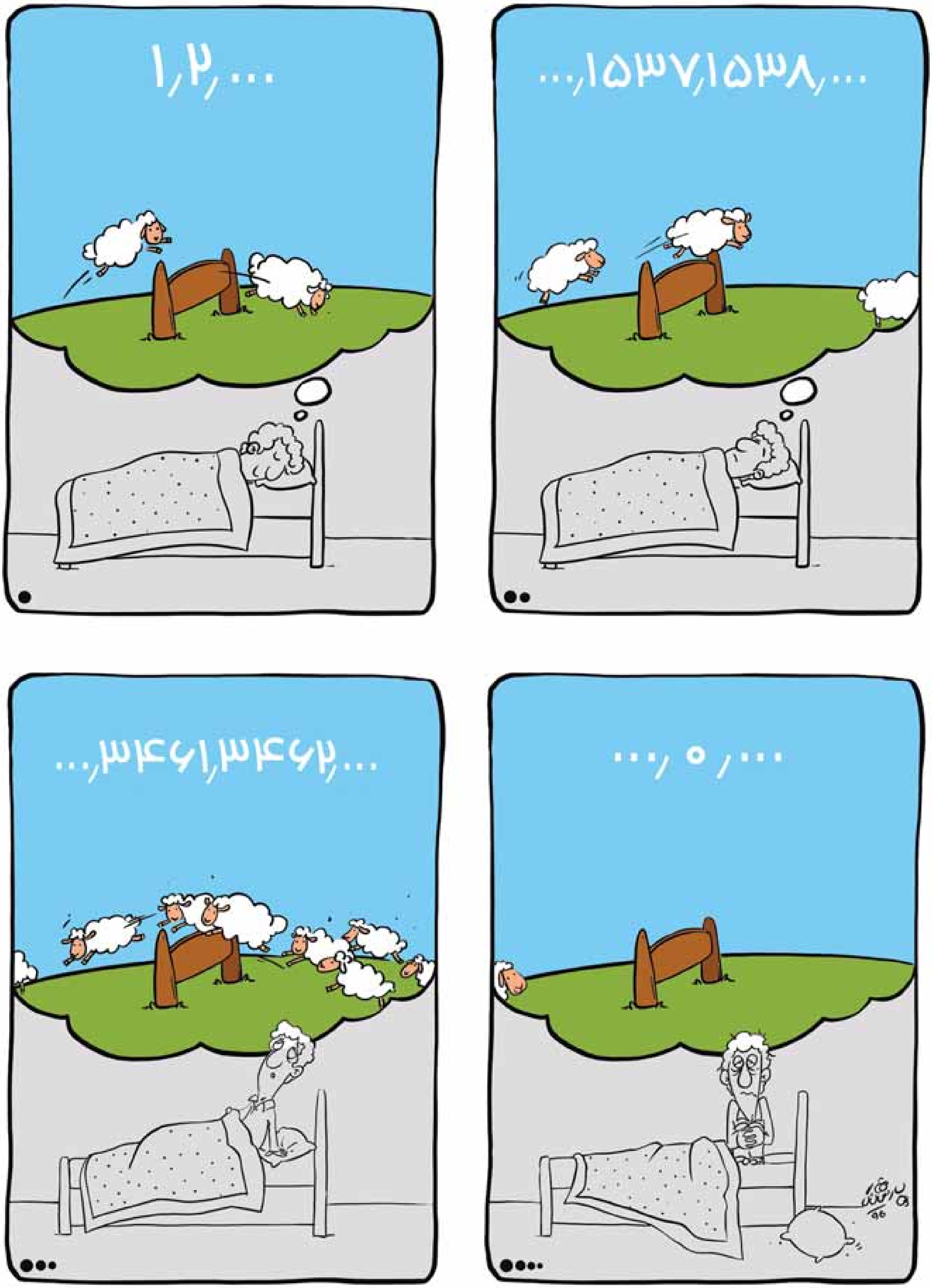
ایستگاه پنجم

مسـئله آسان است! کافی است پدربزرگ فرهاد قفلی بر جعبه بزند و آن را بـه فرهاد بدهد و به او بگوید: «جعبه را پیش پدرت ببر و به او بگو قفلی بر آن بزنـد و آن را برایم بیاور.» بعد از آنکه فرهاد این کار را انجام داد، پدربزرگ قفل خودش را باز می‌کند و به فرهاد می‌گوید: «حالا جعبه را برای پدرت ببر!»

پاسخ جدول ایستگاه اندیشهٔ شمارهٔ ۵:

	۱				۲	۳				۴
				۱	۳	۳	۵	۳	۳	۵
۲	۲	۷	۹	۹	۳	۶				۰
	۵			۳	۸	۲	۱	۱	۶	۰
۴	۸	۶	۶	۴	۳	۸				۰
	۰			۵	۵	۸	۵	۲	۲	۵
۶	۱	۰	۰	۰	۰	۰				

رمز جدول عدد ۳۶۲۸۸۰ است که معادل !۹ است.



طرح از: پرشنگ امانی، دبیر ریاضی شهرستان سقز

ریاضیات دلپذیر

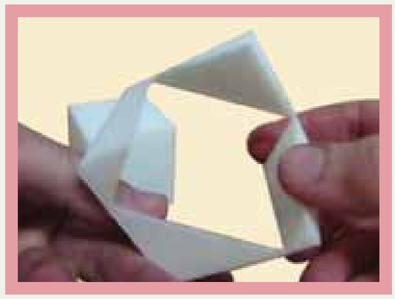
مکعب پرنس روپرت

آیا می‌توان، در یک مکعب چوبی حفره‌ای درست کرد که مکعبی بزرگ‌تر از آن بگذرد؟


پرنس روپرت

این پرسش را نخستین بار به شکلی ساده‌تر، **پرنس روپرت** (۱۶۸۲ ـ ۱۶۱۹) مطرح کرد. او که فرزند شاهزاده **فردریک** آلمانی و شاهزاده **الیزابت** انگلیسی بود، از جوانی به مشاغل نظامی روی آورد. در جنگ‌های بسیاری شرکت کرد و سمت‌های مهم نظامی داشت. در همان حال به کارهای علمی و مهندسی هم علاقه‌مند بود و در این زمینه کارهای زیادی انجام داد. اختراعاتی را هم به نام خود ثبت کرد. به علاوه، نقاش و هنرمند زبردستی هم بود.

جان والیس، ریاضی‌دان انگلیسی (۱۷۰۳ـ ۱۶۱۶) (که شهرت بسیاری دارد و از جمله کارهایش محاسبهٔ تقریبی عدد پی است) نقل می‌کند که پرنس روپرت بر سر این موضوع که: «آیا می‌توان در یک مکعب چوبی



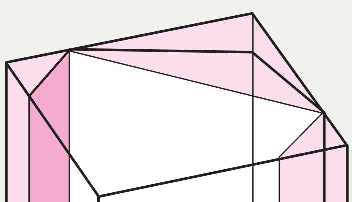
حفره‌ای درست کرد که مکعبی مشابه خودش از آن عبور کند؟» شرط‌بندی کرده بود. او برای اثبات نظر خودش که معتقد بود این کار شدنی است، از والیس کمک خواست. والیس توانست درستی موضوع را (با کمی خطا) اثبات کند و در نتیجه پرنس روپرت برنده شد!

اما تقریباً یک قرن بعد، **پیتر نیولند**، ریاضی‌دان هلندی (۱۷۹۴ ـ ۱۷۶۴) که به **اسحاق نیوتن** هلند معروف است، توانست موضوع را در حالت کلی اثبات کند و نشان داد، حتی مکعبی بزرگ‌تر از مکعب اولیه را می‌توان از آن عبور داد، بدون آنکه مکعب اولیه به دو بخش جدا از هم تبدیل شود. یعنی امکان عبور مکعبی


جان والیس


پیتر نیولند

با ضلع $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ برابر ضلع مکعب اولیه (تقریباً ۶ درصد بیشتر از آن) از درون آن وجود دارد. طرح هندسی این کار در شکل زیر نشان داده شده است و تصویر عملی آن هم دیده می‌شود:



توجه کنید که نقاط روی یال‌های مکعب همگی به‌صورت متقارن، هر یال را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده‌اند.