برهان ریاضی

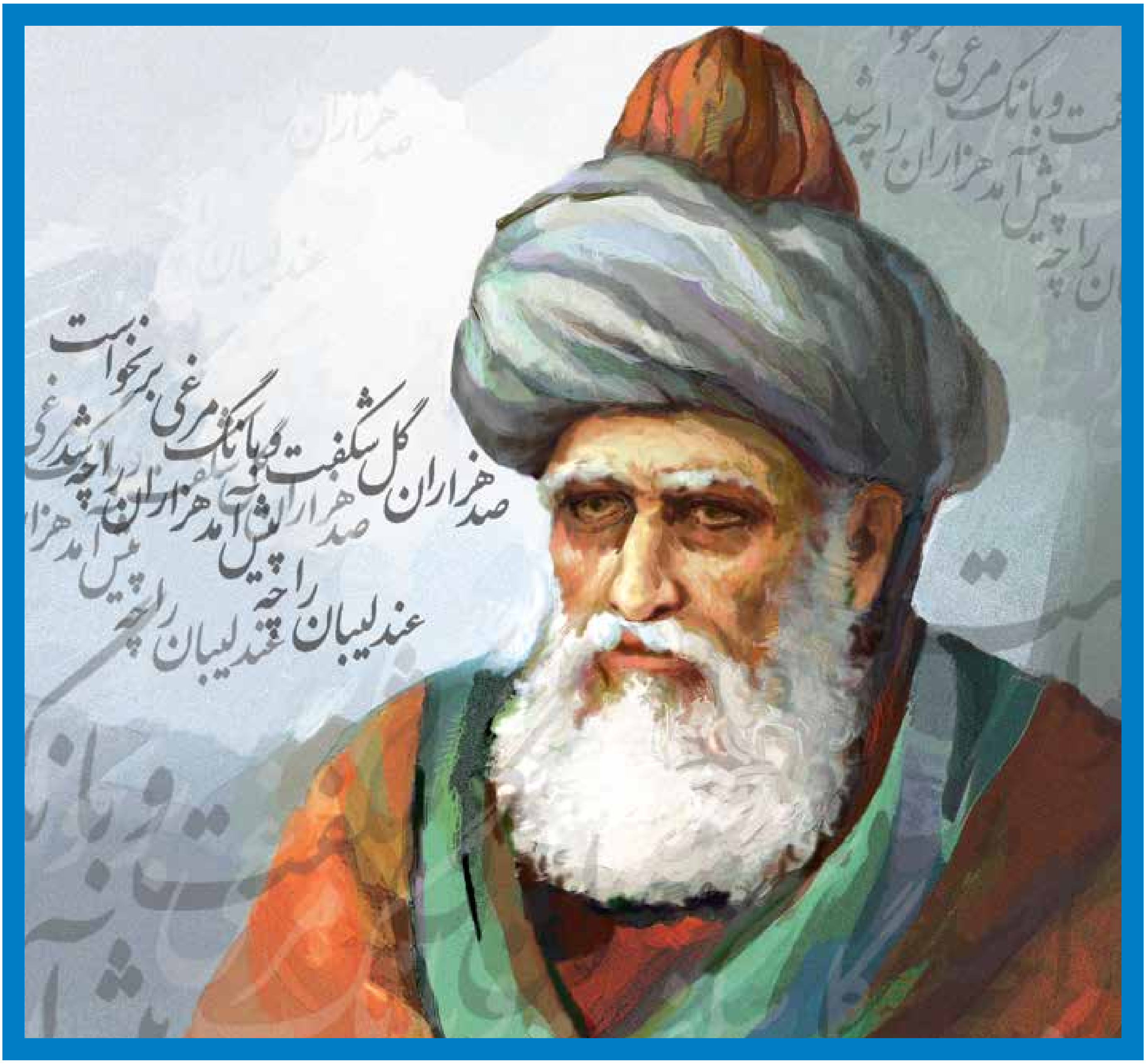
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

■ دورهٔ بیست و هفتم
■ شمارهٔ ۱۰۶
■ دی ۱۳۹۶
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



لئونارد اویلر

احسان یارمحمدی

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ ریاضی «رشد برهان دورهٔ متوسطهٔ دوم» است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان از جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دانان به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. البته در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان موردنظر به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ وی می‌پردازیم. سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

موضوع این قسمت از آلبوم ریاضیات، لئونارد اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی‌دان نام‌دار سوئیسی است که با حل کردن مسئلهٔ پل‌های شهر «کونیگسبرگ» پایه‌گذار دانشی جدید در ریاضیات به نام «نظریهٔ گراف» شد. نقل شده است که اویلر بدون هیچ‌گونه کوشش آشکار به انجام محاسبات ریاضی می‌پرداخت؛ همان‌گونه که عقاب در آسمان پرواز می‌کند و انسان نفس می‌کشد. لئونارد اویلر، فرزند پُل اویلر، به احتمال فراوان برجسته‌ترین دانشمندی است که کشور سوئیس تاکنون به خود دیده است. پدر لئونارد اویلر ریاضی‌دان شایسته‌ای بود و مدت‌ها نزد ژاک برنولی شاگردی کرده بود. او قصد داشت که فرزندش نیز ادامه دهندهٔ راه پدر باشد که این چنین نیز شد.

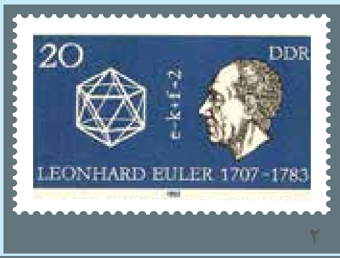
از دستاوردهای اویلر می‌توان موارد زیر را بیان کرد:

الف) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$

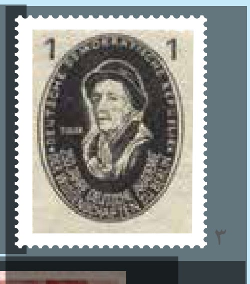
ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$ (مسئلهٔ بازل)

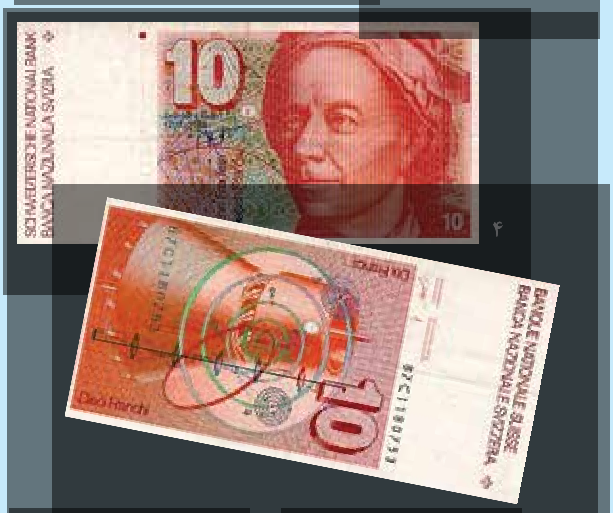
پ) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (فرمول اویلر، i عدد مختلط)

۱



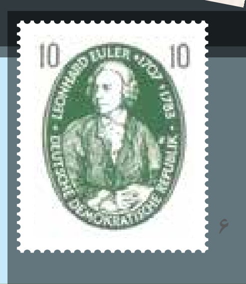
۲


۳



۴

۵



۶

۱. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در اتحاد جماهیر شوروی به مناسبت ۲۵۰ اُمین سال تولد لئونارد اویلر

۲. تمبر منتشر شده در جمهوری دموکراتیک آلمان (آلمان‌شرقی سابق) به مناسبت ۲۰۰ اُمین سال مرگ لئونارد اویلر

۳. تمبر منتشر شده توسط آکادمی علوم جمهوری دموکراتیک آلمان در سال ۱۹۵۰

۴. اسکناس ۱۰ فرانکی سوئیس، مزین به تصویر لئونارد اویلر

۵. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در سوئیس

۶. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در جمهوری دموکراتیک آلمان (آلمان‌شرقی سابق)

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهفتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۶
■ دی ۱۳۹۶
■ شمارهٔ ۴
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
طرح جلد: امیر نساجی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی
آزادبه فرزان
وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

در کلاس درس ریاضی

سال سوم دبیرستان دبیر ریاضی فوق‌العاده‌ای داشتیم. واقعاً سر کلاس ایشان ما فقط ریاضی یاد نمی‌گرفتیم و صرفاً بحث بر سر حل معادله، رسم منحنی، مشتق و انتگرال نبود. بلکه درس زندگی می‌گرفتیم و این فرمول‌ها راهی بود برای اینکه اطلاعاتی را کسب کنیم که به درد زندگی و آینده‌مان بخورد.

یادم می‌آید یک روز در کلاس، ایشان روی تختهٔ سیاه شکل ◇ را کشید و از بچه‌ها پرسید: «بچه‌ها این چهارضلعی چه نام دارد؟»

اکثر بچه‌ها گفتند: «آقا لوزی!»

بعد آقا گفت: «اگر این‌جور می‌کشیدمش چی؟» □

همه گفتند: «این مربع است آقا!»

آقا گفت: «یعنی هر لوزی مربع است؟ یا هر مربعی لوزی است؟»

در واقع آقا مربع را ۴۵ درجه دوران داده بود و بار اول که آن را رسم کرد بیشتر بچه‌ها گفتند لوزی است.

خلاصه آن روز دبیر ما می‌خواست به ما نشان دهد که لزوماً عکس هر قضیه‌ای یک قضیهٔ درست نیست و ممکن است برخلاف تصور ما، یا ظاهرش، درست نباشد. او به ما یاد داد که در زندگی بعضی چیزها برای بعضی موضوعات دیگر شرط لازم‌اند و برای بعضی چیزهای دیگر شرط کافی. (اگر چهارضلعی مربع باشد آن‌گاه لوزی است، لذا مربع بودن برای لوزی بودن کافی است و لوزی بودن برای مربع بودن شرط لازم است.)

بعد سر کلاس از ما می‌پرسید: «بچه‌ها کدام گزاره برای کدام گزاره شرط لازم و کدام شرط کافی است؟

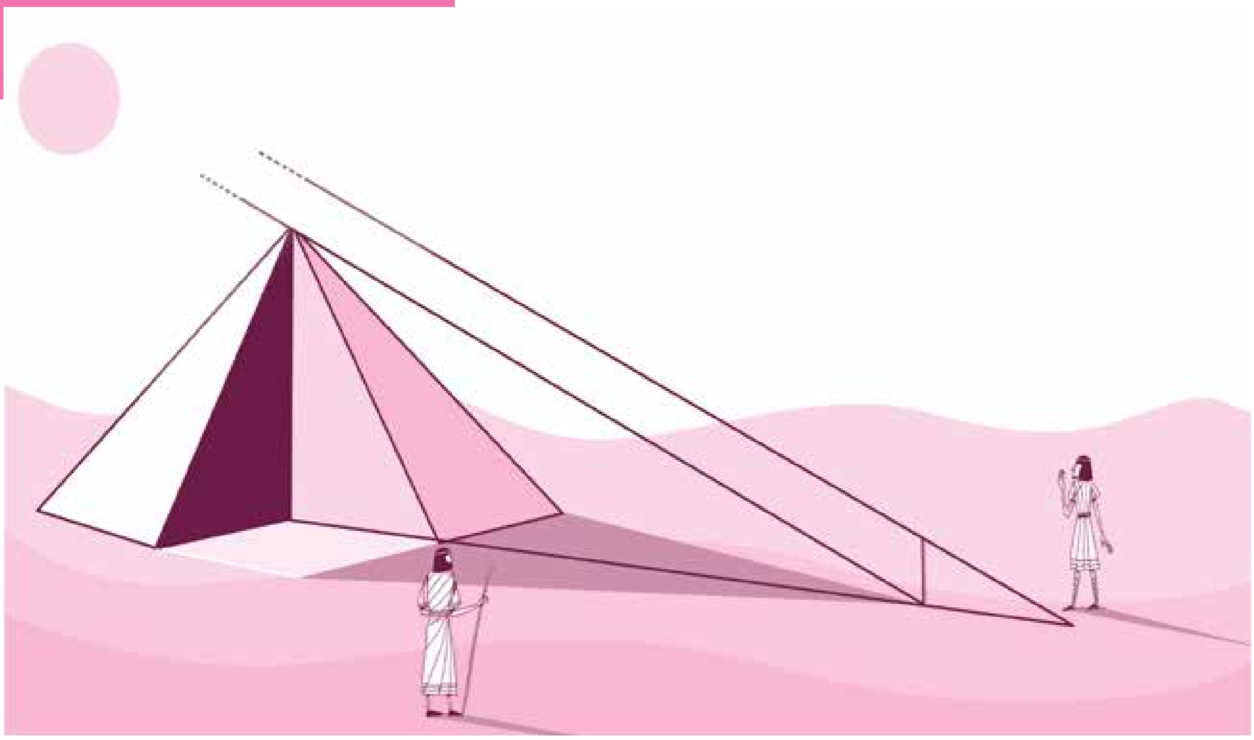
I) خوب درس خواندن برای قبول شدن

II) صادق بودن برای نجات یافتن

III) مسلمان بودن برای نماز خواندن

IV) قانع بودن برای بی‌نیازی»

حمیدرضا امیری
سردبیر



اندازه‌گیری ارتفاع‌های بلند

عباس قلعه‌پور اقدم

دبیر ریاضی ارومیه

اشاره

محاسبهٔ طول‌ها و فاصله‌هایی که در دسترس نیستند و یا فاصله‌هایی که امکان دسترسی برای اندازه‌گیری آن‌ها دشوار است، مانند محاسبهٔ بلندی یک درخت یا ارتفاع یک برج، از جمله کاربردهای قضیهٔ تالس و تشابه شکل‌های هندسی است که در کتاب هندسهٔ دهم به آن پرداخته شده است. در تمرینات فصل دوم از کتاب درسی هندسه، مجموعاً سه روش برای محاسبهٔ ارتفاع یک درخت بلند معرفی شده است. در این مقاله در قالب یک کار عملی، بلندی یک نورافکن و یک درخت را علاوه بر این سه روش با روش چهارمی نیز که به تالس منتسب است، اندازه می‌گیریم.

کلیدواژه‌ها: **اندازه‌گیری، ارتفاع درخت، آموزش هندسه، تشابه شکل‌ها**

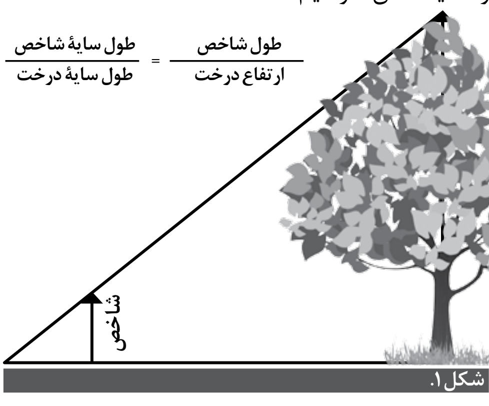
کار عملی: دو روش اول برای اندازه‌گیری ارتفاع درخت و دو روش بعدی برای محاسبهٔ ارتفاع یک نورافکن به‌کار گرفته می‌شوند.

روش اول

اساس کار در روش اول بر قضیهٔ تالس استوار است. چیزهایی که نیاز داریم، عبارت‌اند از: یک روز آفتابی، یک متر ترجیحاً طویل و یک قطعه چوب کوتاه.

در امتداد خط راستی که سایهٔ درخت روی زمین تشکیل داده است، قطعه چوب را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به‌صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود. حال طول سایهٔ درخت و شاخص را هم‌زمان اندازه می‌گیریم. طول شاخص را نیز داریم. با توجه به شکل ۱ و قضیهٔ تالس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{طول شاخص}}{\text{ارتفاع درخت}} = \frac{\text{طول سایهٔ شاخص}}{\text{طول سایهٔ درخت}}$$



شکل ۱.

نتایج کار عملی به شرح زیر بود:

زمان: روز یکشنبه ۹۶/۵/۱، ساعت ۱۱ صبح

طول سایهٔ شاخص = ۷۵ سانتی‌متر

طول سایهٔ درخت = ۶۳۰ سانتی‌متر

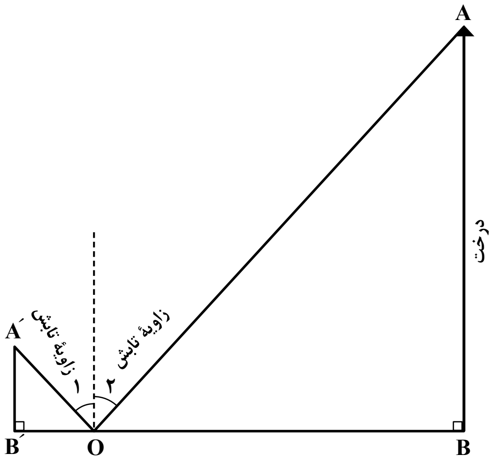
طول شاخص = ۱۰۵ سانتی‌متر

$\Rightarrow \frac{۷۵}{۶۳۰} = \frac{۱۰۵}{h} \Rightarrow h = ۸۸۲$ سانتی‌متر (ارتفاع درخت)

روش دوم

اساس کار روش دوم بر تشابه مثلث‌ها و خواص انعکاس نور و تشکیل تصویر در آینه‌های تخت استوار است. لوازم مورد نیاز عبارت‌اند از: آینهٔ کوچک تخت و متر ترجیحاً طویل.

در فاصلهٔ دلخواهی از پای درخت می‌ایستیم. آینهٔ تخت کوچکی را که در مقیاس بزرگ می‌توان آن را نقطه در نظر گرفت (نقطهٔ O در شکل ۲)، در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودمان کشیده‌ایم، در نقطه‌ای روی زمین قرار می‌دهیم. سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت می‌کنیم تا بتوانیم تصویر نوک درخت را در آینه ببینیم. در این لحظه و به‌عبارت بهتر در این فاصله، طبق خواص تصویر در آینهٔ تخت که زوایای تابش و بازتابش با هم برابرند، اگر یک چشم فرضی در نوک درخت فرض کنیم، آن چشم هم تصویر چشم ما را در آینه خواهد دید. با توجه به شکل ۲ و تشابه مثلث‌ها خواهیم داشت:



شکل ۲.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \\ \hat{B} = \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow$$

مثلث‌های AOB و A´OB´ متشابه‌اند. $\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$

$$\Rightarrow \frac{\text{ارتفاع درخت}}{\text{قد شخص مورد نظر}} = \frac{\text{فاصلهٔ درخت تا آینه}}{\text{فاصلهٔ شخص تا آینه}}$$

با یادآوری این نکته که به‌عنوان قد شخص، در اینجا فاصلهٔ چشمان وی تا زمین محاسبه می‌شود، نتایج کار عملی را که تصویر ۲ مربوط به آن می‌شود، می‌آوریم:

قد شخص = ۱۷۰cm

فاصلهٔ شخص تا آینه = ۱۳۰cm

فاصلهٔ درخت تا آینه = ۶۷۰cm

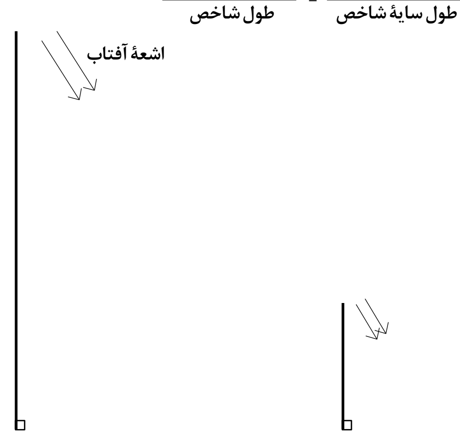
$$\frac{h}{۱۷۰} = \frac{۶۷۰}{۱۳۰} \Rightarrow h = ۸۷۶cm$$

روش سوم

اساس کار در روش سوم بر تشابه مثلث‌ها استوار است و لوازم مورد نیاز عبارت‌اند از: یک روز آفتابی، یک متر ترجیحاً طویل و یک شاخص.

شاخص را به‌صورت عمودی در نقطه‌ای از زمین نزدیک نورافکن محکم می‌کنیم. طول شاخص (فاصلهٔ نوک تا کف زمین) و طول سایهٔ شاخص و نورافکن را هم‌زمان اندازه می‌گیریم. حال با توجه به شکل ۳ و تشابه دو مثلث می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{طول سایهٔ نورافکن}}{\text{طول سایهٔ شاخص}} = \frac{\text{ارتفاع نورافکن}}{\text{طول شاخص}}$$



شکل ۳.

نتایج کار عملی:

طول سایهٔ نورافکن: ۱۵۷۰ سانتی‌متر

طول سایهٔ شاخص: ۶۷ سانتی‌متر

طول شاخص: ۱۰۵ سانتی‌متر

زمان: ساعت ۱۱:۲۰ یکشنبه ۹۶/۵/۱

$$\frac{105}{67} = \frac{x}{1570} \Rightarrow x = 2460$$ سانتی‌متر = ۲۴/۶ متر

روش چهارم

این همان روشی است که تالس برای اندازه‌گیری ارتفاع اهرام مصر از آن استفاده کرد. این روش ساده‌ترین و کم‌خطاترین طریق است و به محاسبات ریاضی نیاز ندارد. البته این محدودیت را دارد که فضای اطراف سازه‌ای که می‌خواهیم ارتفاعش را بسنجیم، باید خالی و آزاد باشد. همچنین علاوه بر یک روز آفتابی، یک متر و یک شاخص، مقداری صبر و شکیبایی هم مورد نیاز است.

در هر موقعیت جغرافیایی در طول یک روز آفتابی دوبار اتفاق می‌افتد که طول سایهٔ جسم با طول خود جسم برابر می‌شود. این دو لحظه، یکی پیش و دیگری بعدازظهر روی می‌دهد که باید آن‌ها را از دست نداد و منتظر فرارسیدن یکی از آن‌ها شد. (این دو زمان مربوط به زاویهٔ تابش ۴۵ درجه‌ای خورشید هستند.)

■ **کار عملی:** شاخص را نزدیک نورافکن در نقطه‌ای از زمین به‌صورت عمودی محکم می‌کنیم. سپس به مرکز شاخص و شعاعی برابر طول آن دایره‌ای روی زمین می‌کشیم و منتظر می‌مانیم تا سایهٔ شاخص به محیط دایره برسد. (طول شاخص با طول سایه‌اش برابر شود.) در این لحظه طول سایهٔ نورافکن را اندازه می‌گیریم. این همان طول یا به‌عبارت دیگر، ارتفاع نورافکن است.

■ **نتایج کار عملی:** در ساعت ۱۶:۴۶ روز یکشنبه ۹۶/۵/۱ در موقعیت جغرافیایی پارک ساحلی ارومیه، طول جسم و طول سایهٔ جسم برابر شدند و طول سایهٔ نورافکن ۲۴/۶۵ متر به‌دست آمد که با عدد به دست آمده از روش سوم، فقط ۵ سانتی‌متر اختلاف داشت. تالس از عصای خود به‌عنوان شاخص استفاده کرده و ارتفاع اهرام مصر را با دقت بالایی محاسبه کرده بود.

ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف و رباعی‌سرای نام‌دار ایرانی

احسان یارمحمدی

اشاره

غیاث‌الدین ابوالفتح عُمَر بن ابراهیم خَیّام نیشابوری زادهٔ ۲۸ اردیبهشت ۴۲۷ در نیشابور و درگذشتهٔ ۱۲ آذر ۵۱۰ در نیشابور، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف و رباعی‌سرای نام‌دار ایرانی است که به واسطهٔ ترجمهٔ رباعیاتش به زبان انگلیسی توسط _ادوارد فیتز جرالد_ و نیز تلاش‌هایش برای حل معادلات درجهٔ ۳ به روش هندسی، شهرتی جهانی یافت. در این مقاله، با معرفی «مستند عُمَر خیام نیشابوری» از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران» به قلم زنده‌یاد _پرویز شهریاری_ (۱۳۹۱ـ۱۳۰۵) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ در «انتشارات علمی و فرهنگی» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و در ادامه مطالبی از مستند مزبور ارائه می‌دهیم.

«اصیل‌ترین خلاقیت‌های این عصر (یعنی پایان سدهٔ یازدهم میلادی) در زمینهٔ ریاضیات صورت گرفت و از اصیل‌ترین چهره‌هایی که این خلاقیت را به او مدیونیم، عمر خیام ایرانی است. از این رو شایسته است، این عصر را، «عصر عمر خیام» بنامیم. او به طبقه‌بندی بسیار شایسته‌ای از معادله‌ها دست زد. از جمله، ۱۳ صورت متفاوت از معادله‌های درجهٔ سوم تشکیل داد. خیام کوشید همهٔ آن‌ها را حل کند و برای برخی از آن‌ها راه‌حل هندسی ارائه داد. در سال ۱۰۷۲ میلادی، یا اندکی پس از آن، به خواهش **سلطان جلال‌الدین سلجوقی**، گاه‌شمار تازه‌ای استخراج کرد که دقت بی‌اندازه‌ای داشت، شاید بسی بیشتر از گاه شماری ما...»

(**جرج سارتون**[۱]، مورخ دانش)

- **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی
- **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی
- **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
- **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی
- **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری
- **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت
- **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
- **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

دربارهٔ خیام بسیار نوشته‌اند، با وجود این دربارهٔ او ابهام‌های زیادی باقی مانده است. به ویژه دربارهٔ دوبیتی‌های او که به «رباعی» مشهورند، دیدگاه‌هایی مطرح شده‌اند که هم‌خوانی ندارند. هنوز هم هستند کسانی که از دو خیام نام می‌برند و خیام شاعر را از خیام دانشمند جدا می‌کنند. کسانی هم خیام شاعر را با خیام ریاضی‌دان و اخترشناس یکی می‌دانند. خیام ۱۸ سال در اصفهان زیست. همان‌جا بود که کتاب «شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» را نوشت. او دوباره به نیشابور برگشت و در سال ۵۲۶ قمری (۱۱۳۱ میلادی)، در سن ۸۳ سالگی درگذشت. کارهای خیام در زمینهٔ ریاضیات بکر و شگفت‌انگیزاند. او برای نخستین‌بار در تاریخ ریاضیات اعلام کرد، معادله‌های درجهٔ سوم را نمی‌توان در هندسه به یاری پرگار و خط‌کش حل کرد. خیام می‌گوید: «برهان‌های این شش صنف، جز به یاری ویژگی‌های مقطع‌های مخروطی، ممکن نیست».

خیام با تقسیم‌بندی معادله‌های درجهٔ سوم، اغلب آن‌ها را به یاری مقطع‌های مخروطی حل کرد و امکان وجود دو جواب را برای معادلهٔ درجهٔ سوم بررسی کرد. ولی دربارهٔ حل معادلهٔ زیر دچار اشتباه شد:

$$x^3=cx+bx^2+a$$

خیام به جواب‌های منفی معادله‌ها توجه نکرد و در ضمن، به سادگی از کنار وجود سه جواب برای معادلهٔ درجهٔ سوم رد شد. او با موفقیت تعریف عدد را به‌عنوان عدد پیوسته به دست داد و در مقاله‌های دوم و سوم «شرح ما اشکل»، ضمن جست‌وجوی مقیاس مشترک برای مقدارهای گنگ، در واقع برای نخستین‌بار، عدد حقیقی را تعریف کرد. از این بابت باید کار خیام را سرآغازی برای پیدایش و تکامل آنالیز ریاضی دانست. او سرانجام به این حکم رسید که هیچ مقداری مرکب از اجزای غیرقابل تقسیم نیست و از نظر ریاضی، می‌توان هر مقداری را به بی‌نهایت بخش تقسیم کرد.

خیام در مقالهٔ اول شرح ما اشکل، ضمن جست‌وجوی راهی برای اصل پنجم اقلیدس دربارهٔ دو خط راست موازی، مبتکر مفهوم عمیقی در هندسه شد. او پاره‌خط راستی را در نظر گرفت و از دو انتهای آن، دو پاره‌خط راست برابر، عمود بر پاره‌خط راست اول رسم کرد. اگر دو انتهای پاره‌خط‌های عمود را به هم وصل کنیم، یک چهارضلعی به دست می‌آید با دو زاویهٔ قائمهٔ مجاور هم و دو ضلع روبه روی برابر (که پیوسته به زاویهٔ قائمه‌اند). خیام این چهارضلعی را «چهارضلعی دو قائمهٔ متساوی‌الساقین» نامید. اگر بتوان ثابت کرد، دو زاویه‌ای که در بالا پیدا می‌شوند قائمه‌اند، مانند این است که اصل اقلیدس، یعنی اصل توازی را ثابت کرده‌ایم.

خیام با استفاده از برهان خلف، برابری این دو زاویه را ثابت کرد. در این مسئله سه حالت وجود دارد: این دو زاویه یا حاده‌اند، یا منفرجه و یا قائمه. او در واقع با استفاده از اصل هم‌ارز اصل توازی، ثابت کرد که این دو زاویه نمی‌توانند حاده یا منفرجه باشند و در نتیجه قائمه‌اند. البته اهمیت کار خیام در جایی دیگر است. در واقع سه حالتی که برای چهار ضلعی دو قائمهٔ متساوی‌الساقین در نظر گرفته است، متناظر با سه هندسهٔ متفاوت‌اند: حالت زاویهٔ قائمه متناظر با «هندسهٔ اقلیدسی»، حالت زاویهٔ حاده متناظر با «هندسهٔ لوباچفسکی» و حالت زاویهٔ منفرجه متناظر با «هندسهٔ ریمانی» است.

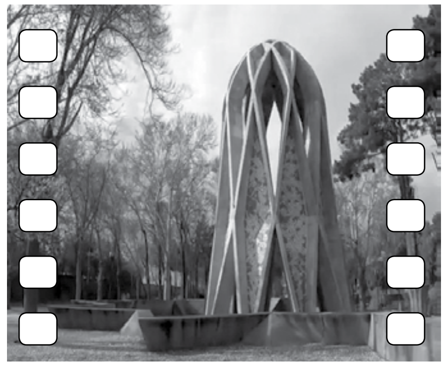
کار خیام به واسطهٔ نوشتهٔ **خواجه نصیر طوسی** به نام «تحریر اقلیدس»، به لاتینی و برخی زبان‌های اروپایی ترجمه شد و ریاضی‌دان ایتالیایی، **جووانی جیرولامو ساکری**[۲] (۱۷۳۳ـ۱۶۶۷) با طرح همین چهارضلعی کوشید تا حالت‌های زاویهٔ حاده و منفرجه را به تناقض بکشاند که البته موفق نشد. کار ساکری آغازی شد برای کارهای بعدی کسانی مانند **گاوس**، **یانوش بایای** و **لوباچفسکی** که نتیجهٔ آن پیدایش «هندسهٔ نااقلیدسی» بود. امروز در بیشتر کتاب‌های تاریخ ریاضیات، از این چهارضلعی به نام «چهارضلعی ساکری» نام می‌برند، در حالی که به حق نام «چهارضلعی خیام» برازندهٔ آن است. از این بابت، باید کار خیام را سرآغازی برای کشف هندسه‌های نااقلیدسی دانست.

نویسندگانی هستند که «مثلث حسابی **پاسکال**» را «مثلث حسابی خیام» یا «مثلث حسابی خیام- پاسکال» می‌نامند. برخی پا را از این فراتر گذاشته‌اند و معتقدند، «بسط دوجمله‌ای **نیوتن**» را باید «بسط دوجمله‌ای خیام» نامید. در این‌باره اندکی بیشتر توضیح می‌دهیم.

همهٔ کسانی که با جبر دبیرستانی آشنایی دارند، «دستور نیوتن» را دربارهٔ بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ می‌شناسند. پاسکال که اندکی پیش از نیوتن می‌زیست، مثلثی عددی ساخت که هر سطر آن معرف ضریب‌های بسط این دو جمله‌ای برای مقدار درست و مثبت n است:

۱						
۱	۱					
۱	۲	۱				
۱	۳	۳	۱			
۱	۴	۶	۴	۱		
۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	
۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱

در این مثلث عددی، از سطر سوم به بعد، هر عدد برابر است با مجموع دو عددی که در سطر پیش، در بالا و سمت چپ آن واقع است. بنابراین، سطرهای این مثلث را می‌توان تا هرجا که لازم باشد، ادامه داد، سطر اول نمایندهٔ ضریب در بسط $(a+b)^0$، سطر دوم معرف ضریب‌ها در بسط $(a+b)^1$، سطر سوم معرف ضریب‌ها در بسط $(a+b)^2$، ...، سطر هفتم نمایندهٔ ضریب‌ها در بسط $(a+b)^6$ و سطر nام نمایندهٔ ضریب‌های بسط $(a+b)^{n-1}$ است. ولی حقیقت این است که ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (برای توان‌های درست و مثبت)، حتی در سدهٔ دوم پیش از میلاد، البته به صورتی کم وبیش ناروشن، برای دانشمندان هندی معلوم بوده است. با وجود این، حق این است که قانون بسط دوجمله‌ای با نام نیوتن همراه باشد؛ زیرا نیوتن حالت کلی این بسط را، وقتی توان بتواند کسری یا منفی باشد، بررسی کرد؛ حالتی که برای بسط، رشته‌ای بی‌پایان به دست می‌آید.



اما دربارهٔ مثلث حسابی و ضریب‌های بسط دوجمله ای، در حالتی که توان مثبت و درست باشد، اندکی تاریخ را بررسی می‌کنیم. برای نمونه، دستور بسط دوجمله‌ای را می‌توان پیش از نیوتن و پاسکال، در کتاب «حساب مخفی» نوشتهٔ **میخائیل اشتیفل**[۳]، جبردان آلمانی، پیدا کرد. اشتیفل کتاب خود را در سال ۱۵۴۴ میلادی چاپ کرد. ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را، برای حالت درست و مثبت بودن توان، در کتاب «مفتاح‌الحسابِ» **جمشید کاشانی** هم می‌توان دید که در سال ۱۴۲۷ میلادی نوشته شده است. بعدها، همین دستور بسط دوجمله‌ای در رساله‌ای از خواجه نصیر طوسی نیز که دربارهٔ محاسبه بحث می‌کند، کشف شد.

طوسی در سدهٔ سیزدهم میلادی می‌زیست. چه جمشید کاشانی و چه طوسی، این قاعده را ضمن بررسی قانون‌های مربوط به ریشه گرفتن از عددها آورده‌اند. همچنین براساس آگاهی‌هایی که داریم، حکیم عمر خیام رساله‌ای نوشته (خود رساله تاکنون پیدا نشده ولی از نام آن و درستی روش‌های هندسی در جذر و کعب آگاهیم) که در آن، به تعمیم قانون‌های هندی دربارهٔ جذر و کعب و برای هر ریشگی دلخواه پرداخته است. بر همین اساس می‌توان اطمینان داشت که خیام هم در نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم میلادی از «دستور نیوتن» و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (برای توان‌های مثبت و درست) آگاه بوده است.

در سال ۱۹۷۲، دو مورخ عرب، **صلاح احمد** و **رشدی راشد**، رساله‌ای از **ابونصر سموأل** فرزند **یحیی مغربی**، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ دوازدهم میلادی را به نام «الباهر فی الجبر» در دمشق چاپ کردند. مغربی مطالبی از رسالهٔ **کرجی** (ابوبکر محمد فرزند حسن حاسب کرجی)، ریاضی‌دان ایرانی پایان سدهٔ دهم و آغاز سدهٔ یازدهم میلادی، و به ویژه آن بخش را که به دستور بسط دوجمله‌ای مربوط می‌شود، نقل کرده است. این رسالهٔ کرجی تاکنون پیدا نشده و مغربی هم نام آن را نیاورده است، ولی به ظاهر باید همان کتاب «فی الحساب الهند» باشد که خود کرجی در کتاب «البدیع فی‌الحساب» خود از آن نام برده است.

به این ترتیب، قانون تعیین ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (و طرح «مثلث حسابی پاسکال») با بررسی هایی که تاکنون انجام شده‌اند، تا سدهٔ دهم میلادی (سدهٔ چهارم هجری) عقب می‌رود و به کرجی ختم می‌شود. بنابراین حتی «مثلث حسابی پاسکال» را هم، از نظر تقدم تاریخی نمی‌توان «مثلث حسابی خیام» نامید.

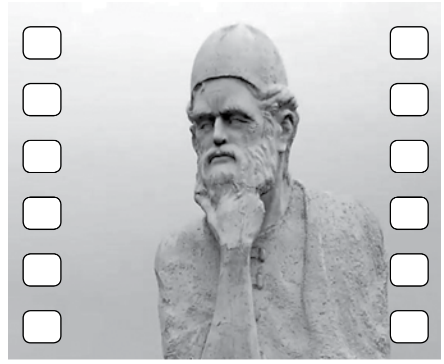
***

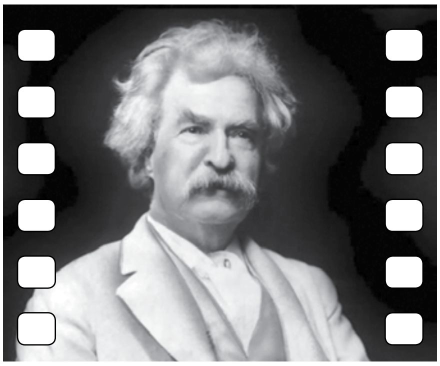
«گرفتار روزگاری هستم که از اهل قلم فقط شمار اندکی مانده که به هزاران ستم و سختی دچارند و پیوسته در اندیشه هستند که اگر فرصتی فراهم آید، به پژوهش در علم و استوار کردن آن بپردازند و بیشتر عالم‌نمایان زمان ما حق را جامهٔ باطل می‌پوشند و گامی از مرز خودنمایی و تظاهر به دانایی فراتر نمی‌نهند.»

«رسالهٔ فی براهین مسایل الجبر و المقابله» خیام

حکیم ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیامی نیشابوری، معروف به «خیام»، فیلسوف، ریاضی‌دان، منجم، نویسنده و شاعر بزرگ ایران در اواخر قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری برابر با اواخر قرن یازدهم و اوایل قرن دوازدهم میلادی است. خیامی لقب دیگر خیام، شاعر و فلکی ایران است. علمای عصر وی، او را گاه امام، گاه حکیم، حجت‌الحق و فیلسوف می‌نامیده‌اند. ولی شهرت فوق‌العاده‌ای که در شرق و در این اواخر در اروپا و آمریکا به‌دست آورده، بیشتر، و یا فقط، به واسطهٔ رباعیات حکمت‌آمیزی است که در اوقات فراغت و تفریح‌خاطر می‌سرود و سایر فضائل و اوصاف او تحت‌الشعاع شعر مخفی مانده است. خیام زندگی‌اش را با عنوان ریاضی‌دان و فیلسوفی شهیر سپری کرد، در حالی که معاصرانش از ریاعیاتی که امروزه مایهٔ شهرت و افتخار او هستند، بی‌خبر بودند. معاصران خیام نظیر **نظامی عروضی** یا **ابوالحسن بیهقی**، از شاعری خیام یاد نکرده‌اند. علت شهرت اولیه خیام درست معلوم نیست. احتمالاً پدرش خیمه‌دوز بوده است. شرح زندگی او نیز با روایات افسانه آمیز مخلوط شده است. او به شهرهای گوناگون سفر کرد. به بلخ، اصفهان و بغداد رفت و احتمالاً سفری نیز به حج داشته است. به موجب این روایات، در کودکی با **خواجه نظام‌الملک** و **حسن صباح** هم شاگرد بوده است.

خیام با همه فرزانگی، مردی تندخو بوده و در حقیقت احوال وجود تردید داشته است. به همین سبب مورد کینهٔ مردم ظاهربین قرار می‌گرفت. او پرگویی را دوست نمی‌داشت و نه





به تألیف کتاب‌های دشوار علاقه داشت و نه به رباعیات. احتمال دارد که به سبب اشتغال به علم و حکمت تا حدی شاعری را دون شأن خویش می‌دانست و در قدیم نیز شهرت او به شاعری نبوده است. شهرت فوق‌العادهٔ خیام در دوران اخیر، چه در ایران و چه در جهان، تا حد زیادی مدیون ترجمهٔ معروف انگلیسی **ادوارد فیتز جرالد**[۴] است که خیام را در اروپا به عنوان یکی از گویندگان بزرگ عالم مشهور کرد. ترجمهٔ رباعیات او به زبان‌های گوناگون، از جمله فرانسوی، ایتالیایی، روسی و عربی مکرر چاپ شده است. این در حالی است که بسیاری از پژوهشگران، شماری از شعرهای ترجمه شده به وسیلهٔ فیتزجرالد را سرودهٔ خیام نمی‌دانند و این خود سبب تفاوت‌هایی در شناخت خیام در نگاه ایرانی‌ها و غربی‌ها شده است. تأثیرات خیام بر ادبیات غرب از **مارک تواین**[۵]، نویسندهٔ آمریکایی تا **تی‌اس‌الیوت**[۶]، شاعر انگلیسی ـ آمریکایی، او را به نماد فلسفهٔ شرق و شاعر محبوب روشن‌فکران جهان تبدیل کرده است.

از میان آنچه از نوشته‌های خیام باقی است یا آنچه مورخان آثار او دانسته‌اند، می‌توان به این عنوان‌ها اشاره کرد:

- «رساله‌ای در جبر» که **وُپکه**، پژوهشگر تاریخ علم آلمانی, متن عربی آن را به انضمام ترجمهٔ فرانسوی در سال ۱۸۵۱ در پاریس به چاپ رساند.
- «رساله‌ای بر کتاب **اقلیدس**» که در «کتابخانهٔ لیدن» در هلند محفوظ است.
- «زیج ملکشاهی» که خیام یکی از مؤلفان آن بوده است.
- رساله‌های متعدد دیگری که در موزه‌های انگلیس و کتابخانهٔ **گوته** آلمان نگهداری می‌شود.
- و نیز رباعیات او که امروز در دسترس همگان است.

خیام در پیشبرد علوم، به‌خصوص در علوم نجوم سرآمد زمان خود بود و در احکام نجوم نظر او را مسلم می‌داشتند. در کارهای بزرگ علمی، از قبیل ترتیب رصد و اصلاح تقویم و نظایر این امور، به او رجوع می‌کردند و او خود پزشک و منجم دربار ملکشاهی بوده است. از جمله کارهای او تنظیم رصدی با همکاری ابوالعباس لوکری و ابوالفتح خازنی به امر ملکشاه سلجوقی بود. در زمان سلجوقی، احتمالاً به اشارهٔ **خواجه نظام‌الملک**، تصمیم گرفته‌اند که به نابسامانی تقویم پایان دهند و از این‌رو حکیم عمر خیام نیشابوری مأمور شد به همراه گروهی از منجمان برجسته محاسبات جدیدی را ترتیب دهند. همچنین **عبدالرحمن [ابوالفتح] خازنی**، یعنی خدمتکار خزانه‌دار مرو که به شکل غیرحرفه‌ای و بنابر علائق شخصی به پژوهش دربارهٔ تقویم سرگرم بود، در شهر مرو محاسبات جداگانه‌ای را به انجام رساند و یافته‌های علمی خود را، از جمله شیوهٔ سنجش نوروز را برای گروه خیام فرستاد. بخشی از محاسبات خازنی از سوی گروه پذیرفته و به رسمیت شناخته شد.

تنظیم گاه‌شمار جلالی و زیج پیوسته به آن که «زیج ملکشاهی» خوانده شد، به احتمال زیاد در شهر اصفهان، پایتخت سلجوقیان، و بنابر گفته‌ای دیگر، در ری یا نیشابور آغاز شد. تقویم دقیقی هم که حاصل کار این گروه بود، به نام شاه زمانه، ملکشاه سلجوقی «تقویم جلالی» خوانده شد، نه تقویم خیامی. امروزه در تقویم ایرانی یا همان جلالی، بهار و تابستان هر کدام ۹۳ روز است. فصل پاییز ۹۰ روز دارد و زمستان ۸۹ روز حساب می‌شود. این تفاوت‌ها برای آن است که اول هر فصل عرضی، دقیقاً برابر با آغاز فصل حقیقی باشد.

تاریخ تأسیس تقویم جلالی روز جمعه نهم رمضان سال ۴۷۱ هجری قمری بود. تقویمی که هزار سال پس از او هنوز به کار می‌آید و ارزش و اعتبارش کاستی نگرفته است. وقتی که خیام آمد، گاه‌شماری ایران با همهٔ پیشینهٔ درخشانی که داشت، پریشان بود و وقتی رفت ایرانیان مفتخر به داشتن دقیق‌ترین تقویم جهان بودند.

نه فقط در آن زمان که تا به امروز، وفات عمر خیام را اغلب نویسندگان اروپایی در سال ۴۷۵ هجری شمسی دانسته‌اند. قدر مسلم این است که عمر طویلی، در حدود ۹۰ سال کرده است. عمر خیام در نیشابور و در جوار **امامزاده محمد محروق** دفن شد. هنگامی که برای نخستین بار پای بشر به کرهٔ ماه رسید، دو حفره از کرهٔ ماه را یکی به نام عمر خیام و دیگری را به نام ابوریحان بیرونی نام‌گذاری کردند.

پی‌نوشت‌ها

1. George Sarton
2. Giovanni Girolamo Saccheri
3. Michael Stifel
4. Edward FitzGerald
5. Mark Twain
6. T. S. Eliot

بررسی هندسی شکل ستارهٔ منتظم

علیرضا حقّی
دانش‌آموز دورهٔ
پیش‌دانشگاهی
دبیرستان فرهنگ دهخدا

مقدمه

انسان از دیرباز، با ساخت بناها و اشیای گوناگون، علاقهٔ وافر خود را به زیبایی محیط پیرامونش نشان داده است. هندسه علمی است که بیشترین کمک را به وی، برای تحقق این هدف کرده است. دو مفهوم اساسی در هندسه، یعنی محیط و مساحت، بیشترین کاربرد را در ساخت اشیا، به‌خصوص بناها در زندگی آدمی ایفا کرده‌اند. با تعریف شکل‌های جدید، هندسه نیز تقویت شد و لازم بود محیط مساحت آن‌ها نیز محاسبه شود. شکل‌های هندسی گوناگونی وجود دارند که در این بین، برخی در دسته‌های معینی جای می‌گیرند. یکی از این دسته‌ها، دستهٔ «ستارگان منتظم» است که قوانین و نظام جالبی دارد. در این مقاله، نویسنده کوشیده است فرمول‌هایی جامع و ساده برای محاسبهٔ محیط و مساحت ستاره‌های منتظم ارائه دهد.

تعریف و توضیح

در این بخش، ابتدا به تعریف شکل ستاره می‌پردازیم و سپس به نکات و توضیحات اشاره خواهیم کرد.

■ **تعریف:** به شکل حاصل از امتداد اضلاع یک «nضلعی محدب منتظم»، «ستارهٔ منتظم n پَر» می‌گویند. به عبارت دیگر، سطح ایجاد شده از برخورد امتدادهای اضلاع یک nضلعی محدب و منتظم، ستارهٔ منتظم n پر نام دارد.

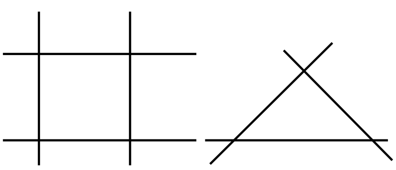
nضلعی محدبی که ستاره از امتداد اضلاع آن به‌دست می‌آید nضلعی مولد آن ستاره نام دارد. لازم به ذکر است که ستاره، برخلاف nضلعی مولدش که محدب است، شکلی مقعر دارد. به هر یک از مثلث‌هایی که از برخورد امتدادهای اضلاع nضلعی به‌وجود می‌آیند، یک پر ستاره می‌گوییم.

نکتهٔ دیگر اینکه تعداد پرهای هر ستارهٔ منتظم، با تعداد اضلاع چندضلعی مولدش برابر است. البته باید توجه کرد که تعداد اضلاع هر ستارهٔ n پر، برابر با ۲n است؛ یعنی تعداد اضلاع ستارگان منتظم، دو برابر تعداد پرهایشان است.

مطابق تعریف بالا، برای اینکه ستاره‌ای منتظم باشد، می‌باید nضلعی مولدش نیز منتظم باشد. بنابراین، ستارهٔ منتظم ۵ پر نمی‌تواند حاصل امتداد اضلاع یک پنج‌ضلعی نامنتظم باشد.

با توجه به توضیحات فوق، می‌توان دریافت که از امتداد اضلاع مثلث و مربع، هیچ سطح منتظمی پدید نمی‌آید. بنابراین در این مقاله که بحث حول ستاره‌های منتظم است، n باید عدد صحیح بزرگ‌تر از چهار باشد.

پس می‌توان گفت ساده‌ترین ستارهٔ منتظم، «ستارهٔ منتظم ۵ پر» است.



شکل ۱.

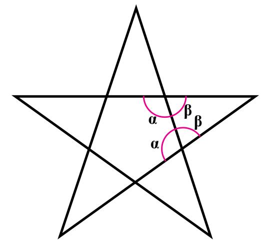
■ **قضیهٔ یک:** طول همهٔ اضلاع در هر ستارهٔ منتظم با یکدیگر برابر است.

■ **اثبات:** با توجه به اینکه در هر nضلعی محدب منتظم، علاوه بر اضلاع، اندازهٔ تمام زاویه‌های داخلی نیز با یکدیگر برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که اندازهٔ زاویه‌های مکمل آن‌ها (زاویه‌های خارجی n ضلعی) نیز با یکدیگر برابر است:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^\circ\\ \alpha+\gamma=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=\gamma$$

از برابر بودن دو زاویهٔ هر رأس نتیجه می‌گیریم که هر پر ستاره، مثلثی متساوی‌الساقین است، بنابراین ساق‌های

مثلث که اضلاع ستاره را تشکیل می‌دهند، دارای طول‌های یکسان هستند.

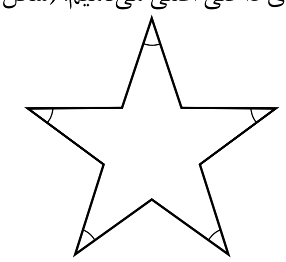


شکل ۲.

زاویه‌های داخلی ستارهٔ منتظم

در هر ستارهٔ منتظم دو نوع زاویهٔ داخلی وجـود دارد که در این مقالـه نام نوع اول را «زاویهٔ داخلی اصلی» و نام نوع دیگر را «زاویهٔ داخلی فرعی» می‌گذاریم.

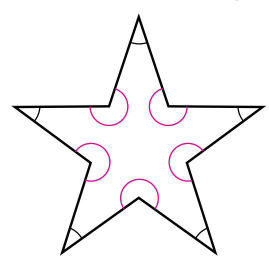
زاویه‌های مشخص شـده در این ستارهٔ ۵ پـر منتظـم، زاویه‌هـای داخلـی اصلی هستند. بنابراین زاویه‌های حاصل از برخورد امتدادهای اضلاع چندضلعی مولد سـتاره را زاویه‌های داخلی اصلی می‌نامیم. (شکل ۳)



شکل ۳.

زاویه‌های مشخص شده در ستارهٔ شکل ۴ داخلی فرعی هستند.

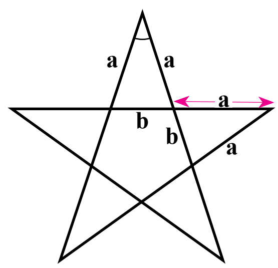
از ایـن تحلیل می‌توان نتیجه گرفت که هر ستارهٔ n پر منتظم، n زاویهٔ داخلی اصلی و n زاویهٔ داخلی فرعی دارد و در مجموع ۲n زاویهٔ داخلی دارد.



شکل ۴.

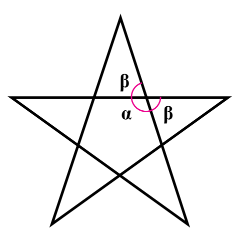
نکتـهٔ مهـم دیگـر این اسـت که در سـتاره‌های منتظم، اندازهٔ تمـام زاویه‌های داخلی اصلی با هم، و تمام زاویه‌های داخلی فرعـی با هم برابرند. اثبـات آن را در ادامه مشاهده می‌کنید.

از آنجا که در سـتاره‌های منتظم طول تمام اضلاع با هم برابر اسـت (طبق قضیهٔ یک) و نیـز n ضلعی‌های مولد آن‌ها منتظم هستند و طول تمام ضلع‌هایشان با یکدیگر برابرند، پرهای ستاره (مثلث‌های کناری) به حالت تساوی سه ضلع، با یکدیگر هم‌نهشت می‌شـوند. بنابرایـن زوایـای متناظر این مثلث‌ها، یعنی زوایای داخلی اصلی سـتاره نیز با یکدیگر برابر می‌شوند.



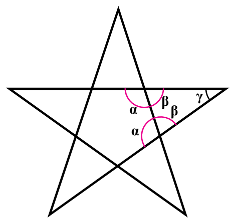
شکل ۵.

می‌دانیـم در n ضلعی‌هـای منتظـم محدب، عـلاوه بر طـول ضلع‌هـا، اندازهٔ زاویه‌های داخلی نیز با یکدیگر برابر اسـت. مطابق شـکل ۶، اندازهٔ تمـام زوایای پهن بـا یکدیگر برابر و هر کـدام برابر با $\alpha+۲\beta$ است.



شکل ۶.

در ادامـه، اندازهٔ زاویه‌هـای مذکور را برحسـب تعداد پرهای سـتاره به‌دسـت می‌آوریـم: از آنجا که فرمول کلی زاویه‌های داخلـی هـر n ضلعـی محـدب چنیـن است:



شکل ۷.

داریم:

$$\alpha=\frac{(n-۲)۱۸۰^{\circ}}{n}$$

$$\alpha+\beta=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow\beta=۱۸۰^{\circ}-\alpha\xrightarrow{\text{به کمک رابطهٔ بالا}}$$

$$\beta=۱۸۰^{\circ}-\frac{(n-۲)۱۸۰^{\circ}}{n}=۱۸۰-\frac{۱۸۰n-۳۶۰}{n}$$

$$=۱۸۰-۱۸۰+\frac{۳۶۰}{n}=\frac{۳۶۰}{n}$$

و طبق فرمول مجموع زاویه‌های داخلی مثلث:

$$\beta+\beta+\gamma=۱۸۰\Rightarrow\gamma=۱۸۰-۲\beta\Rightarrow\gamma=۱۸۰-\frac{۷۲۰}{n}$$

که زاویـهٔ γ در واقع همان زاویهٔ داخلی اصلی در ستارهٔ منتظم است. حال به محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ داخلی فرعی می‌پردازیم:

همان‌طور که در توضیـح زاویهٔ داخلی فرعی در بالا ذکر شد، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی فرعی برابر است با: $\alpha+۲\beta$ و داریم:

$$\theta=\alpha+۲\beta=\frac{(n-۲)۱۸۰}{n}+۲(\frac{۳۶۰}{n})=۱۸۰-\frac{۳۶۰}{n}+\frac{۷۲۰}{n}$$

$$=۱۸۰+\frac{۳۶۰}{n}=\frac{(n+۲)۱۸۰}{n}$$

و نیز همان‌طور که در بالا ذکر شد، هر ستارهٔ منتظـم از n زاویهٔ داخلی اصلـی و n زاویهٔ داخلی فرعی تشـکیل شده اسـت. بنابراین مجموع تمـام زاویه‌های داخلی هر سـتارهٔ منتظم برابر است با:

$$n\gamma+n\theta=n(۱۸۰-\frac{۷۲۰}{n})+n(\frac{(n+۲)۱۸۰}{n})$$

$$=۱۸۰n-۷۲۰+۸۰n+۳۶۰$$

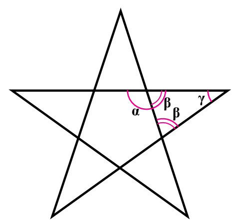
$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای داخلی}=n\gamma+n\theta=(n-۱)۳۶۰^{\circ}$$

یافتن محیط و مساحت

در بخش قبل دیدیم که اندازهٔ زاویه‌های داخلـی تنگ با یکدیگر و انـدازهٔ زاویه‌های داخلی پهـن نیز با یکدیگر برابر اسـت. در ایـن بخش، برای یافتن مسـاحت سـتارهٔ

n پر منتظم، مساحت‌های n ضلعی مولد و n مثلث کناری ستاره (پر) را به‌دست می‌آوریم و با یکدیگر جمع می‌کنیم. پس ابتدا اندازهٔ هر کدام از زاویه‌های تنگ را که برای محاسبهٔ مساحت n ضلعی مولد لازم است، محاسبه می‌کنیم.

می‌دانیم که اندازهٔ هر کدام از زاویه‌های داخلی یک n ضلعی منتظم، از رابطهٔ $\frac{180\,(n-2)}{n}$ به‌دست می‌آید. بنابراین مطابق شکل ۹، اندازهٔ زاویهٔ α برابر با $\frac{180\,(n-2)}{n}$ خواهد بود. از آنجا که زاویه‌های α و β مکمل یکدیگرند، اندازهٔ زاویهٔ β برابر با ۱۸۰-α و به‌طور دقیق‌تر برابر با $\frac{360}{n}$ خواهد شد. اما زاویه‌ای که برای ما اهمیت دارد، زاویهٔ γ است. چون مجموع زوایای داخلی در هر مثلث مساوی ۱۸۰° است، اندازهٔ γ از رابطهٔ $180-\frac{720}{n}$ به دست می‌آید.



شکل ۸.

همچنین مساحت هر n ضلعی محدب منتظم از رابطهٔ $\frac{nb^4}{4\tan\frac{180}{n}}$ به‌دست می‌آید که در آن، b طول ضلع n ضلعی و n تعداد اضلاع آن است. این رابطه مساحت n ضلعی را برحسب طول ضلع n ضلعی به‌دست می‌دهد، ولی ما می‌خواهیم مساحت ستاره را برحسب طول ضلع ستاره حساب کنیم. بنابراین می‌باید طول ضلع n ضلعی را برحسب طول ضلع ستارهٔ n پر منتظم به‌دست بیاوریم.

برای به‌دست آوردن رابطهٔ a و b می‌توانیم از قانون کسینوس‌ها استفاده کنیم:

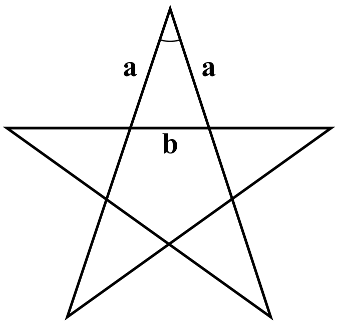
$$b^2=a^2+a^2-2\times a\times a\times\cos\gamma$$

در این صورت، مساحت n ضلعی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A_{\text{ضلعی منتظم محدب}}=\frac{na^2(1-\cos\gamma)}{2\tan\frac{180}{n}}$$

مساحت‌های هر کدام از مثلث‌های کناری را نیز می‌توان به روش زیر محاسبه کرد:

$$A_{\text{یک مثلث}}=\frac{1}{2}a\times a\times\sin\gamma=\frac{1}{2}a^2\sin\gamma$$



شکل ۹.

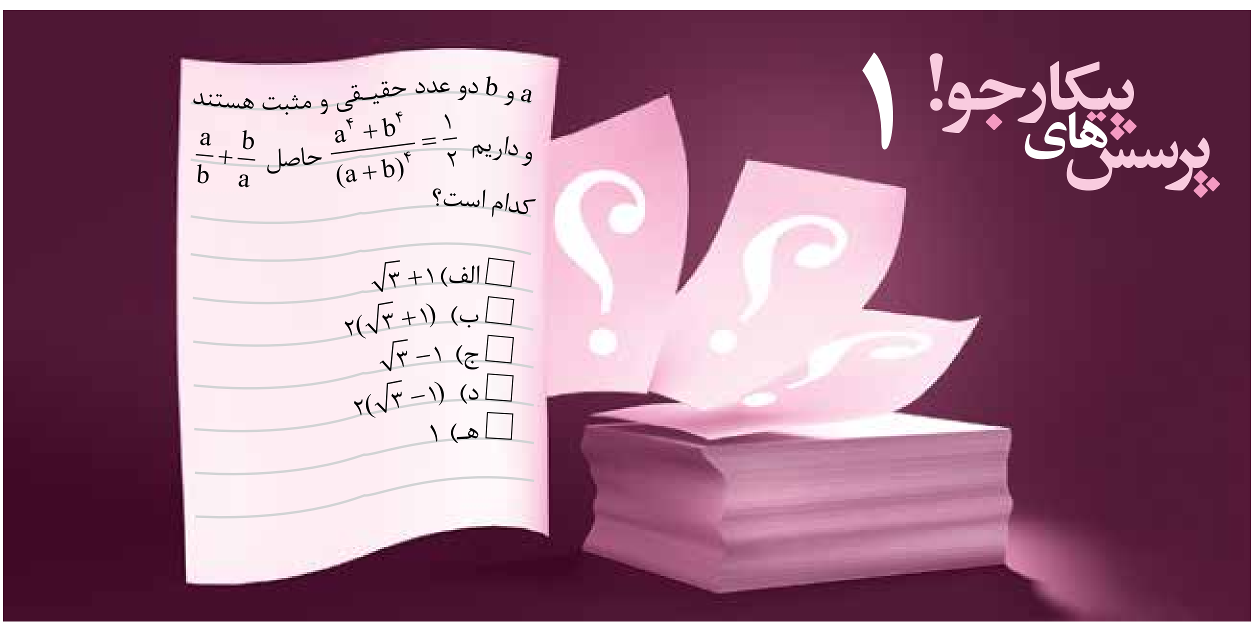
مطابق آنچه که در بخش‌های قبل ذکر شد، هر ستارهٔ n پر منتظم دارای n مثلث کناری مساوی و هم‌مساحت است. پس مساحت کل مثلث‌ها برابر است با:

$$A_{\text{همهٔ مثلث‌ها}}=\frac{n}{2}a^2\sin\gamma$$

طبق آنچه که گفته شد، مساحت ستاره از مجموع دو مساحت به‌دست آمده محاسبه می‌شود:

مساحت ستاره =
مجموع مساحت‌های مثلث‌های کناری + n ضلعی مولد

$$A_{\text{ستارهٔ منتظم پنج پر}}=\frac{na^2(1-\cos\gamma)}{2\tan\frac{180}{n}}+\frac{n}{2}a^2\sin\gamma$$



ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

هوشنگ شرقی

افقی:

۱. عدد سال کبیسه ـ دومین عدد اول، با این رقم صدگان ـ عدد اول دو رقمی ـ محیط مربعی که مساحت آن ۳۴۵۹۶ واحد سطح است.

۲. تفاضل هر عدد از خودش! ـ مربع کامل سه رقمی و مضرب صد ـ عدد اول دو رقمی ـ مربع کامل یک رقمی ـ عددی طبیعی که هر توان آن با خودش برابر است.

۳. کوچک‌ترین عدد نامنفی ـ حاصل‌ضرب چهار عدد اول ـ سه برابر دومین عدد اول دورقمی ـ سرسلسلهٔ اعداد! ـ مساحت مربعی با محیط دوازده.

۴. عدد سه‌رقمی با رقم‌های متوالی صعودی از چپ ـ عدد سه‌رقمی فرد که مجموع ارقام آن یازده است ـ مربع یک عدد اول ـ تعداد سوره‌های قرآن کریم.

۵. ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x+\sqrt{x}=۲\sqrt[۴]{x}$ ـ مساحت مربعی با قطر $۳۰\sqrt{۲}$ ـ اندازهٔ زاویهٔ بین نیم‌سازهای دو زاویهٔ داخلی مثلثی که زاویهٔ سوم آن ۸۰° است ـ تعداد عددهای طبیعی زوج و اول ـ عضو ابتدای مجموعهٔ عددهای فرد و اول.

۶. تعداد ضلع‌های چندضلعی محدبی که تعداد قطرها و تعداد ضلع‌های آن با هم برابرند ـ ده برابر عدد اول دو رقمی ـ مبنای عددی مورد استفادهٔ بابلی‌های باستان ـ اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاع با مساحت $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ـ عدد نه مثبت و نه منفی.

۷. تلفن اورژانس شهر تهران ـ دو برابر بزرگ‌ترین عدد اول کوچک‌تر از ۴۰۰.

عمودی:

۱. نمایش آن در مبنای ۲، بزرگ‌ترین عدد دورقمی است ـ عدد چهاررقمی که از کنار هم قرار گرفتن دو عدد دورقمی یکسان ساخته شده و مضرب هفده است.

۲. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی که مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها یکسان است ـ مجموع دو عدد طبیعی زوج ـ عدد زوج و اول.

۳. نخستین عدد اول با این عدد هزارگان ـ عدد اول یک‌رقمی.

۴. تنها، دو عدد زوج شش‌رقمی، بزرگ‌تر از این عدد زوج وجود دارد.

۵. عدد شش‌رقمی که از تکرار نخستین عدد اول سه‌رقمی ایجاد شده است.

۶. عدد مربع کامل، در مبنای ۲.

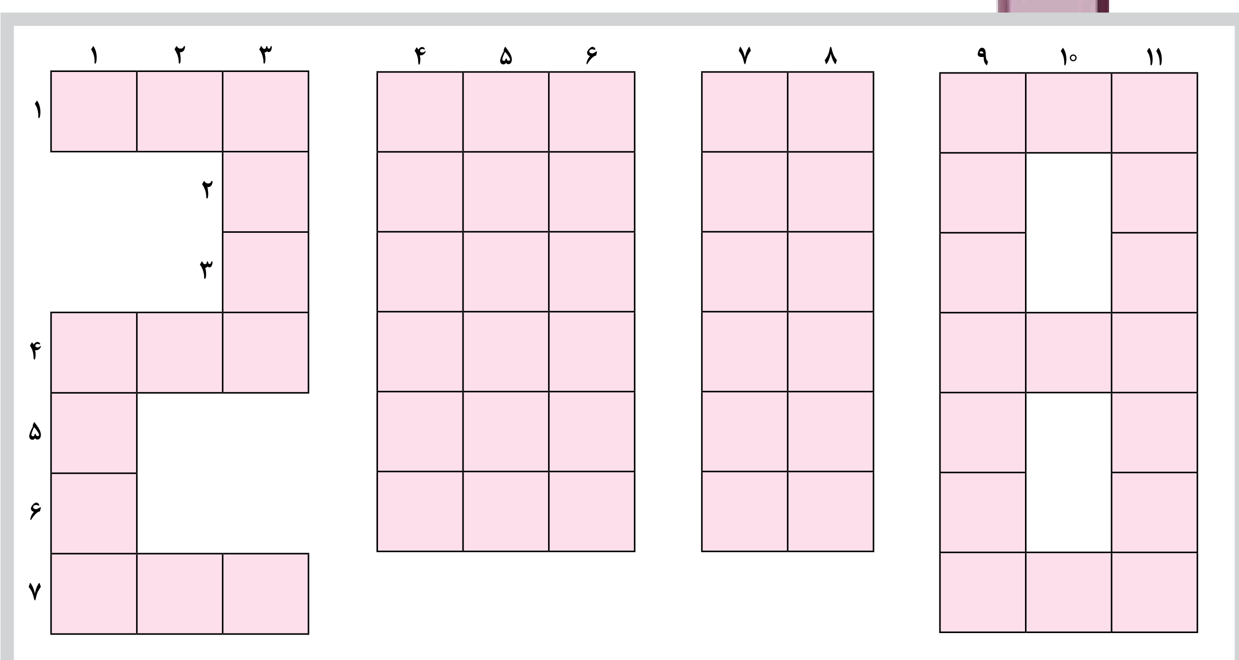
۷. عدد شش‌رقمی با رقم‌های متوالی صعودی.

۸. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن ۱۰۰۰۱ و یک ضلع آن ۲۰۰ واحد طول است.

۹. عدد هفت‌رقمی که شش رقم نخست آن نمایش چهار عدد فرد متوالی است و رقم‌های آخر و اول آن یکسان هستند.

۱۰. مربع عدد زوج نخست ـ حاصل‌تقسیم هر عدد غیرصفر بر خودش ـ آخرین عدد یک‌رقمی.

۱۱. دو به توان بیست‌ودو!



اثبات برخی نامساوی‌ها به کمک اتحادهای جبری

عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

اشاره

ردپای اتحادیه‌های مهم جبری که در ریاضیات پایه آموزش داده می‌شوند، در جای‌جای مباحث دیگر ریاضیات دبیرستانی دیده می‌شود. در اینجا کوشش شده است، در اثبات درستی برخی نامساوی‌ها از کاربردهای گوناگون اتحادهای اساسی جبری استفاده شود. بدون شک موضوع نامساوی‌ها و اثبات آن‌ها همواره مورد تأکید و توجه بوده و مهارت‌های حل این مسائل ضروری انکارناپذیر است.

کلیدواژه‌ها: اتحاد جبری، اثبات نامساوی، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ هندسی، اتحاد مربع

نمونهٔ ۱.

الف) برای هر x و y حقیقی نشان دهید:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

ب) برای هر x، y و z دلخواه نشان دهید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

اثبات الف: فرض کنیم رابطهٔ فوق برقرار باشد. در این صورت:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$$

نامساوی اخیر به‌وضوح برقرار است و روابط همگی برگشت‌پذیرند. بنابراین حکم مسئله برقرار است.

اثبات ب: به طریق مشابه الف صورت می‌گیرد. ابتدا دو طرف نامساوی را در ۲ ضرب کنید.

نمونهٔ ۲. نشان دهید برای هر a و b حقیقی داریم:

$$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba)$$

اثبات: فرض کنیم رابطهٔ بالا درست باشد، بنابراین:

$$(1)\quad 2a^2 + b^2 + 1 - 2a + 2ab \geq 0$$

$$(2)\quad (a^2 + b^2 + 2ab) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$(3)\quad (a + b)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

رابطهٔ (۳) به‌وضوح برقرار است و روابط همگی برگشت‌پذیرند. پس نامساوی صورت مسئله برقرار است.

نمونهٔ ۳. برای هر a، b و c حقیقی نشان دهید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

اثبات: شباهت خاصی این نمونه با دو نمونهٔ قبلی دارد. در اینجا می‌توانیم با تکیه بر اتحاد مربع مجموع دو جمله و به‌صورت غیربازگشتی به اثبات نامساوی بپردازیم.

از نابرابری بدیهی $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0$ استفاده کرده و حکم را ثابت کنید.

نمونهٔ ۴. x و y دو عدد حقیقی و مثبت‌اند. نشان دهید:

$$x^4+y^4\ge x^3y+xy^3$$

اثبات: به یاری روش بازگشتی به سراغ درستی اثبات می‌رویم. فرض کنیم نامساوی درست باشد، در این صورت:

$$x^4-x^3y+y^4-xy^3\ge 0$$
$$\Rightarrow x^3(x-y)-y^3(x-y)\ge 0$$
$$\Rightarrow (x^3-y^3)(x-y)\ge 0$$

حال به کمک اتحاد جبری تفاضل مکعب دو جمله داریم:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

پس:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)(x-y)\ge 0$$
$$\Rightarrow (x-y)^2(x^2+xy+y^2)\ge 0$$

چون x و y مثبت‌اند، x^2+xy+y^2 نیز مثبت و لذا نامساوی اخیر درست است. همچنین همهٔ روابط بالا برگشت‌پذیرند. این موضوع درستی نامساوی صورت مسئله را نتیجه می‌دهد.

نمونهٔ ۵. ثابت کنید که:

الف) $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ (a>0,b>0)$

ب) اگر $a\ge b>0$، آن‌گاه:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)^2}{8b}$$

اثبات الف: این نامساوی به نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی معروف است و از جمله نامساوی‌های کاربردی به حساب می‌آید. داریم:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$$

پس: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

اثبات ب: ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

کافی است ثابت کنیم که:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\le\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

در نتیجه لازم است که نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}\le\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

پس باید نشان دهیم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}\le\frac{1}{2}$$

داریم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{8a}=\frac{1}{8}\left(\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

اما: $\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\le\frac{1}{2}$، زیرا:

$$a\ge b>0\Rightarrow\frac{b}{a}\le 1\Rightarrow 1+\sqrt{\frac{b}{a}}\le 2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\le\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

همچنین به طریق مشابه ثابت می‌شود که هرگاه $a\ge b>0$، آن‌گاه:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\le\frac{(a-b)^2}{8b}$$

در اثبات درستی نامساوی اخیر نقش پررنگ اتحادهای مربع مجموع و تفاضل دو جمله و اتحاد مزدوج دیده می‌شود.

دو نتیجهٔ دیگر از نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی

در سؤال قبل دیدیم که هرگاه a و b مثبت باشند، میانگین حسابی آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آن‌هاست؛ یعنی: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. از این نامساوی به شیوه‌های گوناگون در اثبات درستی دیگر نامساوی‌ها اثبات می‌شود. در نمونه‌های بعدی به دو نتیجهٔ دیگر از این نامساوی خواهیم پرداخت.

نمونهٔ ۶. ثابت کنید هرگاه a، b و c نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$$

نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی را یک‌بار برای a و b و بار دیگر برای b و c و همچنین یک‌بار برای a و c می‌نویسیم:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab},\ \frac{b+c}{2}\ge\sqrt{bc},\ \frac{c+a}{2}\ge\sqrt{ac}$$

پس: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ و $b+c\ge 2\sqrt{bc}$ ،$c+a\ge 2\sqrt{ca}$

در نتیجه:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge(2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ac})=8abc$$

و حکم ثابت شد.

نمونهٔ ۷. اگر x، y و z اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$(x+z-y)(z+y-x)(y+x-z)\le xyz$$

اثبات: با توجه به نمونهٔ قبلی و (بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود)، با انتخاب

$$x+z-y=a,\ z+y-x=b,\ y+x-z=c$$

خواهیم داشت:

$$x=\frac{a+c}{۲},\ y=\frac{b+c}{۲},\ z=\frac{a+b}{۲}$$

در نمونهٔ قبلی دیدیم که: $(a+c)(b+c)(a+b)\ge ۸abc$

پس: $(\frac{a+c}{۲})(\frac{b+c}{۲})(\frac{a+b}{۲})\ge abc$

$$\Rightarrow xyz\ge (x+z-y)(z+y-x)(y+x-z)$$

و حکم ثابت شد.

کاربردی از اتحاد مربع مجموع ۳ جمله در اثبات نامساوی‌ها

حالا نوبت آن رسیده است که ردپای اتحاد مربع مجموع سه جمله را که به صورت $(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)$ می‌شناسیم، در اثبات درستی یک نامساوی جبری دنبال کنیم. به نمونهٔ زیر توجه کنیم:

نمونهٔ ۸. اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$۳(ab+bc+ac)\le (a+b+c)^۲ < ۴(ab+bc+ac)$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم: $۳(ab+bc+ac)\le (a+b+c)^۲$

دیدیم که (نمونهٔ ۱- ب):

$$a^۲+b^۲+c^۲\ge ab+ac+bc$$

پس:

$$a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc\ge$$
$$ab+ac+bc+۲ab+۲ac+۲bc$$

اما طرف نخست نامساوی فوق همان اتحاد مربع مجموع سه جمله است. پس:

$$(a+b+c)^۲\ge ۳(ab+ac+bc)$$

در نتیجه نابرابری سمت چپ اثبات شد. حال به اثبات نابرابری سمت راست می‌پردازیم.

چون a، b و c طول اضلاع مثلث هستند، پس اندازهٔ هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کمتر است. از این واقعیت استفاده می‌کنیم و اثبات را به‌صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$a<b+c\to a^۲<a(b+c)\to a^۲<ab+ac \quad (۱)$$

$$b<a+c\to b^۲<b(a+c)\to b^۲<ab+bc \quad (۲)$$

$$c<a+b\to c^۲<c(a+b)\to c^۲<ac+bc \quad (۳)$$

از جمع طرفین نامساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$a^۲+b^۲+c^۲<۲ab+۲ac+۲bc$$

در نتیجه: $a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc<۴ab+۴ac+۴bc$

و استفاده از اتحاد مربع مجموع سه جمله نتیجه می‌دهد که:

$$(a+b+c)^۲<۴(ab+ac+bc)$$

مسائل مسابقه‌ها و المپیادها

در ادامه به نمونه مسائلی از مسابقات و المپیادها می‌پردازیم. بدون شک کمتر مسابقه یا المپیادی را می‌توان مثال زد که در آن سؤالی از موضوع نامساوی‌ها مطرح نباشد.

نمونهٔ ۹. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a-\frac{۱}{a}\ge ۱$ داشته باشیم:

$$a^۳-\frac{۱}{a^۳}\ge k(a-\frac{۱}{a})$$

(المپیاد ریاضی ایران، مرحلهٔ نخست، بهمن ۱۳۸۸)

پاسخ: به کمک اتحاد تفاضل مکعب دو جمله می‌توان نوشت:

$$(a-\frac{۱}{a})(a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱)\ge k(a-\frac{۱}{a})$$

$$\Rightarrow k\le a^۲+\frac{۱}{a^۲}+۱\xrightarrow{*}k\le (a-\frac{۱}{a})^۲+۳$$

* توجه کنیم که:

$$a^۲+\frac{۱}{a^۲}=(a-\frac{۱}{a})^۲+۲$$

اما با توجه به شرط مسئله، چون: $a-\frac{۱}{a}\ge ۱$، پس:

$$(a-\frac{۱}{a})^۲+۳\ge ۱+۳=۴$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای k برابر ۴ است.

نمونهٔ ۱۰. برای هر a، b و c متعلق به اعداد حقیقی مثبت، ثابت کنید:

الف) $۴(a^۳+b^۳)\ge (a+b)^۳$

ب) $۹(a^۳+b^۳+c^۳)\ge (a+b+c)^۳$

(سی و دومین المپیاد ریاضی، انگلستان ۱۹۹۶)

(منبع: راهنمای المپیاد ریاضی **ترجمه هوشنگ شرقی**، انتشارات مدرسه، ۱۳۸۴)

اثبات الف: فرض کنیم نامساوی برقرار باشد. پس:

$$۴a^۳+۴b^۳\ge a^۳+b^۳+۳a^۲b+۳ab^۲$$

$$۳a^۳+۳b^۳\ge ۳ab(a+b)$$

$$a^۳+b^۳\ge ab(a+b)$$

$$a^۳-a^۲b+b^۳-ab^۲\ge ۰$$

$$a^۲(a-b)-b^۲(a-b)\ge ۰$$

$$(a-b)(a^۲-b^۲)\ge ۰\to (a-b)^۲(a+b)\ge ۰$$

چون a و b مثبت‌اند، پس نامساوی اخیر برقرار است و همهٔ روابط برگشت‌پذیرند. بنابراین براساس اثبات به روش بازگشتی حکم برقرار است.

اثبات ب: با توجه به نابرابری الف داریم:

$$4(a^3+b^3)\geq (a+b)^3 \quad (1)$$
$$4(a^3+c^3)\geq (a+c)^3 \quad (2)$$
$$4(b^3+c^3)\geq (b+c)^3 \quad (3)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$4(2a^3+2b^3+2c^3)\geq (a+b)^3+(b+c)^3+(a+c)^3$$
$$\to 8(a^3+b^3+c^3)\geq 2(a^3+b^3+c^3)$$
$$+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)$$

به دو طرف نابرابر اخیر $a^3+b^3+c^3$ اضافه می‌کنیم:

$$9(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2$$
$$+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)$$

حال کافی است نشان دهیم:

$$3(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)$$
$$\geq (a+b+c)^3 \quad (*)$$

اما:

$$(a+b+c)^3=((a+b)+c)^3$$
$$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3b^2c+6abc+$$
$$3ac^2+3bc^2+c^3$$

با جای‌گذاری برابری اخیر در (*) و ساده کردن، کافی است نشان دهیم:

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

اما طبق اتحاد اولر داریم:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

از آنجا که a، b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند، پس: $a+b+c>0$

همچنین دیدیم که: $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$، پس: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\geq 0$.

این نتیجه می‌دهد که: $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ و اثبات به پایان می‌رسد.

در اثبات دو نامساوی اخیر نیز نقش پررنگ اتحادهای جبری دیده شد.

نمونهٔ ۱۱. اگر a، b و c مثبت باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq \frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

(طرح شده توسط یاکوب علی‌اف، دانشگاه باکو آذربایجان)

اثبات: داریم:

$$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0$$

و بنابراین: $4ab\leq (a+b)^2$. به‌طور مشابه: $4bc\leq (b+c)^2$ و: $4ac\leq (a+c)^2$. بنابراین:

$$4abc(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$
$$=(\frac{4ab}{a+b})c+(\frac{4bc}{b+c})a+(\frac{4ca}{c+a})b$$
$$\leq (a+b)c+(b+c)a+(c+a)b$$
$$=2(ab+bc+ca) \quad (1)$$

از سوی دیگر، با توجه به نامساوی شناخته شدهٔ

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$3(ab+bc+ca)\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
$$=(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca)\leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$4abc(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\leq \frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

از تقسیم دو طرف نابرابری اخیر بر 4abc، اثبات مسئله کامل می‌شود.

***

دامنهٔ کاربرد اتحادها در اثبات نابرابری‌ها به مسائل بالا محدود نمی‌شود، اما نمونه‌های فوق احتمالاً توانسته‌اند بار دیگر ضرورت آموزش کاربردی اتحادها را و فراگیر بودن آن‌ها را در حوزه‌های گوناگون ریاضی یادآوری کنند.

تمرین

۱. a و b عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b}$.

۲. a و b عددهای حقیقی‌اند. ثابت کنید:

الف) $(a^2-b^2)^2\geq 4ab(a-b)^2$

ب) $(a^2-b^2)(a^4-b^4)\leq (a^3-b^3)^2$

۳. x عددی مثبت است. نشان دهید: $x^3+\frac{1}{x^3}\geq x^2+\frac{1}{x^2}$.

۴. a و b عددهای مثبت‌اند. ثابت کنید: $\frac{a^3+b^3}{2}\geq (\frac{a+b}{2})^3$.

حمیدرضا امیری

اصول شمول و عدم شمول

فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی دلخواه باشند. در این صورت،

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

بـــه عبارت دیگر، برای یافتن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعهٔ A و B، یعنی $n(A\cup B)$، $n(A)$ و $n(B)$ را با هم جمع می‌کنیم و سپس $n(A\cap B)$ را از آن کم می‌کنیم که شامل $n(A)$ و $n(B)$ و عدم شمولِ $n(A\cap B)$ می‌شود.

این نتیجه از این حقیقت حاصل می‌شود که ما وقتی $n(A)$ و $n(B)$ را جمع می‌کنیم، اعضای $(A\cap B)$ را دوبار شمارش می‌کنیم. این اصل برای هر تعداد مجموعه صادق است. ما این اصل را برای سه مجموعه بیان می‌کنیم.

قضیه: برای هر سه مجموعهٔ متناهی A، B و C داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

یعنی $n(A)$، $n(B)$ و $n(C)$ را شـــامل، $n(A\cap B)$، $n(A\cap C)$ و $n(B\cap C)$ را مســـتثنا، و $n(A\cap B\cap C)$ را شـــامل می‌کنیم.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Inclusion .... شامل شدن، شمول، قبول کردن
2. Exclusion .... طرد کردن، عدم شمول
3. Finite .... متناهی
4. Union .... اجتماع
5. Elements .... اعضا
6. Principle .... اصل
7. Subtract .... تفاضل، کم کردن
8. Exclude .... مستثنا کردن، محروم کردن
9. include .... دربرداشتن، شامل شدن

THE INCLUSION - EXCLUSION PRINCIPLE

Let A and B be any finite sets. Then

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

In other words, to find the number $n(A \cap B)$ of elements in the union $A \cup B$, we add $n(A)$ and $n(B)$ and then we subtract $n(A \cap B)$; the is, we "include" $n(A)$ and $n(B)$, and we "exclude" $n(A \cap B)$. This follows from the fact that, when we add $n(A)$ and $n(B)$, we have counted the elements of $A \cap B$ twice. This principle holds for any number of sets. We first state it for three sets.

Theorem: For and finite sets A, B, C we have

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$$
$$n(A \cap C) - (B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

That is, we "include" $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, we "exclude" $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$, and we include $n(A \cap B \cap C)$.

ترجمه برای دانش‌اموزان

EXAMPLE 6.11

Find the number of mathematics students at a college taking at least one of the languages French, German, and Russian given the following data:

65 study French	20 study French and German
45 study German	25 study French and Russin
42 study Russian	15 study German and Russin
	8 study all three langauges

We want to find $n(F \cup G \cup R)$ where F, G, and R denote the sets of students studying French, Greman, and Russian, respectively.

By the inclusion-exclusion principle,

$$n(F \cup G \cup R) = n(F) + n(G) + n(R) - n(F \cap G) -$$
$$n(F \cap R) + n(G \cap R) + n(F \cap G \cap R)$$
$$= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100$$

Thun 100 students study at least one of the langauges.

Now, suppose we have any finite numaber of finite sets, say, $A_1, A_2, \dots, A_m$. Let s_k be the sum of the cardinalities

$$n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k})$$

of all possible k-tuple intersections of the given m sets. Then we have the following general inclusion-exclusion principle.

Theorem 6.7:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup Am) = s_1 - s_2 + s_3 - \dots + (-1)^{m-1} s_m.$$

گزارش

هوشنگ شرقی

گفت‌وگو با دکتر امید نقشینه ارجمند
استاد ریاضیات و رئیس کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران

تأثیر المپیادی‌ها در زندگی من

اشاره

امید نقشینه ارجمند **در سال ۱۳۵۴ در خانواده‌ای فرهنگی در شهر اصفهان به‌دنیا آمد و پدرش استاد ریاضی دانشگاه اصفهان بود. دوران راهنمایی و دبیرستان را در «دبیرستان استعدادهای درخشان شهید اژه‌ای» آن شهر گذراند و در سال ۱۳۷۲ به عضویت تیم المپیاد ریاضی ایران درآمد. او جزو شش دانش‌آموزی بود که به المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۹۴ هنگ‌کنگ اعزام شدند. سرامد آن شش تن، زنده‌یاد مریم میرزاخانی بود که با کسب ۴۱ امتیاز (از ۴۲ امتیاز) مدال طلا گرفت و امید نقشینه در آن المپیاد موفق به کسب مدال برنز شد.**

وی سپس با انتخاب رشتهٔ ریاضی وارد دانشگاه صنعتی شریف شد و دوره‌های کارشناسی، کارشناسی‌ارشد و دکترای ریاضی را در همان دانشگاه گذراند. بعد از آن هم به‌عنوان عضو هیئت علمی «دانشگاه صنعتی امیرکبیر» تا به امروز مشغول تدریس و تحقیق بوده است. همچنین، از سال ۱۳۸۸ تاکنون به‌عنوان رئیس کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی ایران انجام وظیفه کرده و سرپرستی و هدایت تیم‌های اعزامی ایران به المپیادهای بین‌المللی ریاضی را عهده‌دار بوده است. شایان ذکر است که دکتر نقشینه ارجمند امسال عضو تیم تألیف کتاب درسی آمار و احتمال سال سوم رشتهٔ ریاضی بوده است.

اواخر مردادماه امسال فرصتی مغتنم فراهم آمد تا در روزهای فراغت نسبی ایشان گفت‌وگویی صمیمانه داشته باشیم. خلاصهٔ این گفت‌وگو را در ادامه می‌خوانید.

■ شرقی: در خدمت استاد عزیز، آقای امید نقشینه ارجمند هستیم. اجازه بدهید به‌عنوان مقدمهٔ نخستین سؤال، با هم به سال ۱۳۷۳ برویم که شما در تیم المپیاد ریاضی کشورمان به کشور هنگ‌کنگ اعزام شدید. خب آن زمان حدود شش سال از اعزام نخستین تیم المپیاد ریاضی ایران به رقابت‌های جهانی می‌گذشت.

من یادم هست که در این شش سال المپیاد ریاضی ایران چه جهش چشمگیری داشت؛ از اولین مدال المپیاد (مدال برنز المپیاد جهانی کوبا که توسط آقای علی‌اصغر خانبان گرفته شد) تا اولین مدال‌های طلا (که آقایان بهرنگ نوحی و پیمان کسایی گرفتند). بعد رتبه‌های کشورمان که سال به سال رشد و ترقی داشت. همهٔ این‌ها طی چند سال متوالی شور و هیجان خاصی به جامعهٔ علمی کشورمان بخشید. حتی عموم مردم را هم تحت تأثیر قرار داد و استقبال چشمگیری که از مدال‌آوران کشورمان در فرودگاه می‌شد، قابل مقایسه با قهرمانان ورزشی کشورمان بود. این فضای شور و هیجان چقدر در ایجاد انگیزه برای شما و المپیادی‌شدن شما اثرگذار بود؟

■ دو سه سال قبل از آن مقطع زمانی که اشاره کردید، من کلاس اول یا دوم دبیرستانی بودم که از طرف مسئولان مدرسه‌های استعدادهای درخشان یک برنامهٔ سه روزهٔ ریاضیات (که به اصطلاح رایج در مدرسه‌های «سمپاد» به آن «کارسوق ریاضی» می‌گفتند) در مدرسه‌های وابسته به آن اجرا شد و در مدرسهٔ ما (شهید اژه‌ای اصفهان) هم این برنامه گذاشته شد. مدرسان دوره هم دانشجویان سال‌های دوم سوم رشتهٔ ریاضی و اکثراً هم المپیادی بودند؛ مثل همین‌ها که اسم بردید، یعنی آقایان بهرنگ نوحی، پیمان کسایی، علی رجایی و...

این سه روز به معنای واقعی تأثیر عجیبی در زندگی من گذاشت. سه شبانه‌روز همهٔ زندگی ما با ریاضیات عجین شد و آن هم ریاضیاتی که به مراتب جذاب‌تر از ریاضی دبیرستان بود. همهٔ شرکت‌کنندگان، اعم از استادان و دانش‌آموزان، انگیزهٔ بسیار بالایی داشتند و در نتیجهٔ این برنامه من برای نخستین‌بار به ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی فکر کردم. خُب می‌دانید که اغلب دانش‌آموزانی که وارد رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک می‌شوند، می‌خواهند به رشته‌های مهندسی بروند (چه آن زمان و چه حالا). اما من تحت تأثیر آن برنامه به‌طور استثنایی به ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی علاقه‌مند شدم.

حضور المپیادی‌ها در مدرسهٔ ما، در زندگی من تأثیر گذاشت و فارغ از بحث المپیاد، انگیزه ادامه تحصیل در رشته ریاضی معلول آن فضا بود

پس خود المپیـــاد نه، ولی حضور المپیادی‌ها در مدرسهٔ ما در زندگی من تأثیر گذاشت. به بیان دیگر، فـــارغ از بحث المپیاد (که آن زمان چندان به آن فکر نمی‌کـــردم)، انگیزهٔ ادامهٔ تحصیل در رشـــتهٔ ریاضی معلول آن فضا بود. پس این تأثیر، غیرمســـتقیم بود و المپیادی‌ها در یک برنامهٔ «غیرالمپیادی» توانستند این تأثیر (علاقه‌مندی به ادامهٔ تحصیل در ریاضیات) را بـــر من بگذارند. ولی خب به قول شـــما، آن فضا و شور و هیجان می‌گفت اگر می‌خواهی وارد این مسیر بشوی، المپیاد هم چیز خوبی است!

■ **فکر می‌کنم یکـــی از اهداف اصلـــی المپیاد ریاضی، همگانی‌کردن این رقابت‌هاســـت. در ایـــن زمینه در باشگاه دانش‌پژوهان جوان چه کاری انجام شده است؟ آیا برنامه‌ای برای گســـترش رقابت‌های علمی در میان دانش‌آموزان و شروع آن از پایه‌های پایین‌تر وجود دارد؟**

■ بر ســـر اینکه ما این گســـترش را فقط در بعد رقابت ببینیم، اختلاف‌نظرهایی هست. خب رقابت دو جنبه دارد: یک طرف آن برندگان رقابت هستند، ولی طرف دیگر آن هم بازندگان این رقابت‌اند که اگر دیده نشوند و حواشی رقابت کنترل نشود، می‌تواند مشکلاتی ایجاد کند که کمتر دیده می‌شوند. شکست‌خوردگان رقابت هم که دچار سرخوردگی می‌شوند، بخشی از رقابت‌اند.

جنبهٔ دیگری که به‌نظر مـــن نقطهٔ ضعف جدی المپیادهاست، برنامه‌ریزی و مدیریت به شدت متمرکز رقابت‌هاســـت. یعنی ما جمع محدودی هســـتیم که رقابت‌هـــا را برنامه‌ریزی، ســـؤالات را طرح و نتایج را اعـــلام می‌کنیم. این نوع برنامه‌ریـــزی گروه زیادی از دانشـــجویان، استادان و معلمان رشـــته ریاضی را از گردونهٔ رقابت‌ها به کلی حذف می‌کند. معلمان ریاضی خودشان را با المپیاد بی‌ارتباط می‌دانند و واقع‌بینانه آن اســـت که بسیاری‌شـــان حتی از المپیاد بدشان می‌آید! و من می‌فهمم چرا چنین است.

بســـیاری از متخصصان و بنیان‌گـــذاران المپیاد معتقدند، رقابت‌های المپیاد باید به‌صورت مرحله‌ای و منطقه‌ای برگزار شوند. اجرای مراحل نخستین المپیاد را می‌تـــوان به مناطق آموزش‌وپرورش واگذار کرد و ما (در کمیتهٔ علمی المپیاد ریاضی و تا جایی که می‌دانم کمیتهٔ المپیاد فیزیک) با این موضوع موافق هستیم. به نظر من معلمان، استادان دانشگاه و دانشجویان ریاضی هر منطقه مســـابقهٔ ریاضی بهتری را می‌توانند در آن منطقه تدارک ببینند. به‌علاوه، تا معلمان متناســـب با دانش‌آمـــوزان درگیر موضوع المپیاد نشـــوند، المپیاد ریاضی آن‌طور که باید در سطح جامعه مطرح نمی‌شود. در کوتاه‌مدت ممکن است مطرح شدن نام دانش‌آموزان

موفق المپیادی و آشنایی‌شـــان با سطحی از ریاضیات (بالاتر از ســـطح متعارف) هیجان‌انگیز باشد، ولی اگر ارتباط این دانش‌آموزان با معلمانشـــان قطع شود، در بلندمدت این موضوع چندان جالب نخواهد بود. مثالی بزنم: فرض کنید در همان دوره‌های نخست که ما در المپیاد بین‌المللی ریاضی شرکت کردیم، گردانندگان المپیـــاد بین‌المللی ریاضـــی به ما می‌گفتند شـــما صلاحیت طرح ســـؤال‌های استاندارد المپیاد را ندارید و اجازه بدهید ما برایتان ســـؤال طرح کنیم. مســـلماً ســـؤالاتی که آن‌ها طرح می‌کردند، سؤال‌های بهتری بودند، ولی در آن صورت ما هرگز به سطحی که امروز به آن رســـیده‌ایم، نمی‌رســـیدیم. امروز ما در جایگاه برجسته و قابل قبولی در سطح دنیا از این نظر هستیم و با اطمینان می‌توانم بگویم می‌توانیم به بهترین شکلی المپیاد بین‌المللی ریاضی را برگزار کنیم و این توانایی‌ها حاصل تجربهٔ این سال‌های ماست.

در داخل کشـــور هم به‌همین صورت است. اگر ما اجرا و طرح مســـائل مراحل مقدماتی را به مناطق واگذار کنیم، ممکن اســـت در ســـال‌های نخستین ضعف‌ها و ایراداتی وجود داشـــته باشـــد و حتی حق بعضی دانش‌آموزان تضییع شود، ولی به مرور و حتماً این اشکالات برطرف می‌شوند. نتیجه این خواهد بود که معلمان و اســـتادان منطقه هم با موضوع المپیاد ارتباط برقـــرار می‌کنند و نتیجه‌ای که شـــما به آن اشـــاره کردید، به‌دست می‌آید. اما موضوعی که شما به آن اشاره کردید، یعنی شروع رقابت‌ها از پایه‌های پایین‌تر. تا جایی که من می‌دانم، سیاست مسئولان

چند سال قبل از اعزام تیم، مسابقات ریاضی کشور شروع شد و چند سال بعد تیم المپیاد ریاضی اعزام شد. هدف از آن‌ها تشویق دانش‌آموزان به انتخاب رشتهٔ ریاضی بود

از راست به چپ: مازیار امین‌راد، امید نقشینه ارجمند، علی نورمحمدی، زنده‌یاد رضا صادقی، رویا بهشتی‌زواره، زنده‌یاد مریم میرزاخانی

آموزش‌وپرورش این است که المپیاد اصلاً در دورهٔ متوسطهٔ اول مطرح نشود.

خب حالا اسمش المپیاد نباشد. رقابت‌هایی برگزار شوند، تیم‌ها با هم رقابت کنند و برگزیدگان نهایی مورد تشویق قرار بگیرند و مثلاً بتوانند بدون آزمون وارد مرحلهٔ دوم المپیاد ریاضی شوند.

با این قسمتش من مشکل دارم! همین‌که بگویند امتیازاتی برای این مسابقه وجود دارد، بلافاصله فعالیت‌هایی حاشیه‌ای برای این مسابقه‌ها شکل می‌گیرد. مثل اتفاقی که برای خود المپیادها افتاده است. این فکر به ذهن بعضی‌ها که علاقه‌ای هم به ریاضی یا فیزیک ندارند خطور کرد که من با شرکت در کدام‌یک از این المپیادها می‌توانم زودتر به دانشگاه برسم و از مزایای نخبگی استفاده کنم و... . خب این آسیبی جدی است. اگر بشود رقابت‌هایی را سازمان‌دهی کرد که این‌گونه حواشی را نداشته باشند، خب قابل تأمل است.

خب از المپیاد زیاد گفتیم. برگردیم به دوران تحصیلتان. از کی فهمیدید به ریاضیات علاقه دارید؟

من از همان دوران دبیرستان به ریاضیات علاقه داشتم. در مقطعی کارنامه‌های دوران دبستانم را نگاه می‌کردم، دیدم اتفاقاً نمرات ریاضی من از نمرهٔ بقیهٔ درس‌هایم کمتر بوده است! ولی من به ریاضیات علاقه زیادی داشتم و این را مدیون نوع برخورد پدر و مادرم و به‌خصوص پدرم می‌دانم. پدر من استاد رشتهٔ ریاضی در دانشگاه بود، ولی هیچ‌وقت پیگیر نمره‌های درس ریاضی من نبود و هرگز در مورد نمره‌هایم به من تذکری نداد.

من همین‌جا به‌همین مناسبت تذکری به اولیای دانش‌آموزان می‌خواهم بدهم. امروزه اولیا بسیار درگیر همین نمرات و بالا و پایین شدن آن‌ها هستند و از جنبه‌های بیرونی آموزش کاملاً غافل شده‌اند. در سنین ابتدایی، دانش‌آموز باید از کارهایی که خودش انجام می‌دهد، تجربه‌ها و دست‌ورزی‌ها و مهارت‌هایش لذت ببرد. از اینکه مسئله‌ای را با توانایی خودش حل کند، یا اینکه گیاهی را بکارد و پرورش بدهد، لذت ببرد.

وقتی بزرگ‌تر شدم و رفتار پدر و مادرم را با برادر کوچک‌ترم دیدم، متوجه درستی روش آن‌ها شدم. یادم هست که برادر کوچکم با شور و شوق به دبیرستان نمی‌رفت. روزی اجازه گرفت که در زمین روبه‌روی مدرسه گوجه و سبزی بکارد. روز بعد دیدم به اتفاق پدرم بسته‌های کود را پشت ماشین گذاشته‌اند تا با هم به زمین کشاورزی برادرم بروند و مزرعه را کود بدهند! هیچ جایزه‌ای هم بابت این کار به او نمی‌دادند ولی از آن به بعد هر روز نیم‌ساعت زودتر به مدرسه می‌رفت. این‌گونه فعالیت‌ها که نتیجهٔ مستقیم تلاش خود دانش‌آموز را به او نشان می‌دهند، می‌توانند باعث ایجاد انگیزهٔ درونی بالایی شوند.

در مورد خودم فکر می‌کنم، علاقهٔ من به ریاضیات می‌توانست خراب شود، اگر پدر و مادرم نظارت نمره‌ای بر من می‌داشتند. نوع نگاه پدرم در پیشرفت ریاضی من نقش ویژه‌ای داشت. ایشان هیچ‌وقت در آموزش ریاضی من دخالتی نداشت؛ ولی روی من اثر می‌گذاشت. نوع اثرگذاری ایشان را با یک مثال می‌توانم بیان کنم. در دوران انقلاب فرهنگی که پدرم اوقات فراغت بیشتری داشت، یک روز یک کتاب بازی‌های مختلف فکری و منطقی برایم خرید و به من داد و از من خواست با بازی‌های آن سرگرم شوم. من اولین تجربه‌های استدلالی خودم را طی این بازی‌ها به‌دست آوردم. بعدها در دوران دبیرستان در مورد منطق نهفته در بعضی از این بازی‌ها با دوستانم بحث‌هایی داشتیم و حتی در مورد الگوریتم‌های آن‌ها کارهایی انجام دادیم. وقتی به دبیرستان رسیدیم با چند نفر از هم‌کلاسانم که آن‌ها هم به ریاضیات علاقه‌مند بودند، یک گروه ریاضی پنج نفره تشکیل دادیم که وجه مشترک همه‌مان علاقه‌مندی به ریاضیات بود.

خب به‌همین صورت آمدید جلـــو تا به عضویت تیم المپیاد ریاضی درآمدید. گروهی که دو نفر از اعضای آن متأسفانه امروز در جمع ما حضور ندارند. زنده‌یاد رضا صادقی که در ســـانحهٔ اتوبوس سال ۱۳۷۶ جان باخت و زنده‌یاد مریم میرزاخانی که اخیراً از دنیا رفت. از آن دوران مشترک بگویید.

پس از آنکه وارد دورهٔ المپیاد شدم، اولین برخوردم با خانـــم میرزخانی جالب بود. ما وقتی در اصفهان برای المپیاد آماده می‌شـــدیم، کتـــاب المپیادهای ریاضی شـــوروی (ترجمهٔ زنده‌یاد **پرویز شهریاری**) یکی از منابع حل مسئله‌مان بود و حدود ۱۵ مسئلهٔ آن را حل کرده بودیم. در دورهٔ المپیاد دیدم خانم میرزاخانی و خانم **بهشتی** که با ما هم‌دوره بودند، داشتند آن کتاب را دوره می‌کردند. یعنی قبلاً همهٔ مسائل آن را با هم حل کرده بودند! من واقعاً جا خوردم! آن‌ها واقعاً از حل مسئله لذت می‌بردند و بعدها در دوران دانشجویی هم همین را دیدم. در دوران دانشجویی ما، در آن سال‌ها جو بسیار خوبی از فعالیت مشترک براساس علاقه به ریاضیات وجود داشـــت که فکر می‌کنم در پیشرفت بعدی خانم میرزاخانی هم اثرگذار بود.

شما بعداً در دورهٔ کارشناسی ارشد و دکترای ریاضی هم در همان دانشگاه صنعتی شریف ادامهٔ تحصیل دادید. چرا برای ادامهٔ تحصیل به خارج از کشور نرفتید؟

من ســـال دوم کارشناسی بودم که تصمیم گرفتم برای ادامهٔ تحصیل به خارج نروم که البته کاملاً غیرعادی بود. آن زمان (و حالا هم) اغلب دانشجویان المپیادی زمینهٔ پذیرش برای بیشتر دانشگاه‌های معتبر دنیا را داشتند. اما من معتقد بودم و هستم که در سطح دانشگاه‌های ما ایجاد یک جریان قوی و مستمر علمی منوط به وجود ارتباطات شبکه‌ای بین دانش‌آموختگان و استادان هر رشته است. رفتن به خارج باعث می‌شود که دانش‌پژوهان نخبهٔ هر رشته در مسیرهای متمایز و متفاوت ادامهٔ تحصیل بدهند و علاقه‌های مشـــترک کم شود. این از ایجاد شبکه‌های علمی مرتبط جلوگیری می‌کند. ارتباط علمی افراد باید در بستر تحصیلی مشترک و یکسان شکل گیرد و علاقه‌های مشـــترک به‌وجود آید. این کار با مهاجرت و تحصیل در خارج سازگار نیست. من تلاش کردم که این فرهنگ را ترویج کنم و به نظر خودم در این کار موفق هم بودم.

کمی هم از وضع خانوادگی‌تان بگویید.

پدر (همان‌طور که قبلاً گفتم) استاد بازنشستهٔ ریاضی دانشگاه اصفهان و مادرم خانه‌دار هستند. ما سه برادر هستیم که برادر بزرگ‌ترم مهندس برق الکترونیک و برادر کوچکم مهندس صنایع اســـت. خودم در سال ۱۳۸۶ ازدواج کردم و الان یک دختر چهار ساله دارم.

دوست دارید دخترتان ریاضی‌دان شود؟

دوســـت دارم در درجهٔ اول دانشمند شود. اما از آنجا که در رابطه با پدرم این را تجربه کرده‌ام که علاقه و کار روی ریاضیات برای ما اشـــتراکاتی به‌وجود آورده که این اشتراکات زمینه‌ساز صحبت بین ما می‌شود، وقتی به آینده فکر می‌کنـــم، تصور اینکه دخترم در آینده ریاضی‌دان شود، برایم لذت‌بخش است!

شخصیت شما، شخصیت مذهبی است؟

بله، کاملاً.

چرا؟

فکـــر می‌کنم فضای آزاداندیشـــی کـــه در خانواده و مدرســـه برایم وجود داشـــت، در ایجاد این روحیه اثرگذار بود. تصورم این اســـت که اگر انســـان تفکر منطقی و عقلانی داشـــته باشـــد، استدلالی منطقی انسان را به سمت تفکر مذهبی هدایت می‌کند.

یعنی تفکر ریاضی شـــما روی شخصیت شما اثرگذار بوده است؟

بله و تأثیر متقابل مثبت داشته است. البته سخت‌گیری و دقتی که در اســـتدلال ریاضی وجود دارد، نباید در هر محیطی اعمال شـــود و باید تفاوت فضاها را درک کرد. نباید تصور کرد که در روابط انسانی هم همیشه می‌توان توقع همان دقت استدلالی را داشت و در غیر این صورت مشکلات جدی به‌وجود می‌آید.

دربارهٔ تأثیر و نقش مجلات ریاضی نظرتان چیست و به‌طور مشخص مجلهٔ برهان را چگونه می‌بینید؟

من فکر می‌کنم چیزی که امروزه گم شده، ترغیب و جوشش جوانان به سمت کارهایی است که خودشان آن‌هـــا را مفید بدانند و با انگیزهٔ درونی آن‌ها را انجام دهند؛ بدون آنکه پاداش و جایزهٔ بیرونی داشته باشد. مجله خواندن هم یکی از آن کارهاست. دانش‌آموزی که کارش به آنجا کشـــیده که پشتیبانش باید به او زنگ بزند و برایش مشـــخص کند که کِی درسش را بخواند و کی به رختخواب برود (!) طبیعتاً نمی‌تواند مجله بخواند. من فکر می‌کنـــم مجله را باید طوری ترویج کرد که بچه‌ها بدون نیاز به تشویق و جایزه به سمت آن بروند تا ابعاد وجودی‌شان رشد کند.

امـــا در مورد مجلـــهٔ برهان بایـــد بگویم که در دورهٔ دبیرســـتان برهان به دستمان می‌رسید و آن را می‌خواندیم. البته جزئیاتش را بـــه یاد ندارم و فقط می‌توانم بگویم خاطـــره و حس خوبی از آن دارم. به خوانندگان برهـــان توصیه می‌کنم مقالات را با دقت بخواننـــد، برای هم توضیح دهند و با هم بحث کنند. اسم این کار پژوهش است.

سپاس فراوان از وقتی که به ما و خوانندگان مجله دادید.

رقابت دو جنبه دارد: یک طرف آن برندگان رقابت هستند، ولی طرف دیگر آن بازندگان این رقابت، که اگر دیده نشوند و حواشی رقابت کنترل نشود، می‌تواند مشکلاتی ایجاد کند

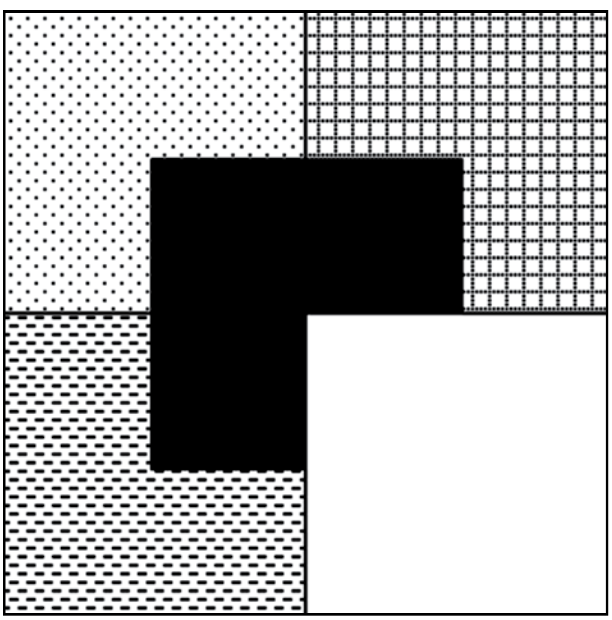
افشین خاصه‌خان
دبیر ریاضی شهرستان ارومیه

دانش‌آموزان عزیز در این قسمت می‌خواهم دردی را معرفی کنم که معمولاً دوستان سخت‌کوش ما با آن دست و پنجه نرم می‌کنند. روی سخنم با آن‌هایی است که بیشتر به حل سؤالات پیچیده علاقه‌مندند. لذا پیچیده فکر کردن برای این عزیزان عادت شده و ساده فکر کردن را از یاد برده‌اند. در مدرسه‌های خاص که معمولاً علاوه بر کتاب درسی، یک کتاب کمکی معرفی می‌شود و سؤالات آن به مراتب سخت‌تر است، دانش‌آموزان به آن کتاب بیشتر از کتاب درسی اهمیت می‌دهند. چون معتقدند سؤالاتش دشوارتر است و تمرین بیشتری می‌طلبد و اگر با آن کتاب کار کنند مفاهیم ریاضی را بیشتر می‌فهمند. همین توجه بیشتر به سؤالات دشوار باعث می‌شود آن‌ها به پیچیده فکر کردن عادت کنند.

حال اگر از چنین دانش‌آموزی سؤال ساده‌ای پرسش شود (مثلاً یک سؤال معمولی از کتاب درسی)، او یا به سرعت به آن پاسخ صحیح می‌دهد، یا ممکن است برای آن راه‌حل پیچیده‌ای ارائه کند و یا حتی نتواند آن را حل کند. می‌دانم که این موضوع برای شما تعجب‌برانگیز است یا حتی باورنکردنی، ولی آمار آزمون‌های نهایی سال‌های قبل (سال سوم) و مقایسهٔ نتیجه‌های این آزمون‌ها در مدرسه‌های معمولی و خاص نشان می‌دهد که این اتفاق افتاده است. یعنی دانش‌آموزان مدارس خاص، سؤالات نهایی را کمی بهتر از دانش‌آموزان مدرسه‌های معمولی جواب داده‌اند، در صورتی‌که این سؤالات از کتاب درسی و با کمترین تغییرات مطرح می‌شوند و از نظر دانش‌آموزانِ مدرسه‌های خاص پیش پا افتاده‌اند.

موضوع را با یک آزمایش جالب بررسی می‌کنیم: این آزمایش چهار مرحله دارد و شما باید سؤال هر مرحله را به ترتیب جواب دهید و سپس به مرحلهٔ بعدی بروید. تأکید می‌کنم که مرحله‌ها نباید پس و پیش شوند! (طراح دکتر باهاراتی[1])

در شکل زیر پنج مربع به ضلع‌های یکسان و با طرح‌های متفاوت وجود دارند که به صورت زیر قرار گرفته‌اند. مرکز مربع مشکی، رأس مشترک چهار مربع دیگر است و ضلع‌های آن، نظیربه‌نظیر با اضلاع چهار مربع دیگر موازی‌اند.



✦ **مسئلۀ مرحلۀ اول:** مربع دارای طرح خانه‌خانه را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید. اطمینان دارم که این مسئله را به‌راحتی حل می‌کنید.

✦ **مسئلۀ مرحلۀ دوم:** مربع دارای طرح نقطه چین را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. این مسئله هم زیاد سخت نیست و به‌راحتی می‌توانید از پس آن برآیید.

✦ **مسئلۀ مرحلۀ سوم:** مربع دارای طرح خط چین را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید. این مرحله کمی چالش برانگیزاست و اگر قبلاً با آن مواجه نشده باشید، لازم است که برای آن وقت بگذارید و آزمون خطا کنید. به شما وقت می‌دهم تا به آن فکر کنید. اما قبل از آن خاطره‌ای تعریف می‌کنم:

در یک کلاس دهم در مدرسۀ تیزهوشان، قرار بود از درس ریاضی امتحان بگیرم. همان‌طور که در بالا اشاره کردم، آنجا غیر از کتاب درسی کتاب دیگری هم معرفی شده بود و من هم با آنکه زیاد به آن اعتقاد نداشتم، ولی برای هماهنگی با سایر مدرسان، حل مسائلش را از دانش‌آموزان می‌خواستم و اشکالاتشان را هم رفع می‌کردم. قرار بر این بود که ۱۰ نمره از مسئله‌های امتحان از کتاب درسی طرح شود و ۱۰ نمرۀ بقیه از آن کتاب کمکی (به اصطلاح سؤالات سخت).

نتیجه جالب بود: دانش‌آموزانی داشتیم که مسئله‌های سخت کتاب کمکی را حل کرده بودند، ولی بعضی از مسئله‌های کتاب درسی را نه! و وقتی علت آن‌را جویا شدم، جوابشان قابل تأمل بود. آن‌ها گفتند ما فکر کردیم، وقتی می‌توانیم مسئله‌های سخت کتاب کمکی را حل کنیم، قطعاً قادریم مسئله‌های کتاب درسی را هم جواب بدهیم و تمرین برای آن‌ها لازم نیست. ظاهراً جواب آن‌ها منطقی به نظر می‌رسید، ولی چرا نتیجه‌ای که انتظار داشتند اتفاق نیفتاده بود؟!

بررسی این موضوع را به بعد موکول می‌کنم. امیدوارم سؤال مرحله سوم را جواب داده باشید. اگر نه، یک راهنمایی می‌کنم، از کل شکل، مربع سفید رنگ را حذف کنید و با دقت به آن نگاه کنید، در این صورت می‌توانید به جواب نزدیک شوید. دوباره تأکید می‌کنم، تا زمانی که سؤال این مرحله را جواب نداده‌اید به مرحله چهارم نروید.

✦ **سؤال مرحله چهارم:** مربع سفید رنگ را به هفت قسمت مساوی تقسیم کنید. تا شما به سؤال این مرحله فکر می‌کنید من هم سعی می‌کنم علت جواب ندادن دانش‌آموزانم را به سؤالات کتاب درسی توضیح دهم. طبق گفته‌های خودشان، آن‌ها اکثر مسائل کتاب کمکی را حل کرده بودند ولی بعضی از سؤالات کتاب درسی را نه. استدلالشان هم منطقی به نظر می‌رسید، اما من فکر می‌کنم به یکی از این دو دلیل آن‌ها نتوانسته‌اند به سؤالات کتاب درسی جواب دهند. دلیل اول اینکه احتمالاً آن‌ها الگوریتم جواب‌های کتاب کمکی را حفظ کرده بودند یعنی جواب آماده را از دوستانشان گرفته و الگوریتم جواب‌ها را چندبار تکرار کرده بودند، و چون مسئله‌های کتاب درسی شبیه آن‌ها نبودند، نتوانسته‌اند به آن سؤالات جواب دهند، به زبان دانش‌آموزی آن‌ها مسئله‌ای را که قبلاً ندیده‌اند، نمی‌توانند حل کنند و لذا زیاد فرقی نمی‌کند که این مسئله ساده باشد یا سخت.

دلیل دوم این است که احتمالاً این دانش‌آموزان عادت دارند، پیچیده فکر کنند و به همین خاطر سؤالات معمولی را هم برای خودشان سخت می‌کنند تا حدی که گاه حتی نمی‌توانند آن‌ها را حل کنند.

ممکن است دلیل دوم به نظر عجیب برسد، ولی چیزی است که همین الان توسط خود شما در حال اتفاق افتادن است. اکنون شما برای مسئلۀ بسیار سادۀ مرحله چهارم جواب‌هایی می‌سازید که اولاً پیچیده‌اند و ثانیاً به نتیجه نمی‌رسند. مسئلۀ مرحلۀ سوم ذهن شما را به هم ریخته است و شما در همین زمان کوتاه عادت کرده‌اید که ساده فکر نکنید و نتوانید به یک مسئلۀ بسیار آسان جواب درست بدهید. در واقع اگر مسئلۀ مرحلۀ چهارم را همان ابتدا با شما درمیان می‌گذاشتم، بلافاصله و بدون فکر کردن به آن را حل می‌کردید. اما اکنون می‌توانید حساب کنید که برای همان مسئلۀ ساده، چقدر وقت صرف کرده‌اید!!

اما درمانی که من برای این مشکل پیشنهاد می‌کنم این است که:

اول فکر کردن برای پیدا کردن الگوریتم حل یک مسئله بسیار بهتر از حفظ کردن یک الگوریتم آماده است. با اینکه زمان‌بر است، اما حتماً باارزش است، این کار باعث می‌شود دانش‌آموز ایدۀ ساختن و حل مسئله را یاد بگیرد؛ حتی اگر تعدادش خیلی اندک باشد (هفته‌ای چند مسئله). پس دانش‌آموز ما می‌تواند علاوه بر فعالیت‌های قبلی خود، هفته‌ای چند مسئله را (تعداد مسئله‌ها به توانایی‌اش بستگی دارد) از صفر تا صد، خودش حل کند.

دوم، به کتاب درسی‌اش حتماً اهمیت دهد و آن را دست کم نگیرد. یعنی حتماً ابتدا کتاب درسی را بخواند و سپس کتاب کمک درسی را. به جرئت می‌توانم بگویم که کتاب درسی بسیار بهتر از هر کتاب کمکی، ریاضی را آموزش می‌دهد و ساده فکر کردن را به دانش‌آموز می‌آموزد؛ مخصوصاً کتاب‌های درسی جدید.

در پایان خالی از لطف نیست که این جمله ارزشمند از آلبرت اینشتین را یادآوری کنم: «ذهن را باید برای اندیشیدن به کار برد، نه انباشتن اطلاعات.»

***پی‌نوشت**

۱. دکتر مادهاوان باهاراتی، دکترای تکنولوژی آموزشی از انگلستان.

رسم پاره‌خطی با طول تقریبی پی

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی ارومیه

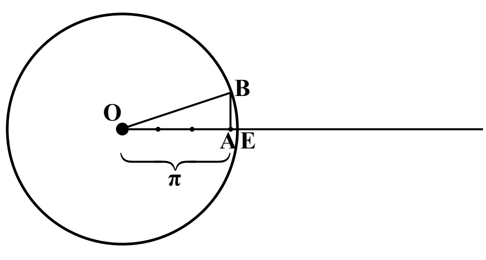
اشاره

«پی» عدد گنگی است که در بیشتر محاسبات ریاضی به نحوی حضور دارد. در هندسهٔ اقلیدسی ثابت شده که نسبت محیط هر دایره به قطر آن عدد ثابتی است. در آن زمان مسئله به رسم پاره‌خطی انجامید که درازایی برابر با این مقدار ثابت داشته باشد. لیکن از آنجا که رسم چنین خطی ناشدنی است، چاره را در آن دیدند که مقدار تقریبی مناسبی برای آن به‌دست آورند. در این مقاله، به برخی از این تقریب‌ها و روش رسم پاره‌خطی به درازای آن‌ها با خط‌کش، پرگار و گونیا خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها: عدد پی، رسم پاره‌خط، مقدار تقریبی

۱. ساده‌ترین تقریب عدد ۳ است که به کمک خط‌کش به سادگی قابل رسم است ($\pi\approx3$).

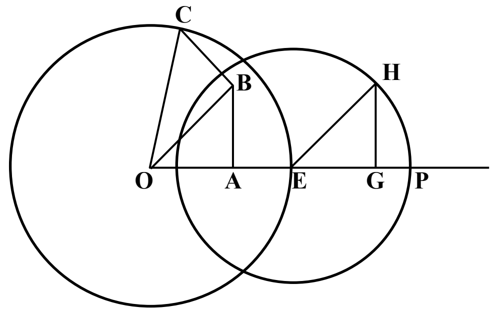
۲. تقریب دیگر برای π عدد $\sqrt{۱۰}$ است ($\pi\approx۳/۱۶۲۲$) که تا یک رقم اعشار صحیح است. این تقریب را هندیان باستان (حدود ۸۰۰ سال پیش از میلاد) برای π در نظر می‌گرفتند. برای رسم پاره‌خطی به طول $\sqrt{۱۰}$ به این طریق عمل می‌کنیم: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمهٔ ۱ و ۳ واحد رسم می‌کنیم (AB=۱ و OA=۳). طول وتر OB برابر $\sqrt{۱۰}$ است. به مرکز O و شعاع $OB=\sqrt{۱۰}$ دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در E قطع کند. OE پاره‌خطی با طول تقریبی π است.



شکل ۱.

۳. تقریبی دیگر برای π، $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ است ($\pi\approx۳/۱۴۶۲۲$) که تا دو رقم اعشار صحیح است. مانند بند قبل عمل می‌کنیم. به این صورت که ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمهٔ ۱ و ۱

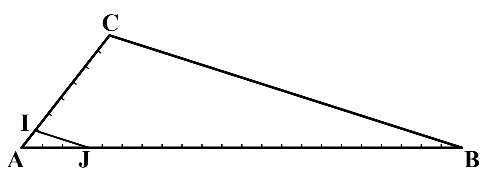
واحد رسم می‌کنیم (AB=۱ و OA=۱). طول وتر OB $\sqrt{۲}$ است. حال در نقطهٔ B با گونیا (یا خط‌کش و پرگار) عمودی بر OB رسم و روی آن BC را به طول ۱ واحد جدا می‌کنیم. در مثلث OBC طول وتر OC $\sqrt{۳}$ است. حال به مرکز O و شعاع OC دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در E قطع کند. سپس همانند شکل۲، مثلث قائم‌الزاویهٔ EGH به اضلاع قائمهٔ EG=۱ و GH=۱ را بنا می‌کنیم. طول وتر EH $\sqrt{۲}$ است. به مرکز E و شعاع EH دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در P قطع کند. OP پاره‌خطی با طول تقریبی π است.



شکل۲.

۴. یکی دیگر از تقریب‌های π، کسر $\frac{۲۲}{۷}$ است $(\pi = \frac{۲۲}{۷} = ۳/۱۴۲۸۵)$ که تا دو رقم اعشار صحیح است. برای ترسیم آن ابتدا با خط‌کش پاره‌خط AB را به درازای ۲۲ واحد و سپس از ابتدای این پاره‌خط AC را به طول ۷ واحد و با زاویه‌ای دلخواه رسم می‌کنیم. AC را با خط‌کش به ۷ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. از نقطهٔ C به نقطهٔ B وصل و سپس از نقطهٔ I (AI=۱) به موازات پاره‌خط CB، پاره‌خط IJ را می‌کشیم. AJ همان پاره‌خط موردنظر با طول تقریبی π است. بررسی درستی این مطلب به کمک قضیهٔ تالس و شکل ۳ در زیر آورده شده است:

$$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AJ}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۷} = \frac{AJ}{۲۲} \Rightarrow AJ = \frac{۲۲}{۷}$$



شکل۳.

۵. در این قسمت ابتدا لمی را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم: محیط هر دایره به‌طور تقریبی با قطر دایره به اضافهٔ یک‌پنجم طول ضلع مربع محاطی آن برابر است.

برهان: فرض کنیم R شعاع دایرهٔ محیطی و a طول ضلع مربع محاط در آن باشد. می‌دانیم: $R = \frac{a}{۲}\csc\frac{\pi}{۴}$ $(\csc\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha})$ و چون: $\csc\frac{\pi}{۴} = \sqrt{۲}$ و چون: $R = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و $a = R\sqrt{۲}$، در ادامه داریم:

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi r$$
$$\approx ۲ \times ۳/۱۴ \times R$$
$$= ۲R(۳ + ۰/۱۴)$$
$$\approx ۲R(۳ + \frac{\sqrt{۲}}{۱۰})$$
$$\sqrt{۲} \approx ۱/۴ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۱۰} \approx ۰/۱۴$$
$$= ۲R(۳ + \frac{۱}{۵}.\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$
$$= ۳(۲R) + \frac{۱}{۵}(R\sqrt{۲})$$
$$= ۳(۲R) + \frac{۱}{۵}a$$

حال از این لم برای رسیدن به مقدار تقریبی دیگری برای π استفاده می‌کنیم:

$$۲\pi R \approx ۳(۲R) + \frac{۱}{۵}(\sqrt{۲}R)$$
$$\Rightarrow \pi \approx ۳ + \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$$

حال برای داشتن پاره‌خطی به درازای $۳ + \frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ ابتدا مانند بند۳، پاره‌خطی به طول $\sqrt{۲}$ رسم می‌کنیم. سپس مانند بند ۴ یک‌دهم آن را جدا می‌کنیم. در پایان نیز با خط‌کش ۳ واحد به آن می‌افزاییم.

۶. در این روش ابتدا دایره‌ای به مرکز A و شعاع واحد و قطر دلخواه BC از آن رسم می‌کنیم. سپس در نقطهٔ C با گونیا پاره‌خط CE به طول ۳ واحد را بر دایره مماس می‌کنیم. حال یک زاویهٔ ۳۰ درجه طوری رسم می‌کنیم[۳] که رأس آن A و AB یک ضلع آن باشد. نقطهٔ تلاقی ضلع دیگر زاویهٔ ۳۰ درجه و مماس بر دایره در نقطهٔ B را D می‌نامیم.

پاره‌خط DE به درازای تقریبی π است، زیرا همان‌گونه که در شکل۴ مشهود است، داریم:

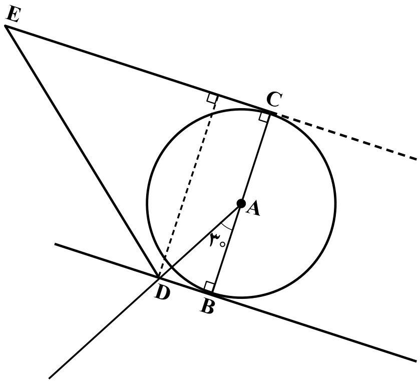
$$\tan\angle A = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB.\tan\angle A$$
$$\Rightarrow BD = ۱ \times \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$DE^2 = BC^2 + (CE - BD)^2 = 2^2 + (3 - \frac{\sqrt{3}}{3})^2$$

$$= 4 + (9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}) = \frac{40 - 6\sqrt{3}}{3} \approx 9/8692317$$

$$\Rightarrow DE \approx 3/14153333$$

که این تقریب برای π تا چهار رقم اعشار صحیح است.



شکل ۴.

تمرین: پاره‌خطی را رسم کنید که درازای آن $\frac{\sqrt{2}}{10} + 3$ باشد.

■ تحقیق ■

ردپای عدد (پی) در هرم بزرگ مصر

اهرام ثلاثهٔ مصر از عجایب هفتگانهٔ دنیای قدیم هســـتند. از این ســه هرم، قدمت هرم بزرگ به ۲۵۰۰ ســال پیش از میلاد می‌رسد. طول ضلع مربعی که هرم بزرگ روی آن بنا شده (قاعدهٔ هرم) ۲۳۰/۴ متر و ارتفاع هرم ۱۴۶/۵ متر اســت. نســبت $\frac{230/4}{146/5}$ را محاسبه و مقدار به‌دســت آمده را با π مقایســه کنید. وجوه جانبی هرم بزرگ با ســطح افقی زمین زاویهٔ ۵۱/۵۸ درجه می‌سازند. تانژانت این زاویه را که در واقع شــیب وجوه جانبی هرم اســت، حساب کنید و مقدار به‌دست آمده را با $\frac{4}{\pi}$ مقایسه کنید.

پی‌نوشت‌ها

۱. تقریب متداول برای جذر در قرون وسطا به‌صورت $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a+1}$ بود که برای $\sqrt{10}$ با اختیار $n = 10 = 3^2 + 1$ به‌صورت $\sqrt{1} = 3 + \frac{\ }{\ }$ در می‌آید. تقریب بهتر برای جذر از تعریف مشتق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

حال با اختیار $f(x) = \sqrt{x}$، $x = a^2$ و $\Delta x = b$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b} = f(a^2 + b) \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}} b \Rightarrow \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

۲. اگر a طول ضلع‌های nضلعی منتظم محاطی و R شعاع دایرهٔ محیطی باشد، رابطهٔ $R = \frac{a}{2}\csc\frac{\pi}{n}$ به سادگی قابل اثبات است.

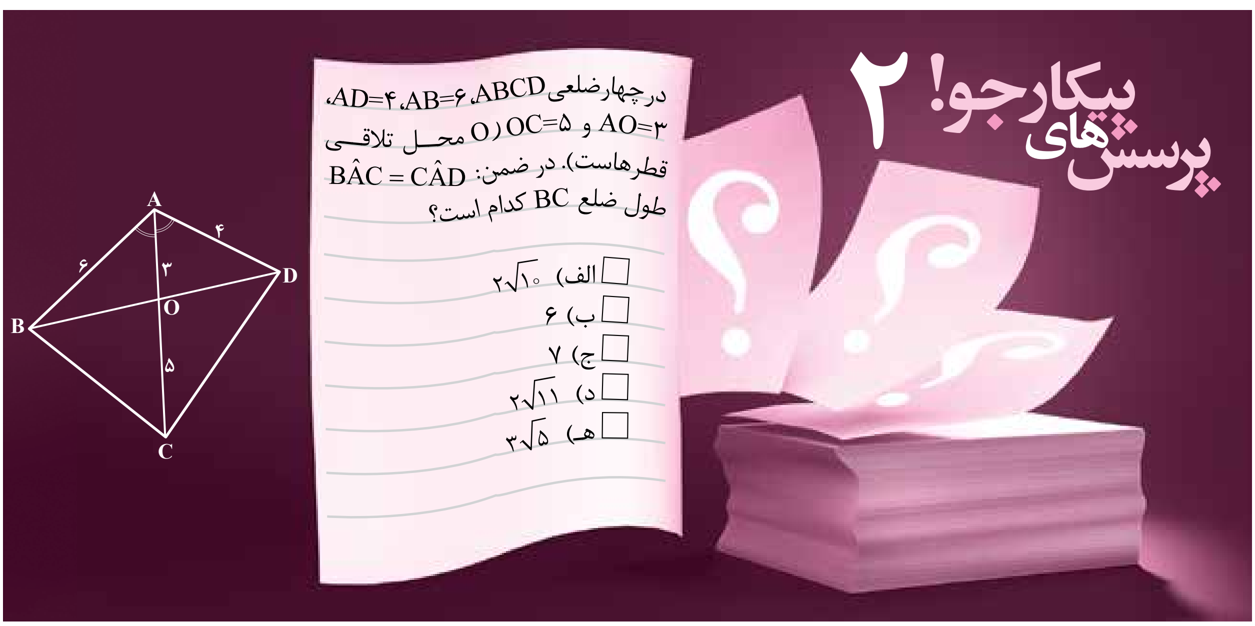
۳. برای رسم زاویهٔ ۳۰ درجه با خط‌کش و پرگار ابتدا پاره‌خط دلخواهی رسم می‌کنیم. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ آن پاره‌خط باز می‌کنیم و به مرکز دو سر پاره‌خط دو دایرهٔ هم‌اندازه می‌زنیم. یکی از نقاط تلاقی دایره‌ها را به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع و هر سه زاویهٔ آن ۶۰ درجه است. با خط‌کش و پرگار نیم‌ساز یکی از آن‌ها را رسم می‌کنیم تا دوتا زاویهٔ ۳۰ درجه داشته باشیم.

منابع

۱. بهاری‌پور، مهرداد. (بی‌تا). رسم تقریبی پاره‌خطی به اندازهٔ پی. هشتمین همایش ملی ریاضی. دانشگاه پیام نور. خرم‌آباد.

2. lemesurier, peter (1977). the great pyramid Decoded.

3. meisner, Gary (2012). phi, pi and the Great Pyramid of Egypt at Giza.



هانس کریستین آندرسن در دوران کودکی و نوجوانی ما نامی بسیار آشنا و محبوب بود. این نویسندهٔ دوست‌داشتنی قصه‌های کودکان، بیش از یکصد سال پیش در کشور دانمارک می‌زیست (۱۸۷۵-۱۸۰۵). او به کودکان و دنیای آن‌ها بسیار علاقه‌مند بود و در نتیجه بیشتر داستان‌های خود را برای کودکان نوشت. بعضی از قصه‌های او شهرت جهانی دارند و ما از همان‌جا با او آشنا شدیم، داستان‌هایی همچون جوجه اردک زشت، فندک جادویی، دخترک کبریت‌فروش و شاهزادهٔ خوش‌بخت.

در یکی از داستان‌های این نویسندهٔ نام‌دار، به نام «کلاوس کوچک و کلاوس بزرگ»، کلاوس کوچک و کلاوس بزرگ دو همسایه‌اند که اولی یعنی کلاوس کوچک شش روز در هفته برای کلاس بزرگ کار می‌کند و در این شش روز اسب او هم در اختیار کلاوس بزرگ است. اما در مقابل، کلاوس بزرگ فقط یک روز یعنی روزهای یکشنبه برای کلاوس کوچک کار می‌کند و در این یک روز چهار اسب او نیز در اختیار کلاوس کوچک است. بدیهی است که تقسیم کار ناعادلانه‌ای است! و به‌همین دلیل هم، مانند اغلب این‌گونه قصه‌ها، دست آخر این کلاوس کوچک است که طی ماجراهایی خوش‌بخت می‌شود و کلاوس بزرگ به سزای بدجنسی‌هایش می‌رسد. اما البته ممکن است ارزش کاری دو نفر یا دو اسب با هم برابر نباشد و در این صورت شاید تقسیم کاری فوق عادلانه باشد!

حال اگر فرض کنیم، ارزش یک روز کار کلاوس کوچک دو برابر ارزش یک روز کار اسب او و معادل نصف ارزش کاری یک روز کلاوس بزرگ باشد، ارزش یک روز کار هر یک از اسب‌های کلاوس بزرگ چند برابر ارزش یک روز کار اسب کلاوس کوچک باید باشد تا تقسیم کاری فوق عادلانه باشد؟!

آیا اتحاد اویلر تعمیم هم دارد؟

فربد فرازنده‌مهر
کارشناس ریاضی محض
دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«زیر ذره‌بین» عنوان سلسله مقالاتی است که در آن‌ها به مفاهیم، قضایا و مسائل ریاضی با دقت بیشتری نگریسته می‌شود. می‌کوشیم چیزهایی را ببینیم که با چشم غیرمسلح دیدنشان مشکل است.

در هر شماره موضوعی عنوان می‌شود و مورد بررسی قرار می‌گیرد. گذشته از این، شما هم می‌توانید مسئله یا موضوعی که مورد علاقه‌تان است و می‌خواهید زیر ذره‌بین قرار گیرد، به آدرس الکترونیکی پایان مقاله بفرستید تا در شماره‌های بعدی به آن بپردازیم.

با «اتحاد اویلر» آشنا هستید یا قرار است آشنا بشوید. اتحاد اویلر اتحادی جبری است که در آن، این رابطه بین هر سه متغیر حقیقی دلخواه، مانند a، b و c برقرار است:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc \qquad (1)$$

این اتحاد عموماً از دشوارترین اتحادهایی است که گاهی در دبیرستان با آن روبه‌رو می‌شویم. ما در این مقاله، با استفاده از ذره‌بین، سعی داریم نشان دهیم که این اتحاد، به غیر از دشوار بودن، زیبا هم هست.

ابتدا دو نتیجهٔ مهم از این اتحاد را بیان می‌کنیم:

نتیجهٔ ۱. اگر برای سه عدد حقیقی a، b و c داشته باشیم: $a+b+c=0$، خواهیم داشت:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

اثبات: در اتحاد اویلر قرار می‌دهیم: $a+b+c=0$ خواهیم داشت:

$$0\times(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$\Rightarrow 0=a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

نتیجهٔ ۲. برای هر سه عدد حقیقی مثبت، مانند x، y و z، واسطهٔ حسابی آن‌ها از واسطهٔ هندسی‌شان بزرگ‌تر است؛ یعنی داریم:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$$

اثبات: اعداد حقیقی a، b و c وجود دارند، به‌طوری که داریم: $x=a^3$، $y=b^3$ و $z=c^3$. (چرا؟) با جایگزین کردن a، b و c در نامساوی‌مان خواهیم داشت:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc \qquad (2)$$

پس کافی است نامساوی (۲) را ثابت کنیم. با جایگزین کردن a، b و c در اتحاد اویلر خواهیم داشت:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

کافی است نشان دهیم:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\ge 0$$

$a+b+c\ge 0$ (چـــرا؟) نهایتاً این باقی می‌ماند که نشان دهیم:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0$$

یا:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc \qquad (۳)$$

نامساوی (۳) نامساوی زیبا و معروفی است که یک راه اثبات آن به این صورت است:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2\ge 2ab+2ac+2bc$$
$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0 \qquad (۴)$$

که درستی نامساوی (۴) که با نامساوی (۳) معادل است، واضح است (چرا؟) و در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

حال به موضوع اصلی می‌پردازیم: آیا می‌توان اتحاد اویلر را تعمیم داد؟ ابتدا بیایید به تعداد متغیرها توجه کنیم. اتحاد اویلر برای سه متغیر است. اگر برای یک متغیر بود به چه صورت درمی‌آمد؟

فرض کنیم: $b=c=0$. با جایگزین کردن در (۱) داریم:

$$(a+0+0)(a^2+0+\ldots+0)=a^3+0+0+0$$
$$\Leftrightarrow a(a^2)=a^3$$

پس صورت یک‌متغیره صرفاً تعریف توان سوم را به ما می‌دهد. حال فرض کنیم: $c=0$. داریم:

$$(a+b+0)(a^2+b^2+0-ab-0-0)=a^3+b^3+0+0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

و این همان اتحاد موسوم به چاق و لاغر است. پس صورت دو متغیرهٔ اتحاد اویلر را هم به‌دست آوردیم. حال با نگاه دقیقی به صورت سه متغیره، پا را فراتر می‌گذاریم و صورت چهارمتغیرهٔ را تخیل می‌کنیم.

ابتدا بگذارید سمت چپ تساوی را ببینیم. پرانتز اول در هر سه صورت اتحاد، برابر است با «مجموع متغیرها».

یعنی اگر اتحاد خیالی‌مان را بـــرای چهار عدد a، b، c و d در نظـر بگیریم، به نظر می‌آیـد پرانتز اول باید به این صورت باشد:

$$a+b+c+d$$

پرانتز دوم از دو قســمت تشکیل شده است. قسمت اول نیز این ایده را به ما می‌دهد که باید به‌صورت «مجموع مجذورات متغیرها» باشد؛ زیرا این اتفاق در هر سه صورت اتحاد افتاده است. پس قسمت اول برابر است با:

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

قســمت دوم پرانتـــز دوم دقت و تعمق بیشـــتری می‌طلبد. در صورت یک‌متغیره، برای قسمت دوم چیزی نداریم. در صورت دو متغیره $-ab$، و در صورت سه‌متغیره $-ab-ac-bc$ را داریم. شـــاید قاعدهٔ مخفی این باشد که مجموع قرینهٔ همهٔ ترکیب‌های دوتایی متغیرها در قسمت دوم می‌آیند؛ یعنی:

$$-ab-ac-ad-bc-bd-cd$$

تخیلمان را ادامه می‌دهیم و به ســراغ قسمت اول سمت راســت تساوی می‌رویم. بررســی هر سه صورت اتحاد، ســاده‌ترین چیزی که پیشنهاد می‌کند این است: «مجموع مکعبات متغیرها»؛ یعنی:

$$a^3+b^3+c^3+d^3$$

و با یک بررسی مشابه آنچه که در قسمت دوم پرانتز

این اتحاد عموماً از دشوارترین اتحادهایی است که در دبیرستان با آن روبه‌رو می‌شویم. ما در این مقاله، با استفاده از ذره‌بین، سعی داریم نشان دهیم که این اتحاد، به غیر از دشوار بودن، زیبا هم هست

دوم سمت چپ انجام دادیم، ماجراجویی‌مان را کامل می‌کنیم و مدعی می‌شویم که قسمت دوم سمت راست برابر است با مجموع سه برابر قرینهٔ همهٔ ترکیبات سه‌تایی متغیرها؛ یعنی:

$$-3abc-3abc-3acd-3bcd$$

پس صورت چهار متغیرهٔ تخیلی‌مان به این صورت است:

$$(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd)$$
$$=a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abc-3acd-3bcd$$

حال وقت آن است که بررسی کنیم: آیا این «شاید»، «به‌نظر می‌رسد»، «تخیل می‌کنیم» و... می‌تواند به «یقیناً» تبدیل شود یا خیر:

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd)\\&=a^3+ab^2+ac^2+ad^2-(a^2)d-(a^2)c-(a^2)d-abc-abd\\&-acd+(a^2)b+b^3+bc^2+bd^2-ab^2-abc-abd-(b^2)c\\&-(b^2)d-bcd+(a^2)c+(b^2)c+c^3+cd^2-abc-ac^2-acd\\&-bc^2-bcd-(c^2)d+(a^2)d+(b^2)d+(c^2)d+d^3-abd-acd\\&-ad^2-bcd-bd^2-cd^2\\&=a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abc-3acd-3bcd\end{aligned}$$

پس تخیلمان به حقیقتی منجر شد.

حال که صورت چهار متغیرهٔ اتحاد اویلر را به‌دست آورده‌ایم، از پیچیدگی و زیبایی فراتر می‌رویم و به کاربرد می‌رسیم و دو مسئله مطرح می‌کنیم:

مسئلهٔ ۱. ثابت کنید اگر: $a+b+c+d=0$، آن‌گاه:

$$a^3+b^3+c^3+d^3=3(abc+abc+acd+bcd)$$

مسئلهٔ ۲. اگر دستگاه معادلات زیر برای x، y، z و t‌ی نامنفی جواب داشته باشد:

$$\begin{cases}x+y+z+t=a\\x^2+y^2+z^2+t^2=b\\x^3+y^3+z^3+t^3=c\\xy+xz+xt+yz+yt+zt=d\end{cases}$$

(برای a، b، c و d‌ی حقیقی و نامنفی)، حداقل مقدار c را (برحسب a، b و d) بیابید.

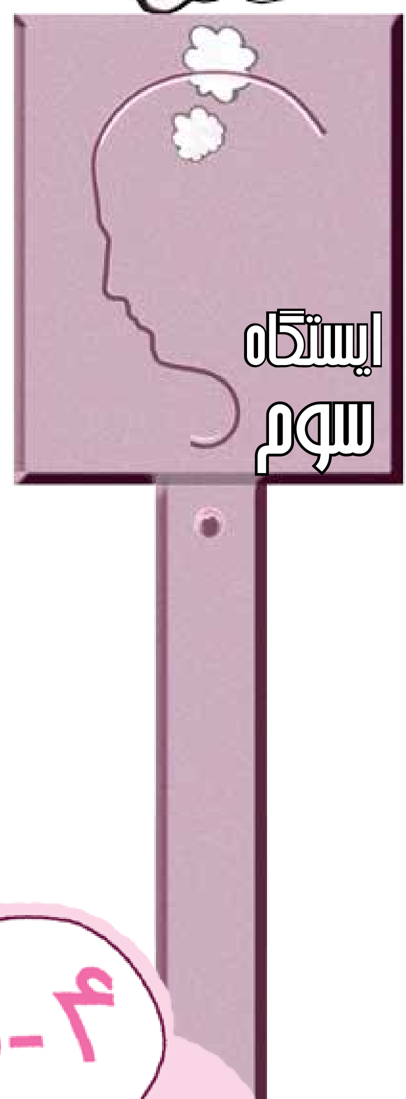
راهنمایی: اگر از اتحادی که به‌دست آوردیم استفاده کنید، مسئله دشوار نیست.

در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که اتحاد اویلر را به‌صورت n- متغیره هم می‌توانیم تعمیم دهیم. آیا می‌توانید صورت پنج‌متغیرهٔ آن را (که طبیعتاً طولانی‌تر است) بنویسید؟

اتحاد n- متغیرهٔ اویلر به‌صورت خلاصهٔ زیر قابل بیان است:

$$\Big(\sum_{\text{دوری}}a\Big)\Big(\sum_{\text{دوری}}a^2-\sum_{\text{دوری}}ab\Big)=\sum_{\text{دوری}}a^3-\sum_{\text{دوری}}abc$$

دو حکایت از ریاضی‌دان!



حکایت اول: روزی از یک ریاضی‌دان پرسیدند: «مفهوم **تعریف‌ناپذیرها** یا همان **مفاهیم اولیه**، همچون نقطه، خط و مجموعه چیست؟ آخر اگر چیزی را نتوان تعریف کرد، چگونه می‌توان از آن برداشت یا تصوری ذهنی داشت؟»

ریاضی‌دان گفت: «آیا می‌توانید معنی کلمهٔ انگلیسی The را از روی یک فرهنگ لغت **انگلیسی ـ انگلیسی** برای من بخوانید؟!»

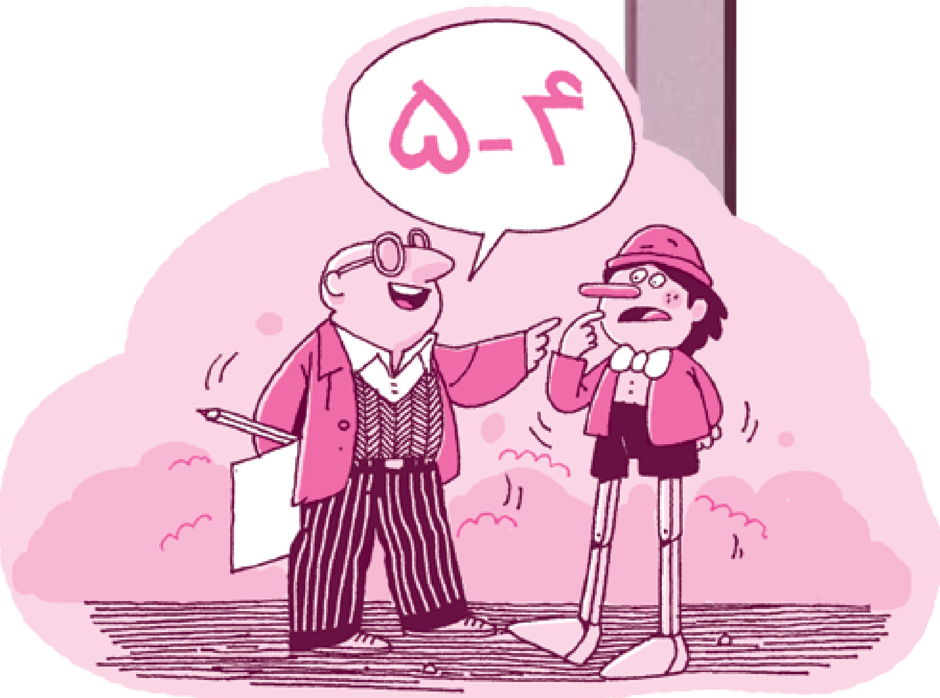
برایش چنین خواندند: «The definite article».

ریاضی‌دان لبخندی زد و گفت: «بسیار خب! اگر کسی مفهوم The را نداند، از این تعریف چه می‌فهمد؟!»

حکایت دوم: روزی بیکاره‌ای از یک ریاضی‌دان پرسید: «اینکه می‌گویند از هر فرض نادرستی می‌توان نتیجهٔ دلخواهی گرفت (استنتاج به انتفای مقدم)، یعنی چه؟» ریاضی‌دان گفت: «مثلاً من می‌گویم: اگر ۴=۵ باشد، آن‌گاه تو **پینوکیو** هستی!»

آن شخص گفت: «چگونه؟!»

ریاضی‌دان گفت: «فرض کنیم ۴=۵ باشد. از دو طرف این تساوی ۳ واحد کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود: ۲=۱. تو و پینوکیو دو نفرید، پس یک نفرید!»



مولوی و هزار

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

پرواضح است که بزرگ‌ترین عدد در دنیای ریاضی وجود ندارد. اما در دنیای واقعی در هر دورۀ تاریخی، بزرگ‌ترین عدد برای انسان‌های آن دوره وجود دارد و معنی می‌دهد. عدد هزار بین فارسی‌زبان‌ها نمادی از عدد بزرگ است که شاعران و متفکران هم به آن بسیار پرداخته‌اند. مثلاً **حافظ** در بیت معروف

صد هِزاران گل شکفت و بانگ مرغی برنخواست
عندلیبان را چه پیش آمد هَزاران را چه شد

توجه ویژه‌ای به کلمۀ «هزار» داشته است.

اما بین متفکران ایران‌زمین، **مولانا جلال‌الدین محمد بلخی**، معروف به «مولوی»، صاحب کتاب ارزشمند «مثنوی معنوی»، ظاهراً علاقۀ بسیار زیادی به ریاضی به‌ویژه عدد هزار دارد. در این مختصر مثنوی را با این هدف بررسی می‌کنیم که دریابیم، بزرگ‌ترین عددی که مولانا با آن آشنا بوده و از آن استفاده کرده، چه عددی بوده است.

هزار، صدهزار و صدهزاران عددهایی هستند که مولانا به آن‌ها علاقۀ زیادی داشته است. در کتاب مثنوی معنوی، مولوی برای اولین‌بار در «حکایت بقال و طوطی» از کلمۀ صدهزاران، و البته در مصرع دوم هم از عدد ۷۰ استفاده کرده است:

صدهزاران این چنین اشباه بین
فرقشان هفتاد ساله راه بین

در ادامۀ همین داستان باز هم از کلمۀ هزاران استفاده کرده است:

در هزاران لقمه یک خاشاک خرد
چون درآمد حس زنده پی ببرد

اما «داستان آن پادشاه جهود کی نصرانیان را می‌کشت از بهر تعصب» داستانی طولانی است و مولانا در جاهای متفاوت آن از عددهای بزرگ ریاضی استفاده کرده است، به‌طوری که می‌توان داستان را با بیت‌هایی که دارای عدد و رقم هستند، خلاصه کرد. اما خلاصۀ داستان به قرار زیر است:

در این داستان که در زمان ابتدای دین مسیحیت پس از حضرت **عیسی**(ع) اتفاق می‌افتد، پادشاهی جهود (یهودی) که تعصب زیادی به دین یهود داشته است، بسیاری از مؤمنان را به دلیل این تعصب می‌کشد:

صدهزاران مؤمن مظلوم کشت
که پناهم دین موسی را و پشت

اما پادشاه وزیری حیله‌گر داشت که به پادشاه می‌گوید این کار فایده ندارد و آن‌ها (مسیحیان) دین خود را پنهان می‌کنند:

سر پنهان است در صد غلاف
ظاهرش با توست و باطن برخلاف

پس تو مرا از خود به جرم مسیحی‌بودن بران و من در بین آن‌ها نفوذ می‌کنم و خودم را مسیحی جا می‌زنم. پس از نفوذ بین آن‌ها بیان می‌کند که من حاضرم:

بهر عیسی جان سپارم سر دهم
صدهزاران منتش بر خود نهم

در نهایت حیلۀ وزیر کارگر می‌شود و:

صدهزاران مرد ترسا سوی او
اندک‌اندک جمع شد در کوی او

و بعد از این مولانا گله می‌کند و هشدار می‌دهد که مواظب باشید:

صدهزاران دام و دانه‌ست ای خدا
ما چو مرغان حریص بی‌نوا

ولی در آخر باز شکر می‌کند و امید می‌دهد که:

گر هزاران دام باشد در قدم
چون تو با مایی نباشد هیچ غم

وزیر بعد از این، رهبری اقوام مختلف مسیحیان را به‌دست می‌گیرد:

قوم عیسی را بد اندر دار و گیر
حاکمانشان ده امیر و دو امیر
این ده و این دو امیر و قومشان
گشته بند آن امیر بد نشان

سپس به فکر تفرقه‌افکنی می‌افتد و تصمیم به خودکشی می‌گیرد. اما قبل از خودکشی به هر یک از بزرگان قوم دست‌نوشته‌های مختلفی به‌عنوان جانشین می‌دهد تا ضربۀ نهایی را به مسیحیان وارد کند:

در یکی گفته بکش باکی مدار
تا عوض بینی نظر را صدهزار
در یکی گفته که صد یک چون بود
این کی اندیشد مگر مجنون بود

اما در ادامه مولانا بیان می‌کند که **موسی** و عیسی فرقی ندارد و اینکه اختلاف بین پیامبران در صورت روش است، نی در حقیقت:

جامهٔ صد رنگ از آن خم صفا
ساده و یک رنگ گشتی چون صبا
گرچه در خشکی هزاران رنگ‌هاست
ماهیان را با یبوست جنگ‌هاست
صدهزاران بحر و ماهی در وجود
سجده آرند پیش آن اکرام و جود

مولانا نتیجه می‌گیرد که در این مکر، وزیر دچار خسارت شده است؛ چرا که با این کار با خداوند در افتاده است:

با چنان قادر خدایی کز عدم
صد چون عالم هست گرداند به دم
صد چو عالم در نظر پیدا کند
چون‌که چشمت را به خود بینا کند

و در ادامه در سه بیت متوالی بیان می‌کند:

صدهزاران نیزه فرعون را
در شکست از موسیی با یک عصا
صدهزاران طب جالینوس بود
پیش عیسی و دمش افسوس بود
صدهزاران دفتر اشعار بود
پیش حرف امیی‌اش عار بود

و اینکه:

وزر او و صد وزیر و صدهزار
نیست گرداند خدا از یک شرار

اما در آخر بین مؤمنان جنگ درمی‌گیرد و نتیجهٔ آن:

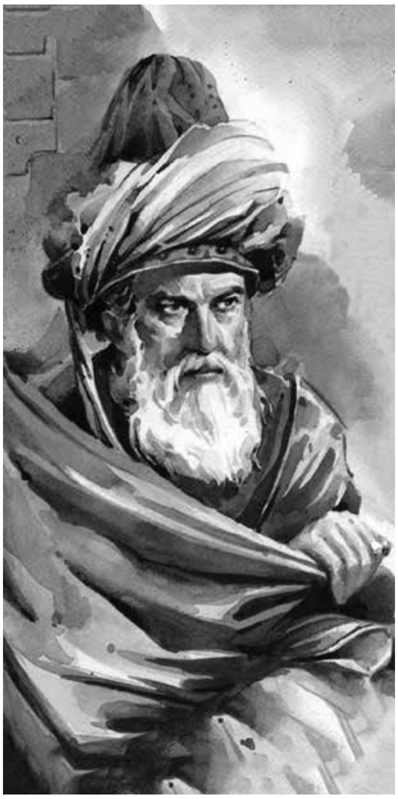
صدهزاران مرد ترسا کشته شد
تا ز سرهای بریده پشته شد

اما به احتمال زیاد بزرگ‌ترین عددی که مولانا با آن آشنا بوده و از آن استفاده کرده، در حکایت «سؤال رسول رم از خلیفهٔ دوم از سبب ابتلای ارواح با این آب و گل جسم» آمده است که می‌فرماید:

صدهزاران فایده‌ست و هر یکی
صدهزاران پیش آن یک اندکی

به‌عبارت دیگر، این عدد دست‌کم صدهزاران، صدهزاران‌تاست که ده میلیارد می‌شود. نکتهٔ جالب استفاده از پیمانهٔ صدهزارتایی است که هر واحد آن صدهزارتاست.

هر چند سخن گفتن و نوشتن در مورد آثار و شخصیت بزرگی همچون مولانا کار سختی است و از عهدهٔ بزرگان و مولوی‌شناسان برمی‌آید، اما با توجه به اینکه



تا به حال در این مورد کاری مشاهده نشده بود، بر آن شدم تا این برداشت خود را به دیگر دوستان عرضه کنم و دیگر اینکه به قول مولانا:

آب جیحون را اگر نتوان کشید
هم ز قدر تشنگی نتوان برید

پرسش‌های پیکارجو! ۴

چند زوج مرتب از اعداد صحیح و مثبت (x,y) یافت می‌شوند، به‌طوری که $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{100}$ باشد؟

الف) ۱۰
ب) ۱۵
ج) ۲۰
د) ۲۵
هـ) ۵

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

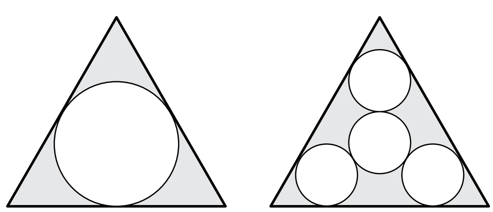
اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

مسئله‌ها

۳۲۱. در شکل ۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع برابر مفروض‌اند. در مثلث اول ناحیهٔ خارج دایرهٔ محاطی رنگ شده است و در شکل دوم ناحیهٔ خارج از چهار دایرهٔ یکسان که مطابق شکل برهم مماس هستند. کدام‌یک از دو ناحیهٔ رنگی بزرگ‌تر است؟



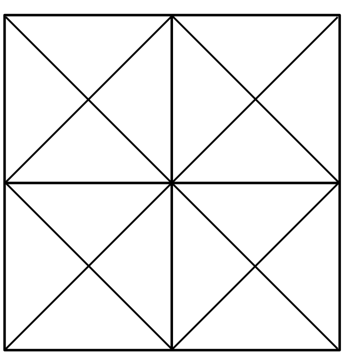
شکل ۱.

۳۲۲. در شکل ۲ به جای مربع‌ها می‌توانیم علامت + یا − بگذاریم، اما حداکثر از سه علامت − می‌توانیم استفاده کنیم.

۱□۲□۳□۴□۵□۶□۷□۹□۱۰=۳۵

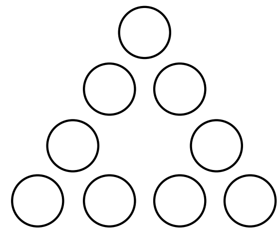
چند راه برای پرکردن خانه‌ها وجود دارد؟

۳۲۳. چند مثلث در شکل ۲ وجود دارد؟



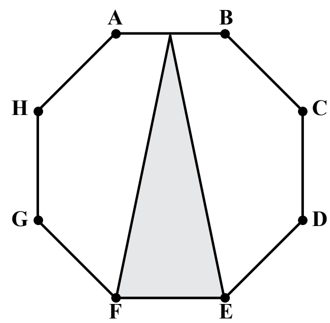
شکل ۲.

۳۲۴. عددهای ۱ تا ۹ را درون دایره‌ها (شکل ۳). طوری نوشته‌ایم که مجموع اعداد هر ضلع برابر ۱۷ شود. مجموع اعداد روی رأس‌هـــا را بیابید. چند روش برای نوشتن ۹ عدد وجود دارد؟



شکل ۳.

۳۲۵. در شکل ۴ چه کسری از هشت‌ضلعی منتظم رنگ شده است؟

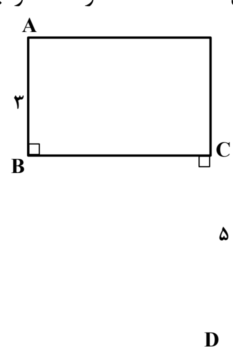


شکل ۴.

۳۲۶. یک ظرف شیشه‌ای پر از عسل ۷۵۰ گرم وزن دارد. اگر یک‌سوم عسل را خالی کنیم، وزن ظرف به ۵۵۰ گرم می‌رسد. وزن ظرف خالی چقدر است؟

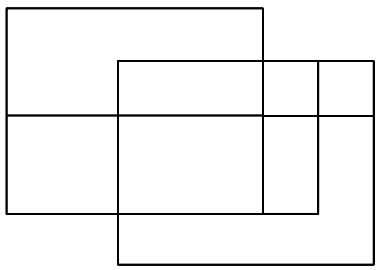
۳۲۷. دو عدد طبیعی هستیم که حاصل ضربمان برابر ۱۰۰۰ است، اما هیچ‌کدام سمت راست خود رقم صفر نداریم. ما چه عددهایی هستیم؟

۳۲۸. در شکل ۵، BC=۶. اندازهٔ AD را به‌دست آورید.



شکل ۵.

۳۲۹. آیا می‌توان شکل ۶ را با یک حرکت خودکار رسم کرد؟ در واقع مجاز نیســـتیم خـــودکار را از روی کاغذ برداریم تا زمانی که شکل کامل شود.



شکل ۶.

۳۳۰. اگر x عددی حقیقی باشد، کمترین مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$y=\left|\left|\left|x-۱۰\right|+۱۰\right|-۱۰\right|+۱۰$$

راه‌حل‌ها

۲۹۱. تابع f از IR به IR در تساوی f(x)f(y)=f(x-y) به ازای هر x و y صدق می‌کند. f(۲۰۱۷) را به دست آورید.

با جای‌گذاری $x=y=۰$ نتیجه خواهد شـــد: $f(۰)=۰$ یـــا ۱. اگر به‌جـــای x، y را جای‌گذاری کنیم، خواهیم داشت: $f(x)^۲=f(۰)$. اگر $f(۰)=۰$، آن‌گاه برای هر $x\in R$ داریم: $f(x)=۰$ و در نتیجه: $f(۲۰۱۷)=۰$. اگر: $f(۰)=۱$، با جای‌گذاری $x=۰$ خواهیم داشت: $f(y)=f(-y)$. همچنین:

$$f(x)f(y)=f(x-y)=f(x)f(-y)=f(x+y)$$

در نتیجه: $f(x-y)=f(x+y)$. بنابراین:

$$f(۰)=f(\frac{x}{۲}-\frac{x}{۲})=f(\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲})=f(x)$$

پس: $f(۲۰۱۷)=۱$.

۲۹۲. پانزده رقم ۱ در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌خواهیـــم با نوشـــتن چنـــد علامت «+» بیـــن آن‌ها، حاصل جمعی بســـازیم که مضـــرب ۳۰ باشـــد. به چند طریق ایـــن کار امکان‌پذیر اســـت؟ (برای مثال S=۱۱۱+۱+۱۱+۱۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱۱ یکـــی از پاسخ‌هاست.)

چـون ۱۵ رقم یک داریـم، بنابراین حاصل جمع همیشه مضرب ۳ خواهد بود. پس کافی است حاصل جمع مضرب ۱۰ باشد. چون هر جمعوند رقم یکانی برابر ۱ دارد، پس باید ۱۰ جمعوند داشته باشیم و برای این کار باید از ۹ علامت + استفاده کنیم. چون ۱۴ جای خالی بین رقم‌های ۱ وجود دارد، پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر $\binom{14}{9}$ خواهد بود.

۲۹۳. فرض کنید A، B، C، D، E و F، شش نقطه روی یک دایره باشند (با همین ترتیب). همچنین فرض کنید، X نقطهٔ تقاطع AD و BE، Y نقطهٔ تقاطع AD و CF، و Z نقطهٔ تقاطع CF و BE باشند. اگر X روی پاره‌خط BZ و AY و Y روی پاره‌خط CZ باشند و داشته باشیم: AX=۳، BX=۲، CY=۴، DY=۱۰، EZ=۱۶ و FZ=۱۲، مطلوب است محیط مثلث XYZ.

با فرض: XY=z، YZ=x و ZX=y و به کمک قوت یک نقطه داریم:

$$3(z+10)=2(y+16),\ 4(x+12)=10(z+3),\ 12(x+4)=16(y+2)$$

با حل معادله‌ها به جواب $(x,y,z)=(\frac{14}{3},\frac{9}{2},\frac{11}{3})$ می‌رسیم. در نتیجه محیط برابر است با: $\frac{77}{6}$.

۲۹۴. تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادلهٔ ۶x+۱۰y+۱۵z=۳۰۰۰ را به دست آورید.

با توجه به معادله x باید مضرب ۵، y باید مضرب ۳ و z باید مضرب ۲ باشد. با فرض، y=۳Y، x=۵X و z=۲Z خواهیم داشت: X+Y+Z=۱۰۰.

در نتیجه تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادله برابر است با: $N=\binom{99}{2}$.

۲۹۵. ABCD یک چهارضلعی محدب است و داریم AC=۷ و BD=۱۷. فرض کنید M، N، P و Q نقاط میانی AB، BC، CD و DA باشند. حاصل MN^2+PQ^2 را بیابید.

می‌توان ثابت کرد MPNQ یک متوازی‌الاضلاع است با طول اضلاع ۳/۵ و ۸/۵. در نتیجه: $MN^2+PQ^2=2(3/5^2+7/5^2)$ و مقدار خواسته شده برابر است با: ۱۶۹. در محاسبهٔ فوق از این قضیه استفاده کرده‌ایم که در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربع‌های اضلاع با مجموع مربع‌های قطرها برابر است.

۲۹۶. زوج (B و A) از زیرمجموعه‌های X={۱, ۲, ..., ۱۳۹۶} را ویژه می‌نامیم، هرگاه نه A زیرمجموعهٔ B باشد و نه B زیرمجموعهٔ A. تعداد زوج‌های ویژه را به‌دست آورید.

فرض کنید: X={۱,۲,...,n}. تعداد کل زوج‌های (A,B) از زیرمجموعه‌های X برابر است با: 4^n (برای A و B هر کدام 2^n انتخاب داریم). تعداد زوج‌های (A,B) با شرط A⊆B برابر است با: 3^n (چون برای هر عضو x∈X، ۳ انتخاب وجود دارد: فقط در B، عضو هر دو، عضو هیچ‌کدام). همچنین تعداد زوج‌های (A,B) با شرط B⊆A برابر است با: 3^n. در نتیجه تعداد زوج‌های ویژه برابر است با: $N=4^n-3^n-3^n+2^n$ (جملهٔ آخر تعداد زوج‌های (A,B) با شرط A=B است).

۲۹۷. روی تختهٔ سیاه عددهای ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده‌اند. در هر دقیقه، دو عدد a و b را پاک می‌کنیم و دو عدد $\frac{a+b}{2}$ و $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^{-1}$ را به جای آن‌ها می‌نویسیم. بعد از چند مرحله به وضعیتی رسیده‌ایم که همهٔ عددها به جز یک عدد، برابر ۱ هستند. آن عدد چیست؟

با توجه به تساوی $\frac{x+y}{2}.2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^{-1}=xy$ می‌توان نتیجه گرفت که حاصل‌ضرب عددها روی تختهٔ سیاه همیشه ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه در مرحلهٔ آخر عددی که مخالف ۱ است برابر است با: N=۱۰۰!.

۲۹۸. چند تابع از مجموعهٔ {۱,۲,...,n} به مجموعهٔ {۱, ۲, ..., m} می‌توان نوشت، به طوری که برای هر ۱≤k≤n، f(k)≥k-۲؟

برای $f(1)$ باید: $f(1)\geq -1$. پس m انتخاب برای مقدار $f(1)$ وجود دارد. برای $f(2)$ باید: $f(2)\geq 0$ و به‌طور مشابه m انتخاب وجود دارد. برای $f(3)$، $m-1$ انتخاب و برای $f(4)$، $m-2$ انتخاب وجود دارد. اگر $n\leq m+2$، آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌ها برای f برابر خواهد بود با: $N = m.m.(m-1)...(m-n+2)$ و یا: $N = \frac{m.m!}{(m-n+1)!}$. اگر $n\geq m+3$، آن‌گاه باید: $f(n)\geq n-1\geq m+1$ که غیرممکن است. پس

هیچ تابعی با شرایط خواسته شده وجود ندارد.

۲۹۹. لاستیک‌های عقب اتومبیل بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های جلو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع باید جای لاستیک‌های جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

اگر لاستیک عقب اتومبیل بسته شود سرعت فرسایش آن $\frac{1}{25000}$ و اگر جلوی اتومبیل بسته شود سرعت فرسایش آن $\frac{1}{15000}$ است. فرض کنید بعد از x کیلومتر لاستیک‌ها را جابه‌جا کرده‌ایم. مقدار باقی‌مانده از لاستیک‌ها و سرعت فرسایش آن‌ها در ادامه، ما را به تساوی زیر می‌رساند چون می‌خواهیم هر دو در یک زمان فرسایش یابند:

$$(1-\frac{x}{15000})\frac{1}{25000} = (1-\frac{x}{25000})\frac{1}{15000} \Rightarrow x = 7500\,km$$

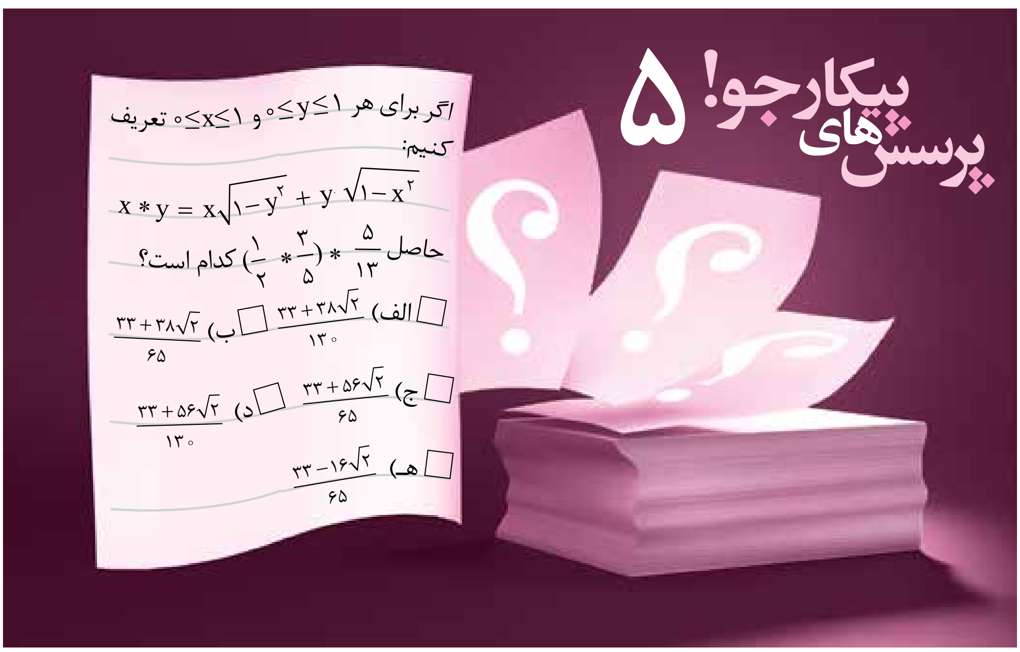
۳۰۰. اگر برای هر $n\in N$، ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^n+x^{n-1}+...+x=n+2$ را a_n بنامیم، ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ هم‌گراست و حد آن را به دست آورید.

با فرض $f_n(x) = x + x^2 + ... + x^n$، $f(n)$ روی $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است. از طرف دیگر، $f_n(1)=n<n+2$. بنابراین: $a_n>1$. ثابت می‌کنیم: $a_{n+1}<a_n$.

$$f_n(a+1) = n+3-a_{n+1}^{n+1}$$
$$= (n+2)+(1-a_{n+1}^{n+1}) < n+2 = f_n(a_n)$$

پس چون f_n اکیداً صعودی است (روی مقادیر مثبت)، داریم: $a_{n+1}<a_n$.

در نتیجه دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی و کران‌دار، و نیز هم‌گراست. اگر: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ حد و: $L>1$، آن‌گاه می‌توان n با عددی به قدر کافی بزرگ در نظر گرفت که $L^n>n+2$. در این صورت L از x_n بزرگ‌تر خواهد شد که تناقض است. پس: $L=1$.



پال گِلِندینینگ

ریاضیات در چند دقیقه

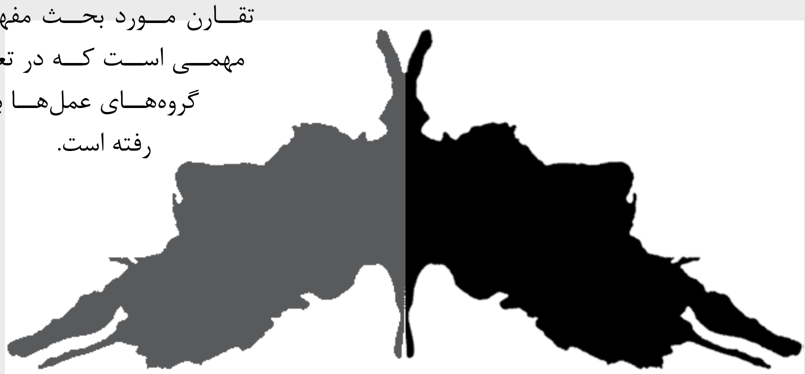
ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور**

معرفی تقارن

این اعمال را می‌توان ترکیب کرد. در صورتی‌که آشکار نشود که کاربرد یک تبدیل مفروض در یک شیء آن را تغییر می‌دهد، شیء را تحت آن تبدیل «ناوردا» (invariant) می‌گویند.

تقارن در زمینه‌های دیگر ریاضیات، که در آن‌ها هر عملی که بر یک شیء ریاضیات وارد شود و بعضی از ویژگی‌های آن را حفظ کند، سودمند است.

تقارن مورد بحث مفهوم مهمی است که در تعریف گروه‌های عمل‌ها به‌کار رفته است.



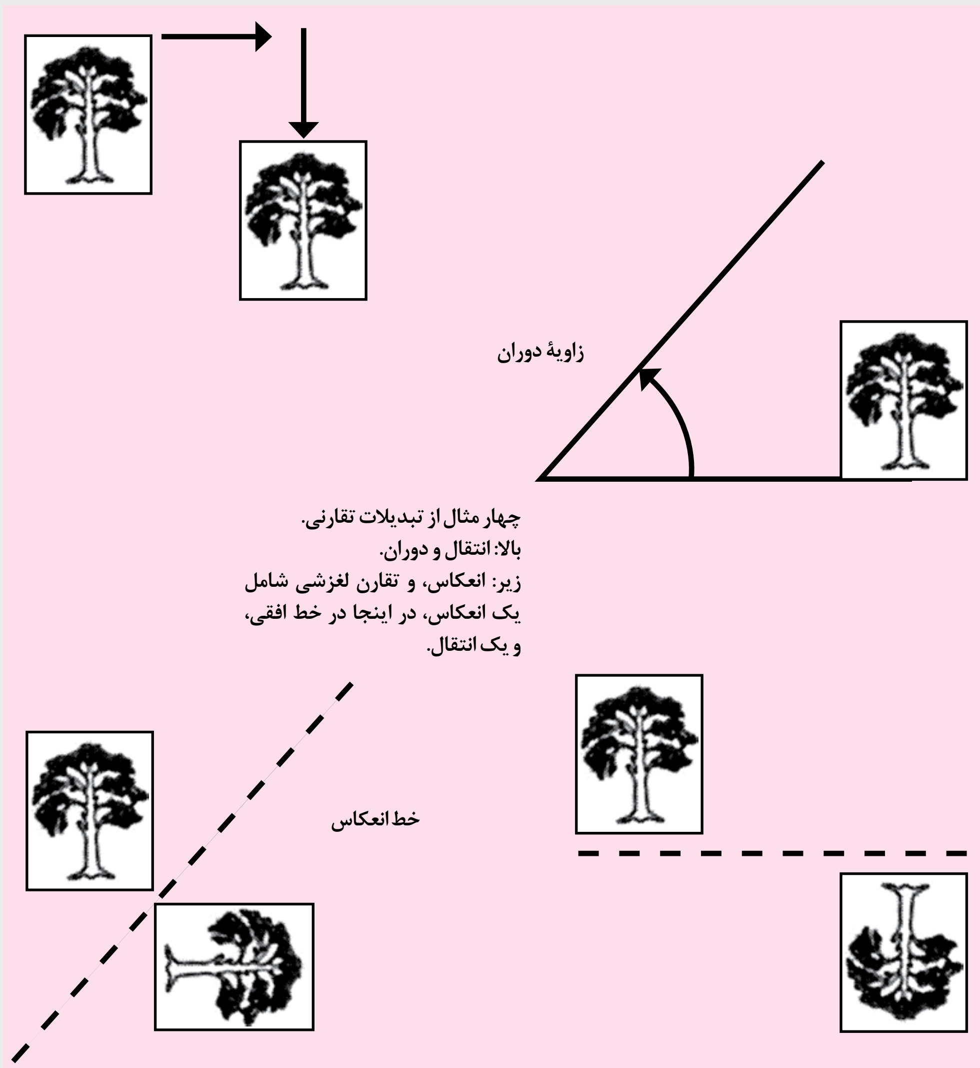
انتقال، دوران و انعکاس

در هندسه سه نوع تقارن اساسی وجود دارند که توسط آن‌ها می‌توانیم یک شیء را در حالی‌که شکل اصلی آن را حفظ کرده‌ایم، تبدیل کنیم.

«انتقال‌ها» (translations) شـــکل را در جهتی مفروض حرکت می‌دهند، اما طول‌ها یا زاویه‌هایی را که آن شیء را مشخص می‌کنند، تغییر نمی‌دهند.

«دوران‌ها» (rotations) شکل را دور نقطه‌ای در صفحه می‌چرخانند و در این مورد هم این کار را بدون تغییر دادن طول‌ها و زاویه‌های آن انجام می‌دهند.

«انعکاس‌ها» (refelctions) در حالت دوبعدی تصویر آینه‌ای شـــکل را نسبت به خطی مفروض، مشهور به «محور تقارن» (axis of symmetry)، به دست می‌دهند. اما در حالی‌که انتقال‌های دیگر را می‌توان با لغزاندن شـــکل در صفحه‌اش به‌دست آورد، انعکاس‌ها را تنها با برداشتن شیء از صفحه و برگرداندن آن می‌توان حاصل کرد. باز هم در این مورد طول‌ها یا زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند. در پاره‌ای از حالت‌ها مشـــمول کردن انعکاس‌ها در تعریف تقارن ممکن اســـت نامناســـب باشد. برای مثال، دو طرف یک سکّه هم‌ارز نیستند، زیرا یک طرف شامل تصویر و طرف دیگر خالی است.



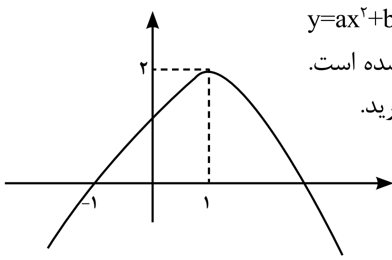
چهار مثال از تبدیلات تقارنی.
بالا: انتقال و دوران.
زیر: انعکاس، و تقارن لغزشی شامل یک انعکاس، در اینجا در خط افقی، و یک انتقال.

هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

ریاضی دهم

۱. دو برابر مقدار مثبتی از معکوس آن، ۹ واحد کم‌تر است. این مقدار را پیدا کنید.

۲. نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت مقابل داده شده است. a، b و c را به‌دست آورید.

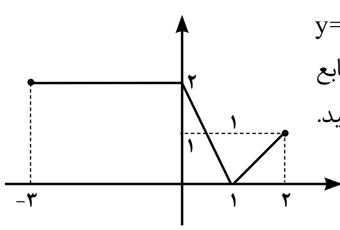


۳. اگر مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $x^2\ge 2x+8$ برابر با $|x-a|\ge b$ باشد، a و b را به‌دست آورید.

۴. به ازای کدام مقدار m، نمودار سهمی مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور xها و مماس بر آن است.

حسابان

۱. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(|x+1|)$ را رسم کنید.



۲. با فرض آنکه به ازای هر x داشته باشیم: $f(2-x)+4f(2+x)=2x$ ابتدا ثابت کنید: $f(x)=\frac{2}{3}(x-2)$. سپس محل تلاقی نمودارهای $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را به‌دست آورید.

۳. نمودار تابع $f(x)=\frac{3^{2x}-1}{3^x-1}$ را رسم کنید و با توجه به آن دامنه و برد f را به‌دست آورید.

۴. دمای یک لیوان چای ۷۰ درجهٔ سانتی‌گراد است. دمای این لیوان چای پس از t ساعت قرار گرفتن در یک محیط از تابع $f(t)=30+40\times 2^{-t}$ به‌دست می‌آید:

الف) دمای چای پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

ب) چند دقیقه طول می‌کشد تا دمای چای به 35° برسد.

آمار و احتمال

۱. در پرتاب دو تاس، اعداد رو شده متفاوت هستند. احتمال اینکه این اعداد متوالی باشند، کدام است؟

۲. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند که داشته باشیم: $B\subseteq A$، $P(A)=\frac{2}{3}$ و $P(B)=\frac{2}{5}$، آن‌گاه $P(A|B')$ را به‌دست آورید.

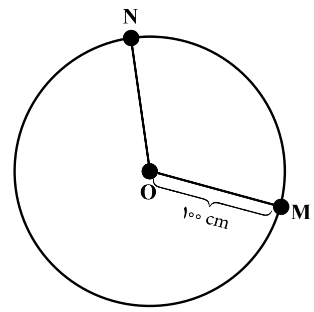
۳. در اتوبوسی ۵ مرد و ۳ زن مسافرند. در یک ایستگاه ۳ نفر پیاده می‌شوند. با کدام احتمال اولین نفر مرد و سومین نفر زن است؟

۴. از ظرف I که شامل ۵ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است، مهره‌ای به ظرف II که در آن ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه وجود دارد منتقل می‌کنیم و سپس از ظرف II یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آنکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

۵. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین‌بار هر دو عدد رو شده ۶ باشند. با کدام احتمال حداکثر در دوبار پرتاب، نتیجه حاصل می‌شود؟

ریاضی ۲ (رشتهٔ تجربی)

۱. متحرکی از نقطهٔ M واقع بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۱۰۰cm، پس از طی مسافت $\frac{۲۰۰}{۳}\pi$ روی دایره، به نقطهٔ N می‌رسد. اندازهٔ زاویهٔ MON را برحسب رادیان بیابید.



۲. حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $A=\sin\frac{۳\pi}{۴}+\sin\frac{۵\pi}{۴}+\sin\frac{۷\pi}{۴}+\sin\frac{۷\pi}{۶}+۲\cos\frac{۱۱\pi}{۶}$

ب) $B=\sin ۳۹۰^\circ+\cos ۳۳۰^\circ+۳\tan ۱۱۱۰^\circ$

پ) $C=۱-\cos^۲ ۲۰^\circ-\cos^۲ ۷۰^\circ$

۳. نمودار توابع زیر را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.

الف) $y=\cos(۲\pi-x)+۱$

ب) $y=\sin(۵\pi+x)+۲$

۴. کدام جفت عبارت‌های زیر با هم برابرند؟

الف) $\sin(\frac{\pi}{۲}+۲\alpha)$ — ۱) $\cot\alpha$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ — ۲) $-\cos\alpha$

پ) $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ — ۳) $\cos\alpha$

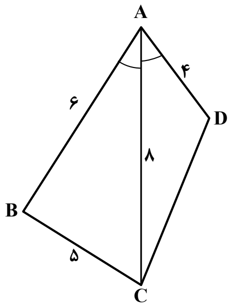
ت) $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ — ۴) $-\tan\alpha$

ث) $\tan(-\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ — ۵) $\cos۲\alpha$

ج) $\cot(-\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ — ۶) $-\sin\alpha$

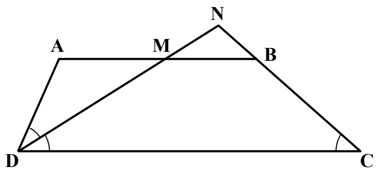
هندسهٔ ۱

۱. در چهارضلعی ABCD، قطر AC نیمساز زاویهٔ A است و داریم: AD=۴، AB=۶، AC=۸ و BC=۵. نقطه‌ای روی قطر AC که از A به فاصلهٔ ۳ واحد است، از D به چه فاصله‌ای است؟



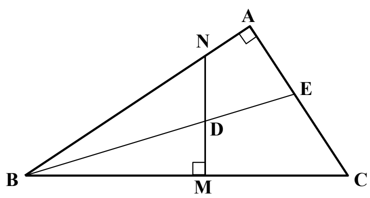
۲. در ذوزنقهٔ ABCD، اندازهٔ زاویهٔ D دو برابر اندازهٔ زاویهٔ C است. نیمساز $\hat{D}$، AB را در M و امتداد ساق BC را در N قطع کرده است. ثابت کنید:

MA.MB=MD.BN



۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ از نقطهٔ M وسط وتر BC عمود MN را بر BC رسم کرده‌ایم.
نیمساز $\hat{B}$، MN و AC را در نقاط D و E قطع کرده است. ثابت کنید:

BC.BE=۲AB.BD



هندسهٔ ۲

۱. پاره‌خط AB، خط d و بردار $\vec{u}$ در صفحه مفروض‌اند و هیچ‌یک از آن‌ها با هم موازی نیستند. اگر بازتاب AB را نسبت به d به‌دست آوریم و نتیجه را تحت بردار $\vec{u}$ انتقال دهیم، پاره‌خط A′B′ حاصل می‌شود، و اگر انتقال یافتهٔ AB را تحت $\vec{u}$ به‌دست آوریم و بازتاب نتیجه را نسبت به d به‌دست آوریم، پاره‌خط A″B″ حاصل می‌شود. نشان دهید A′B′ موازی و مساوی A″B″ است.

۲. پاره‌خط AB و نقطهٔ O در خارج آن مفروض‌اند. دوران یافتهٔ AB حول O تحت زاویهٔ α $(\alpha<A\hat{O}B)$، A′B′ است و A′B′ و AB یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید AB و A′B′ با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند.

۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را حول A، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ $\hat{B}$ دوران می‌دهیم. هرگاه دوران یافتهٔ BC، B′C′ باشد، ثابت کنید: AC⊥B′C′.

ریاضی دهم

۱. اگر این مقدار مثبت a باشد، باید: $\frac{۱}{a}-۹=۲a$. با ضرب دو طرف تساوی در a داریم: $۲a^۲=۱-۹a$ و داریم:

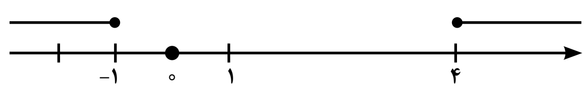
$$۲a^۲+۹a-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۸۱+۸=۸۹ \Rightarrow a=\frac{-۹\pm\sqrt{۸۹}}{۴}$$

و چون a مثبت است، تنها مقدار $\frac{-۹+\sqrt{۸۹}}{۴}$ قابل قبول است.

۲. می‌دانیم که مختصات رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت $(\frac{-b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ اســـت. پس با توجه بـــه نمودار داده شـــده، داریم: $\frac{-b}{۲a}=۱$ و $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۲$. همچنین سهمی از نقطهٔ (۰,۱-) عبور کرده اســـت، پس با جای‌گـــذاری x=-۱ و y=۰ در معادلهٔ ســـهمی داریم: a-b+c=۰. از سه معادلهٔ به‌دست آمده مقادیر $a=-\frac{۱}{۲}$، $b=۱$ و $c=\frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید.

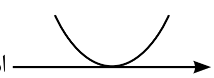
۳. $x^۲\ge ۲x+۸ \Rightarrow x^۲-۲x-۸\ge ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)\ge ۰$

با رســـم جدول تعیین علامت برای $P=(x-۴)(x+۲)$ و تعیین ناحیه‌هایی که P≥۰، مجموعه جواب‌های $(x\le -۲)\cup(x\ge ۴)$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر رسم می‌شود:



عدد میانی ۲- و ۴، برابر با ۱ اســـت و فاصلهٔ این دو عدد تا ۱ برابر با ۳ است.

پس بازه‌های x≥۴ و x≤-۲ شـــامل تمام مقادیری مانند x اســـت که فاصلهٔ آن‌ها از ۱ حداقل برابر ۳ است. بنابراین $|x-۱|\ge ۳$ به‌دست می‌آید.

۴. نمودار سهمی به‌صورت  اســـت. بنابراین اگر معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ باشد، پس: a>۰ و به‌خاطر وجود تنها یک نقطهٔ برخورد با محور xها، Δ=۰ است.

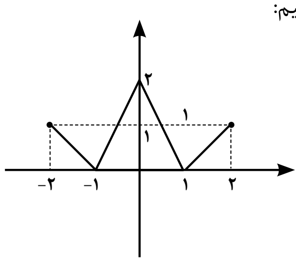
$$\begin{cases} a>۰ \Rightarrow m-۲>۰ \Rightarrow m>۲ \\ \Delta=۰ \Rightarrow ۹-۴(m-۲)(m+۲)=۰ \Rightarrow ۹-۴(m^۲-۴)=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow m^۲-۴=\frac{۹}{۴} \Rightarrow m^۲=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow m=\pm\frac{۵}{۲}$$

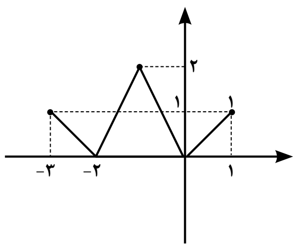
و اشتراک مقادیر بالا، $m=\frac{۵}{۲}$ است.

حسابان

۱. ابتدا نمودار g(x)=f(|x|) را رســـم می‌کنیم و سپس نمودار g(x+۱) (۱ واحد انتقال به چپ) را رسم می‌کنیم:



$$g(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\ge ۰ \\ f(-x) & x<۰ \end{cases}$$



$y=f(|x+۱|)$

۲.

$$f(۲-x)+۴f(۲+x)=۲x$$

$$\begin{matrix} (x\to ۲-x)\Rightarrow \\ (x\to x-۲)\Rightarrow \end{matrix}\begin{cases} f(x)+f(۴-x)=۴-۲x & (۱) \\ f(۴-x)+۴f(x)=۲x-۴ & (۲) \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات اخیر داریم:

$$-۱۵f(x)=-۱۰x+۲۰ \Rightarrow f(x)=\frac{۱۰}{۱۵}x-\frac{۲۰}{۱۵}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{۳}(x-۲)$$

برای یافتن ضابطهٔ $f^{-۱}$ داریم:

$$y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳y=۲x-۴ \Rightarrow x=\frac{۳y+۴}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳}{۲}x+۲$$

برای یافتن نقطهٔ تلاقی نمودارهای f و $f^{-۱}$ داریم:

$$\begin{cases} y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳} \\ y=\frac{۳}{۲}x+۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳}=\frac{۳}{۲}x+۲ \Rightarrow \frac{۵}{۶}x=-\frac{۱۰}{۳}$$

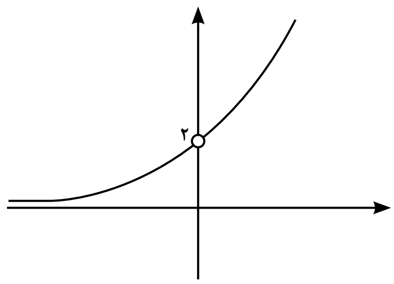
$$\Rightarrow x=-۴, y=-۴$$

نقطهٔ تلاقی A(-۴,-۴) است.

۳. (با فرض $۳^x - ۱ \neq ۰$، یعنی $x \neq ۰$)

$$f(x)=\frac{(۳^x-۱)(۳^x+۱)}{(۳^x-۱)}=۳^x+۱$$

تابع در نقطهٔ $x=۰$ تعریف نمی‌شود.



$D_f = R - \{۰\}$

$R_f = (۰,+\infty) - \{۲\}$

۴. الف) $f(۰/۵) = ۳۰ + ۴۰ \times ۲^{-۰/۵} = ۳۰ + ۴۰ \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$= ۳۰ + ۲۰\sqrt{۲} \simeq ۵۸/۲$ درجهٔ سانتی‌گراد

ب) $f(t) = ۳۵ \Rightarrow ۳۰ + ۴۰ \times ۲^{-t} = ۳۵ \Rightarrow ۲^{-t} = \frac{۱}{۸}$

$\Rightarrow ۲^{-t} = ۲^{-۳} \Rightarrow t = ۳$

پس از ۳ ساعت به دمای موردنظر می‌رسد.

آمار و احتمال

۱. $A' = \{(۱,۱),\ldots,(۶,۶)\}$

$B = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),\ldots,(۵,۶),(۶,۵)\}$

$$\Rightarrow P(B\mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱۰}{۳۶}}{۱-\frac{۶}{۳۶}} = \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳}$$

۲. $$P(A\mid B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{P(B')} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B')}$$

$$= \frac{P(A)-P(B)}{۱-P(B)} = \frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۹}$$

۳. اگر M_i و W_i پیشـــامد پیاده شـــدن مرد و زن در iاُمین نفر باشد، در این‌صورت نفر دوم پیاده شده، مرد یا زن است و احتمال خواسته شده عبارت است از:

$P(M_۱ \cap W_۲ \cap W_۳) + P(M_۱ \cap M_۲ \cap W_۳)$

$= P(M_۱)P(W_۲ \mid M_۱)P(W_۳ \mid M_۱ \cap W_۲)$

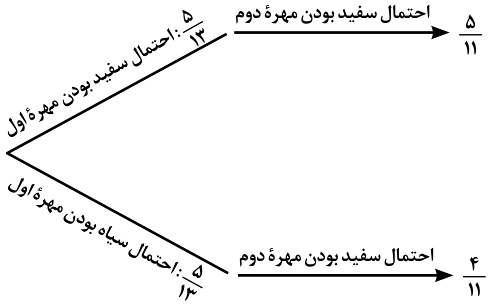
$+ P(M_۱)P(M_۲ \mid M_۱)P(W_۳ \mid M_۱ \cap M_۲)$

$= \frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶} + \frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$

۴. از قضیهٔ احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$P(A) = P(A\mid B_۱).P(B_۱) + P(A\mid B_۲)P(B_۲)$

$= \frac{۵}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۱} + \frac{۸}{۱۳}\times\frac{۴}{۱۱} = \frac{۱۵۷}{۱۴۳}$



۵. باید در پرتاب اول یا پرتاب دوم، هر دو تاس ۶ بیایند. احتمال آنکه در پرتاب اول هر دو تاس ۶ بیایند، برابر اســـت با: $\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$ و احتمال آنکه در پرتاب اول هر دو شـــش نیایند، و در پرتاب دوم هر دو شـــش بیایند، برابر است با: $\frac{۳۵}{۳۶}\times\frac{۱}{۳۶}$. پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{۱}{۳۶} + \frac{۱}{۳۶}\times\frac{۳۵}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}(۱+\frac{۳۵}{۳۶}) = \frac{۷۱}{۱۲۹۶}$$

ریاضی ۲ تجربی

۱. $\alpha = \frac{l}{r}$

$$\alpha = \frac{\frac{۲۰۰\pi}{۳}}{۱۰۰} = \frac{۲\pi}{۳}\text{rad}$$

۲. الف) $A = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) + \sin(\pi + \frac{\pi}{۴}) + \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۴})$

$+ \sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) + ۲\cos(۲\pi - \frac{\pi}{۶})$

$= \sin\frac{\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۴} - \sin\frac{\pi}{۶} + ۲\cos\frac{\pi}{۶}$

$= -\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} + ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} - \frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$

ب) $B = \sin(۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ) + \cos(۳۶۰^\circ - ۳۰^\circ)$

$+ ۳\tan(۳\times ۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ)$

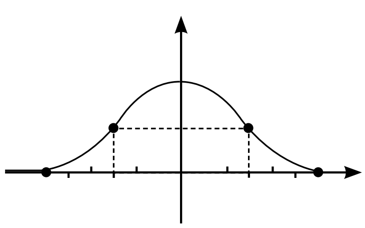
$= \sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ + ۳\tan ۳۰^\circ$

$= \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳\times\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱+۳\sqrt{۳}}{۲}$

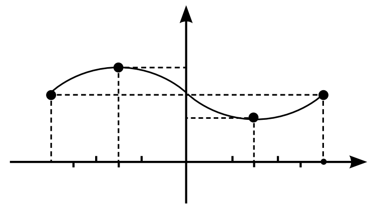
پ) $C = \underbrace{۱-\cos^۲ ۲۰}_{\sin^۲ ۲۰^\circ} - \cos^۲ ۷۰ = \sin^۲ ۲۰ - \cos^۲ ۷۰ = ۰$

زیرا ۲۰° و ۷۰° زوایای متمم‌اند و: $\sin ۲۰^\circ = \cos ۷۰^\circ$.

۳. الف)



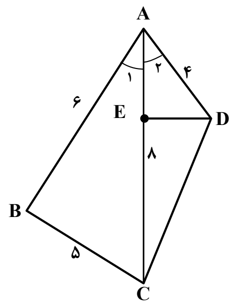
ب)



۴. ۱ و ث ✦ ۴ و ج ✦ ۶ و ت ✦ ۲ و پ ✦ ۳ و ب ✦ ۵ و الف

هندسهٔ ۱

۱. اگر E نقطه‌ای باشد که از A به فاصلهٔ ۳ (و از C به فاصلهٔ ۵) واحد است، در این صورت داریم:



$$\frac{AD}{AC}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲},\ \frac{AE}{AB}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲,$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow \Delta ADE\sim\Delta ABC\Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow DE=\frac{BC}{۲}=۲/۵$$

۲.

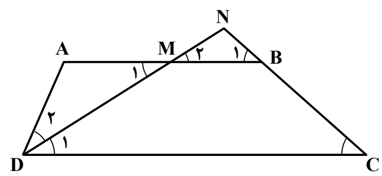
$$\hat{D}=۲\hat{C}\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{D}_۲=\hat{C}=\hat{B},\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$$

$$\Rightarrow \Delta AMD\sim\Delta MNB\Rightarrow \frac{BN}{AD}=\frac{MB}{MD}$$

$$\Rightarrow BN.MD=AD.MB \quad (۱)$$

$$AM\parallel DC\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}_۱\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}_۲$$

$$\Rightarrow AM=AD\overset{(۱)}{\Rightarrow} AM.MB=MD.BN$$

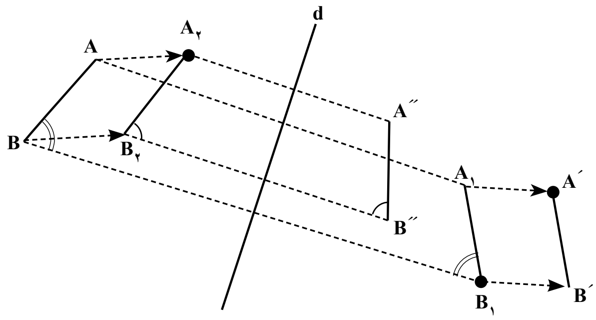


۳. مثلث‌های BNM و ABC متشابه‌اند ($\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{A}=\hat{M}=۹۰^\circ$). بنابراین نسبت طول‌های نیم‌سازهای آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{MB}{AB}=\frac{BC}{۲AB}\Rightarrow BC.BE=۲AB.BD$$

هندسهٔ ۲

۱. چون انتقال و دوران هر دو تبدیل‌های طول پا هستند، پس: A″B″=AB و A′B′=AB و لذا: A′B′=A″B″.



اما چون انتقال شیب را حفظ می‌کند، پس: $AB\parallel A_۲B_۲$ و $BB_۱\parallel B_۲B''$. بنابراین زاویه‌های $A_۲B_۲B''$ و $ABB_۱$ برابرند و چهارضلعی‌های $AA_۱B_۱B$ و $A_۲A''B''B_۲$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند. (چرا؟) پس:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A_۲B_۲B''}=\widehat{A''B''B_۲}\\ \widehat{ABB_۱}=\widehat{A_۱B_۱B}\\ \widehat{A_۲B_۲B''}=\widehat{ABB_۱}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{A''B''B_۲}=\widehat{A_۱B_۱B}$$

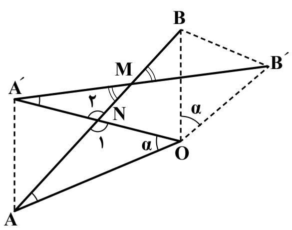
و چون یک ضلع از این دو زاویه با هم موازی‌اند ($AA_۱\parallel BB_۱$)، پس ضلع دیگر آن‌ها با هم موازی‌اند؛ یعنی: $A_۱B_۱\parallel A''B''$ و نیز: $A'B'\parallel A_۱B_۱$. پس: $A'B'\parallel A''B''$.

۲. چون دوران طول پاست، پس داریم:

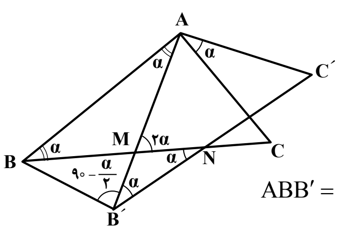
$$A'B'=AB,OA'=OA,OB'=OB$$

$$\Rightarrow \Delta OA'B'\cong\Delta OAB\Rightarrow \hat{A}'=\hat{A},\hat{N}_۱=\hat{N}_۲$$

در مثلث‌های MNA′ و ONA دو زاویه برابرند، پس زاویهٔ سوم آن‌ها هم برابرند: $\hat{M}=\alpha$. یعنی A′B′ و AB با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند.



۳. به دلیل طول پایی دوران داریم: AB=AB′ و $B\hat{A}B'=\hat{B}=\alpha$. در نتیجه در مثلث متساوی‌الساقین ABB′ داریم:



$$ABB'=AB'B=\frac{۱۸۰-\alpha}{۲}=۹۰-\frac{\alpha}{۲},$$

$$AMC=\alpha+\alpha=۲\alpha$$

اما می‌دانیم که دوران یافتهٔ پاره‌خط و خود آن با هم زاویه‌ای مساوی زاویه دوران می‌سازند (مسئلهٔ ۲). پس: $M\hat{N}B'=\alpha$ و لذا داریم:

$$B\hat{M}B'=MB'N+MNB'\Rightarrow \widehat{MB'N}=MNB'=\alpha$$

$$\Rightarrow MB'N=MAB=\alpha\Rightarrow B'C'\parallel AB\Rightarrow B'C'\perp AC$$

؟ پاسخ پرسش‌های پیکارجو ؟

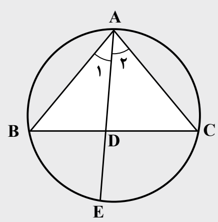
۱. از فرض مسئله داریم:

$$۲(a^۴+b^۴)=(a+b)^۴$$
$$\Rightarrow ۲a^۴+۲b^۴=a^۴+۴a^۳b+۶a^۲b^۲+۴ab^۳+b^۴$$
$$\Rightarrow a^۴-۴a^۳b-۴ab^۳+b^۴=۶a^۲b^۲$$
$$\Rightarrow a^۴-۴a^۳b+۶a^۲b^۲-۴ab^۳+b^۴=۱۲a^۲b^۲$$
$$\Rightarrow (a-b)^۴=۱۲a^۲b^۲ \Rightarrow (a-b)^۲=۲\sqrt{۳}ab$$
$$\Rightarrow a^۲-۲ab+b^۲=۲\sqrt{۳}ab \Rightarrow a^۲-۲(\sqrt{۳}+۱)ab+b^۲=۰$$
$$\overset{\div b^۲}{\Rightarrow} (\frac{a}{b})^۲-۲(\sqrt{۳}+۱)(\frac{a}{b})+۱=۰$$

با فرض $\frac{a}{b}=z$ نتیجه می‌شود: $z^۲-۲(\sqrt{۳}+۱)z+۱=۰$.
حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله مساوی ۱ است، پس ریشه‌های آن $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ هستند. لذا مجموع ریشه‌های معادله $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ است:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=۲(\sqrt{۳}+۱)$$ (گزینهٔ ب)

۲. می‌دانیم هرگاه نیمساز داخلی رأس A از مثلث ABC دایرهٔ محیطی آن را در نقطهٔ E قطع کند، داریم:



AD.AE=AB.AC

اما عکس این قضیه هم درست است.
یعنی اگر در مثلث ABC، نیمساز A، BC را در D قطع کند و AD را تا نقطهٔ E امتداد دهیم و: AD.AE=AB.AC، آن‌گاه E روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.
(اثبات با برهان خلف به عهدهٔ خودتان است.)
حال با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها در چهارضلعی شکل داریم:

$$AB.AD=۶\times۴=۲۴,\ AO.AC=۳\times۸=۲۴$$
$$\Rightarrow AB.AD=AO.AC$$

بنابراین C روی دایرهٔ محیطی مثلث ABD است، یعنی ADCB یک چهارضلعی محاطی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$AO.OC=BO.OD \Rightarrow BO.OD=۳\times۵=۱۵$$

و طبق قضیهٔ نیمسازها داریم: $\frac{AB}{AD}=\frac{BO}{OD}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$. بنابراین:

$$OB=۳x, OD=۲x \Rightarrow (۲x)(۳x)=۱۵$$
$$\Rightarrow x^۲=\frac{۱۵}{۶}=\frac{۵}{۲}$$
$$x=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \Rightarrow BO=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}, DO=\sqrt{۱۰}$$
$$\Rightarrow BD=\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۲}$$

حال به کمک قضیهٔ **بطلمیوس** در چهارضلعی محاطی ADBC می‌توان نوشت:

$$AC.BD=AB.CD+AD.BC$$
$$\Rightarrow ۸(\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۲})=۶CD+۴BC, BC=CD \quad (چرا؟)$$
$$۱۰BC=۲۰\sqrt{۱۰} \Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۰}$$ (گزینهٔ الف)

۳. به صورت کلی می‌توانیم شش نفر را بین دو میز تقسیم کنیم: ۱ نفر میز اول و ۵ نفر میز دوم؛ ۲ نفر میز اول و ۴ نفر میز دوم؛ ۳ نفر روی هر میز.
در حالت اول $\binom{۵}{۵}\binom{۶}{۱}$ راه، در حالت دوم $\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۴}$ راه و در حالت سوم $\frac{\binom{۳}{۳}\binom{۶}{۳}}{۲!}$ راه برای انتخاب افراد وجود دارد. همچنین می‌دانیم برای نشستن k نفر دور یک میزگرد، $(k-۱)!$ طریق وجود دارد. پس تعداد راه‌های نشاندن ۶ نفر دور دو میز برابر است با:

$$\binom{۶}{۱}\binom{۵}{۵}\times۴!\times۰!+\binom{۴}{۴}\binom{۶}{۲}\times۳!\times۱!+\frac{\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳}}{۲!}\times۲!\times۲!$$
$$=۱۴۴+۹۰+۴۰=۲۷۴$$ (گزینهٔ ج)

۴. از فرض مسئله داریم:

$$\frac{xy}{x+y}=100 \Rightarrow xy=100x+100y$$

$$\Rightarrow x(y-100)=100y \Rightarrow x=\frac{100y}{y-100}$$

$$=\frac{100(y-100)+10000}{y-100}=100+\frac{10000}{y-100}$$

حال برای آنکه $x,y\in N$، لازم است که: $y-100\,|\,10000$ و به ازای هر مقسوم‌علیه مثبت ۱۰۰۰۰ یک جواب برای (x,y) و از آنجا یک جواب برای y-۱۰۰ به‌دست می‌آید. بنابراین جواب برابر است با تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت ۱۰۰۰۰ و می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$ و $10000=2^4\times5^4$.

لذا تعداد مقسوم‌علیه‌های ۱۰۰۰۰ برابر است با: ۲۵=(۱+۴)(۱+۴) پس ۲۵ زوج مرتب (x,y) پیدا می‌شود (گزینهٔ د).

۵. با توجه به فرض می‌توان نوشت: $x=\sin\alpha$، $y=\sin\beta$ و $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و در این صورت داریم:

$$x*y=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)$$

و اگر $z=\sin\gamma$ باشد:

$$(x*y)*z=\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}*\frac{3}{5}\right)*\frac{5}{13}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{12}{3}$$
$$+\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{24}{65}+\frac{18\sqrt{2}}{65}+\frac{10\sqrt{2}}{65}-\frac{15}{30}$$
$$=\frac{33+56\sqrt{2}}{130}$$

(گزینهٔ د)

ایستگاه اول

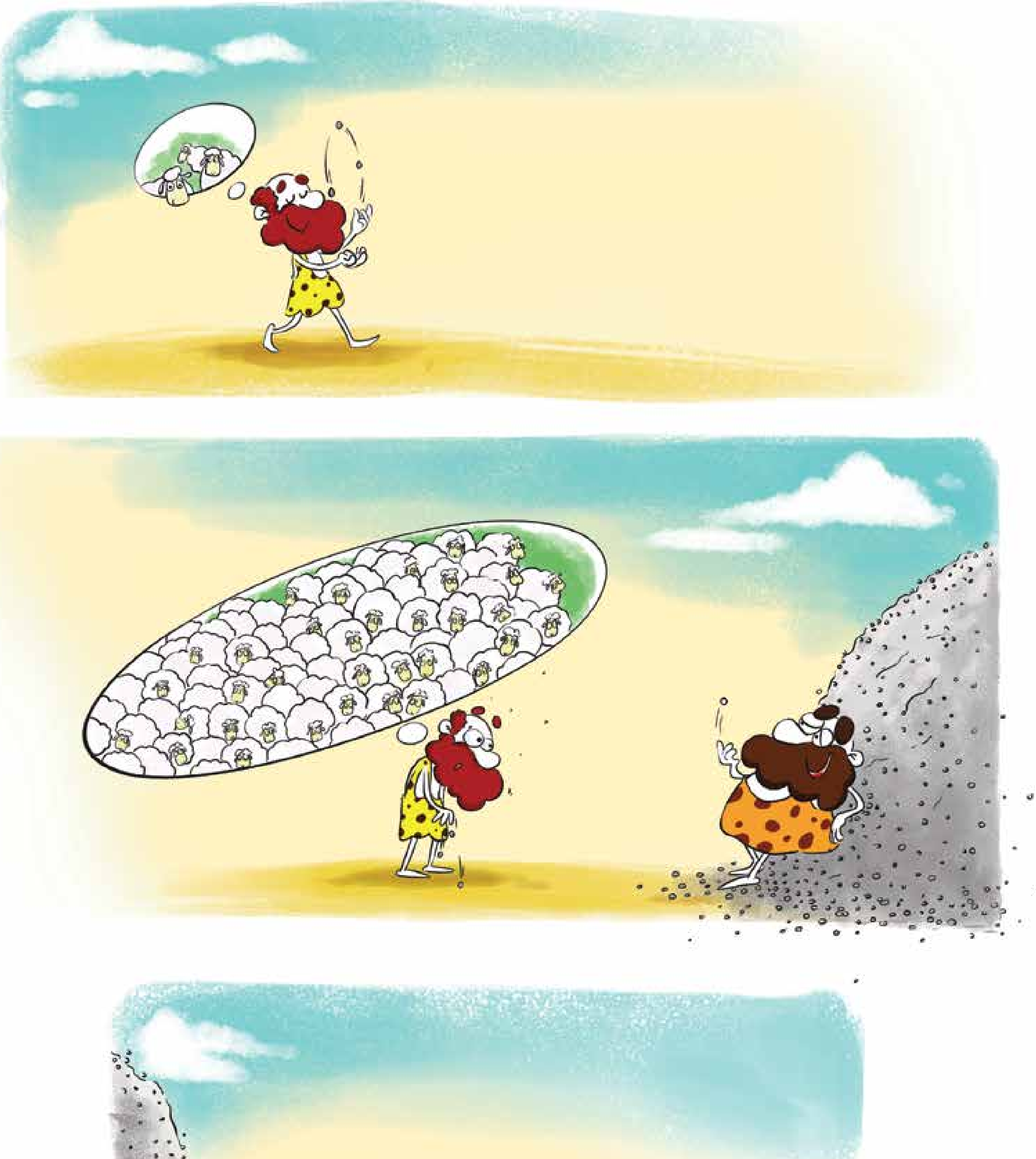
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱	۳	۶	۶	۹	۱	۱	۱	۹	۷	۴	۴
۲			۰	۹	۰	۰	۲	۹	۹		۱
۳			۰	۹	۱	۰	۳	۹	۱		۹
۴	۵	۶	۷	۹	۱	۱	۴	۹	۱	۱	۴
۵	۱			۹	۰	۰	۵	۰	۱		۳
۶	۵			۴	۱	۰	۶	۰	۳		۰
۷	۱	۲	۳						۷	۹	۴

ایستگاه دوم

اگر ارزش یک روز کاری اسب کلاوس کوچک را x فرض کنیم، ارزش کار خود او 2x و ارزش یک روز کار کلاوس بزرگ 4x است. حال اگر ارزش یک روز کار اسب کلاوس بزرگ y و تقسیم کاری فوق عادلانه باشد، باید داشته باشیم:

$$6(x+2x)=4x+4y \Rightarrow 4y=14x \Rightarrow y=3/5x$$

یعنی ارزش کار یک روز هر یک از اسب‌های کلاوس بزرگ ۳/۵ برابر ارزش یک روز کار اسب کلاوس کوچک است.



ریاضیات دلپذیر

ساعت جادویی!

از ریاضیات برای شعبده‌بازی و تردستی می‌توان استفاده کرد! بازی‌ها و تردستی‌های بسیاری وجود دارند که بعضی از آن‌ها سابقهٔ چند صدساله دارند و زیبایی و جذابیت ریاضیات را به خوبی نشان می‌دهند و منطق آن‌ها مبتنی بر ریاضیات است. یکی از مشهورترین آن‌ها شعبده‌بازی با ساعت دیواری عقربه‌ای است.

در جمعی از افراد ساعت دیواری را برمی‌دارید و رو به آن‌ها می‌گیرید و از یکی از آن‌ها می‌خواهید، یکی از عددهای روی آن (از ۱ تا ۱۲) را در ذهنش تصور کند. آن‌گاه از او می‌خواهید، هم‌زمان با ضرباتی که شما با انگشت روی صفحهٔ ساعت می‌زنید، یکی‌یکی به عدد موردنظرش اضافه کند (مثلاً اگر عدد مورد نظرش ۵ است، با ضربهٔ اول شما، آن را به ۶، با ضربهٔ بعدی به ۷ و... تغییر دهد) تا وقتی که به عدد ۲۰ برسد. در آنجا با علامت دست ضربه زدن شما را متوقف می‌کند و با تعجب می‌بینند که انگشت شما روی همان عددی است که او در ابتدا در ذهنش تصور کرده است!

روش کار

این شعبده‌بازی بسیار ساده است. هفت ضربهٔ اولتان را کاملاً تصادفی روی صفحه بزنید، ولی ضربهٔ هشتم را روی عدد ۱۲، ضربهٔ نهم را روی ۱۱ و به‌همین ترتیب در جهت خلاف حرکت عقربه‌ها روی عددها ضربه بزنید. وقتی شرکت‌کننده شما را به توقف ضربات دعوت می‌کند، انگشت شما روی همان عددی است که او ابتدا در نظر داشته است!

منطق ریاضی شعبده‌بازی

فرض کنیم شرکت‌کننده عدد x را در ذهن داشته باشد. در این صورت از x+۱ تا ۲۰ در ذهن می‌شمارد. بنابراین x-۲۰ عدد را می‌شمارد و شما x-۲۰ ضربه روی صفحهٔ ساعت می‌زنید. هفت ضربهٔ نخست تصادفی هستند. پس بقیهٔ ضربات، ۲۰ -x- ۷=۱۳ -x ضربه است. اولین این ضربات روی ۱۲، دومین روی ۱۱، سومی روی ۱۰ و... و n اُمین ضربه روی n-۱۳ است. پس (x- ۱۳) اُمین ضربه روی عدد x=۱۳ -(x- ۱۳) است!