برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

■ دورهٔ بیست‌وششم
■ شمارهٔ ۱۰۱
■ فروردین ۱۳۹۶
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامۀ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورۀ متوسطه ۲

- دورۀ بیست‌وششم
- شمارۀ پی‌درپی ۱۰۱
- فروردین ۱۳۹۶
- شمارۀ ۷
- ۴۸ صفحه
- ۱۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
: roshdmag
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق‌پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن بازرگانی: ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه

حرف اول

آموزشی

گفت‌وگو

ریاضیات در سینمای جهان

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

پرسش‌های پیکارجو!

با مخاطبان

پاسخ‌ها

مجلۀ رشد برهان متوسطه۲، از همۀ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورۀ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمۀ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامۀ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافۀ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

ارتقای تفکر ریاضی!

داشـــتم قضیه‌ای را مربوط به مبحث «نظریهٔ اعداد» در کلاس اثبات می‌کردم که یکی از دانش‌آموزان سؤال کرد:

ـ «آقا ببخشـــید، اثبات این قضیه و یاد گرفتن روش اثبات فایده‌ای هم دارد؟

ـ آیا به درد کنکور می‌خورد؟»

معمولاً این سؤال در تمام کلاس‌ها مطرح می‌شود و این ذهنیت برای بســـیاری از دانش‌آموزان ایجاد شده اســـت که اثبات قضیه‌ها و یادگیری آن‌هـــا کمکی به موفقیت در پیشـــرفت درســـی نمی‌کنـــد. در صورتی‌که برخلاف تصور، یادگیری منطق حاکم بر یک اثبات و به‌خصوص یادگیری صورت قضیه‌ها می‌تواند نقش بســـیار مؤثر و پررنگی در موفقیت درســـی دانش‌آموزان داشـــته باشد. در اثبات یک قضیه، ابتدا باید دقت کنیم چه داریم، یا مفروضاتِ قضیه چیســـت. ســـپس باید حواســـمان باشد که چه می‌خواهیم یا حکم قضیه چیســـت. آیا وقتی می‌خواهید یک مسئله حل کنید یا پرسشـــی را پاســـخ بدهید، جز این است که باید به فرض و حکم مسئله دقت کنید؟

در اثبـــات یک قضیه ممکن اســـت از قضیه‌های دیگر و نکات دیگری که قبلاً آموخته‌اید هم بهره بگیرید و این یعنی مرور مطالب قبلی. وقتی یک قضیه به اثبات می‌رســـد به یک گزارهٔ درســـت می‌رسیم و در واقع به ابزاری دست پیدا می‌کنیم که می‌توانیم از آن در اثبات‌های بعدی یا حل مســـائل دیگر اســـتفاده کنیم. بنابراین یادگیری هرچه بهتر و مفهومی‌تر صورتِ یک قضیه به معنی کامل‌تر شـــدن ابزارهای ما برای حل مســـئله اســـت. اثبات یک قضیه به معنی ایجاد ارتباط منطقی بین مفروضات آن قضیه اســـت که توسط شما کشف می‌شـــود و باعث ارتقای تفکر ریاضی در شـــما خواهد شد. این تفکر ریاضی شـــما را قادر خواهد ساخت از این ژرف‌نگری به زیبایی در حل مسائل و اثبات قضایای دیگر استفاده کنید!

موفق باشید

حمیدرضا امیری

شمارش از چند طریق!

عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی ـ شیراز

اشاره

مسائل زیر همگی دارای یک پاسخ درست هستند، اما به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که روش‌های رسیدن به پاسخ درست از دست‌کم دو شیوهٔ متفاوت امکان‌پذیر است. طرح چنین مسائلی در کلاس درس می‌تواند فرصتی برای دانش‌آموزان فراهم سازد تا با چالش در اطلاعات و مفاهیم آموخته شدهٔ خود، راه‌هایی متفاوت و همراه با نوآوری را تجربه کنند.

نمونهٔ ۱. از بین ۵ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز به چند طریق می‌توان ۴ مهره انتخاب کرد، به‌طوری که حداکثر ۳ مهره قرمز باشد؟

- **روش اول حل:** همهٔ حالات ممکن را در نظر می‌گیریم و طبق «اصل جمع» کل حالات را می‌یابیم. حالات ممکن عبارت‌اند از اینکه هر چهار مهره آبی باشد، یا سه مهره آبی و یکی قرمز باشد، یا دو مهره آبی و دو مهره قرمز باشد و یا بالاخره اینکه یک مهره آبی و ۳ مهره قرمز باشد؛ یعنی:

$$\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}+\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۳}$$
$$=۵+۳۰+۳۰+۵=۷۰$$

بنابراین ۷۰ روش برای انجام این کار وجود دارد.

- **روش دوم حل:** کافی است از ۸ مهرهٔ موجود تعداد راه‌های انتخاب چهار مهره را حساب کنیم؛ یعنی: $C(۸,۴)$. با توجه به اینکه از ۸ مهرهٔ موجود، ۳ مهره قرمز است، در انتخاب $\binom{۸}{۴}$ واضح است که حداکثر ۳ مهره قرمز خواهد بود.

حاشیه: این سؤال در امتحان خرداد ۱۳۹۳ در یک کلاس ۳۱ نفره مطرح شد که تنها ۶ نفر معادل ۱۹ درصد به روش دوم حل اشاره کرده‌اند (۲ نفر از این ۶ نفر به هر دو روش مسئله را حل کردند و ۱۹ نفر معادل ۶۱ درصد نیز مسئله را به روش نخست پاسخ دادند.)

نمونهٔ ۲. قرار است ۵ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند. به چند طریق ممکن است شخص B حتماً پس از شخص A صحبت کند؟ (نه لزوماً بلافاصله)

- **روش اول حل:** با استفاده از دو اصل شمارش ضرب و جمع حالات ممکن را پیدا می‌کنیم.

اگر A نفر نخست باشد، به ۲۴=۱×۲×۳×۴×۱ طریق،
اگر A نفر دوم باشد، به ۱۸=۱×۲×۳×۱×۳ طریق،
اگر A نفر سوم باشد، به ۱۲=۱×۲×۱×۲×۳ طریق،
و اگر A نفر چهارم باشد، به ۶=۱×۱×۱×۲×۳ طریق امکان‌پذیر است.

طبق اصل جمع، کل حالات ممکن ۶۰=۶+۱۲+۱۸+۲۴ حالت خواهد شد.

- **روش دوم حل:** وقتی قرار باشد ۵ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند و ترتیب سخنرانی‌ها مهم باشد، کل حالات ممکن !۵، برابر ۱۲۰ حالت است. مسلم است، در نیمی از آن‌ها A قبل از B و در نیم دیگر A پس از B قرار می‌گیرد، پس:

کل حالات مطلوب $5!\times\frac{1}{2}$، یعنی ۶۰ حالت است.

نمونهٔ ۳. از هر یک از شهرهای دوشنبه، دهلی نو، کابل، آنکارا و مسکو ۱۰ شرق‌شناس به «**سمینار حافظ‌شناسی**» در شیراز دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان با سه شرق‌شناس که غیرهم‌شهری هستند، مصاحبه کرد؟

- **روش اول حل:** ابتدا از ۵ شهر، ۳ شهر را انتخاب می‌کنیم و سپس از هر شهر یک نفر را از میان ۱۰ نفر برمی‌گزینیم؛ یعنی:

$$\binom{5}{3}\times 10\times 10\times 10=10\times 10^3=10^4$$

- **روش دوم حل:** ابتدا یک نفر را از مجموع ۵۰ نفر انتخاب می‌کنیم. سپس نفر دوم را از میان ۴۰ نفر بعدی و در انتها یک نفر را از میان ۳۰ نفر بعدی انتخاب می‌کنیم. چون ترتیب در انتخاب این ۳ نفر اهمیت ندارد، جواب را بر !۳ (جایگشت‌های ۳ نفر) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\binom{50}{1}\binom{40}{1}\binom{30}{1}}{3!}=\frac{50\times 40\times 30}{3\times 2\times 1}=10^4$$

- **روش سوم حل:** ابتدا از ۵ شهر ۳ شهر را انتخاب می‌کنیم. از میان مجموع ۳۰ شرق‌شناس این سه شهر، برای انتخاب نفر اول ۳۰ انتخاب، برای انتخاب نفر دوم ۲۰ انتخاب و برای انتخاب نفر سوم ۱۰ انتخاب وجود دارد. چون ترتیب قرار گرفتن این ۳ نفر اهمیت ندارد، جواب را بر !۳ تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$\frac{\binom{5}{3}\times 30\times 20\times 10}{3!}=10^4$$

نمونهٔ ۴. چند عدد سه رقمی با ارقام ۳، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ می‌توان نوشت؟ (آزاد تجربی ـ ۸۹)

۱) ۲۴ ۲) ۱۲
۳) ۱۸ ۴) ۳۰

- **روش اول حل:** فرض کنیم عدد ۳ رقمی شامل دو رقم ۱ و یک رقم ۲ یا ۳ باشد. به‌صورت: a۱۱، ۱a۱ و ۱۱a که a می‌تواند ۲ یا ۳ باشد و جمعاً ۶ حالت خواهد شد. اگر عدد شامل دو رقم ۲ و یک رقم ۱ یا ۳ باشد ۶ حالت و اگر عدد شامل دو رقم ۳ و یک رقم ۱ یا ۲ باشد نیز ۶ حالت داریم. همچنین، اگر ۳ رقم با ارقام غیرتکراری ۱، ۲ و ۳ باشد، به !۳ حالت، یعنی ۶ حالت خواهند بود که جمعاً ۲۴=۶×۴ حالت می‌شود.

- **روش دوم حل:** برخلاف روش اول، این روش بسیار کوتاه و دارای ابتکار جالبی است! برای عدد ۳ رقمی، ۳ جایگاه □□□ داریم. فرض کنیم در هر جایگاه بتوان هر کدام از عددهای ۱، ۲ و ۳ را نوشت. کل حالات ممکن ۳×۳×۳ برابر ۲۷ می‌شود. از این ۲۷ حالت، ۳ عدد ۳۳۳ و ۲۲۲ و ۱۱۱ را (که امکان وقوع ندارند) حذف می‌کنیم. پس ۳-۲۷، یعنی ۲۴ حالت خواهد شد.

نمونهٔ ۵. با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت، به این شرط که رقم یکان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم صدگان بزرگ‌تر باشد؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

- **روش اول حل:** تعداد کل اعداد سه رقمی که می‌توان با ارقام فوق و بدون تکرار ارقام نوشت برابر است با: ۶۰=۳×۴×۵. اما با سه رقم متمایز a، b و c کلاً ۶ حالت abc، acb، bac، bca، cab و cba ایجاد می‌شود که فقط یکی از آن‌ها شرط بزرگ‌تر بودن رقم یکان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم صدگان را داراست. یعنی بین ۶۰ حالت به تعدد $\frac{1}{6}(60)$ معادل ۱۰ حالت داریم که شرایط خواسته شده را دارند.

- **روش دوم حل:** استفاده از روش نمودار درختی است که طرح آن در کلاس درس، مناسب و جنبهٔ آموزشی دارد، اما کمی وقت‌گیر است.

- **روش سوم حل:** از هر ۳ رقم متمایزی که انتخاب می‌کنیم، تنها یک عدد سه‌رقمی با شرایط فوق

می‌توان نوشت.

بنابراین جواب مسئله برابر است با: $\binom{۵}{۳}=۱۰$.

نمونهٔ ۶. از دانشجویی که در امتحان تاریخ شرکت کرده، خواسته شده است که به هفت پرسش از ده پرسش تشریحی پاسخ دهد، به‌طوری که حداقل دوتای آن‌ها از پنج تای نخست برگزیده شوند. به چند طریق ممکن است؟

- **روش اول حل:** چهار حالت را باید در نظر گرفت. نخست اینکه دانشجو به دو تا از پنج پرسش نخست و هر پنج پرسش آخر پاسخ دهد که این به $\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۵}=۱۰\times۱=۱۰$ طریق رخ می‌دهد. دوم اینکه دانشجو سه‌تا از پنج پرسش نخست و چهارتا از پنج پرسش آخر را برگزینند. بنابر قاعدهٔ حاصل‌ضرب، این به $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}=۱۰\times۵=۵۰$ طریق رخ می‌دهد.

دیگر اینکه دانشجو تصمیم بگیرد که به چهارتا از پنج پرسش نخست و به سه‌تا از پنج پرسش آخر پاسخ دهد که این به $\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}=۵\times۱۰=۵۰$ طریق می‌تواند رخ دهد. در نهایت اینکه دانشجو بخواهد به هر پنج پرسش نخست و به دوتا از پنج‌تای آخر پاسخ دهد که این نیز به $\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}=۱\times۱۰=۱۰$ طریق می‌تواند رخ دهد. با توجه به چهار حالت بالا و بنابر قاعدهٔ حاصل‌جمع می‌بینیم که این دانشجو می‌تواند

$$\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۵}+\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}$$
$$=۱۰+۵۰+۵۰+۱۰=۱۲۰$$

انتخاب هفت پرسش (از بین ۱۰تا) انجام دهد، به‌طوری که هر انتخاب شامل حداقل دوتا از پنج پرسش نخست باشد.

- **روش دوم حل:** هر انتخاب هفت پرسش از ۱۰ پرسش توسط دانشجو، مستلزم انتخاب دست‌کم دوتا پرسش از پنج‌تای نخست است که این به $\binom{۱۰}{۷}=۱۲۰$ طریق می‌تواند رخ دهد.

نمونهٔ ۷. ۶ نفر را به چند طریق می‌توان به ۲ تیم ۳ نفره تقسیم کرد؟

- **روش اول حل:** تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۶ نفر به $\binom{۶}{۳}$ طریق می‌تواند باشد. اما از آنجا که وقتی ۳نفر را به‌عنوان یک تیم انتخاب می‌کنیم، خودبه‌خود ۳ نفر باقی مانده تیم دیگر را تشکیل می‌دهند، لذا شمارش فوق دو برابر حالات ممکن است. یعنی پاسخ این مسئله برابر است با: $\frac{۱}{۲}\binom{۶}{۳}$ که برابر ۱۰ می‌شود.

- **روش دوم حل:** می‌توان این مسئله را به‌صورت دیگری نیز حل کرد. یکی از این ۶ نفر را (مثلاً a) در نظر می‌گیریم. a به $\binom{۵}{۲}$ طریق می‌تواند افراد هم‌تیمی خود را انتخاب کند و تیم مقابل به‌صورت یکتایی مشخص می‌شود. بنابراین پاسخ این پرسش برابر $\binom{۵}{۲}$ یعنی ۱۰ طریق است.

نمونهٔ ۸. در چند درصد از جایگشت‌های حرف‌های کلمهٔ SALON، دو حرف S و A کنار هم هستند؟

- **روش اول حل:** ابتدا حرف‌های A، L، O و N را می‌چینیم. پس از اینکه این ۴ حرف در کنار هم قرار گرفتند، حرف S را قرار می‌دهیم. حرف S نسبت به این ۴ حرف می‌تواند در ۵ جای متفاوت قرار گیرد. چون می‌خواهیم S و A کنار هم باشد، پس فقط می‌تواند در دو طرف A باشد؛ یعنی ۲ حالت از ۵ حالت را می‌خواهیم. پس نسبت حالت‌ها می‌شود $\frac{۲}{۵}$، یعنی ۴۰ درصد.

- **روش دوم حل:** عملاً ۴ شیء داریم: N، O، L و SA (یا AS) لذا تعداد جایگشت‌های موردنظر برابر است با: $۲\times۴!$ و تعداد کل هم که $۵!$ است. پس درصد موردنظر برابر است با: $۱۰۰\times\frac{۲\times۴!}{۵!}$ که برابر ۴۰ درصد می‌شود.

هاوکینگ

- **کارگردان:** فیلیپ مارتین[1]
- **تهیه‌کننده:** جِسیکا پوپه[2]
- **نویسنده:** پیتر موفات[3]
- **بازیگران:** بِندیکت کامبرباچ[4]، مایکل براندون[5]، تام هاجکینز[6]، لِیزا دیلــون[7]، فواِب نیکلز[8]، آدام گادلی[9]، پیتر فِرث[10]، تام وارد[11]، جان سِژنز[12]، روهام سیوا[13]، مَتیو مارش[14]، آناســتازیا هایلِ[15]، بِرتــی کارول[16] و کریستین روبِک[17]
- **موسیقی:** موری گُلد[18]
- **تاریخ اکران:** ۱۳ آوریل ۲۰۰۴
- **مدت فیلم:** ۹۰ دقیقه
- **محصول:** پادشاهی متحده بریتانیا

احسان یارمحمدی

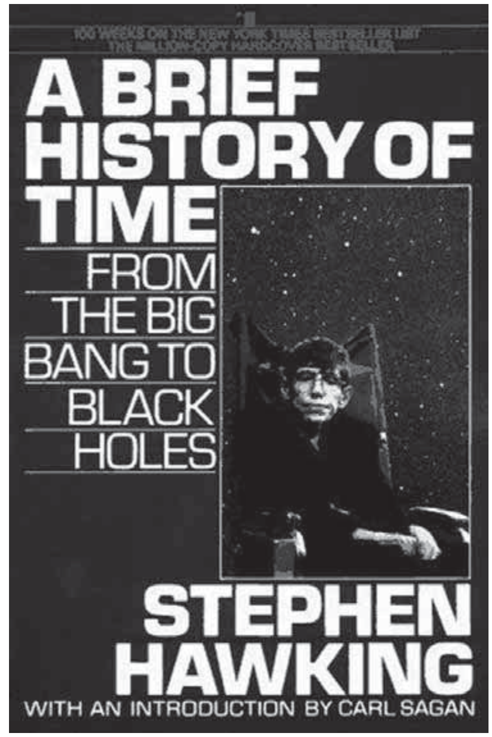
استیفن ویلیام هاوکینگ[19] یکی از برجسته‌ترین فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان دورهٔ معاصر اســت که زمینهٔ اصلی کار وی «کیهان‌شناسی و گرانش کوانتومی» است. او در این‌باره نظریه‌های بسیار ارزنده و مقالات متنوعی را به جامعهٔ علمی جهان تقدیم کرده اســت. جایگاه علمی وی به حدی بالاســت که به مدت ۳۰ سال، از ۱۹۷۹ تا ۲۰۰۹، دارندهٔ **«کرسی ریاضیات لوکاس»** بود. اِستفن هاوکینگ در دورهٔ جوانی به بیماری **«اسکلروز جانبی آمیوتروفیــک»**[20] مبتلا شــد و در آن زمان پیش‌بینی می‌شــد که حداکثر دو یا ســه سال بیشــتر زنده نماند. اما او توانســت با این بیماری کنار بیاید و با اســتفاده از فناوری‌های جدید به زندگی علمی خود ادامه دهد.

هاوکینــگ در ســال ۱۹۸۸ کتابی علمــی با عنوان **«تاریخچــهٔ مختصــر زمــان: از انفجــار بــزرگ تا ســیاه‌چاله‌ها»**[21] منتشر کرد که به پرفروش‌ترین کتاب تاریخ بریتانیا تبدیل شد و در سراسر جهان نیز هواداران بسیاری پیدا کرد. در ادامه به ارائه سطرهایی از این کتاب می‌پردازیم تا شما دانش‌آموزان با خواندن این سطرها به تهیه و مطالعهٔ این کتاب تشویق شوید و نیز آن دسته از ریاضی‌آموزانی که در دورهٔ دوم آموزش متوســطه حضور دارند و می‌خواهند در دوران تحصیلات دانشگاهی رشتهٔ **«اخترفیزیک»**[22] را تحصیل کنند، به واسطهٔ این کتاب، آگاهی‌هایی را در این زمینه به‌دست آورند.

سیاه‌چاله‌ها

اصطلاح سیاه‌چاله قدمت چندانی ندارد. **جان ویلر**، دانشمند آمریکایی، در سال ۱۹۶۹ این تعبیر را سر زبان‌ها انداخت. حفرهٔ سیاه توصیف گرافیکی مفهومی است که دست‌کم ۲۰۰ سال پیش مطرح شد. آن زمان دو نظریه دربارهٔ نور وجود داشــت: اولی که مورد علاقهٔ **نیوتن** بود، نور را مجموعه‌ای از ذرات می‌دانست. و دیگری می‌گفت: نور از امواج تشــکیل شده اســت. امروزه می‌دانیم که هر دو نظریه درست هســتند. با توجه به دوگانگی مکانیک کوانتوم، نور را هم می‌توان موج به‌حساب آورد و هم ذره. براســاس نظریه‌ای که نور را متشکل از امواج می‌دانست، روشن نبود که گرانش چه تأثیری بر نور دارد. اما اگر آن را متشکل از ذرات بدانیم، می‌توان انتظار داشت که تحت تأثیر گرانش، همچون گلولهٔ توپ، موشک و سیارات رفتار کند.

در آغاز مردم می‌پنداشــتند که ذرات نور با ســرعت نامتناهــی حرکت می‌کنند و به این دلیل گرانش قادر به کند کردن ســرعت آن‌ها نیست. اما **رامر** کشف کرد که نور با ســرعتی متناهی حرکت می‌کنــد و این به معنای آن بود که گرانش می‌توانــد تأثیری قابل توجه روی نور



داشته باشد. در سال ۱۷۸۳، یک استاد کمبریج به‌نام **جان میچل**، مقاله‌ای با عنوان «تبادل نظرهای فلسفی انجمن سلطنتی لندن» منتشر کرد و در آن خاطرنشان ساخت که اگر ستاره‌ای، جرمی بسیار زیاد و فشرده داشته باشد، میدان گرانشی آن، چندان نیرومند است که مجال گریز را از نور می‌گیرد: هر پرتوی نور که از سطح ستاره گسیل شود، پیش از آنکه مسافت زیادی دور شود، به‌وسیلهٔ جاذبهٔ گرانشی سیاره، پس کشیده خواهد شد.

میچل می‌گفت شاید تعداد این قبیل ستارگان بسیار زیاد باشد. اگرچه به‌دلیل آنکه نور این ستارگان نمی‌تواند به ما برسد، قادر به دیدنشان نیستیم، اما می‌توانیم جاذبهٔ گرانشی آن‌ها را حس کنیم. این اجسام همان چیزی هستند که امروزه «حفرهٔ سیاه» می‌نامیم، اسمی بامسمّی؛ ناحیه‌ای خالی و سیاه در فضا. چند سال بعد از سوی **مارکی دولاپلاس**، دانشمند فرانسوی، نظر مشابهی مطرح شد و از قرار معلوم وی از نوشتهٔ جان میچل هنوز مطلع نبود. جالب است بدانیم که این فکر تنها در چاپ اول و دوم کتاب «نظام جهان» لاپلاس درج شد و در چاپ‌های بعد این مطلب را حذف کرد. شاید او به این نتیجه رسیده بود که فکر حفرهٔ سیاه، نامعقول و جنون‌آمیز است. (همچنین تئوری ذره‌ای بودن نور در سراسر سدهٔ نوزدهم به کناری نهاده شد، گویی نظریهٔ موجی نور همه‌چیز را توضیح می‌داد. حال آنکه براساس آن، تأثیر گرانش روی امواج نور، در پردهٔ ابهام باقی می‌ماند.)

البته یکسان انگاشتن رفتار نور و گلولهٔ توپ در تئوری گرانش نیوتن، چندان سازگار نیست. زیرا سرعت نور ثابت است. (سرعت گلوله توپ پس از شلیک به طرف بالا، تحت تأثیر گرانش کاهش می‌یابد و سرانجام گلوله متوقف می‌شود و سقوط می‌کند، اما فوتون با سرعتی ثابت باید به راه خود ادامه دهد. پس گرانش نیوتنی چگونه قادر است بر نور تأثیر بگذارد؟) تا سال ۱۹۱۵ و تدوین نسبیت عام به‌وسیلهٔ **اینشتین**، نظریه‌ای سازگار و فارغ از تناقض پیرامون چگونگی تأثیر گرانش بر نور ارائه نشد. حتی پس از آن هم مدتی طولانی گذشت تا نتایج نظریه در مورد ستارگان بزرگ و با جرم زیاد معلوم شود.

برای آنکه به چگونگی شکل‌گیری یک حفرهٔ سیاه پی ببریم، باید شناختی اجمالی از حیات یک ستاره از آغاز تا انجام داشته باشیم. وقتی مقادیر زیادی گاز (عمدتاً هیدروژن) تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی خود، شروع به فروپاشی می‌کند، ستاره‌ای به‌وجود می‌آید. به هنگام انقباض، اتم‌های گاز بیشتر و بیشتر و هربار سریع‌تر از پیش با یکدیگر برخورد می‌کنند و در نتیجه گاز داغ و بالاخره چنان گداخته می‌شود که اتم‌های هیدروژن پس از برخورد با یکدیگر، دیگر از هم جدا نمی‌شوند، بلکه با هم درمی‌آمیزند و بدینسان اتم هلیم شکل می‌گیرد. حرارت ناشی از این واکنش که مثل یک انفجار کنترل شده بمب هیدروژنی است، باعث درخشش نور از ستاره می‌شود. این حرارت اضافی، همچنین فشار گاز را تا به آنجا افزایش می‌دهد که درصدد انبساط بادکنک است و تنش لاستیک که می‌کوشد آن را کوچک کند، توازنی به‌وجود می‌آورد. ستارگان به‌همین نحو مدت‌های دراز پایدار می‌مانند. حتی حرارت ناشی از واکنش‌های هسته‌ای با جاذبهٔ گرانشی‌شان متوازن است. اما عاقبت هیدروژن و دیگر سوخت‌های هسته‌ای ستارگان به پایان می‌رسد. نکتهٔ تناقض‌آمیز آن است که هرچه سوخت آغازین ستاره بیشتر باشد، زودتر تمام می‌شود و هرچه داغ‌تر شود، سوختش زودتر به پایان می‌رسد! خورشید ما احتمالاً برای پنج میلیون سال، یعنی خیلی کمتر از عمر جهان، سوخت دارد. وقتی سوخت ستاره‌ای به پایان می‌رسد، شروع به سرد شدن می‌کند و در نتیجه منقبض می‌شود. تنها در پایان دههٔ بیست قرن بیستم معلوم شد که پس از آن، چه بر سر ستاره ممکن است بیاید.

رامر کشف کرد که نور با سرعتی متناهی حرکت می‌کند و این به معنای آن بود که گرانش می‌تواند تأثیری قابل توجه روی نور داشته باشد

دربارهٔ فیلم

فیلیپ مارتین، کارگردان «فیلم هاوکینگ»، در فیلم خود به دورهٔ جوانی استیفن هاوکینگ، ورود او به دانشگاه، ابتلای وی به بیماری اسکلروز جانبی آمیوتروفیک و ازدواج هاوکینگ پرداخته است. در ادامه قسمتی از کتاب **«داستان زندگی و پژوهش‌های استیفن هاوکینگ، جست‌وجو برای یافتن نظریهٔ همه‌چیز»**، به قلم **کیتی فرگوسن**[۲۳] را که توسط **رضا خزانه** به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۹ توسط «مؤسسهٔ انتشارات فاطمی» به جامعهٔ علمی و علاقه‌مندان تقدیم شده است، ارائه می‌کنیم تا شما علاقه‌مندان به استیفن هاوکینگ و تاریخ دانش به هنگام تماشای فیلم مزبور پیش‌زمینه‌های درست و مناسبی را از این فیلم داشته باشید.[۲۴]

دانشجویانی که در سطح متوسط قرار دارند، به‌ندرت به «آکسفورد» راه پیدا می‌کنند، مگر اینکه پشت پرده اعمال نفوذ بشود. درخشنده نبودن نتایج تحصیلی استیفن در مدرسه، **فرانک هاوکینگ** را به فکر انداخت که از همان زمان درصدد اعمال نفوذ باشد. ولی او پسر

خود را دست‌کم گرفته بود. استیفن در امتحان ورودی در رشتهٔ فیزیک تقریباً نمرات عالی آورد. مصاحبه‌ای که در آکسفورد داشت، آن‌قدر درخشان بود که تردیدی در پذیرش او نمی‌توانست باشد.

در سال ۱۹۵۹، در سن ۱۷ سالگی، هاوکینگ برای تحصیل در علوم طبیعی، با تأکید بر رشتهٔ فیزیک به آکسفورد رفت. در آن زمان او به این نتیجه رسیده بود که ریاضی رشته‌ای نیست که به خودش محدود شود، بلکه ابزاری در دسترس فیزیک و درک چگونگی عالم است.

او وارد «کالج **یونیورسیتی**»، قدیمی‌ترین کالج دانشگاه آکسفورد شد که در سال ۱۲۴۹ تأسیس شده و پدرش هم در آنجا تحصیل کرده بود. این دانشگاه که به‌صورت کوته نوشت «Univ» نامیده می‌شد، یکی از مجموعه کالج‌هایی بود که مجموعاً دانشگاه آکسفورد را تشکیل می‌دادند. کالج یونیورسیتی در خیابان «**های استریت**» در قلب آکسفورد قرار داشت. معماری آکسفورد، مثل کمبریج، چیز درهم و برهمی از سبک‌های معماری قرون وسطا تا عصر حاضر بود.

سنت‌های فکری و اجتماعی این شهر، طولانی‌تر از معماری آن و مانند هر مرکز دانشگاهی بزرگ، مخلوطی از شکوفایی فکری اصیل، تقلب‌های پر از ادعا و انحطاط محض بود. برای مرد جوانی که به یکی از این‌ها علاقه داشت، محیط می‌توانست خیلی چیزها عرضه کند.

با وجود این، برای مدت یک‌سال‌ونیم، هاوکینگ احساس تنهایی می‌کرد و محیط برایش خسته‌کننده بود. خیلی از دانشجویان هم‌سال دانشگاهی او، چون به خدمت سربازی رفته بودند، سن بیشتری داشتند. او انگیزه نداشت که برای رهایی از تنهایی و دلتنگی، روی پیشرفت تحصیلی خود تمرکز کند. کشف کرده بود که قادر است بدون کوچک‌ترین تلاشی در این زمینه، از بیشتر دانشجویان پیشی بگیرد.

در طول سال دوم دانشگاه، هاوکینگ از محیط آکسفورد خوشش آمد. هنگامی که **روبرت برمن**[۲۵]، استاد فیزیک او در آن زمان، دربارهٔ ویژگی‌های او صحبت می‌کند، مشکل است بتوان تصور کرد که او از همان استیون هاوکینگ سخن می‌گوید که چند سال قبل، آن‌قدر معمولی و یک سال قبل از آن، چنان تنها بوده است. او می‌گوید: «من فکر می‌کنم او تلاش جدی می‌کرد که به نحوی خود را به سطح دانشجویان دیگر

پاییـــن بیاورد و یکی از آن‌ها باشـــد... او خیلی محبوبیت داشت.» اشخاصی که در سال‌های دوم و سوم، هاوکینگ را در آکسفورد به یاد می‌آورند، او را زنده‌دل، پرسروصدا و سازش‌پذیر توصیف می‌کنند.

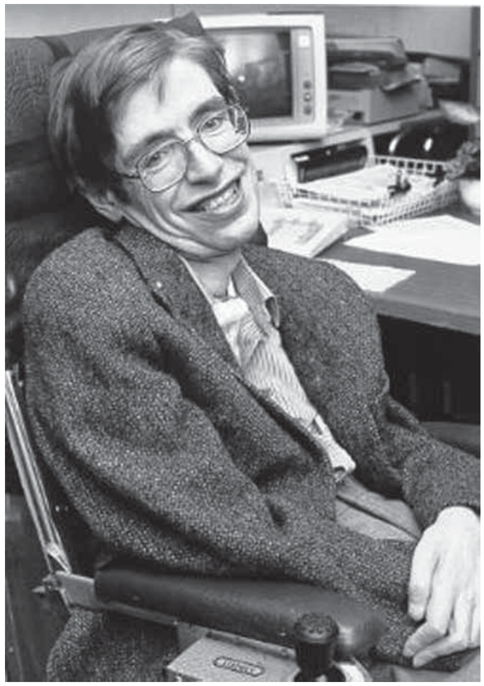
درس فیزیک آکســـفورد طوری تنظیم شـــده بود که اجتنـــاب از کار را آســـان می‌کرد، یا به‌عبـــارت دیگر، نیاز به پرکاری نبود. مدت درس ســـه ســـال طول می‌کشید و دانشجویان در پایان سال سوم امتحان می‌دادند. هاوکینگ حساب می‌کند که به‌طور متوسط، یک ساعت در روز برای این درس کار می‌کرد که برای سه سال، جمعاً هزار ساعت می‌شد. او می‌گوید: «من به این کار نکردن افتخار نمی‌کنم. فقط وضع آن زمان خودم و بیشتر دانشجویان هم‌کلاسی‌ام را تشریح می‌کنم: یک حالت کاملاً خسته‌کننده داشتم و احســـاس می‌کردم که هیچ ارزش آن را ندارد که برای آن تلاش بشـــود. یکی از نتایج بیماری من آن شـــد که این حالـــت را تغییر دهم. موقعی که انســـان بـــا امکان مرگ زودرس مواجه می‌شود، به این نکته پی می‌برد که زندگی ارزش زندگی کردن را دارد و خیلی کارهاســـت که انسان می‌خواهد انجام دهد.»

هم‌تـــرازان هاوکینـــگ او را به‌خوبـــی در جمع خود پذیرفتند، امـــا دکتر **برمن** و اســـتادان دیگر به‌تدریج در وجود هاوکینگ مغز درخشـــانی می‌دیدند کـــه «با افراد هم‌عصر خود به کلی متفاوت بود.» فیزیک دورهٔ لیسانس بـــرای او تلاش مهمی نبـــود. او خیلی کم‌کار می‌کرد، زیرا هرچه امکان‌پذیر بود، از عهدهٔ انجام آن برمی‌آمد. برای او تنها دانستن آن لازم بود که می‌توان کاری را انجام داد. در این صورت، بدون جســـت‌وجوی اینکه دیگران چگونه آن کار را انجام داده‌اند، از عهدهٔ آن کار برمی‌آمد. من نمی‌دانم کـــه او اصلاً کتابی داشـــت یا نه، ولی در هـــر حال، تعداد کتاب‌های او زیاد نبود. در کلاس هم یادداشـــت نمی‌کرد اســـتاد دیگری به یاد دارد که هاوکینگ بیشـــتر دوست داشت اشـــتباهات کتاب‌های درسی را پیدا کند، تا اینکه به حل مسائل بپردازد.

هاوکینگ تخصص خود را فیزیک نظری انتخاب کرد و می‌باید یکی از این دو رشـــته را برای دورهٔ فوق‌لیسانس برمی‌گزید: «کیهان‌شناسی»، یعنی مطالعهٔ اجسام بزرگ، یا «فیزیک ذرات بنیادی»، یعنی مطالعهٔ اجســـام بســـیار ریز. او کیهان‌شناســـی را انتخاب کرد. «به نظر می‌آمد که شاخت گیتی جالب‌تر اســـت، زیرا دربرگیرندهٔ این سؤال بزرگ اســـت: جهـــان از کجا آمده اســـت؟» **فردهویل**[۲۶]، ممتازترین اخترشناس انگلستان در آن زمان در کمبریج بود. هاوکینگ از کمبریج درخواست پذیرش برای انجام فعالیت‌های پژوهشی، در سطح فوق‌لیسانس و دکترا کرد. دانشگاه تقاضای او را پذیرفت، به شرط آنکه در آکسفورد مقام اول را کسب کند. این مقام معادل فارغ‌التحصیلی با بالاترین افتخارات از یک دانشگاه آمریکایی بود.

یک هزار ســـاعت کار حداقل زمانـــی بود که او برای کسب مقام اول لازم داشت. ولی روش امتحانات آکسفورد اجازه می‌دهد که دانشـــجو از میان بسیاری از سؤالات و مسائل انتخاب کند. هاوکینگ مطمئن بود که اگر مسائل فیزیک نظری را انتخاب کند و از سؤالاتی که به دانستن واقعیت‌هـــا نیاز دارند اجتناب کند، موفق خواهد شـــد. با نزدیک شدن امتحانات اطمینان او فرو پاشید. شب قبل از امتحان آن‌قدر اعصاب او تحریک شده بود که نمی‌توانست بخوابد. هاوکینگ با یک فاجعه مواجه شد: امتحان را در حد مقامی بین دوم و یکم به انجام رساند.

هیئـــت امتحان کننده که با ایـــن نتیجه غیرقطعی مواجه شـــده بود، هاوکینگ را بـــرای مصاحبهٔ حضوری فراخواند و از او دربارهٔ برنامه‌هایی که داشت، سؤال کرد. با وجود اینکه وضع نگران‌کننده و آتیهٔ او در کفهٔ ترازو قرار گرفته بود، هاوکینگ توانست به طرزی که بین دوستانش مشـــهور بود، جواب زیرکانه‌ای بدهد: «اگـــر به مقام اول دست یابم به کمبریج می‌روم. اگر به مقام دوم برسم، در آکســـفورد می‌مانم. بنابراین انتظار من این است که شما به من مقام اول را بدهید.» به او مقام اول داده شد. دکتر



استیفن ویلیام هاوکینگ

فیلیپ‌مارتین، کارگردان «فیلم هاوکینگ»، در فیلم خود به دورهٔ جوانی استیفن هاوکینگ، ورود او به دانشگاه، ابتلای وی به بیماری اسکلروز جانبی آمیوتروفیک و ازدواج هاوکینگ پرداخته است

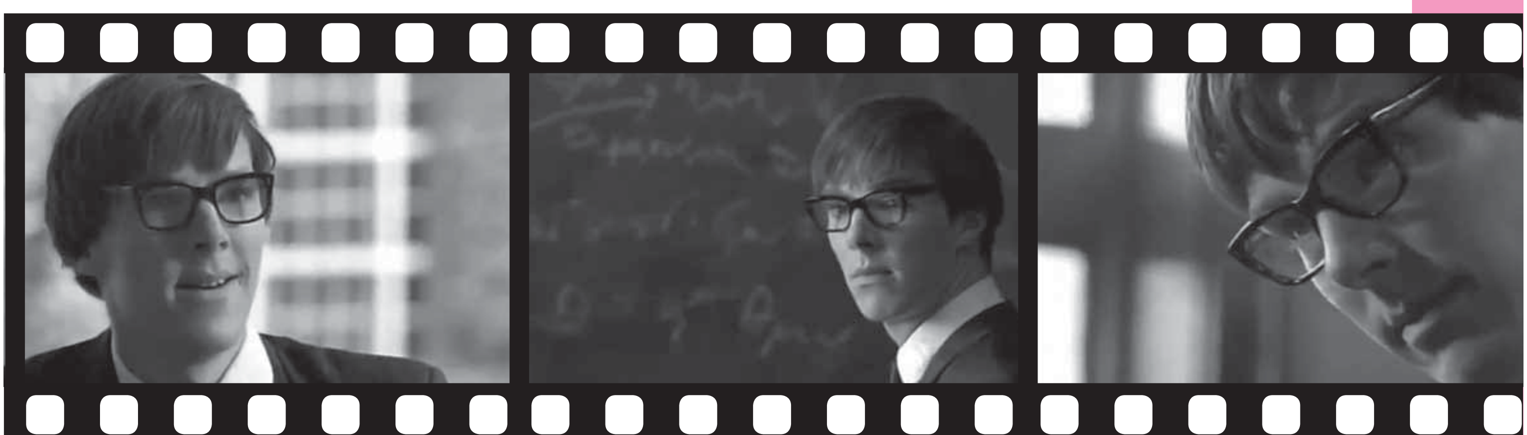
برمن می‌گوید: «امتحان‌کننـــدگان به اندازهٔ کافی زیرک بودند که درک کنند، با کســی صحبــت می‌کنند که از اغلب آن‌ها باهوش‌تر است.»

ســال اول و نیم‌سال دوم آکســفورد برای هاوکینگ دلپذیــر نبود. اولین ســال او در کمبریــج از آن هم بدتر بود. او از اینکه فردهویل به‌عنوان استاد راهنمای او تعیین نشد، ناراحت بود. به‌جای او **دنیس ساياما**[۲۷] که هاوکینگ نامش را هیچ‌گاه نشنیده بود، به‌عنوان استاد راهنمای او تعیین شـد. سـابقهٔ لاابالی بودن هاوکینگ در ریاضیات موجب درگیری‌اش با اســتاد شــد. نسبیت عام به‌نظر او بســیار ناهنجار می‌آمد. این‌ها موانعی برای پیشــرفت او بودند، اما چیزی بیشتر از آن نبودند که معمولاً برای سال اول دانشجوی بعد از لیسانس پیش می‌آید.

یک موضوع فاجعه‌انگیز دیگر بروز کرد. در سال سوم آکســفورد، هاوکینگ حرکات ناهنجاری پیدا کرد. یکی دوبار، بدون دلیل ظاهری، به زمین افتاد. در پاییز ســال بعد در کمبریج با دشــواری بندکفش خود را می‌بست و گاه صحبت کردن برایش مشکل می‌شد.

پس از یک نیم‌سال در کمبریج، وقتی که هاوکینگ ادامــه دهد. هاوکینگ به‌یاد می‌آورد که: «من پیش‌بینی آن‌ها را در مورد بدتر شــدن بیمــاری‌ام درک می‌کردم. آن‌ها در مورد من نمی‌توانستند هیچ کاری غیر از تجویز قرص‌هــای ویتامین انجــام دهنــد. در حالی‌که فکر هم نمی‌کردند، این ویتامین بتواند تأثیر زیادی داشته باشد. احساس می‌کردم که نباید جزئیات بیشتری بخواهم، زیرا این جزئیات مطمئناً خوشایند نبودند.»

هاوکینگ به بیماری نادری که درمان نداشت، مبتلا شــده بود. این بیماری «اســکلروز جانبی آمیوتروفیک» نــام دارد. این بیماری موجب از هم پاشــیدگی تدریجی ســلول‌های عصبی نخاع و مغز می‌شود که فعالیت ارادی ماهیچه‌ها را تنظیم می‌کنند. اولین نشــانه‌های بیماری معمــولاً ضعــف و پیچ‌خوردن دســت‌ها، گاهــی اوقات لکنت‌زبان هنگام صحبت‌کردن و اشــکال در قورت دادن غذاست. با از هم‌پاشیدگی سلول‌های عصبی، ماهیچه‌های تحت کنترل آن‌ها لاغر می‌شــوند. در نهایت، این ضعف همــهٔ ماهیچه‌هــای بــدن را دربرمی‌گیــرد. حرکت‌ها، غیرممکن می‌شــوند و صحبت کردن و توانایی‌های دیگر ارتباطی از بین می‌روند. پس از دو ســه ســال، بیمار در



برای تعطیلات کریســمس به خانه بازگشته بود، پدرش متوجه این ناهنجاری‌ها شد و او را نزد پزشک خانواده برد. آن پزشــک او را نزد متخصص فرستاد. در ژانویهٔ ۱۹۶۳، مدت کوتاهی از ۲۱ سالگی هاوکینگ نگذشته بود که در نیم‌سال بعدی به‌جای دانشگاه، برای آزمایش‌های پزشکی به بیمارستان رفت.

او پس از دو هفته مرخص شــد. به‌صورتی مبهم به هاوکینگ گفتند که بیماری‌اش از «نوع عادی» نیست و بیماری سفت شدن همه‌جانبهٔ بافت‌ها هم نیست. پزشکان توصیه کردند که به دانشــگاه بــرود و به تحصیلات خود

نتیجهٔ ذات‌الریه یا خفگی به‌علت ناتوانی ماهیچه‌های ریه فوت می‌کند. مغز تا پایان بیماری هوشیار و سالم می‌ماند. بــرای بعضی‌ها این یک امتیاز و برای بعضی دیگر موجب وحشــت است. در مراحل پایانی بیماری، غالباً به بیماران مرفین داده می‌شــود. این دارو برای تسکین درد نیست، زیرا دارویی برای این بیماری وجود ندارد، بلکه به منظور جلوگیری از افسردگی و وحشت تجویز می‌شود.

پزشــکان هاوکینگ امیدوار بودنــد که وضع او ثابت بماند، ولی بیماری به سرعت پیشرفت کرد. آن‌ها به زودی به او اعلام کردند که تا دو ســه ســال دیگر بیشــتر عمر

نخواهــد کرد. پدرش از **دنیس ســیاما** تقاضا کرد که به هاوکینگ کمک کند تا رسالهٔ دکترای او زودتر به سرانجام برســد. ســیاما که از توانایی بالقوهٔ هاوکینــگ آگاه بود و نمی‌خواست که با او حتی در حال مرگ مصالحه کند، این درخواست را رد کرد.

دو سال گذشت. پیشرفت بیماری کند شد. «من نمردم. در واقع با وجود اینکه ابری در افق آتیهٔ من قرار داشت، با تعجب کشــف کردم که از زندگی، بیشتر از گذشته لذت می‌برم.» او می‌باید از عصا استفاده می‌کرد، ولی شرایطش آن قدرها هم بد نبود. با وجود اینکه معلولیت و مرگ، در زمانــی نه‌چندان دور، قطعی بود، ولی به تأخیر افتاده بود. سیاما توصیه کرد، حالا که او زمان طولانی‌تری عمر خواهد کرد، باید رســالهٔ خود را به پایان رساند. به تعویق افتادن حکــم اعدام هاوکینگ هر چند ناپایدار و موقتی بود، ولی زندگی گران‌بها پر از چیزهای باارزش بود.

در مهمانی ســال نو در «**ســنت آلبــان**»، هنگامی که او در ژانویه ۱۹۶۳ بــرای بازدید خانواده‌اش رفته بود، درست قبل از آنکه برای چند آزمایش به بیمارستان برود، با **جین وایلد**[۲۸] ملاقات کرد. این دختر هم در سنت آلبان بزرگ شــده بود، ولی آن‌ها یکدیگر را ندیده بودند. جین از او جوان‌تر بود، دوران دبیرســتان را در سنت آلبان طی می‌کرد و می‌خواست در پاییز آینده برای آموزش زبان به کالج «**وســتفیلد**»[۲۹] لندن برود. از دیدگاه او، این جوان پریشــان حال دورهٔ فوق‌لیسانس بسیار باهوش، غیرعادی و تاحــدی مبتکر بــه نظر می‌آمد. اما جالــب بود و جین شــوخی‌های او را دوست داشت. هاوکینگ به او گفت که در رشتهٔ کیهان‌شناسی تحقیق می‌کند، ولی جین معنی آن را نمی‌دانست.

هنگامــی که جین بار دیگر او را پس از بازگشــت از بیمارستان دید، «او واقعاً حالت بسیار ترحم‌انگیزی داشت. خیال می‌کنم که ارادهٔ زندگی کردن را از دست داده بود. خیلی آشــفته به نظر می‌رسید.» با وجود این، وضع بدنی و روحی او برای جین زَنَندگی نداشــت. او دختری جوان، کمی خجالتــی و تاحدی دارای افکار جــدی بود. اعتقاد به خــدا و این اعتقاد را که از هر فاجعه‌ای ممکن اســت نتیجهٔ خوبی نیز به‌دســت آید، از مادرش الهام گرفته بود. هاوکینگ فکر می‌کرد که او «دختر بسیار زیبایی» است. انرژی و خوش‌بینی جین را تحســین می‌کرد و به‌تدریج احســاس می‌کرد که این خواص مسری هستند. دوستی آن‌ها به آهســتگی پیش می‌رفت، ولی پس از مدتی آن‌ها به درک این واقعیت نزدیک می‌شدند که به گفتهٔ جین «ما با هم می‌توانیم چیز باارزشی از زندگی‌هایمان بسازیم».

پــس از دوران دیدارهای دلپذیر بین لندن و کمبریج، استیفن هاوکینگ و جین وایلد با یکدیگر نامزد شدند. جین می‌گوید: «من می‌خواســتم به زندگی خود معنی بدهم و خیــال می‌کنم که این معنــی را در فکر مواظبت کردن از او پیدا کردم. ولی ما عاشــق یکدیگر بودیم و با هم ازدواج کردیم. به‌نظر نمی‌رسید که دیگر موردی برای انتخاب باشد. من تصمیم گرفتم که چه می‌خواهم بکنم و کردم.»

برای اســتیفن ایــن واقعه همه‌چیز را عــوض کرد. «نامــزدی زندگی مــرا تغییر داد. به مــن چیزی داد که بــرای آن زندگی کنم. مرا بــه زندگی مصمم کرد. بدون کمک‌های جین قادر به ادامهٔ زندگی نبودم و اراده‌ای هم برای آن نداشتم.»

هاوکینگ با عشــقی که نســبت به جین احســاس می‌کرد، به حالت ســرزندگی طبیعی‌اش بازگشــت. در تحصیلاتش پیشــرفت کرد. تصمیم گرفت که خود را در نهایــت درجه خوش‌بخت بداند، طــوری که اگر بیماری موجــب فلج کامل بدن او شــود، بر ذهن او تأثیر نگذارد. کار در زمینــهٔ فیزیک نظری می‌رفت تقریباً به‌طور کامل در فکر او جایگزین شــود. این یکی از مشغله‌های نادری بود که با در نظر گرفتــن موانع معلولیت فیزیکی در راه پیشرفت، می‌توانست انتخاب کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Philip Martin
2. Jessica Pope
3. Peter Moffat
4. Benedict Cumbergatch
5. Michael Brandon
6. Tom Hodgkins
7. Lisa Dillon
8. Phoebe Nicholls
9. Adam Godley
10. Peter Firth
11. Tom Ward
12. John Sessions
13. Rohan Siva
14. Matthew Marsh
15. Anastasia Hille
16. Bertie Carvel
17. Christian Rubeck
18. Murray Gold
19. Stephen William Hawking

۲۰. Amyotrophic Lateral Sclerosis (**اســکروز جانبی آمیوتروفیک**) یک بیماری نورون‌های حرکتی است که موجب تخریب حداکثری، فزاینده و غیرقابل جبران در دســتگاه اعصاب مرکزی، شــامل مغز، نخاع و دستگاه عصبی محیطی می‌شــود. فرد مبتلا به این نوع بیماری از ضعف ماهیچه‌ها و از دســت دادن کارکرد عضله‌ها رنج می‌برد و با گذشت زمان فلج کامل می‌شود و حتی توانایی کوچک‌ترین حرکتی از وی ساخته نیست.

۲۱. A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes ، این کتاب توسط **محمدرضا محجوب** به فارسی برگردان و توسط «**شرکت سهامی انتشار**» به زیور طبع آراسته شده است.

۲۲. **اخترفیزیک** یکی از گرایش‌های رشتهٔ فیزیک است که به بحث و بررسی ویژگی‌ها و شرایط فیزیکی ستارگان و سیاره‌ها، فضای بین ستاره‌ها و سیاره‌ها، و تولد و نیز مرگ اجسام فضایی می‌پردازد. رشتهٔ اخترفیزیک دارای این چهار گرایش اصلی است: کیهان‌شناسی؛ اخترشناسی؛ فیزیک خورشید؛ نجوم رصدی.

23. Kitty Ferguson

۲۴. به‌نظر می‌رســد یکی از منابع اصلی که برای تهیهٔ فیلم‌نامهٔ فیلم هاوکینگ مورد استفاده قرار گرفته، کتاب «**داســتان زندگی و پژوهش‌های اســتیفن هاوکینگ، جســت‌وجو بــرای یافتن نظریهٔ همه‌چیــز**» به قلم **گیتی فرگوسن** است. به‌همین دلیل پیشنهاد می‌شود قبل از تماشای این فیلم، کتاب مزبور را مطالعه و بررسی کنید.

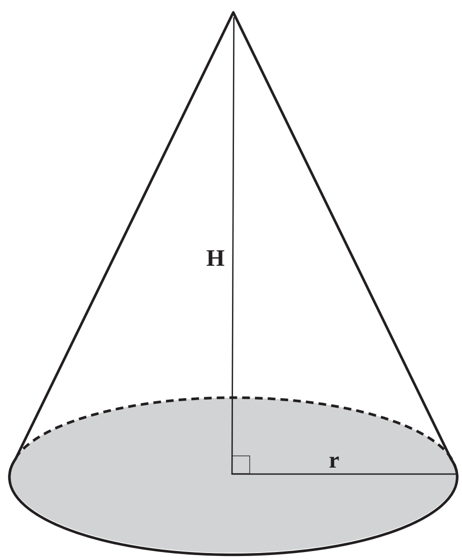
25. Roberd Berman
26. Fred Hoyle
27. Denis Sciama
28. Jane Wilde
29. Westfield

عباس قلعه پوراقدم
کارشناس ارشد جبر
دبیر ریاضی، ارومیه

بحثی در باب حجم مخروط

کلیدواژه‌ها: مخروط، حجم، قطاع، رادیان

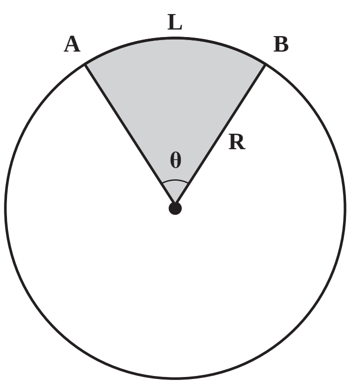
می‌دانید که حجم یک مخروط با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



شکل ۱.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^{2} h \quad (1)$$

حال فرض کنیم از یک تکه مقوای مدور به شعاع R، با بریدن قطاعی که اندازهٔ زاویهٔ مرکزی آن θ رادیان است، مخروطی بسازیم (شکل ۲). می‌خواهیم حجم مخروط ساخته شده را به‌صورت تابعی از θ محاسبه کنیم.



شکل ۲.

برای محاسبهٔ حجم مخروط ساخته شده به شعاع قاعده و ارتفاع آن نیاز داریم که به‌ترتیب آن‌ها را به‌دست می‌آوریم.

شعاع قاعدهٔ مخروط

در شکل ۲ کمان AB روبه‌روی زاویهٔ مرکزی θ با طول L را در نظر می‌گیریم. این کمان محیط قاعدهٔ مخروط را تشکیل خواهد داد. برای محاسبهٔ L برحسب θ و نیز به منظور یادآوری، تعریف رادیان را می‌آوریم.

رادیان: هرگاه طول کمان روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی، برابر شعاع دایره باشد، اندازهٔ این زاویهٔ مرکزی یک رادیان است. چون محیط دایره 2π برابر شعاع دایره است، پس محیط دایره 2π رادیان خواهد بود که در آن π با دقت ده رقم اعشار برابر است با: ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵.

اگر در دایره‌ای به شعاع R، اندازهٔ یک زاویهٔ مرکزی، θ رادیان باشد، طول کمان روبه‌روی این زاویه (L) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$L=\frac{۲\pi R\theta}{۲\pi}\Rightarrow L=R\theta \quad (۲)$$

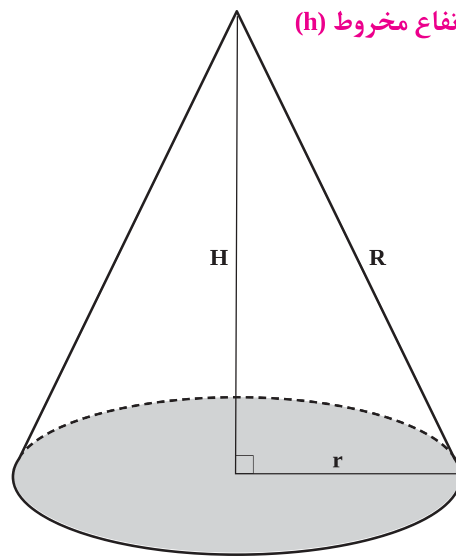
از طرف دیگر، اگر شعاع قاعدهٔ مخروط ساخته شده را r فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$L=۲\pi r \quad (۳)$$

از روابط (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$r=\frac{R\theta}{۲\pi} \quad (۴)$$

ارتفاع مخروط (h)



شکل ۳.

رابطهٔ فیثاغورس را در شکل ۳ به‌کار می‌گیریم:

$$R^۲=h^۲+r^۲\Rightarrow h^۲=R^۲-r^۲\Rightarrow h=\sqrt{R^۲-r^۲} \quad (۵)$$

با کمی استفاده از دانسته‌های جبری خود، از روابط (۴) و (۵) نتیجهٔ زیر را بگیرید:

$$h=\frac{R}{۲\pi}\sqrt{۴\pi^۲-\theta^۲} \quad (۶)$$

و سرانجام می‌توانید از روابط (۱)، (۴) و (۶) به نتیجهٔ نهایی برسید:

$$V=\frac{R^۳\theta^۲}{۲۴\pi^۲}\sqrt{۴\pi^۲-\theta^۲}$$

مسئلهٔ نمونه

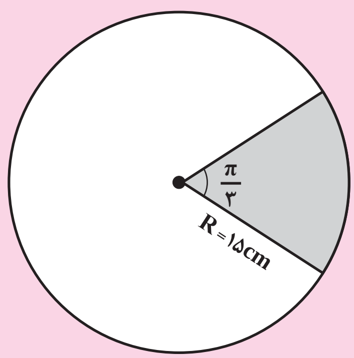
حجم مخروط ساخته شده از قطاعی با زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{۲}$ رادیان را که از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر بریده شده است، حساب کنید. (π را ۳/۱۴ در نظر بگیرید.)

حل:

$$\theta=\frac{۳/۱۴}{۲}=۱/۵۷ \text{ رادیان}$$

$$V=\frac{R^۳\theta^۲}{۲۴\pi^۲}\sqrt{۴\pi^۲-\theta^۲}$$
$$\Rightarrow V=\frac{(۱۰)^۳(۱/۵۷)^۲}{۲۴(۳/۱۴)^۲}\sqrt{۴(۳/۱۴)^۲-(۱/۵۷)^۲}$$
$$\Rightarrow V\approx ۶۷/۳cm^۳$$

تمرین: حجم مخروط ساخته شده از قطاع مشخص شده در شکل ۴ را حساب کنید.



شکل ۴

پاسخ: $۱۰۰/۱۶cm^۳$

منبع

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem. vol 34. n1. (feb 2008).

چند جفت صحیح (x,y) در رابطهٔ $۶(x!+۳)=y^۲+۵$ صدق می‌کنند؟

- الف) ۰
- ب) ۲
- ج) ۴
- د) ۶
- هـ) ۸

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

۱. جعبهٔ A شامل پنج مهرهٔ قرمز و سه مهرهٔ آبی است و جعبهٔ B شامل سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ آبی است. از هر جعبه یک مهره به تصادف بیرون کشیده شده.

الف) احتمال P را بیابید که هر دو مهره قرمز باشند.

ب) احتمال P را بیابید که یکی قرمز و یکی آبی باشد.

الف) احتمال انتخاب یک مهرهٔ قرمز از A برابر با $\frac{۵}{۸}$ و از B، $\frac{۳}{۵}$ است.

چون پیشامدها مستقل‌اند، $P=\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۳}{۸}$.

ب) احتمال $P_۱$ برای انتخاب یک مهرهٔ قرمز از A و یک مهرهٔ آبی از B، برابر است با: $\frac{۵}{۸}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۴}$. احتمال $P_۲$ برای انتخاب یک مهرهٔ آبی از A و یک مهرهٔ قرمز از B، برابر است با: $\frac{۳}{۸}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۹}{۴۰}$ بنابراین:

$$P=P_۱+P_۲=\frac{۱}{۴}+\frac{۹}{۴۰}=\frac{۱۹}{۴۰}$$

۲. ثابت کنید: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه A^C و B^C پیشامدهایی مستقل هستند.

پاسخ: فرض کنید: $P(A)=x$ و $P(B)=y$، بنابراین: $P(A^C)=۱-x$ و $P(B^C)=۱-y$. چون A و B مستقل‌اند:

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=xy$

به‌علاوه:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=x+y-xy$

با استفاده از قانون دمورگان داریم:

$(A\cup C)^c=A^c\cap B^c$

بنابراین:

$P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=۱-P(A\cup B)=۱-x-y+xy$

از طرف دیگر:

$P(A^c)P(B^c)=(۱-x)(۱-y)=۱-x-y+xy$

بنابراین: $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)\times P(B^c)$، و لذا A^C و B^C مستقل‌اند.

به طریق مشابه، ما می‌توانیم نشان بدهیم که A و B^C، همچنین، A^C و B نیز مستقل‌اند.

ترجمه برای دانش‌آموزان

ë Consider the following events for a family with children:

A={children of both sexes},

B={at most one boy}

(a) Show that *A* and *B* are independent events if a family has three children.

(b) Show that *A* and *B* are dependent events if a family has only two children.

(a) We have the equiprobable spase *S={bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg}*. Here

A={bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb}

and so $P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

B={bgg, gbg, ggb, ggg}

and so $P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

A∩B={bgg, gbg, ggb}

and so $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

Sinc $P(A)P(B)=\frac{3}{4}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=P(A\cap B)$.

A and *B* are independent.

(b) We have the equiprobable space *S={bb, bg, gb, gg}*. Here

A= {bg, gb} and so $P(A)=\frac{1}{2}$

B= {bg, gb, gg} and so $P(B)=\frac{3}{4}$

A∩B={bg,gb} and so $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$

Since *P(A)P(B)≠P(A∩B)*, *A* and *B* are dependent.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Contain .... شامل بودن	2. Marble .... مهره، تیلهٔ رنگی
3. Random .... تصادفی	4. Probability .... احتمال
5. Choosing .... انتخاب کردن	6. Event .... پیشامد
7. Independent .... مستقل	8. Furthermore .... به‌علاوه، از این گذشته
9. Similar .... مشابه	10. Demorgan'sLaw .... قانون دمورگان

ë Box *A* contains five red marbles and three blue marbles, and box *B* contains three red and two blue. *A* marble is drawn at random from each box.

(a) Find the probability p that both marbles are red.

(b) Find the probability p that one is red and one is blue.

(a) The probability of choosing a red marble from *A* is $\frac{5}{8}$ and from *B* is $\frac{3}{5}$. Since the events are independent, $P=\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{8}$.

(b) The probability P_1 of choosing a red marble from *A* and a blue marble from *B* is $\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$.

The probability P_2 of choosing a blue marble from *A* and a red marble from *B* is $\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{40}$.

Hence $P=P_1+P_2=\frac{1}{4}+\frac{9}{40}=\frac{19}{40}$.

Prove: If *A* and *B* are independent events, then A^C and B^C are independent events.

Let $P(A)=x$ and $P(B)=y$. Then $P(A^C)=1-x$ and $P(B^C)=1-y$. Since *A* and *B* are independent. $P(A\cap B)=P(A)P(B)=xy$. Furthermore,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=x+y-xy$$

By DeMorgan's law, $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$; hence

$P(A^C\cap B^C)=P(A\cup B)^C))=1-P(A\cup B)=1-x-y+xy$

On the other hand,

$P(A^C)P(B^C)=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$

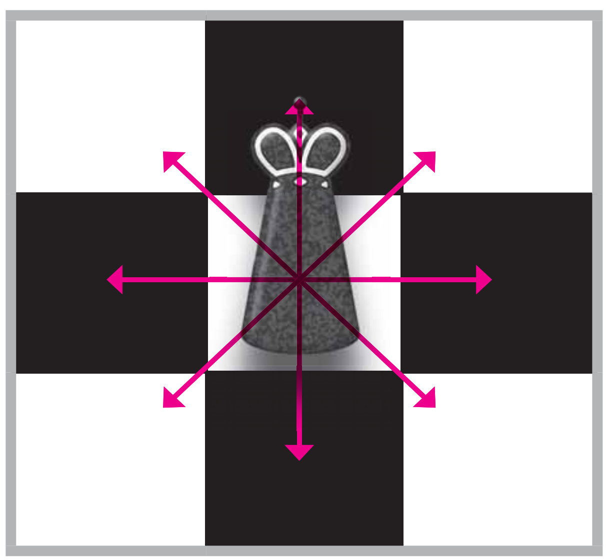
Thus $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)$, and so A^C and B^C are independent.

In similar fashion, we can show that *A* and B^C, as well as A^C and *B*, are independent.

هوشنگ شرقی

ایستگاه اول

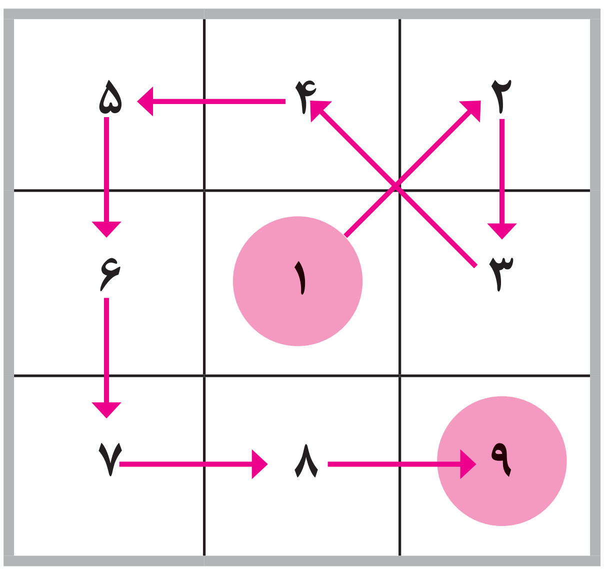
ایام نوروز و فراغت را در پیش دارید و این به شما زمان کافی برای پرداختن به برخی سرگرمی‌ها را می‌دهد. چه بهتر که این سرگرمی‌ها مفید و از جنس تفریح اندیشه باشند و نه فرساینده اندیشه! در این بخش برایتان یک تفریح واقعی داریم! آن‌هایی که با الفبای شطرنج آشنایی دارند، نوع حرکت مهرهٔ شاه شطرنج را می‌دانند: حرکت به‌هر هشت جهت، اما فقط یک خانه! به‌صورت زیر:



جدول‌هایی که در پی می‌آیند، براساس این نوع حرکت طراحی شده‌اند. در هر جدول باید عددهای طبیعی بین دو عدد (که معمولاً کوچک‌ترین آن‌ها ۱ و بزرگ‌ترین آن‌ها مساوی تعداد خانه‌های جدول است)، طوری در خانه‌ها توزیع شوند که اگر شاه شطرنج در خانهٔ شروع (معمولاً خانهٔ شمارهٔ ۱) قرار گیرد، بتواند با حرکت به خانه‌های بعدی (به‌ترتیب افزایش) از روی یک مسیر پیوسته، به خانهٔ آخر برسد. مثلاً فرض کنید، هدف ما حل این جدول باشد:

۲		۵
	۱	
۹		۷

همان‌گونه که می‌بینید، عددهای ۱ و ۹ که کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عددهای جدول هستند، با دایره‌ای به دور آن‌ها مشخص شده‌اند و عددهای بین آن‌ها، یعنی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ باید در خانه‌های دیگر قرار گیرند و عددهای ۲، ۵ و ۷ جای مشخصی دارند که در جدول آن را می‌بینید. حالا شما باید عددهای دیگر، یعنی ۳، ۴، ۶ و ۸ را در چهارخانه دیگر طوری قرار دهید که اگر شاه شطرنج در خانهٔ ۱ باشد، بتواند به خانهٔ ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ متوالیاً حرکت کند. این یک نمونهٔ بسیار آسان بود که جواب آن به‌صورت زیر مشخص می‌شود:



اکنون برای شما نمونه‌های زیر را داریم، تا حسابی با آن‌ها سرگرم شوید. از نمونه‌های مقدماتی و ساده شروع کرده‌ایم و به نمونه‌های پیچیده رسیده‌ایم! پس این شما و این هم چالش جدول‌های زیبای عددی!

الف) مقدماتی

۹		
	۴	۱
۷		۵

۱	۹	
۲		۷
		۶

۹		
۷	۱	
۶		۴

ب) ساده

	۴	۵	۱۶
۸	۶		
	۱۲		۱۴
۱۰		۱۳	۱

	۱	۱۰	
۵		۱۱	
۴		۷	
۱۶		۱۴	

۱		۴	
۲	۱۳		۷
		۸	
۱۶	۱۵		۱۰

ج) متوسط

		۲۳		۲۵	
۲۱	۲۸		۲۶	۳	
				۱	۸
۱۹	۳۰	۵		۷	
	۱۸	۱۴		۱۰	
		۱۵		۱۲	

۱۲		۱۶			
	۹	۱۴		۱۸	
	۸	۳۰		۲۱	
			۲۹		۲۲
۶	۳	۱	۲۵		
				۲۷	

د) دشوار

			۴۴	۱۷		۱۵	
۴۱	۴۶	۴۵	۱۱	۱۸			
۴۹		۴۷		۱۲	۱۹	۲۰	
	۴۸	۳۹	۵۶		۸		۲۳
	۳۸	۵۵		۷	۳	۱	
	۵۴		۵۸		۶	۲۷	
	۳۵	۳۶	۵۹	۶۰	۵		۲۶
	۳۴				۳۰		

		۳۰		۲۸	۳		
		۳۲			۱		
۳۷		۳۴	۳۳	۲۶	۵	۶	۸
۳۸	۳۹		۲۳		۲۵	۱۳	
	۱۹	۲۲	۲۱			۱۲	
		۱۷	۱۶		۵۲		۱۱
۴۲	۴۳	۴۵	۴۸		۵۳		۵۵
				۴۷			

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

هفت سامورایی هفت شب!

شیمادا رهبر گروه بود و او بود که ۶ سامورایی دیگر را برای محافظت از روستاییان فقیر انتخاب کرد. شیمادا به **کیکوچیو** (با بازی **توشیرومیفونه**) گفت: «هر شب ۳ نفر باید نگهبانی بدهند.»

کیکوچیو توی دلش گفت: «۷ شب، ۷ سامورایی. بهتر نیست هر شب یکی نگهبانی بدهد؟ اما نه، یک نفر، کم است!»

شیمادا گفت: «به چی فکر می‌کنی؟ ۷ نفریم و برای هر شب از ۷ روز هفته، ۳ نگهبان می‌خواهیم. طوری نگهبان‌ها را مشخص کن که عدالت رعایت شود!»

کیکوچیو اخم‌هایش تو هم رفت: «نگهبانی برای هیچ!» پولی در کار نبود و حالا رئیس از او می‌خواست این مسئله را هم حل کند! او که همهٔ عمرش فقط جنگیده بود، این دفعه بدجوری گیر کرده بود. شیمادا (با بازی **تاکاشی شیمورا**) اما بیخودی رئیس سامورایی‌ها نشده بود. او دوباره گفت: «برای اینکه اعضای گروه با هم بیشتر آشنا شوند، برنامهٔ نگهبانی‌ها را طوری بچین که هر دو نفر حداقل یک شب با هم نگهبانی بدهند!»

کیکوچیو ترجیح می‌داد همهٔ شب‌ها را به تنهایی نگهبانی بدهد، اما فکرش را درگیر این مسئله نکند!

***

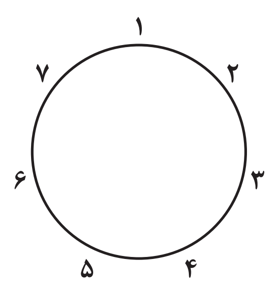
این گفت‌وگوی خیالی در فیلم «هفت سامورایی»، ساختهٔ **آگیراکوروساوا** نبود، اما در واقعیت می‌تواند بارها تکرار شود. برای مثال، در برنامهٔ نگهبانی ادارات و کارخانه‌ها، در برنامه‌ریزی وظایف کارمندان یک اداره، در برنامهٔ گردش روزانه یک گروه از گردشگران، و یا در کشیک شبانهٔ یک بیمارستان. بیایید مسئله را حل کنیم.

۷ شب و هر شب ۳ نگهبان. پس ما به ۲۱ (شب، نگهبان) احتیاج داریم. چون ۷ نفر هستند و قرار است که عدالت رعایت شود، پس بهتر است هر نفر در ۳ (شب، نگهبان) حضور داشته باشد.

برای برنامه‌ریزی ۷ شب راه‌های متفاوتی وجود دارند:

الف) افراد را دور یک دایره (شکل ۱) در نظر بگیرید. هر نفر با ۲ نفر مجاورش یک گروه ۳ نفره تشکیل می‌دهد. پس ۷ گروه ۳ نفره تشکیل می‌شود:

۷۱۲, ۱۲۳, ۲۳۴, ۳۴۵, ۴۵۶, ۵۶۷, ۶۷۱



شکل ۱.

ب) از نفر شـماره‌ٔ ۱ شروع کنید و سه‌نفر سه‌نفر جدا کنید و به پیش بروید:

۱۲۳, ۴۵۶, ۷۱۲, ۳۴۵, ۶۷۱, ۲۳۴, ۵۶۷

شـیمادا شـرط دیگـری هـم دارد. او می‌خواهـد برنامه‌ریـزی طوری باشـد که هر دو نفر بـا هم حداقل یک‌بار نگهبانی داده باشـند. به‌نظر شما دو جواب بالایی این شـرط را دارند؟ به وضوح این شـرط برقرار نیست. برای مثال، دو شخص ۱ و ۴ با هم نگهبانی نداده‌اند و ۲ و ۳ با هم دوبار نگهبانی داده‌اند.

به‌نظر می‌رسـد هر دو نفر باید **دقیقاً** یک‌بار با هم نگهبانی بدهند تا شرط خواسته شده محقق شود.

اثبات

بیاییـد زوج‌هایـی را که با هـم نگهبانی می‌دهند، بشماریم:

شـمارش اول: هفت گروه ۳ نفره داریم. هر شـب ۳ زوج نگهبان خواهیم داشت. پس ۲۱ زوج نگهبان در هفت شب خواهیم داشت.

شمارش دوم: می‌توان $\binom{۷}{۲}=۲۱$ زوج از نگهبان‌ها تشـکیل داد. اگر یکی از این زوج‌ها دوبار با هم نگهبانی بدهند، آن‌گاه زوج دیگری پیدا می‌شـود که هیچ شبی بـا هم نگهبانی نداده‌اند. پس هر زوج از این ۷ نفر دقیقاً یک‌بار باید با هم نگهبانی داده باشند.

اما برنامه‌ریزی این ۷ شب چگونه باید باشد؟ بیایید از نفر اول شــروع کنیم. او ســه شب نگهبانی می‌دهد و هر شب با دو نفر از ۶ نفر دیگر نگهبانی خواهد داد. پس بدون از دســت دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد، سه شب نگهبانی او به‌صورت زیر است:

۱۲۳, ۱۴۵, ۱۶۷

آیــا می‌توانیم فرض کنیم که برنامهٔ ۳ شــب اول را چیده‌ایــم؟ باز به‌دلیل تقارن چنیــن فرضی امکان‌پذیر اســت. نفر اول ســه شــب نگهبانی‌اش را داده اســت و می‌تواند چهار شب بعد را استراحت کند!

به ســراغ نفر دوم می‌رویم. نفر شمارهٔ ۲ شب اول با ۱ و ۳ هم‌گروه بوده اســت. حال باید با افراد ۴، ۵، ۶ و ۷ نیز ۲ گروه نگهبانی تشــکیل دهد. آیا مجاز هســتیم این ۲ گروه را برای ۲ شــب بعــد در نظر بگیریم: ۲۶۷ و ۲۴۵؟ پاســخ منفی اســت. ۴ و ۵ با هم در شب دوم نگهبانی داده‌اند (همین‌طور ۶ و ۷ در شــب سوم). پس تغییری نیاز اســت: ۲۵۷ و ۲۴۶. شــب چهارم و پنجم مشــخص شــدند و حالا نفر دوم هم می‌تواند شب‌های دیگر استراحت کند. نفر سوم شب اول با ۱ و ۲ نگهبانی داده اســت. حال بایــد با ۴ نفر دیگــر ۲ گروه نگهبانی تشکیل دهد. کدام‌یک از گروه‌بندی‌های زیر مجاز است؟

الف) ۳۴۵, ۳۶۷
ب) ۳۴۶, ۳۵۷
ج) ۳۴۷, ۳۵۶

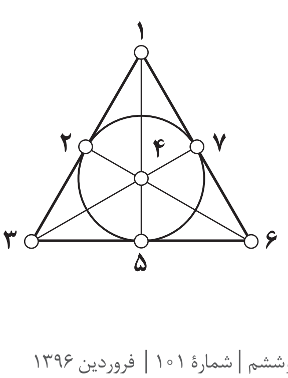
به وضوح پاسخ «ج» صحیح است. تا اینجا برنامهٔ ۷ شب مشخص شده است:

۱۲۳, ۱۴۵, ۱۶۷, ۲۴۶, ۲۵۷, ۳۴۷, ۳۵۶

اگر بررسی کنید متوجه خواهید شد که شرط مسئله برای نفرات بعدی هم برقرار است. (این‌طور نیست؟)

می‌توانیم برای به‌خاطر ســپردن برنامهٔ نگهبانی‌ها (مناســب برای کیکوچیو!) شکل ۲ را در نظر بگیریم که به «صفحهٔ فانو» معروف است:

(۳ ضلع، ۳ میانه و یک دایره)



شکل ۲.

اما برای آنکه بتوانید خود را بیازمایید، چند مسئله شــبیه به مسئلهٔ «هفت سامورایی هفت شب نگهبانی» برایتان می‌آورم.

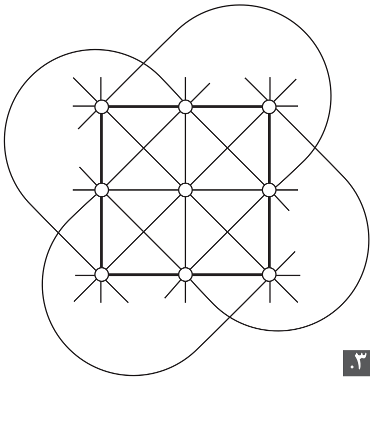
مســئلهٔ ۱. اگر ۸ پرســتار بخواهند ۸ گــروه ۳ نفره تشکیل دهند، به‌طوری‌که عدالت کاری رعایت شود و همچنین هر دو نفر حداقل یک‌بار با هم در یک گروه کشیک هم‌گروه باشند، آیا برنامه‌ریزی فوق امکان‌پذیر است؟

مســئلهٔ ۲. هفــت بازیکن گلــف می‌خواهند در یک اردوی یک‌هفته‌ای در شــهری که ۲ زمین گلف دارد، شرکت کنند. آن‌ها تصمیم می‌گیرند که هر نفر در هر روز یک بازی داشته باشند. بنابراین هر روز به ۲ گروه ۳ نفره و ۴ نفره تقســیم می‌شــوند و هر گروه در یک زمین گلف بازی می‌کند. برنامه‌ریزی و گروه‌بندی این ۷ روز را طوری انجام دهید که:

۱. تعداد دفعات حضور هر فرد در گروه‌های ۳ نفره یکسان باشد.
۲. تعداد دفعات حضور هر فرد در گروه‌های ۴ نفره یکسان باشد.
۳. تعــداد دفعــات هم‌گروه شــدن هــر دو نفر در گروه‌های ۳ نفره یکسان باشد.
۴. تعــداد دفعــات هم‌گروه شــدن هــر دو نفر در گروه‌های ۴ نفره یکسان باشد.

راهنمایی: از مسئلهٔ ۷ سامورایی کمک بگیرید.

مسئلهٔ ۳. به کمک شکل ۳، از ۹ دانش‌آموز ۱۲ گروه ۳ نفره تشکیل دهید، به‌طوری که:
الف) هر نفر عضو ۴ گروه باشد.
ب) هر دو نفر دقیقــاً یک‌بار با هم در یک گروه آمده باشند.


شکل ۳.

مهدی قربانی
دبیر ریاضی شهر تهران

مساحت ذوزنقه برحسب چهار ضلع آن

محاسبهٔ مساحت ذوزنقه با قاعده‌های کوچک و بزرگ a و b ‏(b>a) و ساق‌های d و c براساس قضیهٔ (دستور) زیر قابل انجام است.

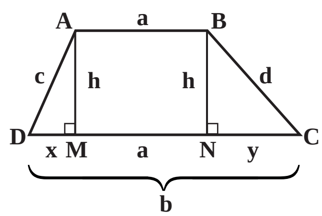
قضیه: مساحت ذوزنقه با قاعده‌های a و b ‏(b>a) و ساق‌های d و c برابر است با:

$$S=\frac{a+b}{b-a}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$

که در آن، p نصف محیط ذوزنقه است؛ یعنی:

$$p=\frac{a+b+c+d}{۲}$$

برهان: ذوزنقهٔ روبه‌رو را در نظر بگیرید که در آن ارتفاع وارد بر قاعده‌ها رسم شده است. بنابر قضیهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:



$$\overset{\Delta}{ADM}: h^۲+x^۲=c^۲ \Rightarrow x=\sqrt{c^۲-h^۲}$$

$$\overset{\Delta}{BNC}: h^۲+y^۲=d^۲ \Rightarrow y=\sqrt{d^۲-h^۲}$$

اما: x+y+a=b. بنابراین:

$$\sqrt{c^۲-h^۲}+\sqrt{d^۲-h^۲}=b-a$$

اکنون برای به‌دست آوردن $z=h^۲$ معادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$c^۲-z+d^۲-z+۲\sqrt{(c^۲-z)(d^۲-z)}=(b-a)^۲$$

$$۲\sqrt{(c^۲-z)(d^۲-z)}=۲z+(b-a)^۲-c^۲-d^۲$$

برای آسان شدن انجام محاسبات فرض می‌کنیم:

$$(b-a)^۲-c^۲-d^۲=۲t$$

در این صورت معادلهٔ اخیر چنین می‌شود:

$$\sqrt{(c^۲-z)(d^۲-z)}=z+t$$

$$c^۲d^۲-(c^۲+d^۲)z+z^۲=z^۲+۲tz+t^۲$$

$$z=\frac{c^۲d^۲-t^۲}{c^۲+d^۲+۲t}$$

و با جای‌گذاری مقادیر مفروض داریم:

$$h^۲=\frac{c^۲d^۲-[(b-a)^۲-c^۲-d^۲]^۲/۴}{c^۲+d^۲+(b-a)^۲-c^۲-d^۲}$$

$$h^۲=\frac{۴c^۲d^۲-[(b-a)^۲-c^۲-d^۲]^۲}{۴(b-a)^۲}$$

$$h^۲=\frac{(۲cd-(b-a)^۲+c^۲+d^۲)(۲cd+(b-a)^۲-c^۲-d^۲)}{۴(b-a)^۲}$$

$$h^۲=\frac{[(d+c)^۲-(b-a)^۲][(b-a)^۲-(d-c)^۲]}{۴(b-a)^۲}$$

$$h^۲=\frac{(d+c+b-a)(d+c-b+a)(b-a-d+c)(b-a+d-c)}{۴(b-a)^۲}$$

و با توجه به اینکه: a+b+c+d=۲p.

$$h^۲=\frac{(۲p-۲a)(۲p-۲b)(۲p-۲a-۲d)(۲p-۲a-۲c)}{۴(b-a)^۲}$$

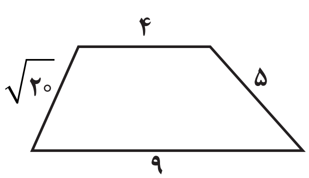
$$h^۲=\frac{۴(p-a)(p-b)(p-a-d)(p-a-c)}{۴(b-a)^۲}$$

و از دستور محاسبهٔ مساحت ذوزنقه نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{(a+b)h}{۲}$$

$$S=\frac{a+b}{b-a}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$

مثال: مساحت ذوزنقهٔ مقابل را حساب کنید.



حل:

$$p=\frac{۴+۹+۵+۲\sqrt{۵}}{۲}=۹+\sqrt{۵}$$

$$S=\frac{۴+۹}{۹-۴}\sqrt{(۹+\sqrt{۵}-۴)(\underbrace{۹+\sqrt{۵}-۹}_{\sqrt{۵}})(۹+\sqrt{۵}-۵-۴)(۹+\sqrt{۵}-۴-۲\sqrt{۵})}$$

$$S=\frac{۱۳}{۵}\sqrt{(۵+\sqrt{۵})(\sqrt{۵})(\sqrt{۵})(۵-\sqrt{۵})}$$

$$S=\frac{۱۳}{۵}\sqrt{(۵^۲-۵)\times ۵}=\frac{۱۳}{۵}\sqrt{۲۰\times ۵}=\frac{۱۳\times ۱۰}{۵}=۲۶$$

هوشنگ شرقی

گفت‌وگو با احمد احسنت دبیر نمونهٔ ریاضی استان فارس

لذت حل مسئله

اشاره

آشنایی من با نام احمد احسنت به حدود ۲۰ سال پیش برمی‌گردد. سال ۱۳۷۵ و در سفری به شیراز، در یک کتاب‌فروشی کتابی از هندسه توجهم را جلب کرد که دو مؤلف داشت و احمد احسنت یکی از آن‌ها بود. بعدها در سفر به شهرهای متفاوت و شرکت در کنفرانس‌های آموزش ریاضی می‌دیدم که معمولاً نام ایشان هم از شرکت‌کنندگان از استان فارس در فهرست حاضران است.

این‌ها، به اضافهٔ فعالیت‌های مستمر و تألیف کتاب‌های گوناگون ریاضی شهرتی به ایشان بخشیده است که وقتی امسال برای شرکت در چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی به شیراز رفتیم، فرصت را برای انجام مصاحبه‌ای مغتنم شمردیم و در حاشیهٔ کنفرانس و در محل برگزاری آن، گفت‌وگوی کوتاهی هم با این فرهنگی خوش‌نام شیراز انجام دادیم؛ گفت‌وگویی که از سال‌ها پیش در پی آن بودم. در این گفت‌وگو آقای عنایت‌الله راستی‌زاده (همکار مجله برهان و از دبیران فعال ریاضی شهر شیراز) نیز ما را همراهی کرد.

شرقی: به‌نام خدا. امروز سه‌شنبه شانزدهم شهریور ۱۳۹۵ در خدمت استاد احمد احسنت هستیم. من اولین سؤالم را از مبداء آشنایی‌ام با شما، یعنی کتاب هندسهٔ پایه، نوشتهٔ شما و آقای محمد مهدی نجات شروع می‌کنم. مقدمهٔ کتاب با این شعر شروع می‌شود:

لذات دنیوی همه هیچ است پیش من
در خاطر از تغیّر آن هیچ ترس نیست
روز تنعم و شب عیش و عشرت مرا
غیر از شب مطالعه و روز درس نیست

این شعر از کیست و انتخاب آن چگونه بوده است؟

● **احسنت:** فکر می‌کنم شعر از خواجه نصیرالدین طوسی است و آقای نجات آن را پیشنهاد داد.

ناشر کتاب آن‌طور که در پشت جلد آن آمده، «دبیرستان نمونهٔ توحید» بوده است. دبیرستان توحید از دبیرستان‌های معروف شیراز و ظاهراً دبیرستان موفقی بوده است. به‌عنوان نمونه، **داریوش دبیری که در سال ۱۳۶۳ در مسابقات ریاضی کشور مقام آورده است، علی ثابتیان که در سال ۱۳۶۶ عضو تیم المپیاد ریاضی ایران بود و **محمدصادق تواضعی** که در سال ۱۳۷۶ عضو تیم المپیاد ریاضی ایران بود، از دانش‌آموزان آن بوده‌اند. این دبیرستان الان چه وضعی دارد؟ چون احتمالاً شما آنجا درس می‌داده‌اید و شاید هنوز هم تدریس می‌کنید و از وضع آن باخبرید.

● **احسنت:** البته ناشر کتاب در تهران بود و دبیرستان توحید مرکز پخش کتاب بود. در مورد دبیرستان توحید باید بگویم که قبل از انقلاب این دبیرستان به‌عنوان یک دبیرستان نمونهٔ دولتی (شبیه دبیرستان البرز تهران) تأسیس شد و نام آن دبیرستانِ دانشگاه بود. ارتباطهایی با دانشگاه شیراز (دانشگاه پهلوی سابق) داشت. روش انتخاب دانش‌آموزان آن هم این‌طور بود که نخبه‌های استان (اعم از شهرها و روستاها) را انتخاب و آن‌ها را در چهار کلاس (دو کلاس شهری و دو کلاس روستایی) سازمان‌دهی می‌کردند و آموزش می‌دادند. اعضای هیئت علمی آن هم از دانشگاهیان بودند.

بعد از انقلاب هم به مدرسهٔ نمونه مردمی تبدیل و از دانشگاه جدا شد. من از سال ۱۳۶۴ برای تدریس درس هندسهٔ سال اول به این دبیرستان دعوت شدم و چند سال آنجا بودم تا آنکه آقای نجات را برای کمک به من به جمع اضافه کردند که بعد به فکر تألیف آن کتاب به کمک ایشان افتادم.

یکی از روش‌های تقویت تفکر و باز شدن فکر، تلاش برای حل مسئله است

شیراز دبیرستان‌های خوب زیادی داشت که دانش‌آموزان خوبی را تربیت می‌کردند و می‌خواهم به بعضی دیگر از آن‌ها اشاره کنم. مثلاً **محمدعلی خجسته‌پور**، از «دبیرستان شرافتی» عضو تیم المپیاد ریاضی و **حسین عباس‌پور** از «دبیرستان ملاصدرا» و **محمد غلامزاده** از «دبیرستان اندیشه» که این‌ها هم در سال‌های اولیه عضو تیم‌های المپیاد ریاضی ایران بودند. اما در سال‌های دهۀ ۱۳۷۰ به‌تدریج سهم شیراز در المپیاد ریاضی کاهش می‌یابد. علت این افت را چه می‌دانید؟

● **احسنت:** من فکر می‌کنم یکی از علت‌های اصلی‌اش این است که رقابت کمتر شده است. در آن سال‌ها فقط چند مدرسۀ خوب بودند (مثل همان مدرسۀ توحید، یا ملاصدرا یا شرافتی)، ولی بعدها تعداد این مدارس بیشتر شد و مدارس مختلف (نمونۀ دولتی، نمونۀ مردمی، غیرانتفاعی، تیزهوشان و...) به‌وجود آمدند. در نتیجه نخبگان در مدارس پخش شدند و آن رقابت جدی از بین رفت. وقتی آن‌ها یکجا جمع بودند، بینشان رقابت خیلی بیشتر بود که باعث پیشرفت می‌شد.

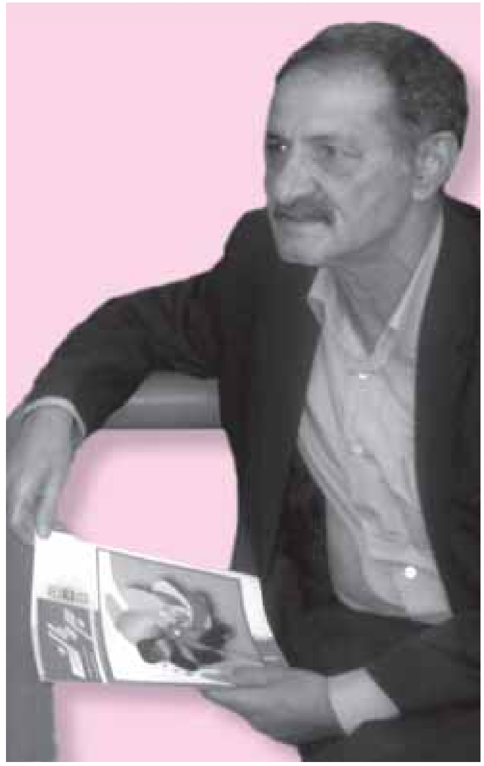
کنکور چقدر تأثیر داشته است؛ جو کنکور، نکته، تست و این حرف‌ها؟

● **احسنت:** کنکور که البته همیشه برای نخبگان، نقش بازدارنده داشته است. ولی خب المپیاد هم البته مسیر دشواری دارد. دانش‌آموزانی داشتیم که بعد از مدت‌ها تلاش، نمی‌توانستند در المپیاد موفقیت چشم‌گیری به‌دست آورند و این باعث سرخوردگی آن‌ها می‌شد. ولی کنکور راه آسان‌تری برای نتیجه‌گیری است و در نتیجه بچه‌ها بیشتر به این سمت می‌روند که سدی برای پیشرفت علمی و موفقیت واقعی آنان می‌شود.

می‌شود نتیجه گرفت که در کل کشور مانعی برای پیشرفت علمی بچه‌ها شده است؟

● **احسنت:** بله موضوع کلی است. علاوه بر آن، وقتی مدارس تیزهوشان تأسیس شد، آن هم آثار منفی داشت. تیزهوشی پدیده‌ای ذاتی است و باید درون دانش‌آموز باشد تا در جایی و محفلی تصادفاً خود را نشان دهد. این‌طور نیست که با یک آزمون تستی بتوان تیزهوش بودن کسی را تشخیص

آن‌هایی که به شعر و شاعری علاقه دارند، هم می‌توانند از ریاضیات کمک بگیرند. زیرا ریاضیات به باز شدن ذهن و خلاقیت آن‌ها کمک می‌کند



داد! وقتی مدارس تیزهوشـان تأسیس شدند، خب مـن هم اوایل با آن‌ها همکاری داشـتم. اگر یادتان باشـد، اوایل خـوب بودند، اما به‌تدریـج از کیفیت آن‌ها کاسـته شد و آن‌ها هم خود از عوامل این افت شدند.

شما الان هم تدریس می‌کنید. آیا بین دانش‌آموزان الان خودتان کسانی هم سطح دانش‌آموزان آن دوره می‌بینید؟

● **احسـنت:** خیـر، الان اصـلاً از لحاظ سـطح قابل مقایسـه با آن دوره نیستند. آن موقع بچه‌ها مسائل را بـا علاقه حـل می‌کردنـد، الان حل مسـائل را می‌خواهنـد! اصـلاً نمی‌خواهند مسـئله را با صرف وقت و تفکر حل کنند.

دانش‌آمـوزان، آن زمـان وقتـی مسـئله‌ای را حل می‌کردند، حسی پیدا می‌کردند که این حس را من و شما هم تجربه کرده و می‌کنیم؛ یعنی «لذت حل مسـئله». این لذت کجا رفته اسـت که شما هم در مقدمهٔ کتابتان و در آن شعر به آن اشاره کرده‌اید؟

● **احسـنت:** لذت‌های کاذب آمده‌انـد و جای آن را گرفته‌اند! اینترنت، تلفـن همراه، فضای مجازی و... وقـت و جایی برای لذت بردن از حل مسـئله باقی نگذاشـته‌اند. کتاب‌های کمک‌درسی هم بسیار زیاد شده‌اند که حل کامل مسائل را بی‌زحمت در اختیار دانش‌آموزان می‌گذارند و دیگر جایی برای اندیشه و تفکر برای او باقی نمی‌گذارند.

آن‌وقت که ما کتاب هندسـهٔ پایه را نوشـتیم، حل بسـیاری از مسـائل را در آن نگذاشته بودیم و راهنمایی‌هـای مختصری کرده بودیم. در واقع باقی کار را به‌عهدهٔ دانش‌آموزان گذاشته بودیم.

پس با این حسـاب شما که آن تجربه‌ها را داشته‌اید و آن دوران‌ها را سـپری کرده‌اید، باید برایتان خیلی سخت باشد که با این شرایط روبه‌رو شده‌اید؟!

● **احسـنت:** بله خیلی سخت اسـت! دانش‌آموزی به من مراجعه کرد و گفت: آقای احسـنت ما هر کتابی می‌بینیم، حل کامل مسـئله‌ها را به ما داده اسـت. چرا شـما از ما می‌خواهید مسئله‌ها را خودمان حل کنیـم؟! گفتم: یکی از روش‌هـای تقویت تفکر و باز شـدن فکر، تلاش برای حل مسـئله است. من اصلاً اصراری به حل مسـئله و رسـیدن به جواب ندارم! مهم همان فکر کردن است.

احسنت به آقای احسـنت! پیام اصلی ما هم همین اسـت که اجازه می‌خواهم مقـداری آن را پررنگ‌تر کنم: «مهم نیسـت که مسـئله حل شـود، مهم آن است که به حل آن فکر شود!»

خب آقای احسنت شـما از کی تدریس ریاضی را شروع کردید؟

● **احسنت:** من وقتی دانشجوی سال دوم رشتهٔ ریاضی در «دانشـگاه فردوسی» مشهد بودم، در سال ۱۳۵۱ تدریس ریاضی را شـروع کردم. مدرسه‌ای در مشهد بود که از آنجا به دانشـکدهٔ ریاضی آمـده بودند و از آن‌ها خواسته بودند که برای تدریس ریاضی دانشجوی موفقی را معرفی کنند. آن‌ها از شـاگرد اول دانشکده خواسته بودند که او گفته بود نمی‌تواند تدریس کند. بعد آمدند به سـراغ شـاگرد دوم که من بودم و من پذیرفتم. هفته‌ای دو جلسه می‌رفتم و حساب استدلالی و جبر تدریس می‌کردم. بچه‌های خوب و علاقه‌مندی بودند و من هم به معلمی و تدریس علاقه داشتم. بعد از فارغ‌التحصیلی هم برگشتم به استان فارس و اینجا

معلمی ریاضی را ادامه دادم. مدتی در «لار» بودم و بعد به شیراز منتقل شدم. بعدها در سال ۱۳۷۰ به کرمان رفتم و از آنجا فوق‌لیسانس ریاضی کاربردی گرفتم.

تحصیلات ابتدایی شما در دههٔ ۱۳۴۰ بوده است، احتمالاً در شیراز. در آن سال‌ها با «مجلهٔ یکان» آشنایی داشتید؟

● **احسنت:** بله، در سال‌های پنجم و ششم ریاضی یکان را زیاد می‌خواندم و مسائل آن را حل می‌کردم.

از معلم‌های دورهٔ دبیرستانتان کسانی هستند که بخواهید از آنان نام ببرید؛ به‌عنوان اینکه روی شما تأثیر بسزایی داشته‌اند؟

● **احسنت:** بله. از دبیران ریاضی ششم دبیرستان (سال دوازدهم)، آقای دکتر **جوادپور** که جبر، هندسه ترسیمی و رقومی تدریس می‌کردند و روی کار من تأثیری بسیار داشتند.

کدام دبیرستان؟

● **احسنت:** «دبیرستان شاهپور» که از دبیرستان‌های خوب و قدیمی شیراز بود. و آقای **دسترنج** دبیر هندسهٔ سال چهارم دبیرستان که خیلی خوب کار می‌کرد و روی ما اثرگذار بود.

خب به سال‌های اخیر برگردیم، شما در دههٔ ۱۳۷۰ آن کتاب را نوشتید، به کرمان رفتید، کارشناسی‌ارشد ریاضی گرفتید، به شیراز برگشتید و از سال ۱۳۷۲ تا ۱۳۸۵ سرگروه ریاضی استان بودید. آیا در این سال‌ها ایده یا طرحی برای پیشرفت آموزش ریاضی در استان فارس یا شهر شیراز ارائه داده‌اید؟

● **احسنت:** بله. در دوره‌ای کارگاه تفکر ریاضی راه انداختیم، کلاس‌های المپیاد ریاضی داشتیم، از دانشجویان المپیادی خواستیم که به بچه‌ها تدریس کنند و مجلهٔ ریاضی داشتیم.

نظرتان دربارهٔ مجلهٔ ما چیست؟ چه توصیه‌ای به ما می‌کنید؟

● **احسنت:** ابتدا توصیه می‌کنم که مجله را به نحو مناسبی به‌دست بچه‌ها برسانید و کاری کنید که با آن آشنا شوند و از مطالب آن استفاده کنند. در مورد محتوا هم اگر بشود کاری کرد که مثل «یکان»، ارتباط بهتری با دانش‌آموزان برقرار شود، خیلی خوب است.

البته اگر کنکور و تست بگذارد! چون بچه‌ها فکر می‌کنند مطالب مجلهٔ ما مستقیماً کمکی به آن‌ها نمی‌کند! با این حال چه توصیه‌ای به خوانندگان ما، یعنی دانش‌آموزان دارید؟

● **احسنت:** به آن‌ها می‌گویم باور کنند که اگر ریاضی بدانند، به همه‌چیز آن‌ها کمک می‌کند! حتی آن‌ها که به شعر و شاعری علاقه دارند، هم می‌توانند از ریاضیات کمک بگیرند. زیرا ریاضیات به باز شدن ذهن و خلاقیت آن‌ها کمک می‌کند و باعث می‌شود آثار بهتری خلق کنند.

سپاس فراوان از وقتی که در اختیار ما گذاشتید.

پرسش‌های بیکارجو!

سه نفر می‌توانند هر یک به تنهایی کاری را انجام دهند. اگر دومی و سومی با هم کار را انجام دهند، مدت زمان کار نصف وقتی می‌شود که اولی به تنهایی کار را انجام دهد. ولی اگر اولی و سومی با هم کار کنند، زمان اتمام کار، یک‌سوم مدتی است که دومی به تنهایی کار را به اتمام برساند. اگر اولی و دومی با هم کار کنند، زمان لازم چند برابر مدت زمانی است که سومی به تنهایی لازم دارد تا کار را انجام دهد؟

- ☐ الف) $\frac{۱}{۴}$
- ☐ ب) $\frac{۲}{۳}$
- ☐ ج) $\frac{۳}{۷}$
- ☐ د) $\frac{۵}{۷}$
- ☐ هـ) $\frac{۱}{۷}$

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

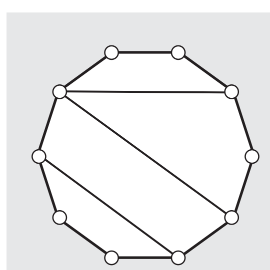
«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۷۱. پانزده دانش‌آموز در یک اردوی تابستانی شرکت کردند. هر روز سه دانش‌آموز موظف بودند که در پایان کلاس‌های آن روز، کلاس را تمیز کنند. در پایان اردو، معلوم شد که هر دو دانش‌آموز دقیقاً یک روز با هم در گروه‌های مذکور شرکت داشته‌اند. این اردو چند روز طول کشیده است؟

۲۷۲. یک nضلعی محدب را می‌خواهیم به چهارضلعی‌هایی افراز کنیم. برای این کار چند قطر که در داخل nضلعی متقاطع نیستند باید رسم کنیم تا سطح nضلعی به چهارضلعی‌ها افراز شود؟ شرط لازم و کافی برای وجود چنین افرازی چیست؟ در صورت برقراری شرایط مذکور، چند قطر باید رسم کنیم؟ در شکل افرازی از یک ۱۰ضلعی را می‌بینید.



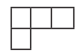
۲۷۳. ساعت دیواری کلاس ما فقط عقربه ساعت‌شمار دارد. اگر عقربه $\frac{۷}{۸}$ از فاصلهٔ بین ۴ و ۵ را طی کرده باشد، ساعت دقیقاً چند است؟

۲۷۴. در یک فروشگاه بسته‌های ۷تایی، ۱۳تایی و ۲۵تایی از کیک فروخته می‌شود. مثلاً اگر شما ۱۴ کیک بخواهید، باید دو بستهٔ ۷تایی بخرید، اما هیچ امکانی برای خرید دقیقاً ۱۵ کیک وجود ندارد. بیشترین مقدار n را بیابید، به‌طوری که امکان خرید n کیک از این فروشگاه وجود نداشته باشد.

۲۷۵. می‌خواهیم ۱۰۰ کبوتر را در تعدادی قفس جای دهیم، به‌طوری که تعداد کبوترها در قفس‌ها دوبه‌دو متفاوت باشد و اگر قفس‌ها را برحسب تعداد کبوترها مرتب کنیم، اختلاف کبوترها در دو قفس متوالی حداکثر ۲ باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

۲۷۶. در شـکل زیر، هر خانه با یک عدد پر شده است، به‌طوری که مجموع هر سه عدد متوالی برابر است با ۱۹. عدد d را مشخص کنید.

h	۸	g	f	e	d	c	b	a	۴

۲۷۷. یـک مربع ۴×۴ را می‌خواهیم با موزاییک‌هایی به فرم  فرش کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۲۷۸. **رضا** تعدادی نقطه داخل یک مربع انتخاب کرد و سـهراب با وصل کردن بعضی از آن‌ها به‌هم سـطح مربع را به مثلث‌هایی کوچک‌تر افراز کرد، به‌طـوری که رأس‌های مثلث‌ها یا یکی از چهار رأس مربع بودند و یا یکی از نقاط اضافه شده توسط رضا. اگر تعداد مثلث‌ها ۹۶ باشـد، تعـداد نقطه‌هایی که رضا اضافه کرده بود، چندتا بود؟

۲۷۹. a، b و c سـه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید حداقل یکی از سه معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی دارد:

$$ax^۲+۲bx+c=۰,\quad bx^۲+۲cx+a=۰,\quad cx^۲+۲ax+b=۰$$

۲۸۰. ۹۶ عدد حقیقی مثبت دور یک دایره مفروض‌اند. ثابت کنید دو عدد متوالی وجود دارند که مجموع اولی و معکوس دومی از ۲ کمتر نیست. (ترتیب اعداد در جهت ساعت‌گرد است.)

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

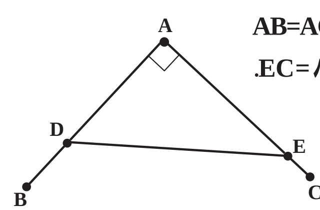
۲۴۱. همـهٔ مقادیـر حقیقـی a را بیابیـد، به‌طـوری کـه منحنـی دو تابـع بـا ضابطه‌هـای $y=ax^۲-x-۴$ و $y=x^۳-x^۲+۳x-۴$ دقیقاً در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند.

از تقاطـع دو تابع داده شـده داریـم: $x^۳-x^۲+۳x-۴=ax^۲-x-۴$

یا: $x(x^۲-(a+۱)x+۴)=۰$ که نشان می‌دهد،یکی از ریشه‌ها صفر است.

چون صفر ریشـهٔ معادلهٔ $x^۲-(a+۱)x+۴=۰$ نیسـت، پس برای آنکه دو منحنی دقیقاً در دو نقطه متقاطع باشـند، باید معادلهٔ فوق ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در نتیجه: $\Delta=(a+۱)^۲-۱۶=۰$. پس: $a=۳$ یا $a=-۵$.

۲۴۲. در شـکل مقابل، AB=AC=DE، $\angle CAB=۹۰^\circ$، DB=۹ و EC=۸. مـطلوب اسـت: طول پاره‌خط DE.

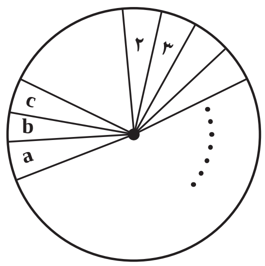


فرض کنید: x=AB=AC=DE. در نتیجه: AD=x-۹ و AE=x-۸. رابطهٔ فیثاغورس را در مثلث ADE می‌نویسیم:

$$(x-۸)^۲+(x-۹)^۲=x^۲ \Rightarrow x^۲-۳۴x+۱۴۵=۰ \Rightarrow x=۵ \text{ یا } ۲۹$$

چون: x≥۹، در نتیجه: DE=x=۲۹.

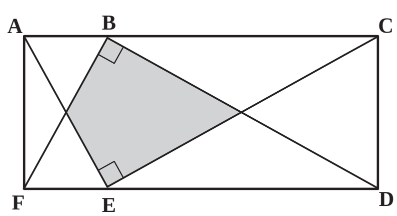
۲۴۳. دایره‌ای را به ۳۶ قسـمت مسـاوی مانند شکل تقسیم کرده‌ایـم و در هر قسـمت یک عدد صحیح نوشـته‌ایم. به‌طـوری که برای هر سـه عـدد متوالـی a، b و c داریم: b=ac. اگر دو عدد ابتدایی ۲ و ۳ باشند، حاصل جمع همهٔ اعداد را بیابید.



اگـر عددهـای بعـد از ۲ و ۳ را بنویسـیم، بـه عددهـای $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۲}{۳}$، ۲ و ۳ می‌رسـیم که نشـان می‌دهد، در خانه‌های هفتم و هشـتم ۲ و ۳ مجدداً ظاهر می‌شوند. در نتیجه مجموع اعداد ۳۶ خانه برابر است با:

$$۶(۲+۳+\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳})=۴۸$$

۲۴۴. در شـکل زیر، در مسـتطیل ACDF، CD=۵۰، AC=۲۰۰ و دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و FBD همنهشـت هستند. مساحت قسمت هاشورخورده را به‌دست آورید.



B را بـه E وصـل می‌کنیـم. چـون دو مثلـث AEC و FBD همنهشـتند، پس: FB=AE. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFE و ABF به حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. پس: AB=FE که نشان می‌دهد ABEF و در نتیجه BCDE مستطیل هستند. از طرف دیگر، دو قطر هر مسـتطیل آن‌را به چهار مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابراین مساحت ناحیه هاشورخورده که از دو مثلث تشکیل شده است، برابر با یک چهارم مساحت مستطیل ACDF خواهد بود.

پس مساحت ناحیهٔ مذکور برابر است با: $S=\frac{۱}{۴}\times ۲۰۰\times ۵۰=۲۵۰۰$.

۲۴۵. **در تصاعد حسابی $a_۱, a_۲, a_۳, ...$، داریم: $a_۱ \neq a_۲$ و سه جملهٔ $a_۱$، $a_۲$ و $a_۶$ نیز یک تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. همهٔ مقادیر k را بیابید، به‌طوری که سه جملهٔ $a_۱$، $a_۴$ و a_k (با همین ترتیب) یک تصاعد هندسی تشکیل دهند.**

چون $a_۱$، $a_۲$ و $a_۶$ یک تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهند، پس: $(a_۲)^۲ = a_۱ a_۶$. با فرض $a_۱ = a$ و $a_۲ = a + d$، $a_۶ = a + ۵d$، داریم: و در نتیجه:

$(a+d)^۲ = a(a+۵d) \Rightarrow d^۲ = ۳ad \Rightarrow d = ۳a$ یا $d = ۰$

چون: $a_۱ \neq a_۲$، پس: $d \neq ۰$ و در نتیجه: $d = ۳a$ و:

$a_n = a + (n-۱)d = a + ۳a(n-۱) = a(۳n-۲)$

بنابراین: $a_۴ = ۱۰a$ و $a_k = (۳k-۲)a$. پس باید داشته باشیم:

$(۱۰a)^۲ = a(۳k-۲)a \Rightarrow ۳k - ۲ = ۱۰۰ \Rightarrow k = ۳۴$

۲۴۶. **یک سهمی محور xها را در نقاط $P(۲,۰)$ و $Q(۸,۰)$ قطع می‌کند و رأس سهمی (V) زیر محور xها قرار دارد. اگر مساحت مثلث VPQ برابر ۱۲ باشد، مختصات V را بیابید.**

راه‌حل اول: داریم: $PQ = ۸ - ۲ = ۶$. فرض کنید h طول عمود وارد بر PQ از V باشد. بنابراین مساحت مثلث PQV برابر است با: $\frac{۱}{۲}(PQ)h$. چون این مساحت برابر است با ۱۲، در نتیجه: $h = ۴$. چون V زیرمحور xهاست، پس عرض نقطهٔ V برابر است با: -۴. همچنین، طول نقطهٔ V برابر میانگین طول دو نقطهٔ P و Q است، پس: $x_V = \frac{۸+۲}{۲} = ۵$، در نتیجه: $V = (۵,-۴)$.

راه‌حل دوم: چون ریشه‌های سهمی ۲ و ۸ هستند. پس ضابطهٔ سهمی به فرم $y = k(x-۲)(x-۸)$ است. طول رأس سهمی برابر است با: $\frac{-b}{۲a} = \frac{+۱۰}{۲} = ۵$. در نتیجه عرض رأس سهمی برابر است با: $k(۵-۲)(۵-۸)$؛ یعنی: $V = (۵,-۹k)$ که در آن k مثبت است. قاعدهٔ مثلث PQV برابر $۸-۲=۶$ و ارتفاع آن $۹k$ است. در نتیجه: $\frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۹k = ۱۲$. پس: $k = \frac{۴}{۹}$ که نتیجه می‌دهد: $V = (۵,-۴)$.

۲۴۷. **مجموع شعاع‌های دو دایره برابر است با ۱۰ و محیط آن‌ها اختلافی برابر ۳ دارد. اختلاف مساحت دو دایره را به‌دست آورید.**

دو شعاع را با R و r نمایش می‌دهیم. پس داریم: $R + r = ۱۰$ و $۲\pi R - ۲\pi r = ۳$. در نتیجه اختلاف مساحت آن‌ها برابر است با:

$$\pi R^۲ - \pi r^۲ = \pi(R-r)(R+r)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲\pi(R-r))(R+r) = \frac{۳ \times ۱۰}{۲} = ۱۵$$

۲۴۸. **تابع f به این صورت تعریف شده است که اگر n زوج باشد، $f(n)$ برابر است با: $n^۲ - ۱$ و اگر n فرد باشد، $f(n)$ برابر است با: $n-۱$. همهٔ اعداد صحیح n را بیابید به‌طوری که: $f(f(n)) = ۳$**

فرض کنید: $m = f(n)$. اگر m فرد باشد، آن‌گاه: $f(m) = m - ۱ = ۳$ و در نتیجه: $m = ۴$ که تناقض است. پس m باید زوج باشد. در نتیجه: $f(m) = m^۲ - ۱ = ۳$. پس: $m = \pm ۲$. درنتیجه: $f(n) = \pm ۲$. اگر n فرد باشد، آن‌گاه $n - ۱ = \pm ۲$ و در نتیجه: $n = ۳$ یا $n = -۱$. اگر n زوج باشد، آن‌گاه $n^۲ - ۱ = \pm ۲$. اما این معادله جواب صحیح ندارد. پس تنها دو مقدار ۱- و ۳ پاسخ مسئله هستند.

۲۴۹. **A، B و C سه مجموعه هستند، به‌طوری‌که: $A-B = B-C = C-A$. ثابت کنید: $A = B = C$.**

(برهان خلف) فرض کنید x عضوی از A باشد که در B نیست، در نتیجه: $x \in A-B$. از فرض نتیجه می‌شود: $x \in B-C$. در نتیجه: $x \in B$ که تناقض است. پس هر عضو از A در B است و در نتیجه: $A \subseteq B$. پس: $A-B = \varnothing$ که نتیجه می‌دهد: $B-C = \varnothing$ و $C-A = \varnothing$. در نتیجه: $B \subseteq C$ و $C \subseteq A$ و از آن‌جا $B \subseteq A$. بنابراین: $A = B$. به طریق مشابه داریم: $B = C$ و حکم نتیجه می‌شود.

۲۵۰. **پنج نقطه روی کره‌ای مفروض هستند. ثابت کنید نیم‌کره‌ای بسته شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه وجود دارد. (نیم‌کره‌ای را که شامل مرز خود باشد، نیم‌کرهٔ بسته می‌نامیم. مرز هر نیم‌کره یک دایرهٔ عظیمه است.)**

دو نقطه از پنج نقطه را در نظر بگیرید و دایرهٔ عظیمه‌ای را که از این دو نقطه می‌گذرد C بنامید. طبق اصل لانهٔ کبوتر حداقل ۲ نقطه از ۳ نقطهٔ باقی‌مانده در یک طرف این دایره واقع می‌شوند. در نتیجه نیم‌کره‌ای شامل ۴ نقطه از این ۵ نقطه حاصل می‌شود.

پرسش‌های بیکارجو!

؟

رشتهٔ عددی $a_۱, a_۲, ..., a_k$ $(k \in Z, k \geq ۰)$ مفروض است و می‌دانیم:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{۱}{۲}(a_{۲m} + a_{۲n})$$

و $a_۱ = ۱$. مقدار $a_{۱۳۹۶}$ کدام است؟

- ☐ الف) ۱۳۹۶
- ☐ ب) ۲۷۹۲
- ☐ ج) ۱۹۴۸۸۱۶
- ☐ د) ۱۹۴۷۴۲۰
- ☐ هـ) ۱۹۴۶۰۲۵

۳

در شــماره‌های قبل دربارهٔ ســربازها و شوالیه‌ها که همیشه دروغ‌گو و همیشــه راســت‌گو بودند، معماهایی طرح کردیم. در این شــماره می‌خواهیم شــما را بــه جزیــره‌ای عجیب‌تر ببریم. ایــن جزیره جایــگاه انســان‌ها و ماورائیان بود! انســان‌ها بر دو نوع بودند: شــوالیه‌ها که همیشــه راســت‌گو بودند و ســربازها که همیشــه دروغ‌گــو بودند. اما ماورائیان نیز بــر دو نوع بودند: شیاطین که همیشه دروغ می‌گفتند و قدیسان که البته همیشه راســت می‌گفتند. حال به چند معما از این جزیرهٔ عجیب توجه کنید:

ایستگاه دوم

۱. وارد این جزیره می‌شــوید. موجودی را می‌بینیــد کــه از ظاهرش حدس می‌زنید بایــد یک قدیس باشــد. او لبخندی می‌زند و جمله‌ای می‌گوید که شما مطمئن می‌شوید، او قدیس است. این چه جمله‌ای است؟

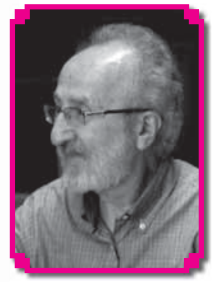
۲. روز بعــد بــا موجــودی بــا ظاهری وحشــتناک روبــه‌رو می‌شــوید و می‌اندیشــید او باید شــیطان باشد. از او می‌پرســید: تــو موجودی از چه دسته‌ای هستی؟ و او پاسخی می‌دهد که می‌فهمید او شیطان نیست و یک سرباز است. این چه پاسخی است؟

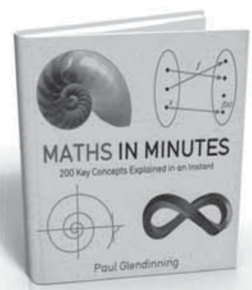
۳. روز بعد موجودی را می‌بینید که دو جملهٔ زیر را به شما می‌گوید:
- من هرگز نمی‌گویم که یک سرباز هستم.
- مــن گاهــی می‌گویــم کــه یک شیطان هستم.

بــا موجــودی از چه دســته‌ای روبه‌رو هستید؟

۴. روز بعد موجــودی را می‌بینید و او جمله‌ای می‌گویــد که مطمئن شوید که او شوالیه است. این چه جمله‌ای است؟

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور



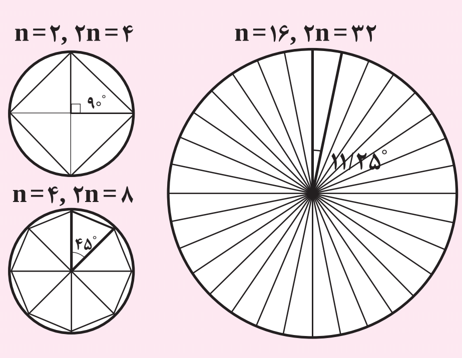


برآورد π

بسیاری از روش‌های برآورد ثابت گنگ π بر رهیافت دنباله‌ای متکی‌اند. **ارشمیدس سیراکوزی**، ریاضی‌دان یونانی، در زمانی به قدمت سه قرن پیش از میلاد، از دنباله‌ای برای تقریب‌های π تا دو رقم دهدهی استفاده کرد.

برای این کار، دایره‌ای به شعاع ۱ را در نظر می‌گیریم که پیرامون آن دقیقاً 2π می‌شود. با آغاز از یک مربع، یک‌سری n ضلعی منتظم درون آن رسم می‌کنیم. هر n ضلعی را می‌توان به‌عنوان گروهی از مثلث‌هایی با زاویهٔ رأس $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ تصور کرد. تقسیم هر یک از این مثلث‌ها به نصف، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با طول وتر ۱، یعنی یک شعاع، و یک زاویهٔ $\frac{\theta}{2}$، به‌وجود می‌آورد. با استفاده از توابع مثلثاتی می‌توانیم اضلاع دیگر این مثلث، و از آنجا پیرامون یک چندضلعی را حساب کنیم.

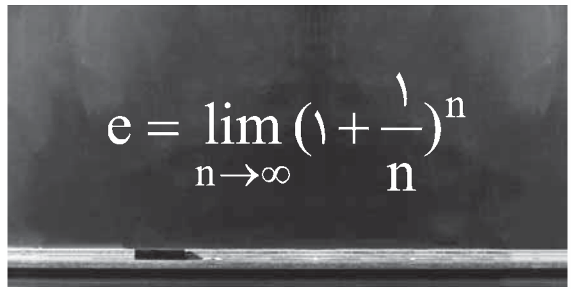
البته ارشمیدس به مقادیر توابع مثلثاتی دسترسی نداشت، بنابراین مجبور بود n را به دقت انتخاب کند. رهیافت‌های جدید از تقریبات سری‌ها استفاده می‌کند. **ایزاک نیوتن** وقت و کوشش بسیاری برای محاسبهٔ π تا ۱۵ رقم دهدهی صرف کرد.



مراحل روش دنباله‌ای ارشمیدس در برآورد π، افزایش مقادیر n برآوردهایی دقیقاً افزاینده را برای π به‌دست می‌دهد.

برآورد e

«ثابت اویلر» (Euler's constant)، یعنی عدد گنگ e، مبادی خود را در بررسی دنباله‌ها دارد، و می‌توان با استفاده از آن‌ها این ثابت را برآورد کرد. یکی از موارد برخورد با این ثابت در مسئلهٔ ربح مرکب، توسط **ژاکوب برنولی** (Jacob Bernoulli) در اواخر قرن هفدهم انجام شد. در ربح مرکب، هم از مبلغ سرمایه‌گذاری شده و هم از ربح یا سود حاصل



در زمان داده شده، در تعیین سود پرداخت شده در مرحلهٔ بعدی استفاده می‌شود. اگر نرخ بهره در سال ۱۰۰ درصد با پرداخت‌های نیم‌ساله باشد، آن‌گاه در مورد سرمایه‌گذاری ۱ پوند، پس از شش ماه بهرهٔ ۵۰ پنی پرداخت می‌شود که مبلغ کل را ۱/۵۰ پوند می‌کند. پس از شش ماه دیگر، ۷۵ پنی دیگر پرداخت می‌شود، و مجموع را به ۲/۲۵ پوند می‌رساند. به‌طور عمومی‌تر، کل بازگشت سرمایه‌مان در یک‌سال، چون به n دورهٔ زمانی برابر تقسیم شود، توسط فرمول زیر داده شده است:

$$(۱+\frac{۱}{n})^n$$

برنولی به این موضوع توجه کرد که هرچه n بزرگ‌تر شود، عبارت مزبور به مقداری هم‌گرا می‌شود که اکنون آن را «ثابت اویلر» می‌نامیم و به‌طور تقریب برابر عدد زیر است:

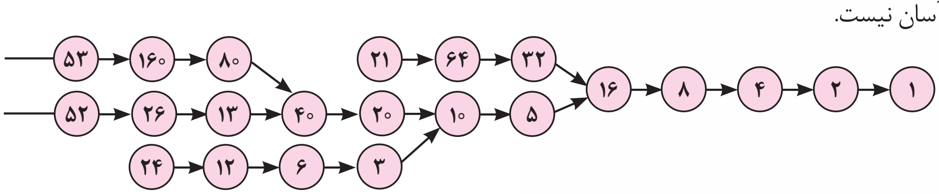
۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۶

تکرار

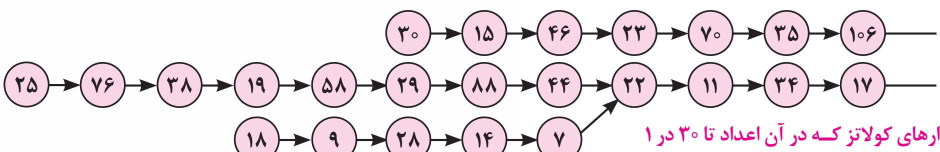
«تکرار» (iteration) فرایندی ریاضی است که در آن یک قاعده، عمل، یا بارها عمل می‌شود. تکرار مزبور می‌تواند یک دنباله را تولید کند. روش‌های تکرار غالباً در آنالیز عددی، و بررسی روش‌های مربوط به تبدیل مسائل ریاضی به زبانی که توسط رایانه فهمیده شود، به‌کار رفته است.

موضوع‌های دستگاه‌های دینامیکی و هرج و مرج، چگونگی حالات تکامل یک دستگاه را هنگامی که قاعده‌هایی ساده به‌طور مکرر به‌کار رفته‌اند، مشخص می‌کنند.

در همهٔ این کاربردها فهم اندازهٔ تأثیری که مقادیر اولیهٔ متفاوت می‌توانند در نتیجهٔ نهایی داشته باشند، دارای اهمیت است و این کار همیشه آسان نیست.



برای مثال، عدد صحیح و مثبت x را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد فرد باشد، آن را در ۳ ضرب می‌کنیم و ۱ را به آن می‌افزاییم. اگر زوج باشد، آن را به ۲ تقسیم می‌کنیم. اکنون این قاعده را بار دیگر به‌کار می‌بریم، و تنها هنگامی به‌کار بردن آن را متوقف می‌کنیم که دنباله به ۱ برسد. در این صورت، هر مقدار اولیه‌ای از x که مورد آزمون قرار گرفته باشد، در مقدار متناهی‌ای از زمان متوقف می‌شود. در سال ۱۹۳۷، **لوثار کولاتز** (Lothar Collatz)، ریاضی‌دان آلمانی، حدس زد که این وضع در مورد هر مقدار ممکن x برقرار است، اما این موضوع هنوز باید اثبات شود.



نموداری از مدارهای کولاتز که در آن اعداد تا ۳۰ در ۱ به پایان دنباله می‌رسند. عدد ۲۷ به دلایل عملی حذف شده است. چه این عدد برای پیوستن به نمودار، و وصل شدن به آن، در عدد ۴۶، به ۹۵ مرحلهٔ دیگر نیاز دارد.

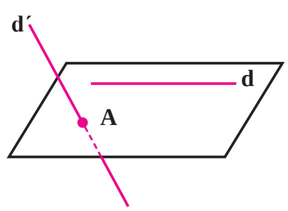
بحثی در باب خطوط متنافر

حسین کریمی

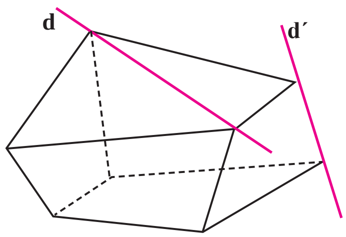
آقای **سلیمی** یکی از سعادتمندترین معلمانی بوده‌اند که من تا به‌حال دیده‌ام. ایشان در هر کلاسی که کارشان را شروع می‌کردند، جزو کسانی بوده‌اند که در همان ساعت اول نمرهٔ ۲۰ را از شاگردانشان می‌گرفتند؛ چه در سواد، چه در رفتار و چه در اخلاق. چند روز افتخار حضور در کلاس درسشان را داشتم که بازگویی اولین خاطره از کلاس ایشان خالی از لطف نیست.

پس از معرفی من به دانش‌آموزان (به‌عنوان مهمان ویژه) و استقرار من در انتهای کلاس (برای اشراف به تختهٔ سیاه و دانش‌آموزان)، ایشان درس آن روز را چنین شروع کرد:

«در جلسهٔ قبل تاحدودی با خط، صفحه، خط عمود بر صفحه، و صفحه‌های موازی و عمود برهم آشنا شدیم و دیدیم که اگر دو خط در یک صفحه واقع باشند، آن دو خط موازی یا متقاطع‌اند. اما ممکن است دو خط در یک صفحه واقع نباشند، یعنی نتوان صفحه‌ای پیدا کرد که شامل آن دو خط باشد. در این‌صورت می‌گوییم دو خط نسبت به‌هم متنافرند؛ یعنی از هم گریزان‌اند» و دو شکل ۱ و ۲ را رسم کرد.



شکل ۱.

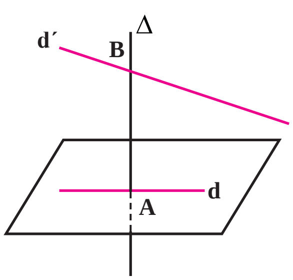


شکل ۲.

در ادامه ایشان پرسید: «اگر دو نقطهٔ A و B را روی دو خط متنافر به‌صورت دلخواه در نظر بگیریم و آن دو را به‌هم وصل کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟»

علی (یکی از دانش‌آموزان) پاسخ داد: «خط جدیدی مانند Δ به‌وجود می‌آید که آن دو خط متنافر را قطع می‌کند.»

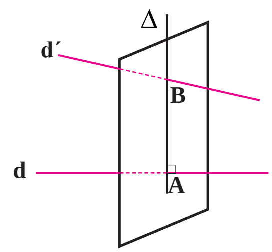
آقای سلیمی با تأیید پاسخ او شکل سوم را کشید و به بچه‌ها یادآور شد که در انتخاب نقاط A و B کاملاً آزادند. بنابراین بی‌شمار خط مانند Δ وجود دارد که هر دو خط متنافر d و d´ را قطع می‌کنند.



شکل ۳.

حال اگر صفحه‌ای در نقطهٔ دلخواه A از خط d، عمود بر d رسم شود و آن صفحه، خط ´d را در نقطهٔ B قطع کند، در این‌صورت خط AB یا همان Δ، خطی خواهد بود که دو خط متنافر d و ´d را قطع کرده و عمود بر d است.

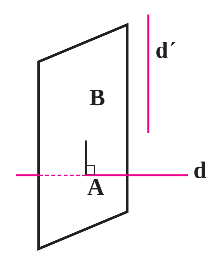
بنابراین بی‌شمار خط وجود دارند که ´d را قطع می‌کنند و عمود متقاطع با d هستند.



شکل ۴.

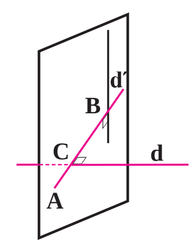
محمود (یکی دیگر از دانش‌آموزان) سؤال کرد: «اگر صفحهٔ گذرا از A و عمود بر خط d، به موازات ´d باشد، تکلیف نقطهٔ B چه خواهد شد؟»

آقای سلیمی از محمود به‌خاطر سؤال بسیار خوبش تشکر کرد و شکل پنجم را کشید.



شکل ۵.

بعد از کشیدن شکل، یادآور شد که: «حتی در این‌حالت نیز بی‌شمار خط مانند Δ که ´d را قطع کنند و عمود متقاطع با d باشند، وجود دارند. فقط کافی است در این‌حالت، صفحه‌ای را که شامل ´d و عمود بر d باشد رسم کنیم که اگر نقطهٔ تلاقی صفحه با خط d را C بنامیم و هر نقطهٔ دلخواه مانند B را روی ´d در نظر بگیریم، BC همان خطی خواهد بود که ´d را قطع کرده و عمود متقاطع با d است.



شکل ۶.

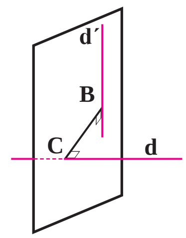
حالا شما بگویید بین این بی‌شمار جواب در حالت اخیر با آن بی‌شمار جواب در حالت قبل چه فرقی وجود دارد؟»

رضا چنین پاسخ داد: «در حالت قبل (عمود برهم‌نبودن دو خط متنافر) از هر نقطه مانند A روی خط d فقط یک خط با شرایط خواسته شده می‌توانستیم رسم کنیم، و چون بی‌شمار نقطه مانند A روی d می‌توان در نظر گرفت، بنابراین مسئله بی‌شمار جواب داشت. اما در حالت اخیر (عمود برهم بودن دو خط متنافر) از هر نقطه مانند A روی d نمی‌توان خطی با شرایط خواسته شده رسم کرد و فقط یک نقطه از d مانند C دارای شرایط خواسته شده است. ولی از C می‌توان به هر نقطهٔ دلخواه از ´d وصل کرد و از این بابت است که بی‌شمار جواب به‌دست می‌آید.»

آقای سلیمی از کیفش یک خودکار و یک دفتر یادداشت درآورد و آن را به پاس جواب صحیح رضا به او هدیه داد و همهٔ بچه‌ها رضا را تشویق کردند. محمود به رضا گفت: «جواب تو در پی سؤال خوب من بود، پس باید با هم تقسیم کنیم.» که چند لحظه‌ای خنده و شادی در کلاس حاکم شد.

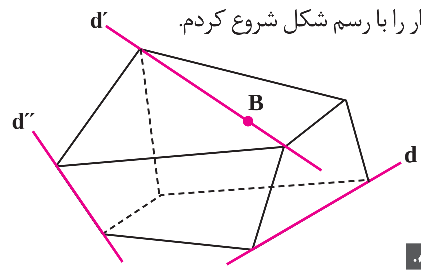
آقای سلیمی بچه‌ها را به سکوت دعوت کرد، ولی قبل از ادامهٔ درس، **ناصر** پرسید: «آقا اگر در شکل آخر از C عمودی بر ´d رسم کنیم، خطی پدید می‌آید که دو خط d و ´d را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. آیا وجود چنین خطی فقط در حالت عمود برهم بودن d و ´d رخ می‌دهد؟»

من از اینکه در چنین کلاسی حضور داشتم، بسیار خشنود بودم. سؤال‌ها و جواب‌ها یکی از یکی پخته‌تر و زیباتر بودند. آقای سلیمی پاسخ داد: «بله، مانند شکل ۷، BC به‌طور مشترک بر هر دو خط متنافر d و ´d عمود است و هر خط که بر دو خط متنافر d و ´d عمود متقاطع باشد، آن را عمود مشترک دو خط متنافر می‌نامند، ولی نیازی به عمود برهم بودن d و ´d نیست.»



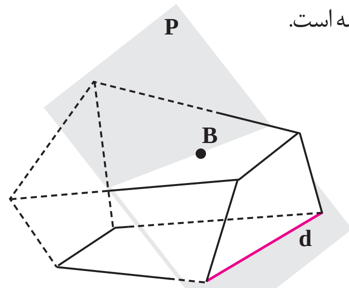
شکل ۷.

آقای سـلیمی ادامه داد: «حالا، به سؤال اول برگردیم و در آن تغییری ایجاد کنیم. سؤال این بود: چند خط وجود دارد که سه خط دوبه‌دو متنافر را قطع کند؟» بچه‌ها مشغول فکر کردن شدند. هر کدام روی کاغذی، شکلی می‌کشیدند و به دنبال حل مسئله بودند. آقای سلیمی چند دقیقه‌ای بود که در کلاس قدم می‌زد. گاهی بالای سر بچه‌ها می‌ایستاد و شکل‌های رسم شده را نگاه می‌کرد و گاهی تذکری می‌داد. وقتی در کنار من ایستاد، آرام پرسید: «تو می‌توانی مسئله را حل کنی؟» چون من قبلاً این سؤال را که یکی از سؤالات کنکور بود، دیده بودم و قبلاً در مورد آن فکر کرده بودم، گفتم بله. چند دقیقه گذشت و راه‌حلی از طرف بچه‌ها ارائه نشد. آقای سلیمی از من خواست که برای حل مسئله به پای تخته بروم و برای من افتخار بزرگی بود که بتوانم در خدمت ایشان، مسئله‌ای را حل کنم. پای تخته کار را با رسم شکل شروع کردم.

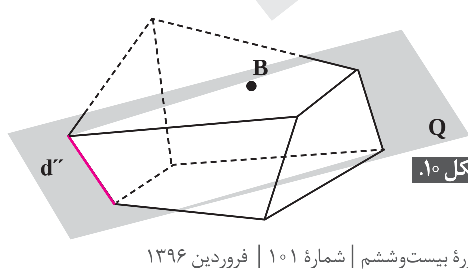


شکل ۸.

روی خط d' نقطهٔ دلخواه B را در نظر می‌گیریم. صفحهٔ گذرا از B و شامل d را P، و صفحهٔ گذرا از B و شامل d'' را Q می‌نامیم. چون دو خط d و d'' نسبت به هم متنافرند، در نتیجه در یک صفحه قرار نمی‌گیرند و لذا دو صفحهٔ P و Q از یکدیگر متمایز هستند. و چون هر دو از نقطهٔ B می‌گذرند، پس متقاطع‌اند. فصل مشترک آن دو صفحه را Δ می‌نامیم. ادعا می‌کنیم Δ که با خط d' در نقطهٔ B مشترک است، جواب مسئله است.



شکل ۹.

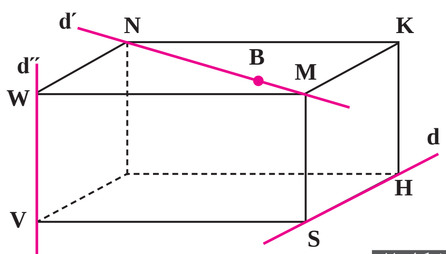


شکل ۱۰.

Δ و d روی صفحهٔ P هستند و نقطهٔ اشتراک آن‌ها را A می‌نامیم. Δ و d'' هم روی صفحهٔ Q قرار دارند و نقطهٔ اشتراک آن‌ها را نیز C در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که خط Δ، سه خط دوبه‌دو متنافر d، d' و d'' را به‌ترتیب در نقاط A، B و C قطع کرده است. چون نقطهٔ B به‌صورت دلخواه روی d' اختیار شده است، پس بی‌شمار نقطه را روی d' می‌توان به‌نام B در نظر گرفت و به‌ترتیب ذکر شده عمل کرد. بنابراین مسئله بی‌شمار جواب دارد.

آقای سلیمی از من پرسید: «اگر فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q، یعنی خط Δ، به موازات d یا d'' باشد تا یکی از آن‌ها را قطع نکند، تکلیف چیست؟»

پاسخ دادم: «بله، چنین امکانی وجود دارد و در تعداد محدود نقاطی مانند B که از d' انتخاب می‌شوند، مشکلی که شما فرمودید رخ می‌دهد. می‌توان از آن تعداد محدود صرف‌نظر کرد که تأثیری در بی‌شمار جواب مسئله ندارد. اجازه بدهید سه خط متنافر را کمی ساده‌تر رسم کنم تا نقاط استثنایی بهتر دیده شوند. خطوط دوبه‌دو متنافر d، d' و d'' را روی مکعب مستطیل اختیار می‌کنیم.



شکل ۱۱.

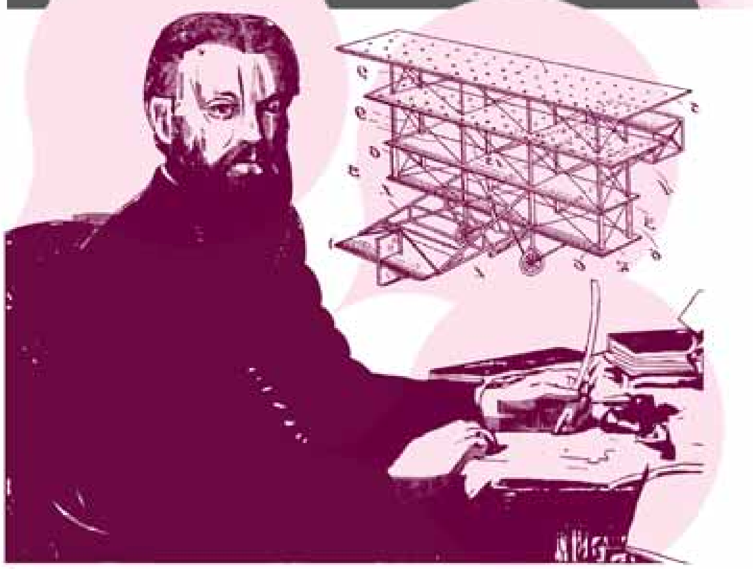
اگر B را روی M در نظر بگیریم، صفحهٔ P شامل d و نقطهٔ M، همان صفحهٔ $MKHS$ خواهد بود و صفحهٔ شامل M و خط d'' (یعنی صفحهٔ Q)، صفحهٔ $WMSV$ است که فصل مشترک آن‌ها، یعنی MS (همان Δ)، با d'' موازی است که در این‌صورت از نقطهٔ خاص M گذر می‌کنیم. از انتخاب نقطهٔ N واقع بر d' به‌عنوان نقطهٔ B نیز صرف‌نظر می‌کنیم، چرا که در آن‌صورت شاهد رخ دادن شرایط فوق خواهیم بود. یعنی خط Δ فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q همان NW خواهد بود که به موازات d است.»

تأیید راه‌حل من از طرف آقای سلیمی باعث خوش‌حالی من شد. حضورم در آن کلاس پرشور و پربار را هرگز فراموش نخواهم کرد.

خواندنی‌هایی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر

در این قسمت می‌خواهیم به گوشه‌هایی از زندگی کوتاه یک نابغهٔ ریاضی‌دان اشاره کنیم. ویلیام کینگ‌دان کلیفورد (۱۸۷۹–۱۸۴۵) تنها ۳۴ سال عمر کرد، اما در همین مدت کوتاه آثار عمیقی از نبوغ و استعداد ریاضی خود را به جاگذاشت. دربارهٔ زندگی او که اهل کشور انگلستان و استاد ریاضیات و فلسفه بود، بسیار گفته‌اند؛ از جمله دربارهٔ نبوغ شگفت‌انگیز او که از همان دوران کودکی آشکار بود.

ایستگاه سوم



حکایت اول: می‌گویند وقتی ویلیام تنها شش سال داشت، پدر و مادرش او را برای مدتی پیش خاله‌اش فرستادند و او نگهداری‌اش را برعهده داشت. یک شب وقتی خاله‌اش او را به رخت‌خواب برد تا بخوابد، دید که به جایی خیره شده و فکر می‌کند. علت را از او پرسید و ویلیام لبخندی زد و گفت: «خاله **آنی** فکر نمی‌کنم که بتوانی آنچه را که در ذهنم می‌گذرد، بفهمی!»

وقتی خاله‌اش از او توضیح بیشتری خواست، گفت که در ذهنش در حال محاسبهٔ تعداد خودنویس‌هایی است که می‌توان دور چرخ قطار چید! و سپس دربارهٔ نتیجهٔ محاسباتش به خاله‌اش توضیحاتی داد. بعداً مسئله و جواب آن را به عموی ویلیام، **فرانک کینگ‌دان** که خود یک ریاضی‌دان خوب بود، دادند و او با تعجب درستی محاسبات و نتیجه‌گیری ویلیام را تأیید کرد!

حکایت دوم: سرگرمی‌های ویلیام در جوانی هیچ شباهتی با سرگرمی‌های هم‌سالانش نداشت. برای مثال، وقتی که او ۱۸ سال داشت، در نامه‌ای به یکی از ریاضی‌دانان هم‌عصر خود نوشت که در پی ساختن نوعی کایت برای پرواز کردن است.

برای غلبه بر مشکل باد و جلوگیری از درهم شکسته‌شدن کایت، نیاز به حل معادله‌هایی است که گمان نمی‌کند حل آن‌ها چندان مشکل باشد. سال‌ها بعد این معادله حل شد و جواب آن در مجلهٔ «Educational Times» در جولای ۱۸۷۹ و می ۱۸۸۰ به چاپ رسید؛ درست چندماه بعد از آن‌که ویلیام از دنیا رفت!

حکایت سوم: در همان سال‌ها، **پرسیوال فراست** (Percival Frost) ریاضی‌دان انگلیسی (۱۸۹۸–۱۸۱۷)، برای برادرش در مورد نبوغ ویلیام جوان گفت. او که با هیئتی در هندوستان به‌سر می‌برد، در بازگشت به انگلستان یک پازل پیچیدهٔ سه‌بعدی با خود آورد. این پازل عجیب شامل قطعاتی جدا از هم بود که در اتصال با هم کره‌ای را می‌ساختند. پرسیوال فراست و برادرش هرچه تلاش کردند، موفق به حل این معما نشدند. لذا از ویلیام جوان دعوت کردند که برای مهمانی به منزل آن‌ها برود و در آنجا معما را به او گفتند. ویلیام بدون آنکه به قطعات پازل دست بزند، مدتی به آن‌ها خیره شد و بعد چشمانش را بست و چند دقیقه فکر کرد. بعد در برابر چشمان خیرهٔ دو برادر قطعات را به سرعت به‌هم چسباند و پازل را کامل کرد و بعد به سرعت دوباره آن‌ها را از هم جدا کرد!

حکایت آخر: بعد از مرگ ویلیام کینگ‌دان، وقتی در سال ۱۸۸۲، **روبرت تاکر** کارهای ناتمام او را ویرایش می‌کرد، در صفحهٔ نخست آن نوشت: «اگر او زنده مانده بود، ما چیزهای بسیار دیگری را می‌فهمیدیم» و این دقیقاً جمله‌ای بود که ۱۶۰ سال قبل از آن، **اسحاق نیوتون** دربارهٔ **روجر کوتز** (۱۷۱۶–۱۶۸۲) گفته بود. کوتز هم ریاضی‌دانی بنام بود و در ۳۴ سالگی درگذشت!

علی‌یار کریمی‌شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرستان اردل

تعبیر هندسی میانگین‌ها

اشاره

می‌گویند در عصر فیثاغورس سه نوع میانگین تعریف شده بود که عبارت بودند از: حسابی، هندسی و مخالف که نام اخیر بعدها توسط آرخوس وهیپاسوس به میانگین توافقی تغییر یافت. این سه نوع میانگین کاربردهای زیادی در شاخه‌های متفاوت ریاضیات به‌ویژه جبر و هندسه دارند. در این مقاله ابتدا هر یک از آن‌ها را به روش جبری تعریف می‌کنیم و سپس رابطهٔ هندسی آن‌ها را از روی یک شکل واحد به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه رابطهٔ بین سه میانگین را، هم به روش جبری و هم به روش هندسی، بیان و اثبات می‌کنیم. لازم به توضیح است، طول پاره‌خط‌ها و عددهای به‌کار رفته در این مقاله حقیقی و مثبت هستند.

تعریف جبری میانگین‌ها

میانگین حسابی: هرگاه سه عدد حقیقی a، b و c با یکدیگر یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، b را میانگین یا واسطهٔ حسابی a و c می‌نامند و از آنجا به سادگی ثابت می‌شود که: $b=\frac{a+c}{۲}$. پس میانگین حسابی دو عدد در واقع معدل آن‌هاست.

میانگین هندسی: هرگاه سه عدد حقیقی a، b و c با یکدیگر دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند، b را میانگین یا واسطهٔ هندسی a و c می‌نامند و از آنجا به سادگی ثابت می‌شود که: $b=\sqrt{ac}$. پس میانگین هندسی دو عدد، جذر حاصل‌ضرب آن‌هاست.

میانگین توافقی (هم‌ساز): هرگاه معکوس‌های چند عدد حقیقی یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، خود آن‌ها نیز یک دنبالهٔ هم‌ساز (توافقی) تشکیل می‌دهند. مثلاً دنبالهٔ زیر یک دنبالهٔ هم‌ساز است:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۱},...$$

زیرا دنبالهٔ ...,۲,۵,۸,۱۱ یک دنبالهٔ حسابی است. بنابراین اگر b، a و c یک دنبالهٔ هم‌ساز تشکیل دهند، b را واسطهٔ توافقی (هم‌ساز) a و c می‌نامیم. در این صورت طبق تعریف $\frac{۱}{a}$ و $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{c}$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند و از آنجا داریم:

$$\frac{۲}{b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}\Rightarrow b=\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}}$$

پس به‌طور خلاصه، اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، میانگین حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{۲}$، میانگین هندسی آن‌ها $\sqrt{ab}$ و میانگین هم‌ساز (توافقی) آن‌ها $\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$ است.

مثال: اگر a=۲ و b=۴ باشد، میانگین حسابی، هندسی و هم‌ساز آن‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین حسابی}=\frac{۲+۴}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$\text{میانگین هندسی}=\sqrt{۲\times ۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\text{میانگین هم‌ساز}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}}=\frac{۲}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۸}{۳}$$

نکتهٔ ۱. اگر a=b باشد، میانگین حسابی، هندسی و هم‌ساز برابر یکی از آن‌هاست؛ یعنی:

$$\text{میانگین حسابی}=\frac{a+a}{۲}=\frac{b+b}{۲}=a \text{ یا } b$$

$$\text{میانگین هندسی}=\sqrt{a^۲}=\sqrt{b^۲}=a \text{ یا } b$$

$$\text{میانگین هم‌ساز}\ \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a}}=\frac{۲}{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}}=a \text{ یا } b$$

نکتهٔ ۲. (رابطهٔ جبری بین میانگین‌ها): برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b نشان می‌دهیم، رابطهٔ زیر بین میانگین‌ها برقرار است.

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{a.b}\geq\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

ابتدا نشان می‌دهیم میانگین حسابی از میانگین هندسی کمتر نیست:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰\Rightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq ۰$$

$$\Rightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{a.b}\quad (۱)$$

حال نشان می‌دهیم میانگین هندسی از میانگین هم‌ساز کمتر نیست:

$$a > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{a} > ۰,\quad b > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{b} > ۰ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲} \geq \sqrt{\frac{۱}{a}\times\frac{۱}{b}} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲} \geq \frac{۱}{\sqrt{a.b}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} \leq \sqrt{a.b} \quad (۲)$$

(توجه: تساوی زمانی رخ می‌دهد که a=b باشد.)

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{a.b} \geq \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

نکتهٔ ۳. (تعمیم جبری میانگین): در حالت کلی اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n اعداد حقیقی باشند، $\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n}$ را میانگین حسابی، $\sqrt[n]{a_۱\cdot a_۲\cdot ...\cdot a_n}$ را میانگین هندسی و $\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+...+\frac{۱}{a_n}}$ را میانگین هم‌ساز بین آن‌ها تعریف می‌کنند.

نکتهٔ ۴. (رابطه بین تعمیم جبری میانگین): در حالت کلی برای مقادیر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n که بزرگ‌تر از صفرند، می‌توان نوشت: (اثبات این نامساوی در منابع متعددی آمده است.)

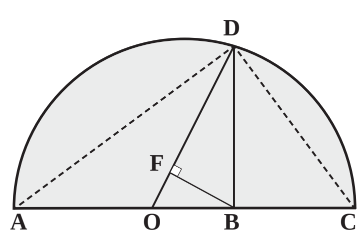
$$\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_۱\cdot a_۲\cdot ...\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+...+\frac{۱}{a_n}}$$

تعبیر هندسی میانگین‌ها

در ادامه میانگین‌های فوق را به روش هندسی روی یک شکل تعبیر می‌کنیم.

دستورالعمل رسم شکل: نقطهٔ B را روی پاره‌خط AC اختیار کنید، به‌طوری که B وسط AC یعنی نقطهٔ O نباشد. در نقطهٔ B، عمودی بر AC اخراج کنید تا نیم‌دایرهٔ به قطر AC را در D قطع کند. فرض کنید که F پای عمود وارد از B بر OD است. حال از روی شکل می‌توانیم نشان دهیم:

اولاً، پاره‌خط‌های OD، BD و FD به‌ترتیب نمایش میانگین حسابی، میانگین هندسی و میانگین توافقی بین پاره‌خط‌های AB و BC هستند.



ثانیاً، اگر AB≠BC باشد، باید نشان دهیم رابطهٔ زیر بین این سه نوع میانگین وجود دارد:

میانگین حسابی > میانگین هندسی > میانگین توافقی

۱. میانگین توافقی (مخالف ـ هم‌ساز ـ هارمونیک)

اگر a و b مقدار عددی دو پاره‌خط دلخواه باشند، میانگین توافقی آن‌ها را با نماد H نمایش می‌دهیم. با توجه به روابط طولی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، داریم:

$BD^۲=AB.BC$ و $BD^۲=DF.OD$ (چرا؟)

$$\Rightarrow FD = \frac{BD^۲}{OD} = \frac{AB.BC}{\frac{AC}{۲}} = \frac{AB.BC}{\frac{AB+BC}{۲}} = \frac{۲AB.BC}{AB+BC}$$

$$= \frac{۲}{\frac{AB+BC}{AB.BC}} = \frac{۲}{\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{BC}} \Rightarrow$$

FD میانگین توافقی بین پاره‌خط‌های AB و BC است.

۲. میانگین هندسی

میانگین هندسی دو پاره‌خط، پاره‌خطی است که مربع اندازهٔ آن با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو پاره‌خط مزبور مساوی باشد. یعنی اگر اعداد حقیقی مثبت a و b طول دو پاره‌خط باشند، میانگین هندسی آن‌ها را با حرف G نمایش می‌دهند و برابر است با: $G=\sqrt{a.b}$. باز هم با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDO داریم:

$$BD^۲ = DF.OD = \frac{AC}{۲}.\frac{۲}{\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{BC}}$$

$$= \frac{\cancel{AB+BC}}{\cancel{۲}}.\frac{\cancel{۲}AB.BC}{\cancel{AB+BC}}$$

$$\Rightarrow BD^۲ = AB.BC \Rightarrow BD = \sqrt{AB.BC} \Rightarrow$$

پاره‌خط BD میانگین هندسی بین پاره‌خط‌های AB و BC است.

۳. میانگین حسابی

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، به‌طوری‌که طول دو پاره‌خط دلخواه باشند، میانگین (معدل) آن‌ها را با نماد A نمایش می‌دهند و عبارت است از خارج‌قسمت مجموع آن‌ها تقسیم بر ۲؛ یعنی: $A=\frac{a+b}{۲}$

به‌سادگی می‌نویسیم:

$$OD = r = \frac{AC}{۲} = \frac{AB+BC}{۲} \Rightarrow$$

پاره‌خط OD میانگین حسابی بین دو پاره‌خط AB و BC است.

حال نابرابری میانگین‌ها را هم اثبات می‌کنیم:

اثبات: چون در مثلث FBD ضلع BD وتر مثلث است و طول هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه از وتر کوچک‌تر است، پس داریم: FD<BD. همچنین، FD بخشی از پاره‌خط OD است، پس: FD<OD و داریم:

FD<BD<OD

$\Rightarrow$ میانگین حسابی > میانگین هندسی > میانگین توافقی

هوشنگ شرقی

ریاضی ۱
(پایهٔ دهم)

۱. پنجاه عدد کارت متفاوت را به چند طریق می‌توان بین دو نفر تقسیم کرد، به‌طوری که به هر نفر لااقل دو کارت برسد؟

۲. سه کتاب ریاضی، دو کتاب شیمی و سه کتاب فیزیک را به چند صورت می‌توان در یک قفسهٔ هشت‌تایی چید، به شرطی که بخواهیم کتاب‌های ریاضی پیش هم باشند و کتاب‌های شیمی پیش هم نباشند؟

۳. شخصی می‌خواهد از بین ۱۲ جلد کتاب که بین آن‌ها یک کتاب دو جلدی و یک کتاب سه جلدی وجود دارد، پنج جلد کتاب بخرد. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، اگر کتاب‌های چندجلدی را جداگانه نفروشند؟

۴. درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\dots+\binom{n}{n}^2$$

هندسهٔ ۱
(پایهٔ دهم)

۱. خط d که بر صفحهٔ p منطبق نیست، مفروض است. اگر A و B دو نقطه روی خط d باشند و از آن‌ها عمودهای AH و ´BH را بر p رسم کنیم و ´AH=BH، آن‌گاه d و p نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۲. در مسئلهٔ قبل، اگر A و B دو نقطه روی صفحهٔ ´p باشند، با همان شرط، صفحه‌های ´p و p نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۳. صفحهٔ p، خط d و نقطهٔ A مفروض‌اند. صفحهٔ گذرا بر نقطهٔ A و عمود بر صفحهٔ p و موازی خط d در کدام حالت موجود است ولی یکتا نیست؟

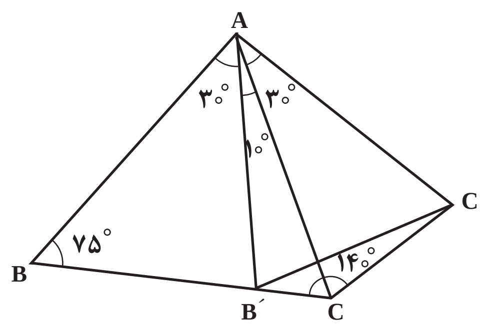
۱) $d \parallel p$
۲) $d \perp p$
۳) $A \in p$
۴) $A \in d$

هندسهٔ ۲
(پایه سوم ریاضی)

۱. رأس سهمی S نقطهٔ (۱,۱) است و مجانس آن با مرکز تجانس مبدأ مختصات و ضریب تجانس ۲، سهمی ´S است. اگر بازتاب ´S نسبت به محور yها سهمی ˝S باشد که خط y=۳x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، سهمی ˝S خط y=۳x+۸ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۲. بازتاب نقطهٔ (۲,۳) نسبت به محور d، نقطهٔ (-۴,-۵) و نسبت به نقطهٔ M، نقطهٔ (۰,۵) است. بازتاب M نسبت به d را به‌دست آورید.

۳. در شکل زیر به کمک تبدیل‌های هندسی ثابت کنید: BC=B´C´.



جبر و احتمال
(پایه سوم ریاضی)

۱. یک عدد طبیعی n کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰۰۰ به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال آن را به‌دست آورید که $\log_{۲}^{n}$ گویا و $\log_{۴}^{n}$ گنگ باشد.

۲. اگر شانس رخ دادن پیشامد A و عدم وقوع B، ۰/۳ باشد و شانس وقوع A یا B، ۰/۷ باشد، شانس عدم وقوع B را به‌دست آورید.

۳. ده عدد کارت متفاوت را بین سه نفر تقسیم می‌کنیم. احتمال آن را به‌دست آورید که به هر کدام لااقل یک کارت برسد.

حسابان
(پایهٔ سوم ریاضی)

۱. مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۳})$ را در $x_{۰}=\frac{\pi}{۶}$ به کمک تعریف مشتق به‌دست آورید.

۲. مشتق توابع زیر را به کمک قضیه‌ها به‌دست آورید:

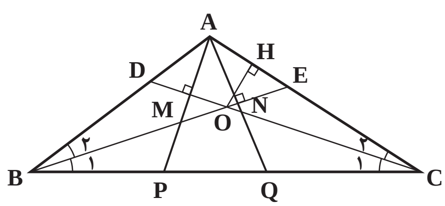
الف) $f(x)=\sqrt[۳]{\sin^{۲} x^{۲}}$

ب) $g(x)=\sqrt{(x+\sqrt{x})^{۳}+x}$

۳. a و b را طوری بیابید که خط راست به معادلهٔ ۲x+y=۵ در نقطه‌ای به طول ۴ بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{a\sqrt{x}+b}{x^{۲}+۱}$ مماس باشد.

پرسش‌های بیکارجو! ۴

در مثلث ABC، CD و BE نیم‌سازهای B و C هستند و AM و AN بر آن‌ها عمود شده‌اند. OH نیز بر AC عمود شده است. اگر MN=۱ باشد، طول AH کدام است؟



- [ ] الف) ۱
- [ ] ب) ۰/۸
- [ ] ج) $\frac{۱}{۲}$
- [ ] د) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
- [ ] هـ) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

آموزشی

نویسنده: توشیو سیمیا
مترجم: احسان یارمحمدی

دربارهٔ چند مثال از استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی

اقلیــدس[1] کتابی با عنوان **«ســئوداریا»**[2] که موضوع آن دربارهٔ **«اســتدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی»** بود، نوشته است. البته این کتاب گم شــده و در حال حاضر در دسترس نیست. از زمان اقلیدس تاکنون تعداد بی‌شــماری از مثال‌هایی که دربرگیرندهٔ استدلال‌های اشــتباه‌آمیز هندسی هستند، منتشر شــده‌اند. دو نمونه از این دسته استدلال‌ها که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم، در کتاب **«مقالات و تفریحات ریاضی»**[3] اثر **روز بال**[4] ارائه شده‌اند.

۱. ثابت کنید که هر **زاویهٔ قائمه** با زاویهٔ بزرگ‌تر از آن برابر است.

۲. ثابت کنید که هر مثلثی **متساوی‌الساقین** است.

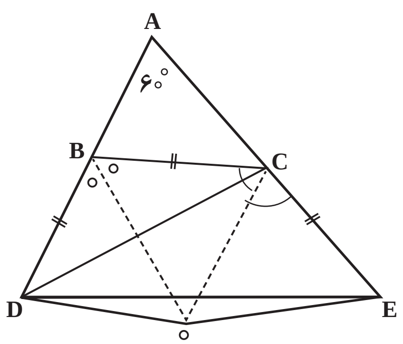
در این مثال‌ها، هنگامی که شــکل‌های متناظر با آن‌ها به‌صورت دقیق و درســت رســم شوند، اشــتباهات و خطاها ســریعاً مشخص می‌شوند. حتی زمانی که شکل‌های مطلوب به‌صورت درست و دقیق رسم شده‌اند و استدلال نیز درست است، استدلال‌های اشتباه‌آمیزی ممکن اســت رخ بدهنــد. در اغلب اوقات، به‌علــت نبود ملاحظات و دقــت مناســب و کافی، نتایج و دســتاوردهای ناشــی را اســتنباط می‌کنیم. اگر نتایج نادرست مضحک نباشند، ممکن است به سهولت مورد چشم‌پوشــی قرار گیرند. در این مقاله چنــد مثال جدید را که حاوی استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی هستند، ارائه می‌کنیم. البته اشتباهات و ایرادهای موجود در این استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی، بعداً در قســمت پاسخ‌ها که در انتهای این مقاله گنجانده شده است، شرح داده خواهند شد.

ابتدا یک **قضیه** درســت را ارائه می‌کنیم و ســپس به بررســی صحت و درســتی عکس این قضیه می‌پردازیــم. این مورد که عکس یک قضیهٔ درســت در ریاضی همیشه برقرار نیست، از نکات برجسته و قابل‌توجه در ریاضیات اســت. در ضمن اســتدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی به‌صورت مکرر در اثبات‌های بررسی شده برای صحت عکس یک قضیه درست، نمایان می‌شوند.

قضیه

اگــر ABC مثلثی با زاویهٔ $\hat{A}=60^\circ$ باشــد و نیــز D نقطه‌ای در امتداد خط AB باشد، به‌صورتی که BD=BC و E نقطه‌ای در امتداد خط AC باشد، به‌صورتی که BC=CE، آن‌گاه داریم:

$$\widehat{DBC}=2\widehat{CED},\ \widehat{BCE}=2\widehat{BDE},\ \widehat{CDE}=30^\circ$$



اثبات: اگر O محل برخورد نیم‌سازهای زوایای DBC و BCE باشد، چون: BD=BC=CE، در نتیجه داریم:

$$\Delta BDO \cong \Delta BCO,\quad \Delta BCO \cong \Delta ECO$$

بنابراین:

$$\widehat{BDO}=\widehat{BCO},\quad \widehat{BOD}=\widehat{BOC},\quad DO=CO$$

و همچنین:

$$\widehat{CBO}=\widehat{CEO},\quad \widehat{BOC}=\widehat{COE}$$

چون: $\widehat{DBO}=\widehat{CBO}$ و $\widehat{BCO}=\widehat{ECO}$، در نتیجه داریم:

$$\widehat{BOC}=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$$

بنابرایــن: $\widehat{DOE}=3\widehat{BOC}=180^\circ$. در نتیجه نقطه‌های D، O و E بر یک استقامت هستند. (بر روی یک خط راست قرار دارند.)

پس:

$$\widehat{DBC} = ۲\widehat{CBO} = ۲\widehat{CEO} = ۲\widehat{CED}$$

و

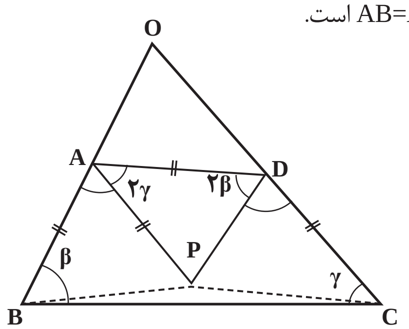
$$\widehat{BCE} = ۲\widehat{BCO} = ۲\widehat{BDO} = ۲\widehat{BDE}$$

چون: DO=CO، خواهیم دید که: $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$. بنابراین:

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDO} = \frac{۱}{۲}\widehat{COE} = ۳۰^\circ$$

اکنون در ادامه برای قضیهٔ مزبور، دو مورد عکس آن را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۱. فرض کنید ABCD یک **چهارضلعی محدب** (کوژ) باشد به‌صورتی که: AB=CD. اگر داشته باشیم: $\hat{A} = ۲\hat{C}$ و $\hat{D} = ۲\hat{B}$، آن‌گاه AB=AD است.



اثبات: اگر $\hat{B} = \hat{\beta}$ و $\hat{C} = \hat{\gamma}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم: $\hat{A} = ۲\hat{\gamma}$ و $\hat{D} = ۲\hat{\beta}$.

چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = ۳۶۰^\circ$ است، در نتیجه داریم: $۲\gamma+\beta+\gamma+۲\beta = ۳۶۰^\circ$. بنابراین: $\beta+\gamma = ۱۲۰^\circ$.

اگر O نقطهٔ برخورد (امتدادهای) AB و CD باشد. داریم: $\widehat{BOC} = ۱۸۰^\circ - (\beta+\gamma) = ۶۰^\circ$.

اگر P نقطه‌ای باشد به‌صورتی که AP موازی با DC و CP موازی با DA باشد، و چون چهارضلعی ABCD یک **متوازی‌الاضلاع** است، در نتیجه داریم: AP=DC=AB، PC=AD و $\widehat{APC} = \widehat{ADC} = ۲\beta$. چون:

$$\widehat{BAP} = \widehat{BOC} = ۶۰^\circ, \quad AB = AP$$

خواهیم داشت که ABP یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. بنابراین: $\widehat{ABP} = \widehat{APB} = ۶۰^\circ$.

چون داریم: $\widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABP} = \beta - ۶۰^\circ$ و

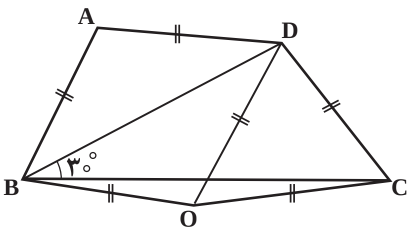
$$\widehat{BPC} = ۳۶۰^\circ - (\widehat{APB} - \widehat{APC}) = ۳۶۰^\circ - (۶۰^\circ + ۲\beta)$$

در نتیجه:

$$\widehat{PCB} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{PBC} + \widehat{APC}) = \beta - ۶۰^\circ$$

بنابراین: $\widehat{PBC} = \widehat{PCB}$، به‌صورتی که داریم: PB=PC. پس AB=AD.

مثال ۲. فرض کنید که ABCD یک چهارضلعی محدب (کوژ) به‌صورتی است که داریم: AB=AD=CD. اگر $\widehat{DBC} = ۳۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\hat{A} = ۲\hat{C}$ است.



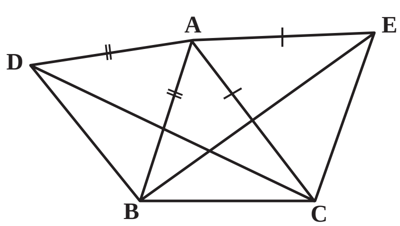
اثبات: اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی (فرضی) ΔBCD باشد، آن‌گاه: OB=OC=OD و داریم:

$$\widehat{DOC} = ۲\widehat{DBC} = ۶۰^\circ$$

بنابراین OCD یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و این یعنی: OB=OD=OC=CD.

چون AB=AD=CD است، به‌همین ترتیب داریم: AB=AD=OD=OB. این یعنی چهارضلعی ABOD لوزی است. بنابراین: $\widehat{BAD} = \widehat{BOD} = ۲\widehat{BCD}$.

مثال ۳. فرض کنید که روی اضلاع AB و AC مثلث مفروض ABC به‌ترتیب مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABD و ACE رسم شده‌اند. اگر C، B، D و E نقاط واقع روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث باشند، آن‌گاه: AB=AC.



اثبات: چون C، B، D و E نقاط واقع بر محیط دایره هستند، داریم: $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$. چون: $\widehat{BDA} = \widehat{CEA} = ۶۰^\circ$. این یعنی:

$$\widehat{ADC} = \widehat{BDA} - \widehat{BDC} = \widehat{CEA} - \widehat{BEC} = \widehat{AEB} \quad (۱)$$

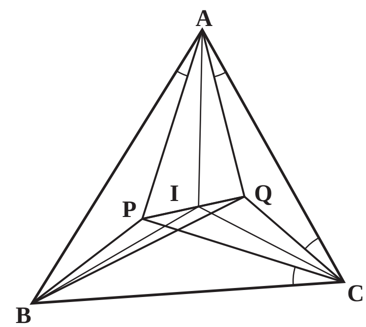
چون داریم: AD=AB ، AC=AE و $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$، این به آن معنی است که: $\Delta ADC \cong \Delta ABE$. بنابراین:

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABE} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$. بنابراین:

AB=AE. چون AC=AE است، پس: AB=AC.

مثال ۴. فرض کنید که P و Q نقاط درونی مثلث ABC هستند، به‌صورتی که: $\widehat{PAB}=\widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB}=\widehat{QCA}$ و $\frac{AP}{AQ}=\frac{CP}{CQ}$ باشد. آن‌گاه: $\frac{BP}{BQ}=\frac{AP}{AQ}$.



اثبات: چون $\widehat{PAB}=\widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB}=\widehat{QAC}$ هستند و نیز می‌دانیم که نقاط P و Q نقاطی هم‌شیب از مثلث ABCاند، بنابراین: $\widehat{ABP}=\widehat{CBQ}$. اگر نقطهٔ I محل برخورد PQ با نیمساز زاویهٔ $\widehat{PAQ}$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{PI}{IQ}=\frac{AP}{AQ}=\frac{CP}{CQ}$$

بنابراین: $\widehat{PCI}=\widehat{QCI}$. چون: $\widehat{PAB}=\widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB}=\widehat{QCA}$، در نتیجه داریم:

$$\widehat{BAI}=\widehat{PAB}+\widehat{PAI}=\widehat{QAC}+\widehat{QAI}=\widehat{CAI}$$

به‌صورت مشابه نتیجه می‌گیریم که: $\widehat{BCI}=\widehat{ACI}$. بنابراین I نقطهٔ مرکزی مثلث ABC است. پس:

$$\widehat{ABI}=\widehat{CBI}$$

بنابراین:

$$\widehat{PBI}=\widehat{ABI}-\widehat{ABP}=\widehat{CBI}-\widehat{CBQ}=\widehat{QBI}$$

در ضمن:

$$\frac{BP}{BQ}=\frac{PI}{IQ}=\frac{AP}{AQ}$$

تذکر: در شکل بالا داریم: $\frac{AP}{AQ}=\frac{CP}{CQ}>1$، اما: $\frac{BP}{BQ}<1$.

پاسخ‌ها

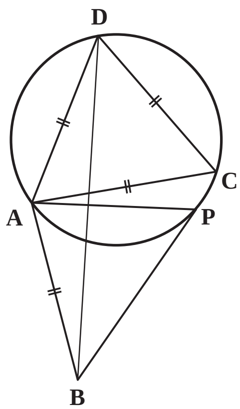
خطاها و اشتباهات موجود در اثبات‌های هندسی اشتباه‌آمیز چهار مثال ارائه شده، به‌صورت مختصر در ادامه بیان شده‌اند.

مثال ۱. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر: $\widehat{PBC}=\widehat{PCB}$، آن‌گاه: PB=PC. اگر: $\widehat{PBC}=\widehat{PCB}=0^\circ$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که: PB=PC.

برای مثال نقض فرض کنید که ABCD یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است که در آن داریم: $AB=CD\neq AD$ و $\hat{A}=\hat{D}=120^\circ$.

مثال ۲. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه نقاط A و O تلویحاً به‌صورت متمایز در نظر گرفته شده‌اند. در اینجا حالتی وجود دارد که A مرکز دایرهٔ محیطی (فرضی) ΔBCD است. بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ اصلی BAD برابر با $2\widehat{BCD}$ است.

برای مثال نقض فرض کنید که ΔACD متساوی‌الاضلاع است و نقطهٔ P روی کمان (کوچک‌تر) AC دایرهٔ محیطی ΔACD به‌صورتی قرار دارد که: AP>PC. اگر B نقطه‌ای روی امتداد CP باشد، به‌صورتی که: AB=AC، آن‌گاه ABCD یک چهارضلعی محدب (کوژ) است که در آن داریم: AB=AD=CD و $\widehat{DBC}=30^\circ$. در اینجا A مرکز دایرهٔ محیطی ΔBCD است.



مثال ۳. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر: $\widehat{AEB}=\widehat{ABE}$، آن‌گاه: AB=AE. بنابراین اگر: $\widehat{AEB}=\widehat{ABE}=0^\circ$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که: AB=AE.

برای مثال نقض فرض کنید که ABC مثلثی است با: $\hat{A}=120^\circ$ و $AB\neq AC$.

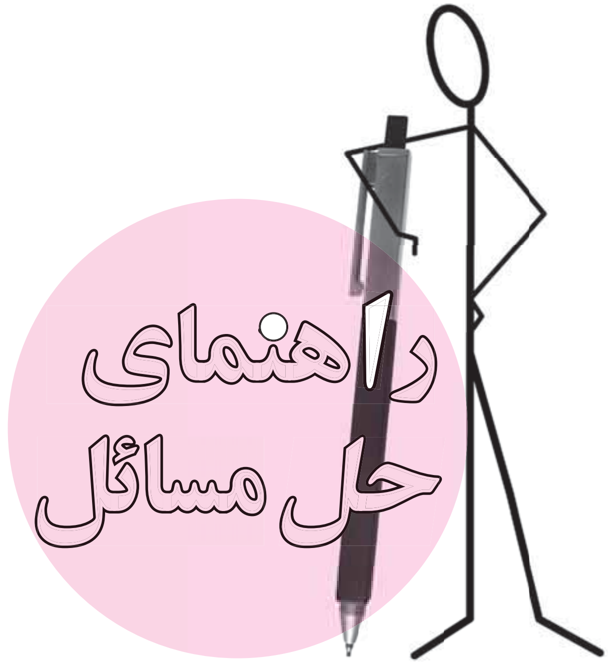
مثال ۴. این مورد را به آسانی می‌توان بررسی کرد که: $\widehat{ABP}=\widehat{CBP}$ و $\widehat{ABQ}=\widehat{CBQ}$. بنابراین نقاط B، P، Q و I بر یک استقامت هستند. اشتباه رخ‌داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر $\widehat{PBI}=\widehat{QBI}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{BP}{BQ}=\frac{PI}{IQ}$. بنابراین اگر $\widehat{PBI}=\widehat{QBI}=0^\circ$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که: $\frac{BP}{BQ}=\frac{PI}{IQ}$.

پی‌نوشت‌ها

1. Euclid
2. Pseudaria
3. Mathematical Recreations and Essays
4. Rouse Ball

منبع

Toshio Seimiya. On Some Examples of Geometric Fallacies. Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem (2003). Canadian Mathematical Society.



ریاضی ۱

۱. به‌طور کلی می‌توان با اصل ضرب تعداد راه‌های توزیع ۵۰ کارت بین دو نفر را به‌دست آورد. کارت اول را به دو طریق، کارت دوم را نیز به دو طریق، ... و کارت پنجاهم را هم به دو طریق می‌توان توزیع کرد (به اولی یا به دومی داد). پس طبق اصل ضرب تعداد راه‌ها برابر است با:

$۲\times۲\times...\times۲=۲^{۵۰}$

اما برای آنکه به هر نفر حداقل دو کارت برسد، حالت‌های نامطلوب را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم. حالت‌های نامطلوب عبارت‌اند از:

الف) همهٔ کارت‌ها به یک نفر برسد (دو حالت).

ب) ۴۹ کارت به یک نفر و یک کارت به دیگری برسد (۱۰۰ حالت).

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۲^{۵۰}-۱۰۲$

۲. تمام حالت‌هایی که سه کتاب ریاضی پیش هم باشند را منهای حالت‌هایی می‌کنیم که کتاب‌های ریاضی پیش هم بوده و کتاب‌های شیمی هم پیش هم باشند. در حالت اول کتاب‌های ریاضی را یک کتاب فرض می‌کنیم و بعد جایگشت‌های آن‌ها را هم حساب می‌کنیم و در حالت دوم کتاب‌های ریاضی را یک کتاب و کتاب‌های شیمی را هم یک کتاب در نظر می‌گیریم.

$۶!۳!-۵!۳!۲!=۵!۳!(۶-۲)=۲۸۸۰$

۳. این شخص می‌تواند راه‌های زیر را در پیش بگیرد:

الف) هیچ‌یک از کتاب‌های چند جلدی را نخرد که در این صورت تعداد راه‌های او برابر است با: $\binom{۷}{۵}$

ب) فقط کتاب دو جلدی و سه جلد کتاب دیگر بخرد: $\binom{۷}{۳}\binom{۲}{۲}$

ج) فقط کتاب سه جلدی و دو جلد کتاب دیگر بخرد: $\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۳}$

د) کتاب‌های دو جلدی و سه جلدی را بخرد: $\binom{۳}{۳}\binom{۲}{۲}$

پس تعداد کل روش‌های او برابر است با:

$$\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۲}+۱=۷۸$$

۴. فرض می‌کنیم $۲n$ شیء متمایز داریم و می‌خواهیم n تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. در این صورت تعداد انتخاب‌های ما برابر است با: $\binom{۲n}{n}$. اما از طرف دیگر، می‌توانیم n شیء را به دو دستهٔ n تایی تفکیک کنیم. حال برای انتخاب این n شیء می‌توانیم یک شیء را از دستهٔ اول، $n-۱$ تا را از دستهٔ دوم، ۰ شیء را از دستهٔ اول و n تا را از دستهٔ دوم، دو شیء را از دستهٔ اول و $n-۲$ تا را از دستهٔ دوم و... و n شیء را از دستهٔ اول و ۰ شیء را از دستهٔ دوم انتخاب کنیم. پس طبق اصل ضرب و اصل جمع تعداد انتخاب‌های ما برابر است با:

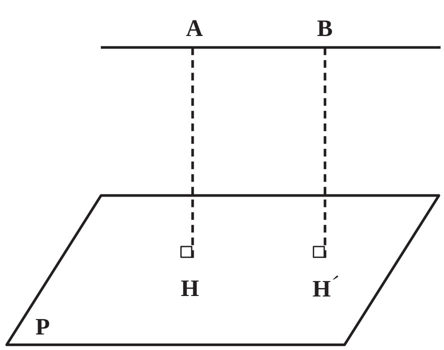
$$\binom{n}{۰}\binom{n}{n}+\binom{n}{۱}\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{۲}\binom{n}{n-۲}+...+\binom{n}{n}\binom{n}{۰}$$

ولی می‌دانیم که: $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ پس $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}$ و $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}$ و $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}$ و... بنابراین:

$$\binom{۲n}{n}=\binom{n}{۰}^۲+\binom{n}{۱}^۲+\binom{n}{۲}^۲+...+\binom{n}{n}^۲$$

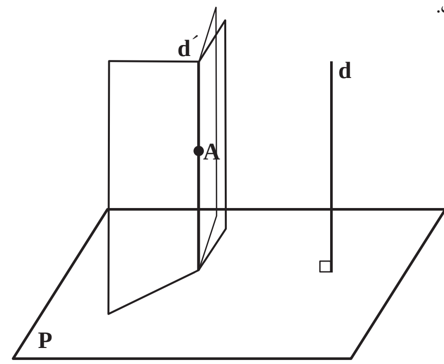
هندسه ۱

۱. A، B، H و ´H در صفحه‌اند. در آن صفحه ABH´H یک مستطیل است و در نتیجه: AB||HH´. پس: AB||P.



۲. طبق آنچه در مسئلهٔ قبل دیدیم: AB||P. ولی از خط AB بی‌شمار صفحهٔ متمایز ´p می‌توانند بگذرند. پس ´p می‌تواند با p موازی یا متقاطع باشد.

۳. گزینهٔ ۲، زیرا از خطی که بر صفحهٔ p عمود است، بی‌شمار صفحه می‌گذرد که همگی بر p عمود باشند. پس اگر d بر p عمود باشد، خط d´ که از A بگذرد و با d موازی باشد هم بر p عمود است و بی‌شمار صفحه از d´ می‌گذرد که از A هم می‌گذرد و با d موازی و بر p عمود است.



هندسهٔ ۲ (سوم ریاضی)

۱. سهمی که رأس آن مبدأ مختصات است، دارای معادلهٔ کلی $y=ax^۲$ است. پس برای آنکه رأس آن نقطهٔ (۱,۱) باشد، کافی است با انتقال $T(x,y)=(x+۱,y+۱)$ آن را انتقال دهیم:

$$T(x,y)=(x+۱,y+۱)=(X,Y)\Rightarrow \begin{cases}x=X-۱\\ y=Y-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y-۱=a(X-۱)^۲\Rightarrow Y=a(X-۱)^۲+۱$$

بنابراین معادلهٔ S به این صورت است: $y=a(x-۱)^۲+۱$ و ضابطهٔ تجانس به این صورت: $T(x,y)=(۲x,۲y)$. بنابراین:

$$(۲x,۲y)=(X,Y)\Rightarrow x=\frac{X}{۲}, y=\frac{Y}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{۲}=a(\frac{X}{۲}-۱)^۲+۱\Rightarrow S': y=۲a(\frac{x}{۲}-۱)^۲+۲$$

همچنین ضابطهٔ بازتاب نسبت به محور yها به‌صورت $T(x,y)=(-x,y)$ است. بنابراین:

$$T(x,y)=(-x,y)=(X,Y)\Rightarrow Y=۲a(-\frac{X}{۲}-۱)^۲+۲$$

$$\Rightarrow S'': y=۲a(\frac{x}{۲}+۱)^۲+۲$$

چون S˝ خط $y=۳x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ (۲,۶) می‌گذرد:

$$۶=۲a(۲)^۲+۲\Rightarrow ۸a=۴\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow S'': y=(\frac{x}{۲}+۱)^۲+۲$$

نقطهٔ برخورد آن را با خط $y=۳x+۸$ به‌دست می‌آوریم:

$$(\frac{x}{۲}+۱)^۲+۲=۳x+۸\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+x+۳=۳x+۸$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+۱۲=۱۲x+۳۲\Rightarrow x^۲-۸x-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰\Rightarrow x=-۲, x=۱۰$$

۲. d عمودمنصف خط و اصل بین نقاط A(۲,۳) و B(-۴,-۵) است. بنابراین:

N(-۱,-۱) وسط AB

$$m_{AB}=\frac{-۵-۳}{-۴-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow m'=-\frac{۳}{۴}$$

$$d: y+۱=-\frac{۳}{۴}(x+۱)\Rightarrow d: ۳x+۴y=-۷$$

و M وسط دو نقطهٔ A(۲,۳) و C(۰,۵) قرار دارد. بنابراین: M(۱,۴).

حال بازتاب M را نسبت به d می‌یابیم. برای این کار معادلهٔ MH (خط عمود از M بر d) را می‌یابیم و از برخورد آن با d، مختصات H را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به اینکه H وسط MM´ است، مختصات M´ قرینهٔ M نسبت به d را به‌دست می‌آوریم:

$$m_d=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow m'=\frac{۴}{۳}\Rightarrow MH: y-۴=\frac{۴}{۳}(x-۱)$$

$$\Rightarrow MH: ۴x-۳y=-۸$$

$$\begin{array}{r} ۴ \\ +۳ \end{array}\begin{cases}۴x-۳y=-۸\\ ۳x+۴y=-۷\end{cases}$$

$$۲۵x=-۵۳\Rightarrow x=-\frac{۵۳}{۲۵},$$

$$y=\frac{-۴}{۲۵}\Rightarrow H(-\frac{۵۳}{۲۵},-\frac{۴}{۲۵}), M(۱,۴)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_H=\frac{x_M+x_{M'}}{۲}\Rightarrow -\frac{۵۳}{۲۵}=\frac{۱+x_{M'}}{۲}\Rightarrow x_{M'}=-\frac{۱۳۱}{۲۵} \\ y_H=\frac{y_M+y_{M'}}{۲}\Rightarrow -\frac{۴}{۲۵}=\frac{۴+y_{M'}}{۲}\Rightarrow y_{M'}=-\frac{۱۰۸}{۲۵} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow M'\left|\begin{array}{l} -\frac{۱۳۱}{۲۵} \\ -\frac{۱۰۸}{۲۵} \end{array}\right.$$

۳. زاویه‌های مجهول روی شکل را به سادگی و با توجه به مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها می‌توان به‌دست آورد. با توجه به این موضوع داریم:

$$A\hat{B'}B=۱۸۰-(۷۵+۳۰)=۷۵^\circ,$$

$$A\hat{C}B=۱۸۰-(۴۰+۷۵)=۶۵^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{C}C'=۱۴۰-۶۵=۷۵^\circ,$$

$$AC'C=۱۸۰-(۷۵+۳۰)=۷۵^\circ$$

و به این ترتیب نتیجه می‌شود که هر دو مثلث ABB´ و ACC´ متساوی‌الساقین و زاویهٔ رأس آن‌ها ۳۰° است. پس اگر دوران حول A و به اندازهٔ ۳۰° را تبدیل T تعریف کنیم، داریم (T ایزومتری است):

$$T(B)=B', T(C)=C'\Rightarrow T(BC)=B'C'$$

$$\Rightarrow BC=B'C'$$

جبر و احتمال

۱. پیشامد گویا بودن $\log_۲^n$ را A و پیشامد گویا بودن $\log_۴^n$ را B می‌نامیم و می‌خواهیم P(A–B) را به‌دست آوریم. برای آنکه $\log_۲^n$ گویا باشد، لازم و کافی است که n توانی از ۲ باشد؛ پس:

$$A=\{۲^k \mid ۲^k \le ۱۰۰۰۰\}=\{۲^k \mid ۲^k \le ۲^{۱۳}\}$$
$$\Rightarrow A=\{۲^۰, ۲^۱, ..., ۲^{۱۳}\}$$

و به‌همین ترتیب:

$$B=\{۴^k \mid ۴^k \le ۱۰۰۰۰\}=\{۴^k \mid ۴^k \le ۴^۶\}$$
$$\Rightarrow B=\{۴^۰, ۴^۱, ..., ۴^۶\}$$

روشن است که: $B\subseteq A$، بنابراین:

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{۱۴}{۱۰۰۰۰}-\frac{۷}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۰۰۷$$

۲.

$$P(A-B)=۰/۳,\ P(A\cup B)=۰/۷,\ P(B')=?$$
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۳$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷$$

با کم کردن تساوی‌ها از هم نتیجه می‌شود:

$$P(B)=۰/۴ \Rightarrow P(B')=۱-P(B)=۰/۶$$

۳. متمم این پیشامد آن است که به یکی از سه نفر هیچ کارتی نرسد. اگر این سه نفر را a، b و c بنامیم، یعنی به a کارتی نرسد، یا به b کارتی نرسد یا به c کارتی نرسد و اگر این سه پیشامد را A، B و C بنامیم، ابتدا باید $P(A\cup B\cup C)$ را به‌دست آوریم. $P(A)$ احتمال پیشامد آن است که به a هیچ کارتی نرسد. یعنی همهٔ کارت‌ها بین b و c تقسیم شود. برای این کار $۲^{۱۰}$ روش وجود دارد (هر کارت را به دو طریق می‌توان توزیع کرد و طبق اصل ضرب ۱۰ کارت را به $۲^{۱۰}$ طریق می‌توان بین b و c تقسیم کرد). اما تمام راه‌های توزیع ۱۰ کارت بین سه نفر هم $۳^{۱۰}$ است. (چرا؟) لذا: $P(A)=\frac{۲^{۱۰}}{۳^{۱۰}}$ و به‌همین صورت: $P(B)=P(C)=\frac{۲^{۱۰}}{۳^{۱۰}}$. $P(A\cap B)$ یعنی هیچ کارتی به a نرسد و هیچ کارتی هم به b نرسد، پس همهٔ کارت‌ها به c برسد که فقط در یک حالت ممکن است. بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{۱}{۳^{۱۰}}$$

همچنین بدیهی است که: $P(A\cap B\cap C)=۰$. (چرا؟) پس می‌توان نوشت:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{۳\times ۲^{۱۰}-۳}{۳^{۱۰}}$$

آنچه مطلوب مسئله است برابر است با:

$$P(A\cup B\cup C)'=۱-P(A\cup B\cup C)=\frac{۳^{۱۰}-۳\times ۲^{۱۰}+۳}{۳^{۱۰}}$$

حسابان

۱.

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{۳})+\tan\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{\cos(x-\frac{\pi}{۳})\cos\frac{\pi}{۶}}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{(x-\frac{\pi}{۶})}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱}{\cos(x-\frac{\pi}{۳})\cos\frac{\pi}{۶}}$$

$$=۱\times\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۶}.\cos(-\frac{\pi}{۶})}=\frac{۱}{\cos^۲\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

۲.

الف) $f'(x)=\dfrac{(۲\sin x^۲)(۲x\cos x^۲)}{۳\sqrt[۳]{\sin^۴ x^۲}}$

ب) $g(x)=\dfrac{۱+۳(x+\sqrt{x})^۲(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{۲\sqrt{(x+\sqrt{x})^۳+x}}$

۳. نقطه‌ای به طول ۴، روی خط ۲x+y=۵، دارای عرض ۳- است. پس نقطهٔ (۳-,۴) روی خط و منحنی قرار دارد. لذا مختصات آن در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند:

$$-۳=\frac{a\sqrt{۴}+b}{۱۶+۱}\Rightarrow ۲a+b=-۵۱$$

همچنین مشتق تابع در این نقطه، یعنی شیب مماس بر منحنی مساوی شیب خط ۲x+y=۵، یعنی ۲- است:

$$f'(۴)=-۲, f'(x)=\frac{\frac{a}{۲\sqrt{x}}(x^۲+۱)-۲x(a\sqrt{x}+b)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۴۷a-۳۲b}{۱۱۵۶}=-۲$$

$$\begin{cases}۲a+b=-۵۱\\ -۴۷a-۳۲b=-۲۳۱۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲۳۲\\ b=۴۱۳\end{cases}$$

پرسش‌های بیکارجو!

؟

اگر x، y و z زاویه‌های حاده‌ای باشند که مینی‌مم مجموع سینوس‌های آن‌ها مساوی ۲ باشد، ماکزی‌مم مجموع کسینوس‌های آن‌ها کدام است؟

☐ الف) ۲

☐ ب) $\sqrt{۵}$

☐ ج) $\sqrt{۶}$

☐ د) $\sqrt{۷}$

☐ هـ) $۲\sqrt{۲}$

۵

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. می‌دانیم اگر $x\geq ۵$، آن‌گاه: $x!\overset{۱۰}{\equiv}۰$ و در این صورت: $۶(x!+۳)\overset{۱۰}{\equiv}۸$ و در نتیجه: $y^۲+۵\overset{۱۰}{\equiv}۸$ و $y^۲\overset{۱۰}{\equiv}۳$. ولی این برابری ممکن نیست. زیرا رقم ســمت راست هیچ مربع کاملی ۳ نیست. پس: $x<۵$ و با امتحان کردن نتیجه می‌شود: $x=۲$ و $y^۲=۲۵$ که دو جواب (۲,۵) و (۲,-۵) را می‌دهند. $x=۳$ و $y^۲=۴۹$ نیز دو جواب (۳,۷) و (۳,-۷) را می‌دهند و در نتیجه چهار جواب داریم (گزینهٔ ج).

۲. می‌دانیــم اگر دو نفر هر یک کاری را در x و y ســاعت انجام دهند، وقتــی دوتایــی کار کنند، کار را در $\frac{xy}{x+y}$ ســاعت انجام می‌دهند. (چرا؟) حال در این مســئله فرض می‌کنیم، اولی کار را در x ساعت، دومی در y ســاعت و سومی در z ساعت تمام کنند. پس طبق فرض داریم:

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{x}{۲},\ \frac{xz}{x+z}=\frac{y}{۳}\Rightarrow -\begin{cases}xy+xz=۲yz\\ xy+yz=۳xz\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y)z=(۲y-۳x)z$$

$$\Rightarrow x-y=۲y-۳x\Rightarrow ۴x=۳y$$

و با جای‌گذاری در رابطهٔ اول نتیجه می‌شود:

$$x=\frac{۳y}{۴}\Rightarrow y(\frac{۳y}{۴})+\frac{۳yz}{۴}=۲yz\Rightarrow \frac{۳y}{۴}+\frac{۳z}{۴}=۲z$$

$$\Rightarrow ۳y+۳z=۸z\Rightarrow ۳y=۵z\Rightarrow ۴x=۳y=۵z$$

اما روشن است، مدت زمانی که لازم است تا اولی و دومی با هم کار را تمام کنند برابر است با: $\frac{xy}{x+y}$. در نتیجه:

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{\frac{۵z}{۴}\times\frac{۵z}{۳}}{\frac{۵z}{۴}+\frac{۵z}{۳}}=\frac{\frac{۲۵z^۲}{۱۲}}{\frac{۳۵z}{۱۲}}=\frac{۵}{۷}z$$

(گزینهٔ د)

۳. ابتدا m=n=۰ را قرار می‌دهیم:

$$a_۰+a_۰=\frac{۱}{۲}(a_۰+a_۰)\Rightarrow a_۰=۰$$

حال فقط n=۰ را قرار می‌دهیم:

$$a_m+a_m=\frac{۱}{۲}(a_{۲m}+a_۰)\Rightarrow ۲a_m=\frac{۱}{۲}a_{۲m}\Rightarrow a_{۲m}=۴a_m$$

و از آنجا نتیجه می‌شود: $a_۲=۴a_۱=۴$ و $a_۴=۴a_۲=۱۶$ و برای محاسبهٔ $a_۳$، m=۲ و n=۱ را قرار می‌دهیم:

$$a_۳+a_۱=\frac{۱}{۲}(a_۴+a_۲)\Rightarrow a_۳+۱=\frac{۱}{۲}(۱۶+۴)$$

$$\Rightarrow a_۳=۹$$

به آســانی می‌توان حــدس زد که: $a_n=n^۲$ (این حــدس را به کمک استقرای قوی ثابت کنید) و در نتیجه: $a_{۱۳۹۶}=۱۳۹۶^۲=۱۹۴۸۸۱۶$ (گزینهٔ ج)

۴. در مثلث‌های ACP و ABQ، نیم‌ســاز و ارتفاع نظیر یک رأس برهم منطبق‌اند و در نتیجه این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند. بنابراین CP=AC=b و BQ=AB=c و از آنجا:

$$PQ=BC-(BP+CQ)=BC-(BQ-PQ+CP-PQ)$$

$$=a-(b+c-۲PQ)\Rightarrow a-b-c+۲PQ=PQ$$

$$\Rightarrow PQ=b+c-a$$

همچنین، چون در مثلث‌های متساوی‌الســاقین، نیم‌ســاز و ارتفاع رأس، میانه هم هســت، پس M و N وســط‌های AP و AQ هســتند و از آنجا:

$$MN=\frac{PQ}{۲}=\frac{b+c-a}{۲}$$

و چون O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث اســت، OH شــعاع این دایره و H نقطهٔ تماس دایره با AC است. در نتیجه:

$$AH=p-a=\frac{a+b+c}{۲}-a=\frac{b+c-a}{۲}$$

$$\Rightarrow AH=MH=۱$$

(گزینهٔ الف)

۵. از نامساوی «ین‌سن» به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

اگر f تابعی محدب باشد (یعنی تقعر f رو به بالا باشد، و: $f''(x)>۰$)، آن‌گاه:

$$f(\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n})\leq\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+...+f(x_n)}{n}$$

و اگر تابعی مقعر باشد (یعنی تقعر f رو به پایین باشد و: $f''(x)<۰$)، آن‌گاه:

$$f(\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{n})\geq\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+...+f(x_n)}{n}$$

تابع با ضابطهٔ f(x)=sinx با دامنهٔ $[۰,\pi]$ یک تابع مقعر اســت و در نتیجه:

$$\sin(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳})\geq\frac{\sin x_۱+\sin x_۲+\sin x_۳}{۳}\geq\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin^۲(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳})\geq\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱-\sin^۲(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳})\leq\frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \cos^۲(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳})\leq\frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳})\leq\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

و تابع f(x)=cosx تابعی محدب است، بنابراین:

$$\cos(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳})\leq\frac{\cos x_۱+\cos x_۲+\cos x_۳}{۳}\leq\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\Rightarrow \cos x_۱+\cos x_۲+\cos x_۳\leq\sqrt{۵}$$

(گزینهٔ ب)

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

با سلامی دوباره به همهٔ دوستان و خوانندگان محترم مجلهٔ برهان، بررسی نامه‌ها و ایمیل‌های رسیده در این فاصلهٔ زمانی را آغاز می‌کنیم.

- همکار گرامی، جناب آقای **منوچهر ضامنی**

اولاً بارها و بارها گفته‌ایم که در نامه‌هایتان مشـخصات کامل خود را قید بفرمایید که چنین نکرده‌اید. ثانیاً اینکه مشـابه مطلب ارسـالی‌تان در گذشته در مجله به چاپ رسیده است و اصولاً این‌گونه مباحث (نمایش اعداد روی محور اعداد حقیقی) به کتاب‌های دورهٔ اول متوسطه برمی‌گردند.

- همکار گرامی، جناب آقای **حسین میرزایی**، از شهرستان پلدختر استان لرستان

با سـپاس از ارسال مقاله‌تان با عنوان «ریشه‌های تاریخی نسـبت و تناسب» باید به اطلاعتان برسانیم که مطلب ارسـالی، فاقد انسجام لازم است و فقط شـامل تعدادی حقایق تاریخی است که پشت‌سرهم جمع‌آوری شده‌اند. تاریخ ریاضی البته مهم و در واقع خودِ ریاضی اسـت، ولی نحوهٔ ارائهٔ آن بسـیار مهم‌تر است. باید به ارتباط‌های نهفته در این حقایق توجه بیشتری شود. نحوهٔ ارائهٔ مطالب که به آن جذابیت لازم را برای مطالعه می‌بخشد نیز بسیار اهمیت دارد. به‌خصوص آنکه مخاطبان مطلب دانش‌آموزان دبیرستانی هستند.

- همکار محترم، آقای **محمود ندائی لمر**، از شهرستان تالش، استان گیلان

با سپاس از توجهتان به مجله، پاسخ‌هایتان به مسائل پای تخته، به مسئول این قسمت تحویل داده شد. امید است که مجله را به دانش‌آموزان نیز معرفی کنید و از آنان هم بخواهید به چالش با مسائل بپردازند تا با راهنمایی‌های شما آن‌ها را حل کنند. منتظر کارهای دیگرتان می‌مانیم.

- همکار فرهیخته، سرکار خانم **نرگس عصارزادگان**، از شهر اصفهان

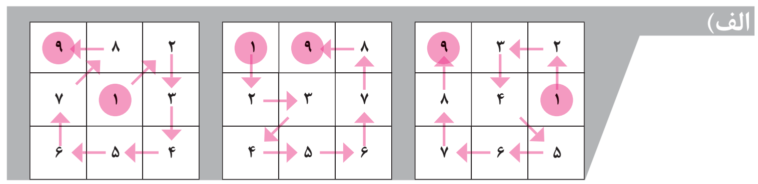
ترجمه‌تان با عنوان «مسائلی در هندسهٔ مسطحه» به‌دست ما رسید. مطلب مناسبی است، ولی به‌نظر می‌رسد که نیازمند قدری دخالت شما و تغییراتی در آن است. برای مثال، راهنمایی‌هایی برای حل مسائل و نیز رسم شکل، توضیح بیشتر و... ان‌شاءالله با اعمال این تغییرات بتوانیم از کارهای شما بیشتر استفاده کنیم.

تا شمارهٔ آینده و پاسخ به نامه‌ها و ایمیل‌های ارسالی، همهٔ خوانندگان را به خدای بزرگ می‌سپاریم.

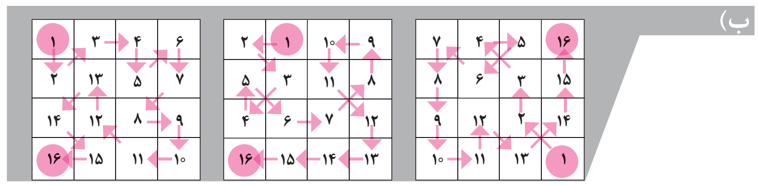
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: بازی و سرگرمی با جدول‌های عددی!

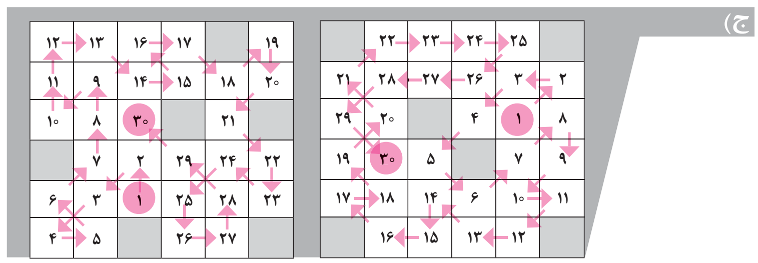
الف)



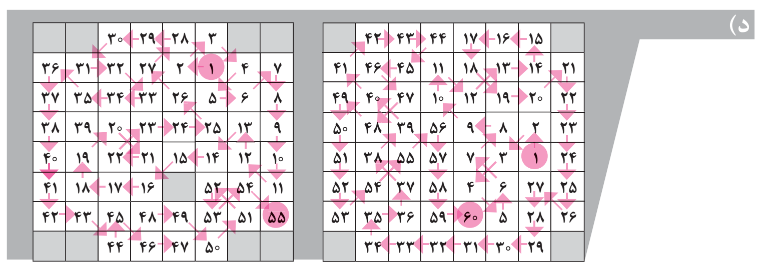
ب)



ج)



د)



ایستگاه دوم:

شوالیه‌ها، سربازها، شیاطین و قدیسان!

۱. او گفت: «من شوالیه نیستم!» این جمله‌ای است که فقط یک قدیس می‌تواند بگوید. (چرا؟)

۲. او گفت: «من شیطان هستم!» این جمله‌ای است که فقط یک سرباز می‌تواند بگوید. (چرا؟)

۳. جملهٔ دوم به وضوح دروغ است، زیرا هیچ راست‌گویی، هیچ‌وقت نمی‌گوید که او، گاهی می‌گوید شیطان است. بنابراین جملهٔ اول هم دروغ است. بنابراین گوینده گاهی می‌گوید که سرباز است، پس او باید شیطان باشد.

۴. او گفت: «من قدیس نیستم!»

سفر به بُجد

احسان یارمحمدی

اشاره

در این شماره روستای «بُجد» در دهستان «باقران» در هشت کیلومتری جنوب‌شرقی شهر بیرجند در استان خراسان‌جنوبی را به عنوان مقصد گردشگری به شما دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به گردشگری‌های علمی ـ تاریخی پیشنهاد می‌کنیم. دلیل این موضوع هم وجود آرامگاه ریاضی‌دان و اخترشناس برجستهٔ ایران، *نظام‌الدین عبدالعلی بیرجندی*، مشهور به *فاضل بیرجندی* و *محقق بیرجندی* در این روستاست. اما در ادامه به منظور آشنایی بیشتر با این دانشمند بزرگ، به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ وی به نقل از کتاب «*زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی از سدهٔ سوم تا سدهٔ یازدهم*»، به قلم زنده‌یاد *ابوالقاسم قربانی* می‌پردازیم که در انتشارات «مرکز نشر دانشگاهی» به زیور طبع آراسته شده است. امیدواریم شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات ایران در مسافرت به بُجد با آگاهی بیشتر دربارهٔ فاضل بیرجندی راهی این سفر شوید.

عبدالعلی‌بن محمدبن حسین نظام‌الدین بیرجندی، معروف به فاضل بیرجندی، از ریاضی‌دانان و منجمان سدهٔ دهم هجری بود که در سال ۹۳۴ وفات یافت. **خواندمیر** در کتاب «**تاریخ حبیب‌السیر**» که در زمان زندگی بیرجندی تألیف شده است، دربارهٔ وی می‌گوید: «جامع اصناف علوم محسوس و معقول است و حاوی انواع مسائل فروع و اصول. در علم نجوم و حکمیات بی‌مثل و بی‌بدل است و در شیوهٔ زهد و تقوی ضرب‌المثل.»

بیرجندی چندین تألیف در ریاضیات و نجوم دارد که بیشتر آن‌ها شرح‌ها و حاشیه‌هایی هستند که بر آثار دیگران نوشته. تألیف مستقل وی یکی «**بیست باب در تقویم**» و یکی «**رسالهٔ ابعاد و اجرام**» است. نسخه‌های خطی متعدد از تألیفات وی که تعداد آن‌ها به ۱۳ بالغ می‌شود، در ایران و خارج از ایران موجود است.

در اینجا به ذکر سه جلد از آثار بیرجندی که مربوط به ریاضی است، می‌پردازیم.

دست‌نوشته‌ای از فاضل بیرجندی

۱. شرح شمسیه فی‌الحساب

متن شمسیه‌الحساب از **نظام اعرج** است و بیرجندی این شرح را به‌طور آمیخته با متن نوشته است. چندین نسخهٔ خطی از آن موجود است که از آن جمله است، نسخهٔ شمارهٔ ۵۳۶۰ کتابخانهٔ آستان رضوی و نسخهٔ شمارهٔ ۲۰۵ کتابخانهٔ نوربخش، خانقاه‌نعمت‌الهی.

۲. شرح تحریر مجسطی

متن تحریر مجسطی از **نصیرالدین طوسی** است. بیرجندی این شرح را در سال ۹۲۱ نوشته و چند نسخهٔ خطی از آن موجود است.

۳. شرح زیج اُلُغ‌بیگ

بیرجندی این شرح را در سال ۹۱۹ نوشته و نسخه‌های خطی متعددی از آن در دانشگاه تهران، کتابخانهٔ مجلس، مدرسهٔ سپهسالار و غیره موجود است. بیرجندی خود منتخبی از این شرح را نیز فراهم آورده است.

آرامگاه فاضل بیرجندی