دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

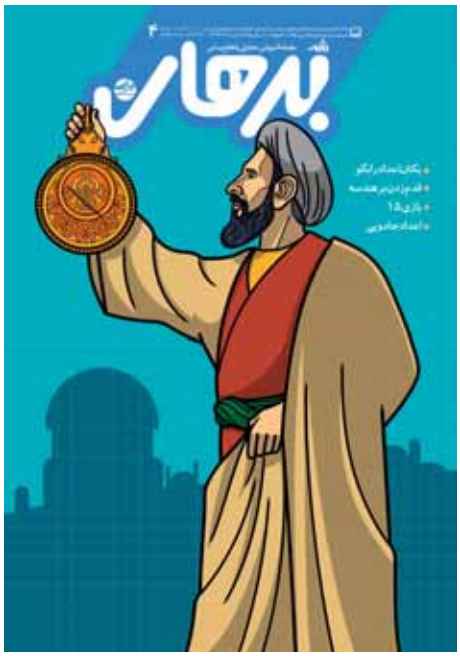
هُوَ الحسیب

وزارت آموزش و پرورش/سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی/www.roshdmag.ir
دوره بیست‌ودوم/شماره۸۶/دی ۱۳۹۵/ ۴۰صفحه/ ۱۰۰۰۰ ریال
ISSN:1735-4943

رشد ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برهان

ریاضی دوره دوم



روی جلد: **خواجه نصیرالدین طوسی** / پشت جلد را نیز ببینید.

مدیر مسئول: محمد ناصری/ سردبیر: سپیده چمن‌آرا/ مدیر داخلی: حسین نامی ساعی
هیئت تحریریه: آمنه ابراهیم زاده طاری، بهزاد اسلامی مسلّم، حمیدرضا امیری، سید امیرحسین بنی جمالی
زهره پندی، نازنین حسن نیا، محدثه کشاورز اصلانی،حسین نامی ساعی
همکاران این شماره: جعفر اسدی گرمارودی، هوشمند حسن‌نیا، حسام سبحانی طهرانی، داود معصومی مهوار
ویراستار: بهروز راستانی
طراح گرافیک: حسین یوزباشی
نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶/ صندوق پستی:۱۵۸۷۵/۶۵۸۶
تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ داخلی ۳۷۵ / نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸
تلفن پیامگیر نشریات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲، کد مدیر مسئول: ۱۰۲/ کد دفتر مجله:۱۱۳
کد مشترکین: ۱۱۴ / تلفن امور مشترکین: ۶ و ۷۷۳۳۶۶۵۵
roshdmag:
وب گاه: www.roshdmag.ir/ رایانامه: borhanmotevaseteh1@roshdmag.ir
وبلاگ اختصاصی مجله: weblog.roshdmag.ir/borhanrahnamaiee
شمارگان: ۲۳۰۰۰ نسخه/چاپ: شرکت افست(سهامی عام)

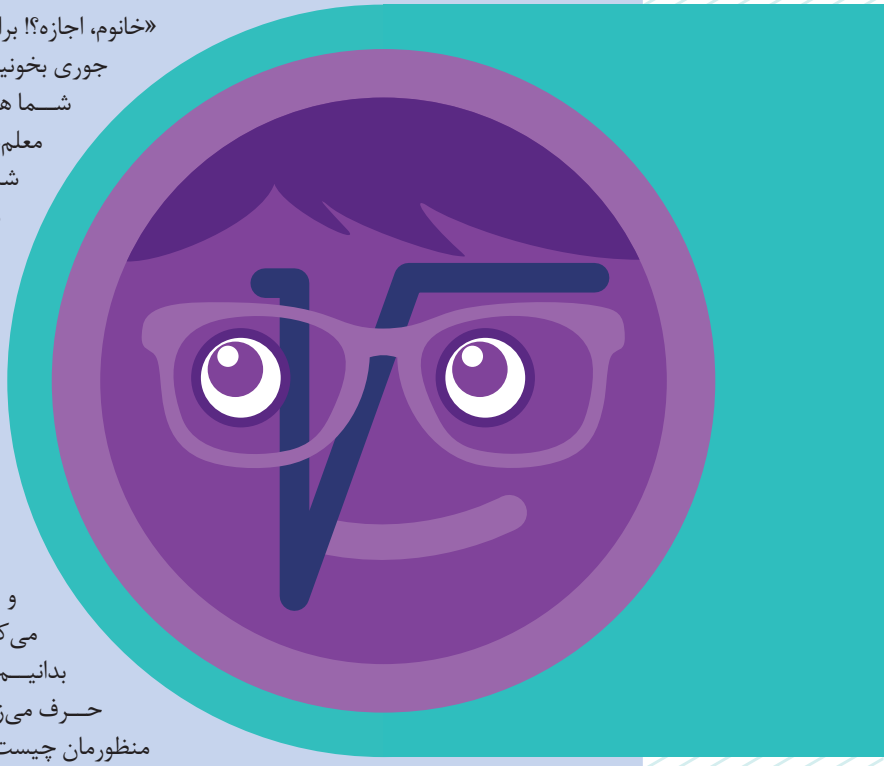
یادداشت سردبیر
ریاضیات فهمیدنی، ریاضیات تکرار و تمرینی/ سپیده چمن‌آرا/۲
ریاضیات و مدرسه
درخت‌های تجزیه چه می‌گویند؟/ هوشمند حسن‌نیا/۳
۳۵۲۱۷۷ اول است؟!/جعفر اسدی گرمارودی/ ۶
بازی ضلع و زاویه/ فاطمه درویشی/ ۲۸
یکان اعداد را بگو!/ شراره تقی دستجردی/ ۳۰
ریاضیات و کاربرد
ریاضیات بیمه‌ای: بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری/ محدثه رجایی / ۷
نظریهٔ بازی‌ها در بقالی/حسین نامی ساعی/ ۱۱
قدم زدن برهندسه / سپیده چمن‌آرا /۱۴
استاد مرتضی سنگ‌ها را اُریب می‌چیند/ داود معصومی مهوار/ ۱۶
معرفی کتاب
معماهای چوب‌کبریتی/جعفر ربّانی/۱۸
ریاضیات و تاریخ
فی‌پی‌ها درپی‌پولیس/حسام سبحانی طهرانی/ ۲۰
ریاضیات و بازی
بازی ۱۵ / محدثه کشاورز اصلانی / ۲۲
کاکورو/ محدثه کشاورز اصلانی، محمود داورزنی/ ۲۴
KONO/ سبا دهقان / ۲۶
ریاضیات و مسئله
کی می‌تونه حل کنه؟/ آمنه ابراهیم زاده طاری/ ۱۹
پاسخ کی می‌تونه حل کنه؟+ پاسخ پازلی فکر کنید/ ۳۲
ریاضیات و سرگرمی
اعداد جادویی/ هوشنگ شرقی/ ۳۳
خانوادهٔ جغدهای چاق و لاغر / هدی ماهور/ ۳۶
چندوجهی‌های منتظم/ محبوبه رمضانی، حمید قراکوزلی/ ۳۸
معرفی سایت
جعبه‌های جبری/زهرا صباغی/۴۰
ریاضی دانان ایرانی
خواجه نصیرالدین طوسی/نازنین حسن نیا/رو و پشت جلد
ریاضیات و محیط زیست ما
محیط زیست و هندسه/ ژما جواهری پور/صفحات داخل جلد

قابل توجه نویسندگان و مترجمان؛
مطالبی که برای درج در مجله می‌فرستید، باید با اهداف مجله مرتبط باشد و قبلاً در جای دیگری چاپ نشده باشد. لطفاً مطالب ترجمه شده یا تلخیص شده را به همراه مطلب اصلی یا با ذکر دقیق منبع، ارسال کنید. مجله در رد، قبول، ویرایش و تلخیص مطالب آزاد است. مطالب و مقالات دریافتی بازگردانده نمی‌شوند. آرای مندرج در مطالب و مقاله‌ها ضرورتاً مبین رأی و نظر مسئولان نیست.

اهداف مجله عبارت‌اند از:گسترش فرهنگ ریاضی/ افزایش دانش عمومی و تقویت مهارت‌های دانش‌آموزان در راستای برنامه درسی/ توسعه تفکر و خلاقیت/ توجه به استدلال ریاضی و منطق حاکم بر آن/ توجه به الگوها و کمک به توانایی استفاده از آن‌ها / توجه به محاسبه‌های ریاضی برای توسعه تفکر جبری و توانایی‌های ذهنی دانش‌آموزان/ توجه به فرهنگ و تمدن ایرانی و اسلامی در بستر فرهنگ ریاضی جهانی/ توجه به کاربرد ریاضی در زندگی و علوم و فن‌آوری/تقویت باورها و ارزش‌های دینی، اخلاقی و علمی.

خوانندگان رشد برهان متوسطه اول؛ شما می‌توانید مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:
تهران؛ صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

ریاضیات فهمیدنی
ریاضیات تکرار و تمرینی



«خانوم، اجازه؟! برای امتحان ریاضی چیا رو بخونیم؟ واسه امتحان چه جوری بخونیم؟ ...»

شما هم از این سؤال‌ها از معلم‌های ریاضی‌تان پرسیده‌اید؟ معلم‌ها به شما چه جوابی داده‌اند؟ احتمالاً این پاسخ را شنیده‌اید که: «همه‌چی را بخوانید!» و احتمالاً این پاسخ، به‌دردنخورترین پاسخی است که می‌شد به شما داد! خُب دقیقاً منظور از «همه‌چی» چیست؟ بگذارید من کمی برایتان از ماهیت دانش ریاضی بگویم. شاید آن موقع بتوانیم بفهمیم «همه‌چی ریاضیات» چیست و «چطور» آن را بخوانیم؟ ریاضیات یک سلسله **مفاهیم** دارد؛ مثل «عدد»، «عدد صحیح»، «عدد گویا»، «پاره‌خط»، «مربع»، «مثلث»، «بردار»، «عبارت‌های جبری»، «معادلهٔ خط راست» و خیلی مفاهیم دیگر. این‌ها موجوداتی هستند که دانش ریاضی با آن‌ها سروکار دارد. دربارهٔ آن‌ها حرف می‌زند و ارتباط‌هایی را که بین آن‌ها وجود دارد، بررسی و بیان می‌کند. ما باید این موجودات را خوب بشناسیم. مثلاً باید بدانیم وقتی می‌گوییم «بردار» دقیقاً داریم دربارهٔ چه چیز حرف می‌زنیم. یا زمانی که می‌گوییم «عبارت‌های جبری» دقیقاً منظورمان چیست. یا «عدد صحیح» یا «...». ما باید این مفاهیم را **درک** کنیم. باید آن‌ها را **بفهمیم** و برای فهمیدن آن‌ها، باید زمانی که معلم درس می‌دهد، کاملاً با این مفاهیم و جزئیاتشان آشنا شویم. از طرف دیگر، برای اینکه بتوانیم با این مفاهیم کار کنیم، باید بدانیم که مفاهیم چگونه با هم ارتباط دارند و این ارتباط‌ها چه ویژگی‌هایی دارند. مثلاً «عددهای گویا» می‌توانند مختصات «بردارها» باشند و تعیین‌کنندهٔ جهت و اندازهٔ بردار و برای اینکه بتوانیم بردارها را با هم جمع کنیم، باید از جمع عددهای گویا استفاده کنیم و... ما باید این ارتباط‌ها را نیز به خوبی درک کنیم و بفهمیم و برای فهمیدن آن‌ها، خوب است سعی کنیم با حل مسئله‌های مناسب که در آن‌ها نیازمند دانستن این ارتباط‌ها هستیم، دانش خودمان را به آزمایش بگذاریم. این‌ها همه ریاضیات **فهمیدنی** هستند. تا وقتی «نفهمیم» نمی‌توانیم «مسئله حل کنیم»! اما یک سلسله کارهایی که روی این مفاهیم انجام می‌شوند، عملیاتی هستند که دارای روش‌های مشخص‌اند؛ مثل جمع کردن عددها با هم، ساده کردن عبارت‌های جبری، حل کردن تناسب‌های ریاضی و... ما برای اینکه بتوانیم این عملیات را انجام دهیم، باید روش آن‌ها را یاد بگیریم و برای یاد گرفتن روش و تسلط بر آن، تمرین کردن زیاد به ما کمک می‌کند. این قسمت، ریاضیات به خاطرسپردنی است که با تکرار و تمرین روی آن، تسلط ما بر آن بیشتر می‌شود. خُب، حالا شما به من بگویید: برای امتحان ریاضی چی بخوانیم؟ برای امتحان چگونه بخوانیم؟

...

امیدوارم پاسختان این نباشد که ما از روی کتاب و تمرین‌ها می‌خوانیم. امیدوارم بعد از این سخنرانی که برایتان کردم، به من بگویید: «مفاهیم را مرور می‌کنیم، مسئله حل می‌کنیم، و روی روش‌ها و عملیات تمرین می‌کنیم.»

موفق باشید-سردبیر

درخت‌های تجزیه چه می‌گویند؟

نمودارهای متفاوت

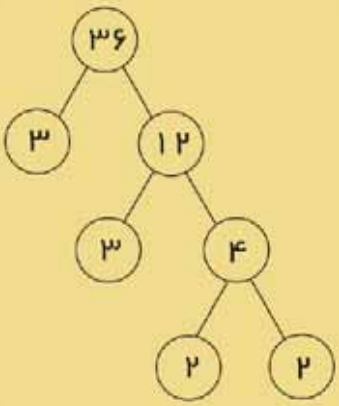
تجزیه‌های مشابه!

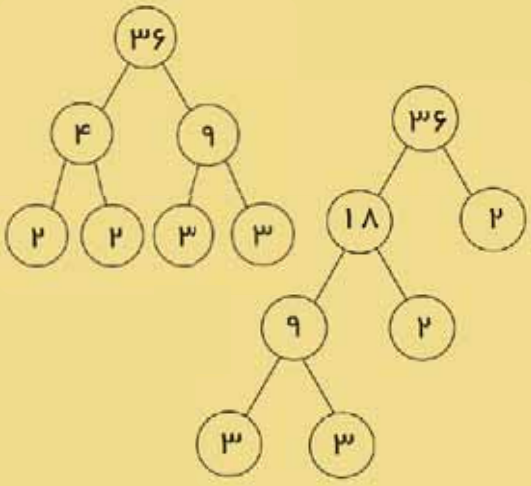
هوشمند
حسن‌نیا

از سال هفتم با «نمودار تجزیه» آشنا شده‌اید. برای کشیدن نمودار تجزیه، عدد اصلی (عددی که می‌خواهیم تجزیه کنیم) را می‌نویسیم و دو شاخه به سمت پایین می‌کشیم و زیر این دو شاخه دو عدد غیر از ۱ می‌نویسیم که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با عدد اصلی باشد. اگر عددهایی که می‌نویسیم مرکب باشند، همین کار را برای هرکدام از آن دو تکرار می‌کنیم و... بله! فرایند بالا را تا جایی که امکان‌پذیر باشد ادامه می‌دهیم.

شما با کدام‌یک از جمله‌های زیر موافقید؟

- هرکدام از عددهای موجود در نمودار تجزیه، شمارنده‌ای از عدد بالایی آن است.
- اگر پایین‌ترین عدد همهٔ شاخه‌ها را در هم ضرب کنیم، عدد اصلی به دست می‌آید.
- برای یک عدد ممکن است چند نمودار تجزیهٔ متفاوت بتوانیم بکشیم.





این جمله‌ها ویژگی‌های نمودارهای تجزیه را بیان می‌کنند. احتمالاً شما می‌توانید در ذهنتان دلیل درست بودن این جمله‌ها را مرور کنید.

«برای یک عدد ممکن است چند نمودار تجزیهٔ متفاوت بتوانیم بکشیم.»

می‌دانیم که جملهٔ بالا درست است.

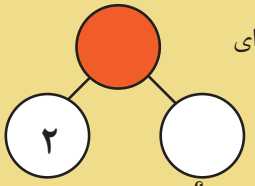
یک بار دیگر به نمودارهایی که برای ۳۶ کشیده‌ایم، نگاه کنید. پایین‌ترین دایره‌های هر سه نمودار ۲ و ۲ و ۳ و ۳ هستند. حتماً شما هم قبول دارید که این ماجرا اتفاقی نیست.

چطور می‌شود که شکل نمودارهای این‌قدر با هم فرق می‌کند، ولی در نهایت همهٔ آن‌ها به اعداد اول یکسانی می‌رسند؟

در این متن تلاش می‌کنیم که روی این موضوع متمرکز باشیم. شاید به دستاوردهایی برسیم...

«پایینی‌ها» در مورد «بالایی‌ها» چه می‌گویند؟

به شکل روبه‌رو توجه کنید.



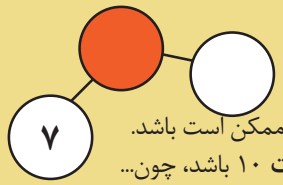
می‌دانیم که کسی نمودار تجزیه‌ای کشیده، ولی متأسفانه بعضی از قسمت‌های آن پاک شده است. حدس می‌زنید عدد اصلی (عدد مربوط به دایرهٔ قرمز) چند بوده؟

- دایرهٔ قرمز شاید ۴ باشد.
- دایرهٔ قرمز شاید ۶ باشد.
- دایرهٔ قرمز شاید ۱۴ باشد.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشد.
- اما دایرهٔ قرمز ممکن **نیست** ۱۵ باشد، چون...

چرا مطمئنیم که دایرهٔ قرمز ۱۵ نبوده است؟

وقتی یکی از پایین‌ترین عددها ۲ باشد، نمی‌توانیم دقیقاً عدد بالایی (قرمز) را پیدا کنیم. اما یک نتیجه می‌توانیم بگیریم: «عدد بالایی (قرمز) مطمئناً زوج بوده است.»

در این یکی نمودار بیایید عدد بالایی (عدد مربوط به دایرهٔ قرمز) را حدس بزنیم.



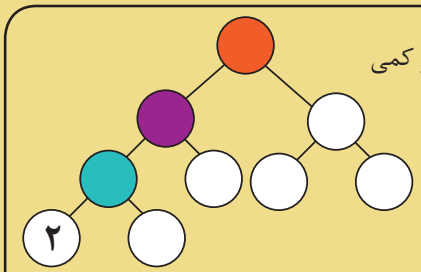
- دایرهٔ قرمز شاید ۱۴ باشد.
- دایرهٔ قرمز شاید ۲۱ باشد.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشد.
- اما دایرهٔ قرمز ممکن **نیست** ۱۰ باشد، چون...

دایرهٔ قرمز مطمئناً ۱۰ نبوده است، چون ۱۰ بر ۷ بخش‌پذیر نیست!

با توجه به تجربهٔ مثال‌های بالا، آیا با این جمله موافقید؟

«یک نمودار تجزیه ممکن است خیلی طولانی یا کوتاه باشد. همچنین ممکن است شکل‌های گوناگونی داشته باشد، اما اگر یکی از پایین‌ترین عددهای موجود در آن نمودار تجزیه، عدد اولی به نام p باشد، می‌توانیم مطمئن باشیم که عدد اصلی، مضربی از p است.»

و اما این نمودار کمی سخت‌تر است.

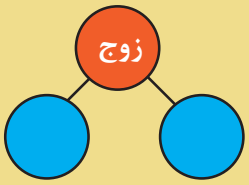


آیا اینجا هم حرفی شبیه دو مورد قبلی می‌توانیم بزنیم؟

- دایرهٔ سبز، بالای ۲ است، پس مطمئناً باید زوج باشد.
- پس دایرهٔ بنفش که یک مرحله بالاتر از دایرهٔ سبز است هم باید زوج باشد.
- پس دایرهٔ قرمز هم باید زوج باشد.

«بالایی‌ها» در مورد «پایینی‌ها» چه می‌گویند؟

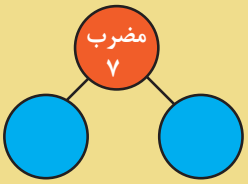
یک نفر نمودار یک عدد را کشیده، ولی متأسفانه بعضی از قسمت‌های آن پاک شده است. او فقط به ما می‌گوید که عدد اصلی زوج بوده است. بیایید حدس‌هایی در مورد عددهای پایینی بزنیم:



- دایره‌های آبی شاید ۲ و ۵ باشند.
- دایره‌های آبی شاید ۷ و ۲ باشند.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشند.
- اما امکان **ندارد** دایره‌های آبی ۳ و ۵ باشند، چون...

اگر دایره‌های پایینی ۳ و ۵ بودند که عدد اصلی ما زوج نمی‌شد! در نمودارهای مثل این، وقتی بدانیم که عدد اصلی ما زوج است، نمی‌توانیم با قطعیت عددهای پایینی را پیدا کنیم، اما می‌توانیم مطمئن باشیم که «لااقل یکی از پایینی‌ها ۲ است.»

در این نمودار، ما می‌دانیم که عدد اصلی مضرب ۷ است. ببینیم چه حرف‌هایی در مورد پایینی‌ها می‌توانیم بزنیم؟



- دایره‌های آبی شاید ۷ و ۳ باشند.
- دایره‌های آبی شاید ۷ و ۱۱ باشند.
- خیلی حالت‌های دیگر هم ممکن است باشند.
- اما امکان **ندارد** دایره‌های آبی ۵ و ۳ باشند، چون...

اگر دایره‌های آبی ۳ و ۵ بودند، چطور ممکن بود عدد اصلی ما مضرب ۷ باشد؟

در نمودارهای مثل این، وقتی بدانیم که عدد اصلی ما مضرب ۷ است، نمی‌توانیم با قطعیت عددهای پایینی را پیدا کنیم، اما می‌توانیم مطمئن باشیم که: «لااقل یکی از پایینی‌ها ۷ است.»

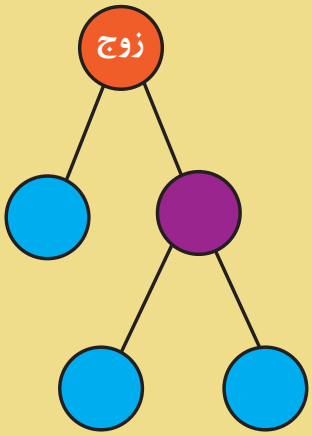
آیا تجزیه‌های بالا کافی هستند که نتیجه بگیریم:

«یک نمودار تجزیه ممکن است خیلی طولانی یا کوتاه باشد. همچنین ممکن است شکل‌های گوناگونی داشته باشد. اما اگر عدد اصلی، مضربی از p باشد (p یک عدد اول است)، می‌توانیم مطمئن باشیم که p باید حداقل یک بار در پایین نمودار دیده شود.»

مبادا دچار اشتباه شویم!

بسیاری از خصوصیت‌های عددهای مرکب با عددهای اول فرق دارند. اگر دایرهٔ بالایی مضربی از یک عدد مرکب باشد، ماجرا تفاوت خواهد داشت. مثلاً اگر عدد اصلی مضرب ۶ باشد، امکان ندارد که ۶ را در پایین‌ترین دایره‌ها ببینیم. اصلاً ۶ در پایین‌ترین دایره‌ها نمی‌تواند قرار بگیرد. پایین‌ترین دایره‌ها مخصوص اعداد اول هستند.

و باز هم برویم سراغ نمودارهای سخت‌تر!



تصور کنید چنین نموداری داریم و تنها چیزی که می‌دانیم این است که عدد اصلی زوج است. استدلالی شبیه به دو مثال قبل اینجا هم ما را به جواب می‌رساند:

- به دایره‌های آبی نگاه کنید. اگر همهٔ آن‌ها فرد باشند، حتماً دایره‌های بنفش و قرمز هم باید فرد باشند.
- پس حداقل یکی از دایره‌های آبی باید ۲ باشد.

یک بار دیگر توجه کنید که چه نتیجه‌ای گرفتیم:

«در یک نمودار تجزیه، اگر عدد اصلی زوج باشد، مطمئنیم که لااقل یکی از پایین‌ترین عددها ۲ بوده است.»

ما به دستاوردهای ارزشمندی رسیده‌ایم!

بیایید همهٔ این دستاوردها را یکجا در یک مثال ببینیم:

با ماشین‌حساب، عددهای اول ۵، ۷، ۱۷ و ۲۳ را در هم ضرب کنید. حاصل‌ضرب برابر با ۱۳۶۸۵ می‌شود. اگر از یک نفر بخواهیم که برای عدد ۱۳۶۸۵ نمودار تجزیه بکشد، نمی‌توانیم حدس بزنیم که نمودار او چه شکلی می‌شود، اما در مورد پایین‌ترین اعداد آن خیلی حرف‌ها می‌توانیم بزنیم:

- ۱۳۶۸۵ مضربی از ۷ است، پس مطمئنیم که در میان پایین‌ترین اعداد، حداقل یک بار ۷ دیده می‌شود.
- ۱۳۶۸۵ مضربی از ۵ است، پس مطمئنیم که در میان پایین‌ترین اعداد، حداقل یک بار ۵ دیده می‌شود.
- ۱۳۶۸۵ مضربی از ۲۳ است، پس مطمئنیم که در میان پایین‌ترین اعداد، حداقل یک بار ۲۳ دیده می‌شود.

همچنین:

- مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، ۲ دیده نخواهد شد چون ۱۳۶۸۵ مضرب ۲ نیست.
- مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، ۳ دیده نخواهد شد چون ۱۳۶۸۵ مضرب ۳ نیست.
- مطمئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، ۱۱ دیده نخواهد شد چون ۱۳۶۸۵ مضرب ۱۱ نیست.

مطئنیم که در پایین‌ترین اعداد آن نمودار، هیچ عدد دیگری به جز ۵، ۷، ۱۷ و ۲۳ دیده نخواهد شد، چون ۱۳۶۸۵ مضرب هیچ عدد اول دیگری غیر از ۵، ۷، ۱۷ و ۲۳ نیست. پس اگر از یک نفر بخواهیم که نمودار ۱۳۶۸۵ را بکشد، اصلاً نمی‌توانیم حدس بزنیم نمودارش چه شکلی خواهد بود، ولی مطمئنیم که پایین‌ترین عددهایی که می‌نویسد، فقط و فقط از بین اعداد ۵ و ۷ و ۱۷ و۲۳ خواهد بود؛ نه یک عدد بیشتر نه یک عدد کمتر. اگر نمودار ۱۹۱۵۹ را بکشید، خواهید دید که عدد ۷ دوبار ظاهر می‌شود. در این نوشته در مورد تعداد دفعاتی که یک عدد اول ظاهر می‌شود، صحبتی نشده است. در این مورد، کمی فکر کنید! به دستاوردهای جالبی می‌رسید!

ریاضی‌کارها چطور فکر می‌کنند

حتماً می‌دانید که ریاضی‌کارهای حرفه‌ای، با نکته‌سنجی زیادی به جزئیات استدلال گوش می‌کنند و قبل از پذیرفتن یک حرف، همهٔ جوانب را بررسی می‌کنند که مبادا در مراحل کار چیزی از قلم بیفتد. اگر شما دستاوردهای این متن را برای یک ریاضی‌کار توضیح دهید، احتمالاً او به خوبی متوجه ارزشمندی حرف‌های شما خواهد شد اما شاید به شما بگوید: «خیلی خوب است اما این هنوز یک اثبات دقیق نیست!» خیلی تعجب نکنید. شما همه‌چیز را درست متوجه شده‌اید. مشکل از استانداردهاست. ما می‌توانیم به درستی دستاوردهایمان باور داشته باشیم و از آن‌ها استفاده کنیم، اما با استانداردهای ریاضیات حرفه‌ای، هنوز حرف‌ها و استدلال‌هایمان باید دقیق‌تر شوند.

جعفر اسدی گرمارودی

۳۵۲۱۷۷ اوّل است؟!

ایا ۳۵۲۱۷۷ اول است؟ شما چه فکر می‌کنید؟ بررسی آن چگونه است؟ مشکل یا راحت است؟

به نظر می‌رسد شش رقمی بودن عدد در پاسخ دادن به سؤالات بالا اثرمی‌گذارد. از بخش‌پذیری بر ۲ باید شروع کنیم و برای ادامهٔ مسیر، اگر بخواهیم جذر تقریبی عدد بالا را به دست آوریم، مسلماً باید از ماشین‌حساب کمک بگیریم و ادامهٔ داستان.

یک بار دیگر خوب به عدد دقت کنیم، دو رقم دو رقم بر ۷ بخش‌پذیر است. آیا این موضوع می‌تواند کمکی کند؟
می‌تواند کمک کند به شرطی که عدد را به‌صورت زیر نگاه کنیم:

۳۵۲۱۷۷=۳۵۰۰۰۰+۲۱۰۰+۷۷
=(۷×۵۰۰۰۰)+(۷×۳۰۰)+(۷×۱۱)

بنابراین عدد مورد نظر بر ۷ بخش‌پذیر و مرکب است.

مثالی دیگر:

۳۴۵۱ اول است یا مرکب؟
بخش‌پذیری بر ۱۷ در این مثال ساده‌تر به‌نظر می‌رسد.

۳۴۵۱=۳۴۰۰+۵۱=(۱۷×۲۰۰)+(۱۷×۳)

بنابراین بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

و مثال دیگر:

۵۸۱ چطور؟
این عدد را دیگر نمی‌توان دو رقم دو رقم جدا کرد. با استفاده از قوانین بخش‌پذیری، عدد ۵۸۱ بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نیست. به بررسی بخش‌پذیری بر ۷ می‌رسیم.

۵۸۱=۵۶۰+۲۱=(۷×۸۰)+(۷×۳)

بنابراین بر ۷ بخش‌پذیر است.

اکنون نوبت شماست تا مثال‌های بیشتری بزنید.

مثال آخر:

عددی دو رقمی انتخاب کنید و روی کاغذ بنویسید. در سمت راست عدد دورقمی، دوباره همان عدد دو رقمی را بنویسید تا یک عدد چهار رقمی به دست آید. حالا بررسی کنید عدد چهار رقمی بر عدد دو رقمی که انتخاب کرده بودید بخش‌پذیر است یا نه.
بعد از بررسی شما، عدد ۴۳ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین عدد چهاررقمی حاصل ۴۳۴۳ خواهد شد که بر ۴۳ بخش‌پذیر است. هر عدد دورقمی دیگر نیز انتخاب کنید، عدد چهار رقمی حاصل ۱۰۱ برابر عدد دو رقمی اولیه خواهد بود زیرا

۴۳۴۳=۴۳۰۰+۴۳=(۴۳×۱۰۰)+۴۳=۱۰۱×۴۳

ریاضیات بیمه‌ای

بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری

محدثه رجایی

اشاره

در این شماره نیز می‌خواهیم کمی دیگر دربارهٔ کاربرد ریاضی در بیمه صحبت کنیم. در این قسمت دربارهٔ «بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری»[1] حرف می‌زنیم. هدفمان آشنایی کلی با این نوع بیمه و مسائل مربوط به آن است.

بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری چیست؟

ویژگی‌های بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری تا حدی به شرکت بیمه‌کننده بستگی دارد. اما، به‌طور کلی، بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری، مانند نامش دو قسمت **اصلی** دارد: یکی «عمر» و دیگری «سرمایه‌گذاری». قسمت عمر به این نکته اشاره دارد که شخصی که خود را بیمه می‌کند، در طول زمانی مشخص، به‌طور منظم پولی را به‌عنوان حق بیمه به شرکت می‌پردازد و اگر طی این زمان فوت شود، در همان سال فوت، مبلغی به بازماندگانش پرداخت می‌شود. هدف از این کار آن است که با از دست رفتن شخصی که درآمدش نقش مهمی در زندگی اطرافیانش دارد، زندگی آن‌ها به لحاظ اقتصادی آسیب جدی نبیند. قسمت سرمایه‌گذاری چیزی نیست جز پس‌انداز کردن پول. شخصی که خود را بیمه می‌کند، به‌طور منظم پولی را به شرکت بیمه می‌پردازد تا از آن در فعالیت‌های اقتصادی شرکت استفاده شود. در عوض، شرکت بیمه، آن شخص را در سودی که از این فعالیت‌ها به دست می‌آورد، سهیم می‌کند. یکی از اهداف این کار می‌تواند داشتن سرمایه‌ای برای زمان بازنشستگی باشد. قبل از اینکه بیشتر وارد جزئیات شویم، خوب است یک نکته را در نظر داشته باشیم. می‌دانیم که در شریعت اسلام، ربا حرام است و بعضی از روش‌های گرفتن سود به ازای پس‌انداز کردن پول، نوعی ربا و در نتیجه از نظر شرعی حرام هستند. ما در اینجا از اینکه سود قسمت سرمایه‌گذاری در چه صورت حلال است صحبت نمی‌کنیم. بنابراین، وقتی از پرداخت سود به افراد بیمه شده صحبت می‌کنیم، منظورمان این نیست که پرداخت یا دریافت کردن این سود، از نظر ما درست است.

شرکت بیمهٔ «ب» و آقای «آ»

بیایید یک مثال خاص را در نظر بگیریم تا بتوانیم دقیق‌تر صحبت کنیم. از این به بعد، برای راحتی، به جای بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری از عبارت بیمهٔ عمر استفاده می‌کنیم.

یکی از اهداف بیمهٔ سرمایه‌گذاری می‌تواند داشتن سرمایه‌ای برای زمان بازنشستگی باشد

بیمهٔ عمر شرکت بیمهٔ ب، در دوره‌های پنج، ده، پانزده، بیست، بیست و پنج و سی ساله فروخته می‌شود. هر شخصی در هر سنی می‌تواند بیمهٔ عمر داشته باشد، به شرط اینکه در پایان دورهٔ بیمه بیشتر از ۷۰ سال سن نداشته باشد. مثلاً، یک شخص ۶۴ ساله تنها می‌تواند بیمهٔ عمر پنج‌ساله بخرد. فرض کنید آقای آ برای خرید بیمهٔ عمر به شرکت ب مراجعه می‌کند. او باید طول دورهٔ بیمهٔ خود را با توجه به این شرط مشخص کند.

علاوه بر این، باید مبلغی را که به آن «سرمایهٔ فوت» می‌گویند، تعیین کند. سرمایهٔ فوت پولی است که در صورت فوت آقای آ در دورهٔ بیمه، در همان سالی که فوت اتفاق می‌افتد، به بازماندگانش پرداخت می‌شود. منظور از بازماندگان کسانی هستند که خود آقای آ مشخصشان می‌کند. اگر آقای آ تعیین نکند که این پول باید به چه کسانی پرداخت شود، وارثان قانونی آن را می‌گیرند.

با توجه به سرمایهٔ فوت و شرایط آقای آ، مقدار حق بیمه‌ای که باید هر سال به شرکت بیمه بپردازد، معلوم می‌شود. او می‌تواند این حق بیمه را یکجا پرداخت کند و یا به‌طور ماهانه، دو ماهه و... این کار را انجام دهد. آقای آ باید میزان پولی را هم که می‌خواهد پیش شرکت بیمه پس‌انداز کند، مشخص سازد. این مقدار نباید از سالی ۶۰۰ هزار تومان کمتر باشد. پول پس‌انداز شده به همراه سودی که به آن تعلق می‌گیرد، پس از پایان دورهٔ بیمه به آقای آ بازگردانده می‌شود. اگر او در این مدت فوت کند، در همان سال فوت به همراه سرمایهٔ فوت به بازماندگانش داده می‌شود.

میزان سودی که به این بخش پس‌اندازی تعلق می‌گیرد، در پنج سال اول سالی ۱۸ درصد، در پنج سال دوم سالی ۱۵ درصد و پس از آن با توجه به شرایط اقتصادی است. این سود به‌طور روزشمار محاسبه می‌شود. یعنی بعد از گذشت هر روز، سودی که به ازای آن یک روز به پول آقای آ تعلق می‌گیرد، در حساب او ذخیره می‌شود.

پس اگر قرار است در اولین سال، ۱۸ درصد سود وجود داشته باشد، سرمایهٔ آقای آ پس از یک روز از اولین پس‌انداز $\frac{۱۸}{۱۰۰\times۳۶۵}+۱$ برابر می‌شود. چرا؟

سود روز دوم به کل پولی که بعد از روز اول در حساب آقای آ هست، تعلق می‌گیرد. یعنی شرکت ب به سودی که در روز اول به آقای آ داده است هم سود می‌دهد.

مسئله: فرض کنید آقای آ همان وقتی که بیمهٔ عمر می‌خرد، یک میلیون تومان در شرکت ب پس‌انداز کند. بعد از یک سال این پول چقدر می‌شود؟ اگر به جای اینکه سوددهی به صورت روزشمار باشد، بعد از گذشت یک سال به اندازهٔ ۱۸ درصد پولش سود می‌گرفت، در آخر سال پس‌اندازش چقدر کمتر بود؟

هرچه آقای آ سرمایهٔ فوت بیشتری انتخاب کند، باید حق بیمهٔ بیشتری هم بپردازد. فرض کنید که آقای آ می‌خواهد سرمایهٔ فوت ۷۰ میلیون تومانی داشته باشد. اما به جز این، چه عوامل دیگری روی میزان حق بیمه اثرگذارند؟ اگر آقای آ یا یکی

از بستگان درجهٔ یک او بیماری خاصی داشته باشند، شرکت بیمه برای آقای آ حق بیمهٔ بیشتری تعیین می‌کند. چون وجود این بیماری خطر مرگ او را بالا می‌برد. فرض کنید آقای آ و افراد خانواده‌اش در سلامت به سر می‌برند. عامل مهم دیگر سن آقای آ است. هرچه سن فردی که بیمهٔ عمر می‌خرد بیشتر باشد، بیمهٔ عمرش شرکت ب را بیشتر در معرض پرداخت خسارت قرار می‌دهد! بنابراین، طبیعی است که هرچه سن آقای آ بیشتر باشد، حق بیمهٔ بیشتری هم باید بپردازد.

فرض کنید آقای آ ۴۵ سال دارد. حالا به نظر شما سن چطور وارد محاسبهٔ حق بیمه می‌شود؟ اگر روش تعیین حق بیمهٔ دانش‌آموزی را که در شمارهٔ قبل درباره‌اش صحبت کردیم به یاد داشته باشید، راحت‌تر می‌توانید به این مسئله فکر کنید. شرکت بیمه باید حق بیمهٔ عمر را طوری تعیین کند که مجموع حق بیمه‌هایی که از افراد می‌گیرد، با مجموع پولی که به بازماندگان افراد فوت شده می‌دهد، تقریباً برابر باشد. نکتهٔ مهم این است که شرکت بیمه قرار نیست فقط به آقای آ بیمهٔ عمر بفروشد. افراد دیگری هم هستند که مانند آقای آ بیمهٔ عمر می‌خرند و ۴۵ سال دارند. اگر برای بیمه معلوم بود که چه بخشی از افراد در فاصلهٔ ۴۵سالگی تا ۴۶ سالگی فوت می‌کنند، آن‌وقت می‌توانست تعیین کند که حدوداً قرار است چقدر خسارت در سال پیش رو به کل افراد ۴۵ ساله پرداخت کند و با تقسیم کردن مناسب این مقدار بین آن‌ها حق بیمه را تعیین می‌کرد. برای مثال، اگر بیمهٔ ب بداند چهار هزارم انسان‌ها در این دوره از زندگی‌شان فوت می‌کنند و هزار مشتری ۴۵ ساله داشته باشد، با اطمینان بالایی می‌داند که در سال پیش رو باید برای حدود چهار نفر از این جمع، سرمایهٔ فوت بپردازد. حالا اگر از هر یک از این هزار مشتری‌اش به اندازهٔ چهار هزارم سرمایهٔ فوت خود او را به‌عنوان حق بیمهٔ سالانه بگیرد، می‌تواند تقریباً مطمئن باشد که میزان حق بیمه‌ای که در این یک سال می‌گیرد، تقریباً به اندازهٔ سرمایهٔ فوت چهار نفر است و در نتیجه، فاصلهٔ زیادی با خساراتی که پرداخت می‌کند ندارد. با توجه به این مورد خوب است که حق بیمهٔ شخصی با n سال سن، برابر با حاصل‌ضرب زیر باشد:

سرمایهٔ فوت آن شخص × نسبت افرادی که از n تا (n+۱) سالگی فوت می‌کنند

هدف ازبیمهٔ عمر این است که با از دست رفتن شخصی که درآمدش نقش مهمی در زندگی اطرافیانش دارد، زندگی آن‌ها به لحاظ اقتصادی آسیب جدی نبیند

توجه کنید که در این روش، حق بیمهٔ افراد از یک سال به سال بعد می‌تواند تغییر کند. بنابراین، حق بیمهٔ آقای آ پس از گذشت یک سال از بیمهٔ عمرش باید دوباره محاسبه شود. علاوه بر این، همان‌طور که می‌خواستیم، هرچه سرمایهٔ فوت بیشتر باشد، حق بیمه هم بیشتر است.

اما این نحوهٔ تعیین حق بیمه نیازمند دانستن نسبت افرادی است که در سنین متفاوت از دنیا می‌روند. شرکت بیمه از کجا به چنین چیزی دسترسی دارد؟ جواب این است که بیمهٔ مرکزی با انتشار جدولی به نام جدول عمر این اطلاعات را در اختیار شرکت‌های بیمه قرار می‌دهد. جدول عمر به این شکل تهیه می‌شود: تعداد زیادی از افراد را از بدو تولدشان در نظر

میزان حق بیمه به عوامل متعددی بستگی دارد؛ مانند سن، سلامت فرد بیمه‌شده، مبلغ سرمایهٔ فوت

می‌گیرند و هر سالی که می‌گذرد، تعداد افراد زندهٔ آن جمع را ثبت می‌کنند. برای مثال، جدول ۱ که در سال ۱۹۹۸ میلادی در فرانسه تهیه شده، با بررسی جمعیتی ۱۰۰ هزار نفری درست شده و در آیین‌نامهٔ شمارهٔ ۶۸ بیمهٔ مرکزی آمده است.

مسئله: از روی جدول ۱ مشخص کنید که چه نسبتی از این ۱۰۰ هزار نفر بین ۴۵ تا ۴۶ سال عمر کرده‌اند.

یکی از اطلاعاتی که به بیمه‌گذاران در محاسبهٔ حق بیمهٔ افراد بیمه شده کمک می‌کند، جداول عمر است

پوشش‌های بیمهٔ عمر

در ابتدای متن گفتیم که بیمهٔ عمر و سرمایه‌گذاری دو بخش اصلی دارد. در واقع، شرکت‌های بیمه امکانات دیگری هم در اختیار افرادی که از آن‌ها بیمهٔ عمر می‌خرند، قرار می‌دهند. به این امکانات که اختیاری هستند، «پوشش» گفته می‌شود. از بین این پوشش‌ها می‌توان به پوشش خطر فوت بر اثر حادثه، پوشش از کارافتادگی و پوشش امراض خاص اشاره کرد. برای مثال، اگر شخصی از امکان پوشش خطر فوت بر اثر حادثه استفاده کند، در صورتی که در مدت بیمه بر اثر حادثه‌ای جان خود را از دست بدهد، چند برابر سرمایهٔ فوت او به بازماندگانش پرداخت می‌شود. طبیعی است که اگر کسی بخواهد از این پوشش‌ها استفاده کند، باید حق بیمهٔ بیشتری بپردازد.

پی‌نوشت‌ها:

۱. این نوع از خدمات بیمه‌ای ممکن است در شرکت‌های متفاوت بیمه با نام‌های دیگری ارائه شود. برای مثال، «بیمهٔ عمر و تأمین آتیه» و «بیمهٔ زندگی و سرمایه‌گذاری» عنوان‌های دیگری برای همین نوع بیمه هستند.

۲. از کارشناسان بیمهٔ مرکزی، آقای زارع و خانم لالیان‌پور و خانم زمانی، که در تهیهٔ اطلاعات لازم برای نوشتن این مطلب ما را یاری کردند، سپاسگزاریم.

جدول ۱. جدول عمر، سال ۱۹۹۸، فرانسه

تعداد زنده‌ها	سن	تعداد زنده‌ها	سن	تعداد زنده‌ها	سن
۶۱۲۸۵	۷۲	۹۵۶۷۶	۳۶	۱۰۰۰۰۰	۰
۵۸۹۱۱	۷۳	۹۵۴۶۳	۳۷	۹۹۱۲۹	۱
۵۶۴۱۶	۷۴	۹۵۲۳۷	۳۸	۹۹۰۵۷	۲
۵۳۸۱۸	۷۵	۹۴۹۹۷	۳۹	۹۹۰۱۰	۳
۵۱۰۸۶	۷۶	۹۴۷۴۶	۴۰	۹۸۹۷۷	۴
۴۸۲۵۱	۷۷	۹۴۴۷۶	۴۱	۹۸۹۴۸	۵
۴۵۲۸۴	۷۸	۹۴۱۸۲	۴۲	۹۸۹۲۱	۶
۴۲۲۰۳	۷۹	۹۳۸۶۸	۴۳	۹۸۸۹۷	۷
۳۹۰۴۱	۸۰	۹۳۵۱۵	۴۴	۹۸۸۷۶	۸
۳۵۸۲۴	۸۱	۹۳۱۳۳	۴۵	۸۵۵۹۸	۹
۳۲۵۱۸	۸۲	۹۲۷۲۷	۴۶	۹۸۸۳۵	۱۰
۲۹۲۲۰	۸۳	۹۲۲۹۵	۴۷	۹۸۸۱۴	۱۱
۲۵۹۶۲	۸۴	۹۱۸۳۳	۴۸	۹۸۷۹۳	۱۲
۲۲۷۸۰	۸۵	۹۱۳۳۲	۴۹	۹۸۷۷۱	۱۳
۱۹۷۲۵	۸۶	۹۰۷۷۸	۵۰	۹۸۷۴۵	۱۴
۱۶۸۴۳	۸۷	۹۰۱۷۱	۵۱	۹۸۷۱۲	۱۵
۱۴۱۳۳	۸۸	۸۹۵۱۱	۵۲	۹۸۶۶۷	۱۶
۱۱۶۲۵	۸۹	۸۸۷۹۱	۵۳	۹۸۶۰۶	۱۷
۹۳۸۹	۹۰	۸۸۰۱۱	۵۴	۹۸۵۲۰	۱۸
۷۴۳۸	۹۱	۸۷۱۶۵	۵۵	۹۸۴۰۶	۱۹
۵۷۶۳	۹۲	۸۶۲۴۱	۵۶	۹۸۲۷۷	۲۰
۴۳۵۰	۹۳	۸۵۲۵۶	۵۷	۹۸۱۲۷	۲۱
۳۲۱۱	۹۴	۸۴۲۱۱	۵۸	۹۷۹۸۷	۲۲
۲۳۱۵	۹۵	۸۳۰۸۳	۵۹	۹۷۸۲۰	۲۳
۱۶۳۵	۹۶	۸۱۸۸۴	۶۰	۹۷۶۷۷	۲۴
۱۱۱۵	۹۷	۸۰۶۰۲	۶۱	۹۷۵۲۴	۲۵
۷۴۰	۹۸	۷۹۲۴۳	۶۲	۳۷۳۹۷	۲۶
۴۵۳	۹۹	۷۷۸۰۷	۶۳	۹۷۲۲۲	۲۷
۲۶۳	۱۰۰	۷۶۲۹۵	۶۴	۹۷۰۷۰	۲۸
۱۴۵	۱۰۱	۷۴۷۲۰	۶۵	۹۶۹۱۶	۲۹
۷۶	۱۰۲	۷۳۰۷۵	۶۶	۹۶۷۵۹	۳۰
۳۷	۱۰۳	۷۱۳۶۶	۶۷	۹۶۵۹۷	۳۱
۱۷	۱۰۴	۶۹۵۵۹	۶۸	۹۶۴۲۹	۳۲
۷	۱۰۵	۶۷۶۵۵	۶۹	۹۶۲۵۵	۳۳
۲	۱۰۶	۶۵۶۴۹	۷۰	۹۶۰۷۱	۳۴
		۶۳۵۴۳	۷۱	۹۵۸۷۸	۳۵

ریاضیات و کاربرد برهان
دوره ۲۲/شماره ۴
دی ماه ۱۳۹۵

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

نظریهٔ‌بازی‌ها در بقالی

حسین نامی ساعی

همهٔ ماجرا از سنگکی **شاطر عباس** شروع شد. آن هم وقتی که به شاطر عباس گفتم: «دو سه تا نون کنجدی برای من بزن.» شـــاطر عباس در جـــواب گفت: «کنجدمان تمام شـــده بپر از بقالی **حاج محمدآقا** ۱۰۰۰ تومان کنجد بخر و بیار تا ســـریع سنگک‌های کنجدیت رو برات بزنم.»

بعد از این صحبت‌ها به بقالی حاج محمدآقا که بیشـــتر از سه چهار متر با ســـنگکی فاصله نداشـــت، رفتم. مساحت بقالی ده دوازده متر بیشـــتر نبود. زن و مرد در بقالی ایستاده بودند. هر مشـــتری که وارد بقالی می‌شـــد، یک کاغذ یادداشت از گوشهٔ میـــزی که کنار بقالی بود برمی‌داشـــت و هرچه لازم داشـــت، روی آن می‌نوشـــت و به حاج محمدآقا می‌داد. حاج محمدآقا هم آن برگه را به یکی از کارگرهایش می‌داد. شـــماره‌ای هم به آن مشتری که برگهٔ درخواستش را گرفته بود، تحویل می‌داد، می‌گفت: «صبر کنید، هر موقع که شـــمارهٔ شـــما رو خواندند، جنس‌هاتون رو تحویل بگیرید.»

کارگـــر حاج محمدآقا برگه‌ها را از دری که در انتهای مغازه‌اش بود و به حیاط خانه راه داشـــت، می‌برد و به کارگرهایی که در حیاط بودند می‌داد تا درخواست‌های مشتری‌ها را آماده کنند. به درخواست یکی از مشتری‌ها که نگاه کردم، دیدم نوشته:

۱. سه کیلو شکر
۲. ده کیلو برنج هاشمی اعلا
۳. پنج قوطی رب
۴. یک دبه ماست
۵. بیست تا کره ۲۵ گرمی

و... درخواســـت‌های دیگر از مشتری‌های دیگر هم مثل آن. در حیاط بقالی حاج محمدآقا انباری از اجناس و کالاهای مورد نیاز مردم بود. تقریباً همه چیزهایی که در یک سوپرمارکت درجهٔ ۱ یافت می‌شود، در حیاط بقالی موجود بود.

نکتهٔ عجیب شلوغ بودن بقالی حاج محمدآقا بود. چرا این بقالی نه‌چندان بزرگ این همه مشتری داشت؟ از یک نفر سؤال کردم: «شما همیشه برای خرید به اینجا می‌آیید؟»
گفت: «بله.» گفتم: «چرا؟»
گفت: «هم جنس‌هاش عالیه و هم ارزان‌تر از همه‌جاست!»
بله همهٔ نکته در همین پاسخ کوتاه بود. جنس خوب با قیمت مناسب. این کلید شلوغی هر فروشگاه کم‌مشتری است.
آن‌قدر شیفتهٔ این بقالی شده بودم که یادم رفته بود چی می‌خواستم. یکباره یادم آمد که برای کنجدی که قرار بود بخرم و به شاطر عباس بدهم، در این بقالی هستم. رو به کارگر بقالی حاج محمدآقا که درخواست‌ها را جمع می‌کرد کردم و گفتم: «بی‌زحمت ۱۰۰۰ تومان کنجد به من بده.»
بدون اینکه برگه به من بدهد، سؤال کرد چیز دیگری هم می‌خواهی یا نه و وقتی گفتم نه، ۱۰۰۰ تومانم را گرفت و به سرعت به حیاط رفت و کنجدم را آورد. نایلون کوچکی پر از کنجد و از نوع درجهٔ یک تنها با ۱۰۰۰ تومان.
کنجد را گرفتم و بردم پیش شاطر عباس. شاطر عباس گفت: «پسر چقدر دیر کردی! بقالی شلوغ بود؟»
گفتم: «شلوغ بود، ولی به‌خاطر شلوغ بودن دیر نکردم، دیر کردنم به‌خاطر عجیب بودن بقالی بود.»
شاطر عباس که این بقالی را خوب می‌شناخت و از مشتری‌های پروپاقرص آن بود، بدون اینکه سؤال دیگری بکند، کنجد را از من گرفت و کم‌کم و یکی یکی روی خمیرهای سه سنگک ریخت و تنها جمله‌ای که گفت این بود: «عجب کنجدی! چقدر هم زیاد داده! خدا پدر و مادر حاج محمدآقا را بیامرزد. عجب مرد با انصاف و با خدائیه. به این فکر می‌کردم که چه عاملی باعث رونق یک فروشگاه و بقالی و هر جای تولیدکننده و عرضه‌کننده می‌شود. جواب زیاد سخت نبود: رضایت هر دو طرف، تعامل و همکاری دو طرف؛ یا در واقع، بُرد طرفین . بله، نتیجهٔ برد ـ برد. همان چیزی که تقریباً همهٔ آدم‌های با انصاف در هر کجای دنیا دنبالش هستند.
نقطهٔ برد ـ برد کجاست؟ به‌نظر من نقطهٔ برد ـ برد نقطهٔ میانی در یک فاصله است که در این فاصله طرفین به مقدار مساوی سود می‌برند. البته پاسخ این سؤال را **جان نَش**، ریاضی‌دان نابغه و برجستهٔ آمریکایی و برندهٔ جایزهٔ نوبل اقتصاد داده است. نظریهٔ تعادل نش یعنی موقعیت‌هایی که در آن‌ها انتخاب شما وابسته به انتخاب دیگران است. با این رویکرد که هرکس آنچه را که برای خود و گروهش بهترین است، انجام دهد. جان نش نشان داد که اگر افراد در یک گروه همکاری کنند و نفع گروه را نیز در نظر داشته باشند، به بیشترین منافع و سود برای خود و گروه دست می‌یابند؛ مثل معمای زندانی و... (در رشد برهان شمارهٔ اسفند ۹۴).
هر بازی یک تعادل دارد که این تعادل می‌تواند، برد یا باخت باشد. هر بازی می‌تواند هر دو سر برد یا هر دو سر باخت باشد که به این نوع بازی، بازی با «مجموع صفر» (برنده و بازنده) می‌گویند یا می‌تواند مثل بازی شطرنج و بازی‌هایی باشد که هر دو طرف برد دارند که به این نوع بازی، بازی با «مجموع غیرصفر» می‌گویند.
خب برمی‌گردیم به بقالی و مشتری‌های آن. اگر فرض کنیم که حاج محمدآقا نماینده و تصمیم‌گیرندهٔ یک واحد فروش باشد و تک‌تک مشتری‌های طرف حساب با بقالی حاج محمدآقا در طرف دیگر نمایندگان واحدهای خریدکننده باشند، باید ببینیم که بین این دو واحد، یعنی واحد تصمیم‌گیرنده، عرضه‌کننده یا همان فروشنده و واحد تصمیم‌گیرندهٔ خریدار، فاصلهٔ تعامل و رضایت و بهترین نقطه چگونه محاسبه می‌شود.
فرض کنیم که مثلاً یکی از کالاهایی که در بقالی حاج محمدآقا عرضه می‌شود، شکر باشد. حاج محمدآقا این شکر را از عرضه‌کنندهٔ عمده در بازار بزرگ کیلویی ۲۵۰۰ تومان می‌خرد و برای حمل‌ونقل آن به بقالی‌اش برای هر کیلو ۱۰۰ تومان می‌پردازد. همچنین، با حساب هزینه‌های آب، برق، کارگر و هزینهٔ ثابت سرمایهٔ مکان بقالی‌اش، هر کیلو شکر برایش ۳۰۰۰ تومان درمی‌آید. خب اگر محمدآقا این شکر را کیلویی ۳۰۰۰ تومان بفروشد، سودی نمی‌برد. در واقع نقطهٔ سود حاج محمدآقا از ۳۰۰۰ تومان به بالاست. مثلاً اگر بخواهد ۱۰ درصد سود ببرد، باید هر کیلو شکر را ۳۳۰۰ تومان بفروشد و اگر بخواهد ۲۰ درصد سود ببرد، باید هر کیلو شکر را ۳۶۰۰ تومان بفروشد.

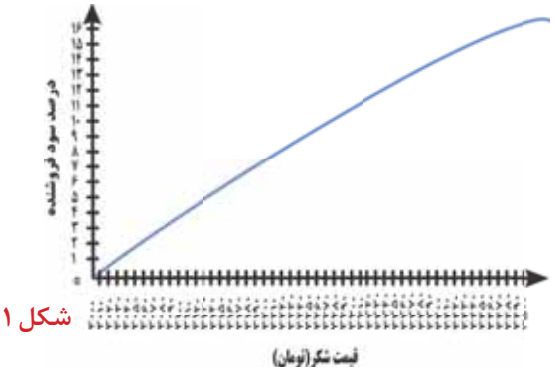
سؤال اساسی این است که حاج محمدآقا تا کجا می‌تواند قیمت و درصد سودش را بالا ببرد؟ این سؤال را باید مشتری پاسخ دهد. البته فراموش نشود سازمان حمایت از مشتری و قیمت‌گذاری حداکثر قیمتی را که فروشندگان نباید از آن تجاوز کنند مشخص کرده است. ولی ما در اینجا به دنبال این حداکثر نیستیم، بلکه می‌خواهیم ببینیم بهترین فاصله و نقطه‌ای که هم فروشنده و هم خریدار سود می‌برد و هر دو طرف برد می‌کنند، چه نقطه‌ای است و به چه عواملی بستگی دارد.

خب برگردیم به این سؤال که حاج محمدآقا تا کجا می‌تواند سودش را بالا ببرد. اگر به سراغ مشتری‌ها برویم، مشتری‌ها می‌گویند که یک کیلو شکر خوب و درجه یک را از بقالی و فروشندگان دیگر به‌صورت میانگین ۳۵۰۰ تومان می‌خرند. بنابراین هر بقالی که شکر درجهٔ یک را زیر قیمت ۳۵۰۰ عرضه کند، برای مشتری مناسب است و هرچه پایین‌تر با شرط درجه یک بودن شکر، برای مشتری مناسب‌تر است. پس تقریباً فاصلهٔ مناسب قیمت شکر بین فروشنده و خریدار بین ۳۱۰۰ تومان تا ۳۳۶۰ تومان و بهترین نقطه برای هم فروشنده و هم خریدار در این فاصله، نقطهٔ ۳۲۲۰ تومان است. این موضوع را در نمودارهای زیر می‌بینید.

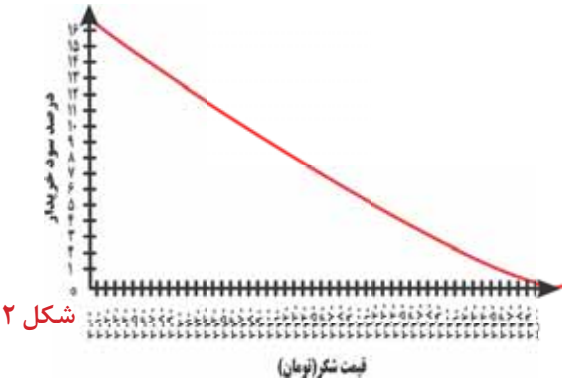
فاصلهٔ مطلوب فروشنده در شکل (۱) مشخص شده است که از ۳۰۰۰ تومان به بالا سودش شروع می‌شود و هرچه از ۳۰۰۰ تومان بیشتر می‌شود، سود بیشتری می‌برد. اما نکتهٔ مهم در اینجا نظر مشتری است. به این مفهوم که اگر قیمت از حدی بالاتر رود، دیگر حاج محمدآقا مشتری نخواهد داشت و عملاً بالا بردن قیمت از یک حد متعارف برای حاج محمدآقا ضرر مطلق است.

فاصلهٔ مطلوب خریدار نیز درشکل (۲) مشخص شده است. هرچه قیمت از ۳۵۰۰ تومان پایین‌تر باشد، برای مشتری مناسب‌تر و منفعت او در این خرید، بیشتر است. البته با این شرط که فروشنده ضرری نکند. (منظور همان حداقل قیمتی است که حاج محمدآقا برای کالاهایش تعیین می‌کند تا ضرر نکند.)

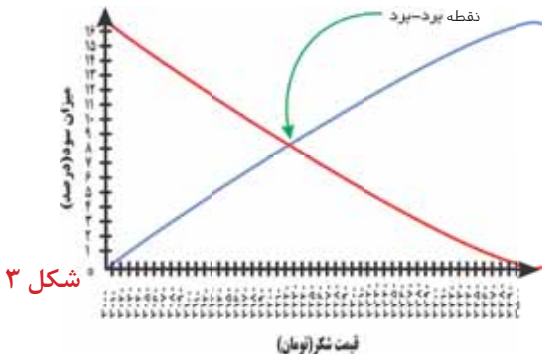
اشتراک این دو نمودار در شکل (۳) مشخص شده که این اشتراک همان نقطهٔ برد- برد خریدار و فروشنده است. در این شکل می‌بینید که دو نمودار مربوط به خریدار و فروشنده در نقطهٔ ۳۲۲۰ تومان یکدیگر را قطع می‌کنند. هرچه قیمت کالا از ۳۲۲۰ تومان کمتر شود، خریدار منفعت بیشتری می‌برد ولی فروشنده سودش کم می‌شود. برعکس؛ هرچه قیمت از ۳۲۲۰ تومان بیشتر باشد، منفعت خریدار کم شده و فروشنده سود بیشتری می‌برد. به همین دلیل نقطهٔ ۳۲۲۰ تومان، نقطهٔ بُرد-بُرد نام دارد.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

برهندسه قدم زدن

سپیده چمن‌آرا

عکس‌ها:
سپیده چمن‌آرا/کورش علیانی

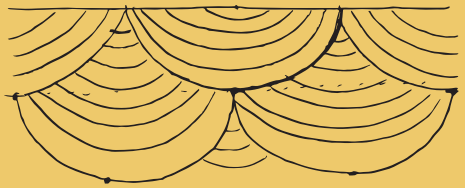
فلورانس/ایتالیا

وقتی در خیابان راه می‌روید، به زیر پاهای خود نگاهی بیندازید. نقش‌هایی که روی پیاده‌روها یا خیابان‌ها سنگ‌فرش شده‌اند، ساختارهای هندسی و نظم جالبی دارند. بعضی از آن‌ها به شکل کمان‌هایی از دایره‌ها هستند. در اولین نگاه شاید به نظر بیاید که در چیدن این سنگ‌فرش‌ها نظمی وجود نداشته است. اما جای خودتان را تغییر دهید و از زاویه‌های مختلف به آن نگاه کنید.

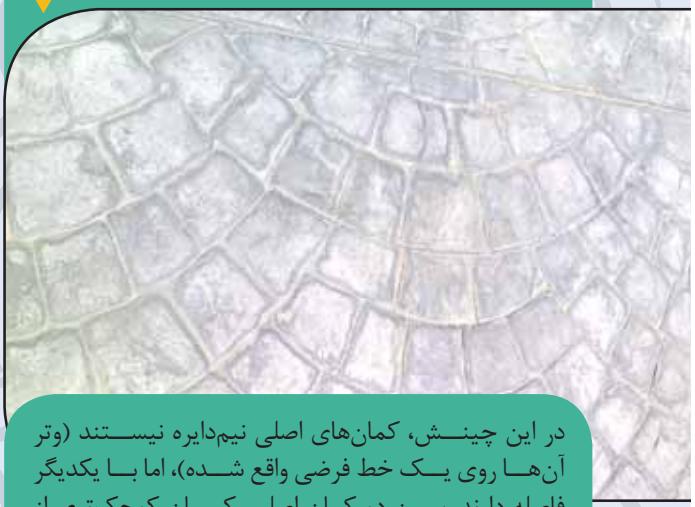
فلورانس/ایتالیا

سنگ‌فرش‌هایی که در آن‌ها کمان‌هایی از دایره با چیدن تکه‌های سنگ تشکیل می‌شوند، در شهرهای مختلف به صورت‌های مختلف است. ساختار هندسی آن‌ها با یکدیگر شباهت‌ها و تفاوت‌هایی دارد.

باکو / آذربایجان



تهران / ایران



در این چینش، نیم‌دایره‌های اصلی کامل هستند و با تمام شدن یک نیم‌دایره (که قطر آن روی یک خط فرضی واقع شده)، نیم‌دایرهٔ بعدی شروع می‌شود. نیم‌دایره‌های اصلی ردیف بعدی، از وسط کمان یک نیم‌دایره در ردیف قبل به وسط کمان نیم‌دایرهٔ پهلوی آن ترسیم شده است. داخل نیم‌دایره‌های اصلی با کمان‌های موازی، پُر می‌شود.

در این چینش، کمان‌های اصلی نیم‌دایره نیستند (وتر آن‌ها روی یک خط فرضی واقع شده)، اما با یکدیگر فاصله دارند. بین دو کمان اصلی، کمان کوچک‌تری از دایره (درواقع یک سوم همین کمان‌های اصلی) قرار دارد. به همین ترتیب، کمان‌های اصلی ردیف بعدی، از یک سوم یک کمان در ردیف قبل به یک سوم کمان پهلوی آن ترسیم شده اند و بین آن‌ها کمان کوچکی (که یک سوم کمان اصلی ردیف قبل است) قرار گرفته است. داخل کمان‌های اصلی با کمان‌های موازی، پُر می‌شود.

کارگران در شهر لویو (کشور اوکراین) در حال چیدن سنگ‌فرش خیابان هستند. شما الگوی هندسی این سنگ‌فرش را توصیف کنید.

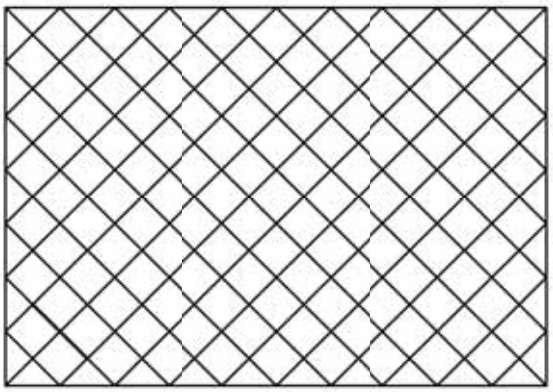
لویو / اوکراین

باکو / آذربایجان

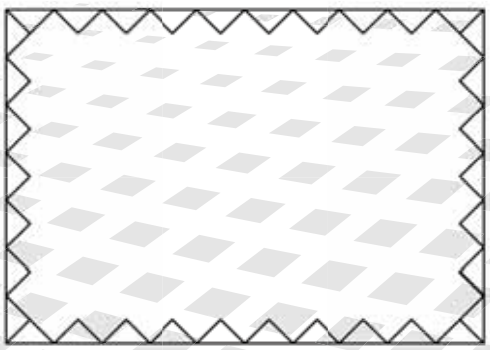
استاد مرتضی سنگ‌ها را اُریب می‌چیند

داود معصومی مهوار
عکاس: رضا بهرامی

پیش‌تر سنگ‌فرش سادهٔ کف اتاق‌ها را به کمک اوستا **حسین** بررسی کردیم. امروز به‌سراغ استاد **مرتضی** رفتیم. او داشت سنگ‌های کف اتاق را اُریب و با زاویهٔ ۴۵° کار می‌گذاشت. برخی سلیقه‌ها این را می‌پسندند.



شکل ۱



شکل ۲

چنان‌که در شکل ۱ می‌بینید، برخی از سنگ‌ها را از قطر نصف می‌کنیم تا قطر سنگ‌های نصفه را در کناره‌های اتاق کار کنیم. گیریم که سنگ‌های ما همگی مربع‌هایی به طول ۴۰cm باشند. پس برای آغاز کار باید طول قطر مربعی به ضلع ۴۰cm را پیدا کنیم. ساده‌ترین کار اندازه‌گیری است. شما هم مربعی به ضلع ۴۰cm بسازید. (راستی چه جوری؟) و طول قطر آن را اندازه بگیرید. طول این قطر کم و بیش ۵۶cm است. راه دیگری نیز هست. اگر از قضیهٔ **فیثاغورس** در مثلث‌های قائم‌الزاویه خبر دارید، تلاش کنید تا قطر مربع را ضلعی از یک مثلث قائم‌الزاویه ببینید و به کمک این قضیه طول آن را پیدا کنید.

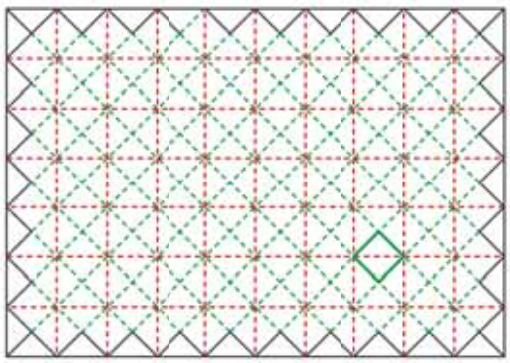
کار را ساده آغاز می‌کنیم. گیریم که طول اتاق شمارهٔ یک ۱۰×۵۶cm=۵۶۰cm و عرض آن ۷×۵۶cm=۳۶۲cm باشد. پس خیلی سرراست ده تا نصفه‌سنگ را در طول و هفت تا را در عرض اتاق کار می‌کنیم. ببینید.

همین جا استاد مرتضی می‌گوید روی کاغذ آغاز خوبی داشته‌ایم، ولی هشدار می‌دهد که در سنگ‌کاری واقعی نمی‌توان از دور تا دور اتاق آغاز کرد. او می‌گوید: «باید از پیش بدانید که چه می‌کنید و از یک سوی اتاق که کنار در نیست، آغاز کنید و سنگ‌فرش را به سمت در اتاق کامل کنید تا سنگ‌های تازه کار شده را لگد نکنید. به در اتاق که رسیدید، به سادگی می‌توانید از اتاق بیرون بروید.»

برای اینکه به قول استاد مرتضی «از پیش بدانیم که چه می‌کنیم»، سنگ‌ها را مطابق شکل ۱ کار بگذارید و مطمئن شوید که در ادامهٔ کار گره نخواهد خورد و سنگ‌فرش چنان‌که انتظار داریم، اجرا خواهد شد.

از شما چه پنهان، استاد مرتضی در کارگاه ساختمان به ما دلگرمی داد که کار گره نخواهد خورد. او گوشه‌های شکل ۲ را نشان داد و از ما خواست که با نگاه دقیق‌تر دریابیم که ادامهٔ

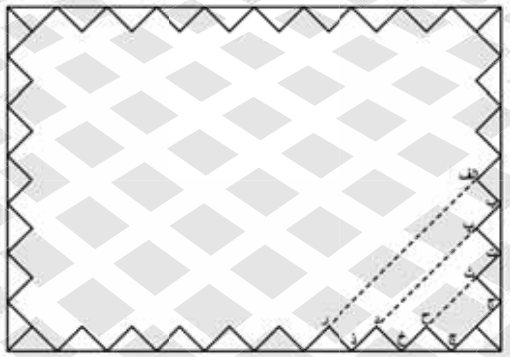
کار شدنی است. به گفتهٔ استاد مرتضی فکر کنید. برمی‌گردیم. یادتان هســـت طول و عرض اتاق شمارهٔ یک هر دو مضربی از طول و قطر سنگ‌ها هستند. پس اگر سنگ‌هایمان مربع‌هایی بزرگ‌تر (آن‌ها را اَبَرسنگ می‌نامیم)، بودند که ضلع هر یک به جای ۴۰cm برابر با ۵۶cm (طول قطر سنگ‌های فعلی) بود، به سادگی می‌توانستیم با ۷۰ اَبَرسنگ اتاق را فرش کنیم.



شکل ۳

خط‌چین‌های قرمزشـــکل ۳ گواه هستند. اما در همین شکل ۳ خط‌چین‌های سبز را ببینید. این‌ها قطرهای اَبَرسنگ‌ها هستند. این خط‌چین‌های ســـبز هم خوب چفت و جفت شـــده‌اند و با خط‌چین‌های قرمز نیز همرســـی دارند. خط‌چین‌های سبز نیز شبکه‌ای از مربع‌ها را می‌سازند که یکی از آن‌ها پررنگ‌تر شده است. این شبکهٔ سبزرنگ همان خواستهٔ ماست. پس سنگ‌های نصفه‌ای که در کناره‌ها کار شده‌اند، راهنمای ادامهٔ کار هستند و کار شدنی است.

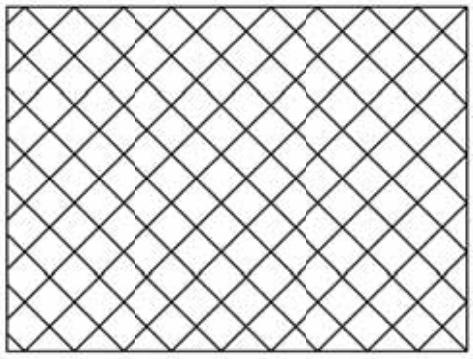
اما استاد مرتضی چه دیده بود؟



شکل ۴

به گوشهٔ پایین و دست راست در شکل ۴ نگاه کنید. استاد مرتضی می‌خواســـت ما ببینیم که چهارضلعی ث ج چ ح را می‌توان با دو ســـنگ فرش کرد و به همین ترتیب چهارضلعی‌های پ ت خ د و الف ب ذ ر را نیز می‌توان به ترتیب با ۴ و ۶ سنگ فرش کرد. این روند را می‌توان ادامه داد تا سنگ‌فرش اتاق تمام شود.

اکنون اتاق شـــمارهٔ ۲ را با طول ۹×۵۶cm+۱۶cm=۵۲۰cm و عرض ۷×۵۶cm=۳۹۲cm در نظر می‌گیریم. از یک گوشهٔ اتاق آغاز می‌کنیم و ادامهٔ سنگ‌فرش عاقبتی مانند شکل ۵ خواهد داشت.



شکل ۵

می‌بینید؟ در سمت راست اتاق، در کناره‌ها سنگ‌های درسته یا نصفه کار شـــده‌اند. ولی در سمت چپ نه سنگ درسته داریم و نه سنگ نصفه. زیبایی سنگ‌فرش از دسته رفته است!

دو چاره داریم:

۱. این قناســـی را در دو طرف سنگ‌فرش اتاق پخش کنیم تا سنگ‌فرش مقارن باشد.

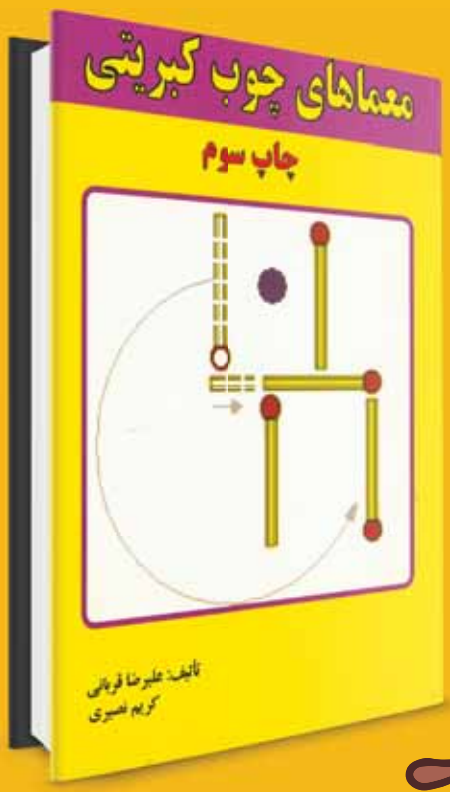
۲. دو ســـتون از سنگ‌ها را به‌طور ساده (نه اریب) در دو سوی سنگ‌فرش کار کنیم.

معماهای چوب کبریتی

معرفی کتاب

جعفر ربّانی

ـ معماهای چوب کبریتی
ـ تألیف: علیرضا قربانی، کریم نصیری
ـ ناشر: تیزهوشان برتر، چاپ سوم، ۱۳۹۲

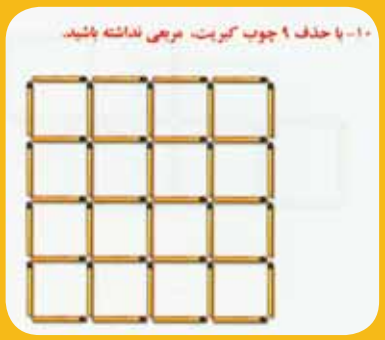


ریاضیات علم زیبایی است، اما این زیبایی مثل یک بلور درخشان چندوجهی است که از هر طرف بگردانند به شکلی تلألو می‌کند. روشن‌تر بگوییم، ریاضیات هم جنبهٔ علمی محض دارد، هم جنبه عملی دارد، هم جنبهٔ تاریخی دارد، هم جنبهٔ سرگرمی و معما دارد، هم جنبهٔ هوش دارد و... و هر کس ممکن است یکی از این جنبه‌ها را دوست داشته باشد؛ البته دانش‌آموزانی هم هستند که همهٔ جنبه‌های ریاضی را دوست دارند و خوشا به حالشان.
اگر شما از ریاضیات بیشتر به جنبه‌های سرگرمی و معمایی آن علاقه دارید این کتاب را حتماً دوست خواهید داشت. معماهای چوب کبریتی، این کتاب کوچک کم‌صفحه، همان‌طور که از اسمش پیداست، کتابی است دارای صد معما که همه با چوب کبریت ساخته یا حل می‌شوند و می‌توانند شما را به تنهایی یا با دوستانتان در خانه و مدرسه، مدت‌ها سرگرم کنند. البته جواب همهٔ معماها نیز در بخش دوم کتاب آمده است. بیش از این چیزی نمی‌گوییم و توجهتان را به چند نمونه از معماهای کتاب جلب می‌کنیم.

۲۵- الف) ۲ تا از چوب کبریت ها و دگمه را جا به جا کنید طوری که شکل معکوس افقی شود.

ب) ۲ تا از چوب کبریت ها و دگمه را جا به جا کنید طوری که شکل جهت خلش داشته باشد.

ج) ۵ تا از چوب کبریت‌ها و دگمه را جا به جا کنید طوری که شکل ۱۸۰ درجه دوران یابد.


۱۰- با حذف ۹ چوب کبریت، مربعی نداشته باشید.

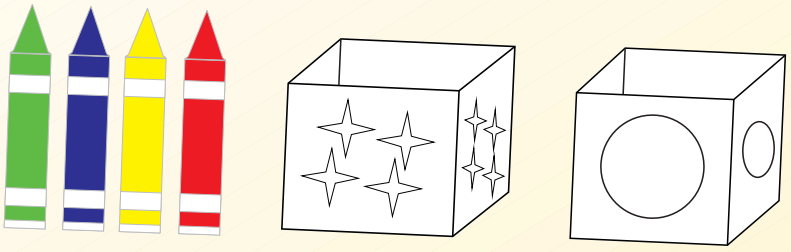
۳- با جابه‌جا کردن فقط ۱ چوب کبریت، خر را بچرخانید.

کی می‌تونه حل کنه؟!

آمنه ابراهیم‌زاده طاری

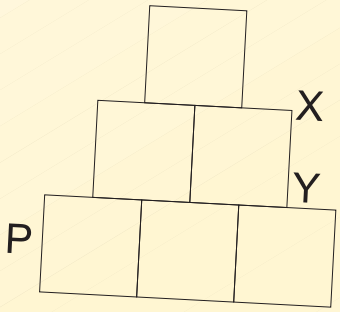
۱ عدد ۶۸ را بر عددی تقسیم کرده‌ایم و به باقی‌ماندهٔ ۴ رسیده‌ایم. مقسوم علیه چه عددهایی ممکن است باشد؟

۲ **میلاد** چهار مدادشمعی از چهار رنگ مختلف و دو جعبهٔ متفاوت دارد. او می‌خواهد مدادشمعی‌ها را در این دو جعبه بگذارد، طوری که هیچ‌یک از دو جعبه خالی نماند. به چند شکل می‌تواند این کار را انجام دهد؟



۳ **شادی** با ۱۸ هزار تومان، برای درست کردن گردنبند، ۱۰ سنگ به رنگ‌های قرمز، آبی و نقره‌ای خرید. قیمت هر سنگ قرمز، آبی و نقره‌ای به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۵ هزار تومان بود. شادی از هر رنگ سنگ، دست کم یک عدد خریده است. او چند سنگ قرمز خریده است؟

۴ شکل زیر از شش مربع هم‌اندازه تشکیل شده است و یک خط تقارن عمودی دارد. می‌خواهیم از نقطهٔ P خطی رسم کنیم، طوری که مساحت شکل را نصف کند. این خط پاره‌خط XY را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟



فی‌پی‌ها در پی‌پولیس

حسام سبحانی تهرانی
تصویرگر: سام سلماسی

همان‌طور که در شمارهٔ قبل دیدی، من ــ فی‌ربع‌پی، از نوادگان فی‌پی‌ها ــ به دنبال نشانه‌های اجدادم در تاریخ هستم.

نشانه‌های اجدادم در مصر را نشانت دادم، اما گمان کنم باور نکردی. حالا می‌خواهم تو را به «پی‌پولیس» (یا همان شهر پی) ببرم.

فی‌پی‌ها ساخت اینجا را به دستور فی‌پی‌یوش بزرگ آغاز کردند که پس از او پسرش، فی‌پی‌یار و نوه‌اش، فی‌پی‌شیر آن را گسترش دادند.

گمان نخست: تشنه‌شان بوده!

گمان دوم: گشنه‌شان بوده!

گمان سوم: دنبال کلاهخود محکم می‌گشتند!

متأسفانه هنوز ۲۰۰ سال از ساخت بنا نگذشته بود که انسان‌ها به فرماندهی اسکندر به آن حمله کردند هنوز علت حملهٔ اسکندر به پی‌پولیس و آتش زدن آن دقیقاً مشخص نشده است، اما حدسیاتی وجود دارد.

اسکندر

گمان چهارم: سردشان بوده، اما یکهو کنترل آتش از دستشان در رفته!

گمان پنجم: می‌خواستند به‌طور عملی با عدد پی آشنا بشوند.

گمان ششم: می‌خواستند از فی‌پی‌یار انتقام بگیرند.

گمان هفتم: (به‌نظر من درست‌ترین حدس): می‌خواستند ردپای فی‌پی‌ها را در تاریخ محو کنند.

پی‌پولیس

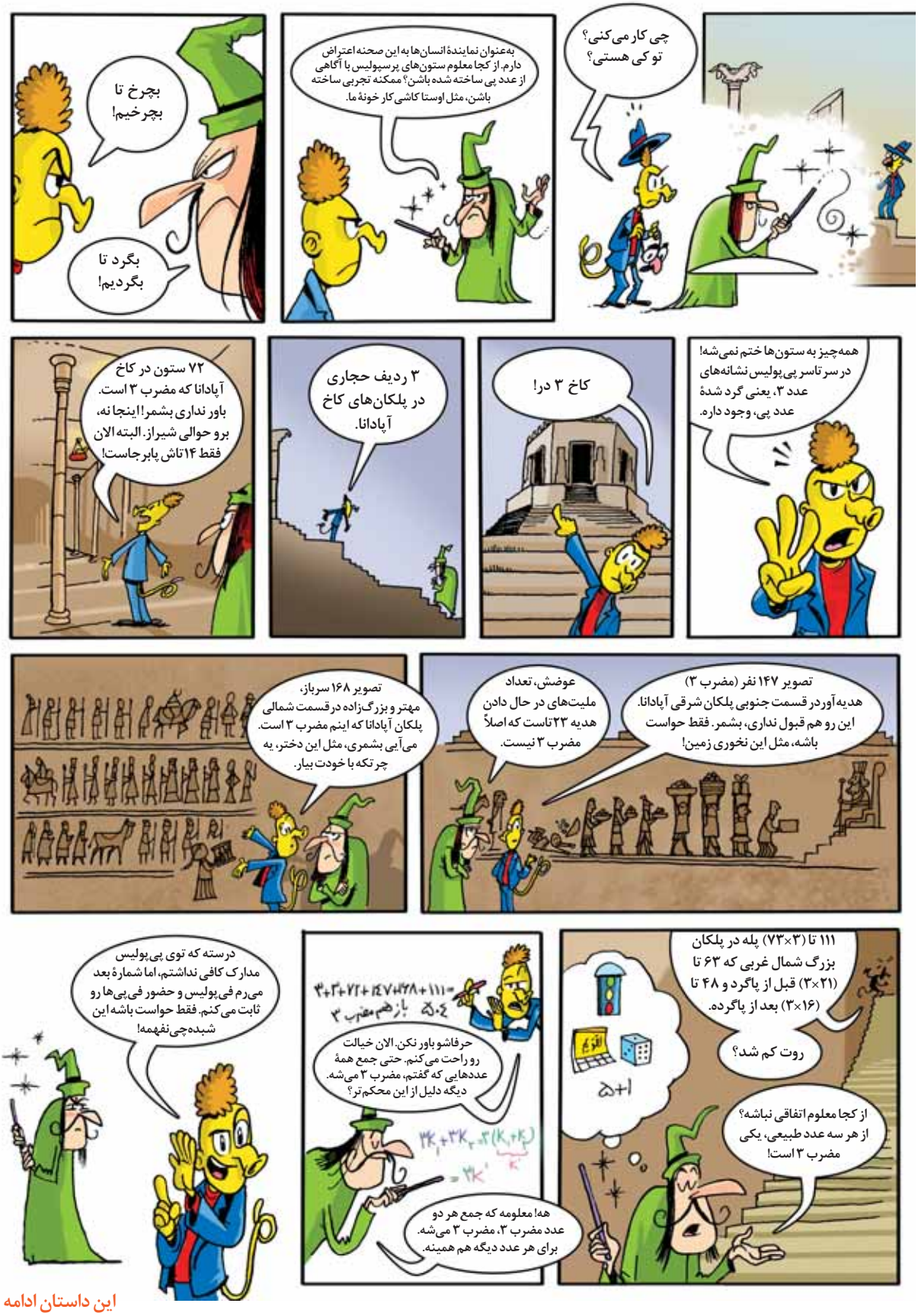
پرسپولیس

هرچند که آدم‌ها به این هم راضی نشدند و برای رد گم کنی بیشتر آن را به تخت جمشید تغییر دادند.

به تخت جمشید خوش آمدید

فی‌پی‌ها ابتدا مقاطع دایره‌ای را به چندین بخش مساوی تقسیم می‌کردند. بعد در داخل هر قسمت تقسیم شده، هلالی معکوس رسم می‌کردند تا مقاطع بسیار دقیق ستون‌های دایره‌ای را بیابند.

مهم‌ترین چیزی که می‌توانست آن‌ها را در یافتن ارتفاع و فشار وارد بر ستون‌ها و... کمک کند، اندازهٔ دور کمرشان، یعنی عدد پی بود.



این داستان ادامه دارد

بازی ۱۵

محدثه کشاورز اصلانی

این بازی تک نفره بازی بسیار مشهوری است که در جهان به «پازل ۱۵» معروف است. در اوایل دهۀ ۱۸۷۰ شخصی به نام **ساموئل لوید** آن را معرفی کرد و به سرعت به یک بازی بسیار مشهور و سرگرم‌کننده تبدیل شد. مردم با این پازل گیر افتادند و داستان‌های عجیبی از کسانی نقل شد که برای چندین ساعت کارشان را فراموش کردند و مشغول هل دادن قطعه‌های پازل بودند تا بالاخره تکمیل شود.

برای انجام این بازی به یک صفحۀ مربعی ۱۶ خانه‌ای (۴ در ۴) احتیاج دارید. (برای درست کردن این صفحه می‌توانید روی کاغذ یک جدول ۴ در ۴ بکشید) ضمناً به ۱۵ مربع کاغذی یا مقوایی کوچک که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۱۵ نوشته شده باشد هم احتیاج دارید. این کاغذهای مربعی باید ابعادی به اندازۀ خانه‌های جدول ۱۶ تایی داشته باشند؛ مثل جدول ۱.

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	

جدول ۱

جدول ۱ حالت مرتب شدۀ پازل ۱۵ است. اما کاری که قرار است شما بکنید این است که یکی از حالت‌های نامرتب را با حرکت دادن قطعه‌ها به حالت مرتب اولیه در بیاورید؛ مثلاً حالت جدول ۲ را.

۷	۵	۴	۲
۶	۳	۱۱	۱۲
۱	۱۴	۸	
۹	۱۳	۱۵	۱۰

جدول ۲

بازی یک قانون هم بیشتر ندارد! حق ندارید قطعه‌ها را از روی جدول بردارید، بلکه فقط می‌توانید با لغزاندن آن‌ها در جای خالی جدول حرکتشان دهید. مثلاً در جدول ۲ قطعه‌های با شماره‌های ۱۰، ۱۲ و ۸ را می‌توانید در جای خالی بلغزانید. اما بقیۀ قطعه‌ها را نمی‌توانید از جایشان بلند کنید و در جای خالی بگذارید.

خب بازی را چطور شروع کنیم؟
کمی بعد از همه‌گیر شدن بازی، آقای ساموئل لوید یک جایزهٔ ۱۰۰۰ دلاری برای کسی تعیین کرد که بتواند یکی از حالت‌های خاص پازل را حل کند. خیلی‌ها شروع کردند و بیش از پیش از کار و زندگی‌شان عقب افتادند! تا اینکه در سال ۱۸۷۹ ریاضی‌دانی آن‌ها را نجات داد و ثابت کرد که دیگر لازم نیست برای حل پازل تلاش کنند، چون این حالت خاص پازل هیچ‌وقت حل نمی‌شود. طبق این نظریه، از بین حدود ۲۰ تریلیون حالت ممکن برای این پازل، تنها نصف آن‌ها قابل حل شدن هستند و نصف دیگر هیچ‌گاه حل نمی‌شوند و در نهایت به صورت جدول ۳ درمی‌آیند.

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۵	۱۴	

جدول ۳

حالا می‌بینیم که آقای لوید بسیار باهوش بود و از قبل حواسش بود که ۱۰۰۰ دلارش را از دست ندهد!
حالا شما برای اینکه در بازی کردنتان گول آقای لوید را نخورید، می‌توانید بازی‌تان را این‌طور شروع کنید:

۱. قطعه‌ها را به ترتیب درست روی صفحه بچینید.

۲. از دوستتان یا یکی از اعضای خانواده خواهش کنید، قطعه‌ها را **فقط** با لغزاندن روی صفحه (و نه بلند کردنشان) به هم بریزند. بهتر است حدود ۳۰ تا ۴۰ حرکت انجام دهد تا بازی خیلی ساده نباشد.

۳. پازل را بگیرید و شروع کنید به حل کردنش.
در این حالت شما پازلی را حل می‌کنید که حتماً درست می‌شود. (چرا؟)

با چند تکه کاغذ پازلی را شروع کنید. فقط امیدوارم شما به سرنوشت آن داستان‌های عجیب گرفتار نشوید. ☺

بازی فکر کنید
کاکورو

محدثه کشاورز اصلانی
محمود داورزنی

شکل این پازل‌ها چیزی شبیه جدول زیر است:

	۱۳	۱۱	۲۶	۲۲
۲۵	۴		۸	
۲۱ / ۱۰		۵		۶
	۶	۱۱	۶	
۲	۱۵	۶		

کاکورو ۱

قوانین حل این پازل‌ها هم این‌ها هستند:

- بین اعداد ۱ تا ۹ هر عددی که بخواهید را می‌توانید در این جدول قرار دهید، به شرطی که:

۱. در هر سطر یا ستون، دو عدد برابر قرار نداشته باشند.
۲. مجموع اعدادی که در هر ردیف قرار می‌گیرند، برابر عددی است که در سمت چپ آن‌ها نوشته شده.
۳. مجموع اعدادی که در هر ستون قرار می‌گیرند، برابر عددی است که در بالای آن ستون نوشته شده.

اکنون بیایید با هم جدول (۱) را حل کنیم:

	۱۳	۱۱	۲۶	۲۲
۲۵	۴		۸	
۲۱ / ۱۰		۵		۶
	۶	۱۱	۶	
۲	۱۵	۶		

۱/ پر کردن این خانهٔ جدول خیلی راحت است!

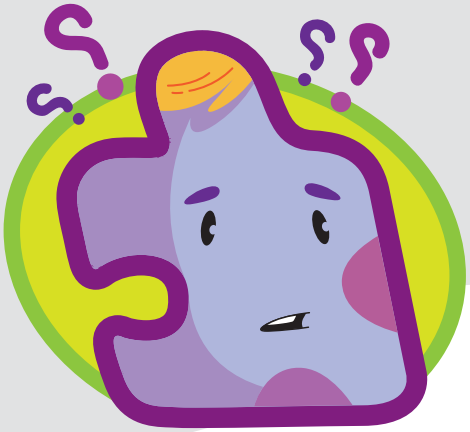
۲/ کامل کردن این ستون هم همین‌طور!

۳/ وقتی قسمت دوم را انجام دادیم و عدد ۳ را پیدا کردیم، کامل کردن این ردیف هم راحت است.

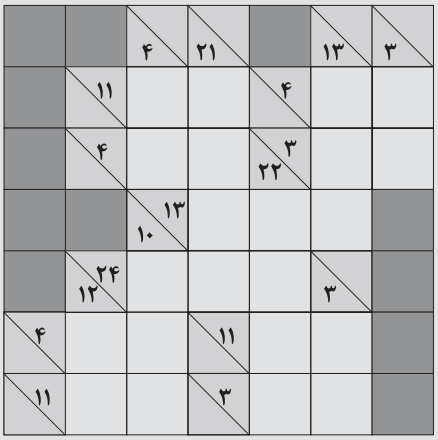
۴/ بعد از انجام مرحلهٔ (۳)، حالا می توانیم این ستون را به راحتی کامل کنیم.

به همین ترتیب می توانیم پازل را کامل کنیم:

	۱۳	۱۱	۲۶	۲۲
۲۵	۴	۶	۸	۷
۲۱ / ۱۰	۳	۵	۷	۶
۸	۶	۱۱	۶	۵
۲	۱۵	۶	۵	۴

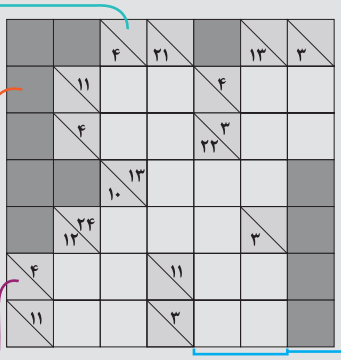


البته جدول‌های کاکورو همیشه این‌قدر هم ساده نیستند؛ مثل این جدول:



کاکورو ۲

همان‌طور که می‌بینید، در این جدول هیچ عددی نوشته نشده است، به جز همان اعداد مجموع ردیف‌ها و ستون‌ها. باید نقطهٔ شروع مناسبی را پیدا کنیم. احتمالاً اعداد کوچک، نقطهٔ شروع مناسبی باشند. بیایید با هم این پازل را حل کنیم:

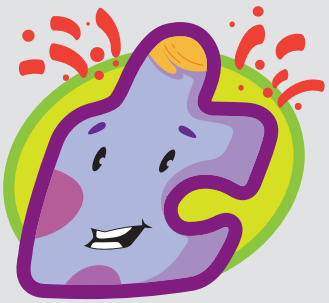


۱/ در این دو مربع قطعاً باید ۱ و ۳ قرار دهیم تا مجموع ۴ شود و قانون شمارهٔ ۱ هم نقض نشود. اما ۱ را در بالایی قرار دهیم یا در پایینی؟

۲/ با توجه به این سطر، متوجه می‌شویم که اگر در مربع بالایی ۱ را قرار دهیم، اینجا مجبور به استفاده از عدد ۱۰ می‌شویم که مجاز نیست (فقط اعداد ۱ تا ۹). پس در مربع بالایی باید عدد ۳ قرار بگیرد.

۳/ دقیقاً همان شرایط قبل در مورد این ردیف و ستون هم وجود دارد.

۴/ در مورد این چند مربع هم می‌توانیم از این موضوع استفاده کنیم. در ستون سمت راستی، اگر ۱ را بالا بگذاریم، برای ردیف بالایی مجبوریم عدد ۱۰ را قرار بدهیم. پس برای به وجود نیامدن این مشکل، باید عدد بالایی ستون سمت راست را ۲ بگذاریم.



۱/ حالا می‌توانیم این ستون را تکمیل کنیم.

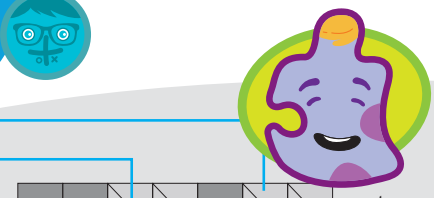
۲/ حالا این ردیف ۲ مربع دارد که باید جمعشان بشود ۱۷؛ چون ۲۴=۷+۱۷. این دو عدد ۸ و ۹ هستند. با توجه به اینکه در ستون وسطی ۸ نمی‌تواند قرار بگیرد، جای ۸ و ۹ معلوم می‌شود.

۳/ حالا می‌توانیم این ستون را هم تکمیل کنیم.

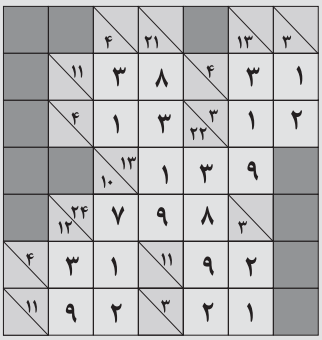
۴/ با معلوم شدن جای عدد ۸، این ستون را می‌توانیم تکمیل کنیم.

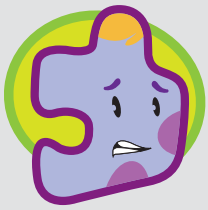
۵/ بعد از آن نوبت به تکمیل این ردیف می‌رسد.

۶/ و حالا برای تکمیل این ستون باید اعداد ۱ و ۳ را قرار دهیم. که چون ردیف پایینی مجموع ۳ دارد، قاعدتاً نباید ۳ را پایین بگذاریم.



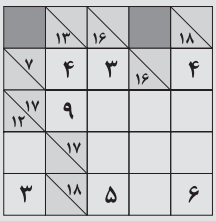
و در نهایت جدول به این شکل حل می‌شود.



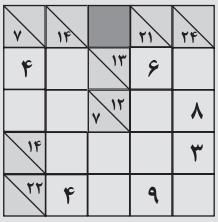


اکنون شما پازل‌های زیر را حل کنید:

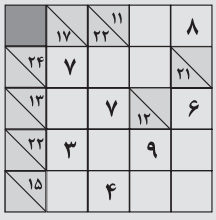
کاکورو ۳



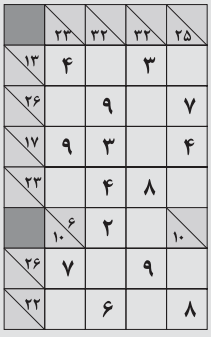
کاکورو ۴



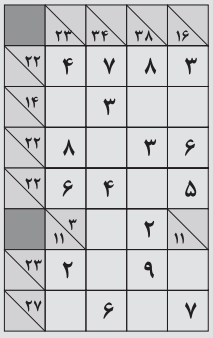
کاکورو ۵



کاکورو ۶



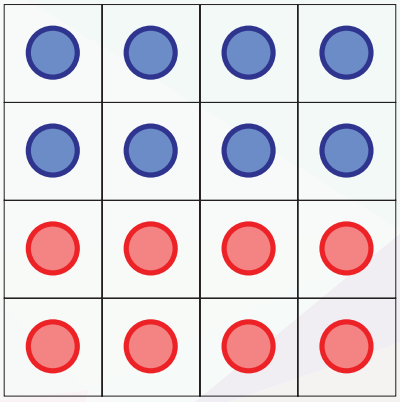
کاکورو ۷



۱۰

سبا دهقان

این بازی یک بازی دو نفره است. برای انجام آن به جدولی ۱۶ تایی (۴ در ۴) احتیاج دارید (که می‌توانید آن را روی یک کاغذ بکشید) و هشت لوبیا و هشت نخود.
صفحهٔ بازی به شکل ۱ است.

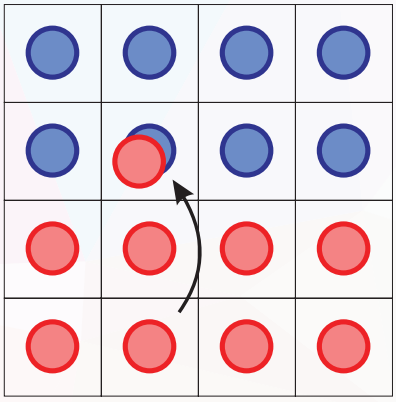


شکل ۱

دو نفر مقابل هم می‌نشینند. لوبیاها مهره‌های یک بازیکن و نخودها مهره‌های نفر مقابل است.

روش بازی

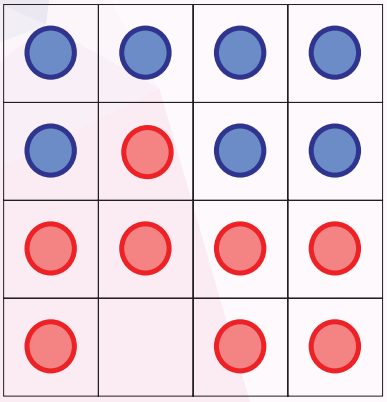
هر بازیکن در نوبت خودش **باید** از روی یکی از مهره‌های خودش بپـــرد و دقیقاً روی یکی از مهره‌های حریف فرود بیاید. در این حالت مهره‌ای که روی آن فرود آمده است، از بازی خارج می‌شود؛ مثلاً به صورت جدول ۲.



شکل ۲

KO

بعد از این حرکت یک مهره از صفحه خارج می‌شود و صفحهٔ بازی به صورت جدول ۳ درمی‌آید.



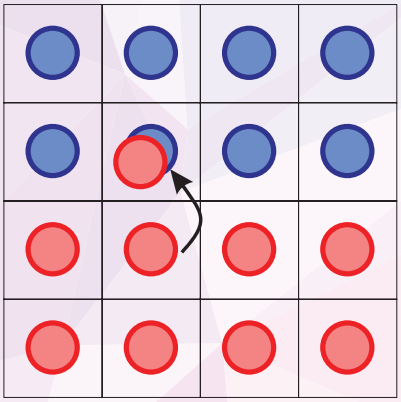
شکل ۳

دقت کنید:

• بازیکنان حق ندارند مهره‌شان را در یکی از خانه‌های خالی جدول فرود بیاورند، بلکه حتماً باید روی یکی از مهره‌های حریف فرود بیایند و آن مهره را از بازی خارج کنند.

• حرکت‌های اریب مجاز نیستند. بازیکنان فقط می‌توانند در جهت عمودی یا افقی حرکت کنند.

• هر بازیکن در هر حرکت حتماً باید از روی یکی از مهره‌های خودش بپرد و نمی‌تواند بدون فاصله روی مهره‌های حریف برود. مثلاً حرکتی که از جدول ۴ می‌بینید، مجاز نیست.



شکل ۴

پایان بازی

وقتی همهٔ مهره‌های یکی از بازیکنان از بازی بیرون برود و یا مهره‌هایش به شکلی روی صفحه باشند که نتوانند یکی از حرکات مجاز را انجام دهند، بازی تمام شده است.

پروژه‌های جئوجبرایی!

بازی ضلع و زاویه

فاطمه درویشی

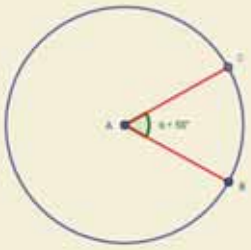
بچه‌های عزیز چقدر با زاویه‌های مرکزی و محاطی آشنا هستید و دربـــارهٔ اندازه‌های آن‌ها چه اطلاعاتی دارید؟ آیا اندازهٔ این دو نوع زاویه هیچ ارتباطی با هم دارند؟

آشنایی با زاویهٔ مرکزی

همان‌طور که در شکل می‌بینید، دایره‌ای به مرکز A داریم که دو نقطهٔ B و C روی محیط آن هستند. زاویهٔ BAC را که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شـــعاع‌هایی از دایره هســـتند، زاویهٔ مرکزی می‌نامند (تصویر ۱).

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر با اندازهٔ کمان روبه‌رو آن اســـت؛ یعنی داریم:

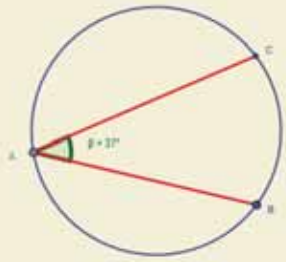
$$B\hat{A}C = \overset{\frown}{BC}$$



تصویر ۱

آشنایی با زاویهٔ محاطی

همان‌طور که در شـــکل می‌بینید، ســـه نقطهٔ C، B و A روی محیط دایره هســـتند. زاویهٔ BAC را که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره هستند، زاویهٔ محاطی می‌نامند (تصویر ۲).



تصویر ۲

اندازهٔ زاویه محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است؛ یعنی:

داریم:

$$B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم، انـــدازهٔ زاویهٔ محاطی نصف اندازهٔ زاویهٔ مرکزی است.

حال می‌خواهیم با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا هم مطالب بالا را نمایش دهیم. بررســـی دقیق‌تری روی آنچه در بالا گفته شد انجام دهیم و ببینیم آیا مطالب بالا کاملاً صحت دارد یا نه.

پروژه

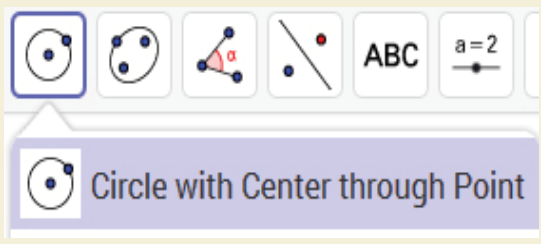
۱. با تایپ آدرس

«http://www.geogebra.org/geometry»

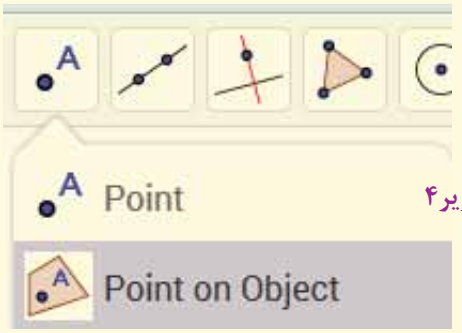
وارد محیطی از جئوجبرا شوید که مختص ترسیمات است.

۲. روی ابزار مخصوص رســـم دایـــره کلیک کنید (تصویر ۳) و به‌وسیلهٔ آن یک دایره بکشید.

تصویر ۳

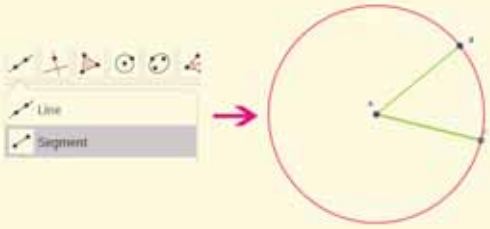


۳. با اســتفاده از ابــزار «Point of Object» (درج نقطه روی شکل) یک نقطه روی محیط دایره درج کنید (تصویر ۴)



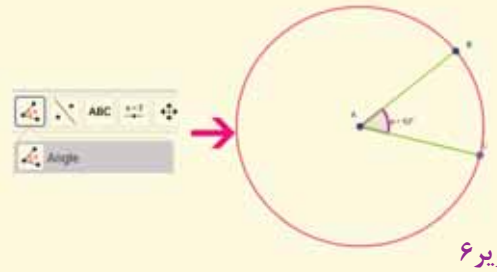
تصویر۴

۴. توسط گزینهٔ «Segment» (پاره‌خط) یک زاویهٔ مرکزی رسم کنید (مانند آنچه در تصویر ۵ می‌بینید).



تصویر۵

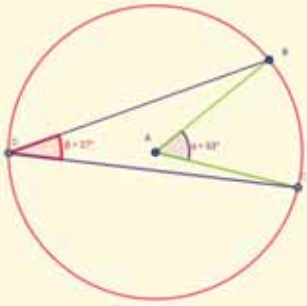
۵. روی گزینهٔ «Angle» کلیک کنید و ســپس به ترتیب نقاط C، A و B را انتخــاب کنید. انتخاب نقــاط باید خلاف جهت عقربه‌های ســاعت صورت گیرد؛ یعنی ابتدا نقطهٔ C و ســپس نقطهٔ B (تصویر ۶).



تصویر۶

حالا شما یک زاویهٔ مرکزی دارید که اندازهٔ آن توسط جئوجبرا مشخص شده است. با انتخاب می‌توانید نقاط C و B را روی دایره جابه‌جا کنید و زوایای متفاوتی به‌دست آورید.

۶. برای رسم زاویه محاطی مانند مرحلهٔ ۳ یک نقطه روی دایره ایجاد و همانند آنچــه در مرحله‌های ۴ و ۵ انجام دادید، عمل کنید تا تصویر ۷ به‌دست آید.



تصویر۷

۷. مشــاهده خواهید کرد که اندازهٔ زاویه محاطی نصف اندازهٔ زاویهٔ مرکزی اســت. با جابه‌جایی نقاط روی دایره و به دســت آوردن اندازه‌های متفاوت خواهید دید این رابطه همواره برقرار است.

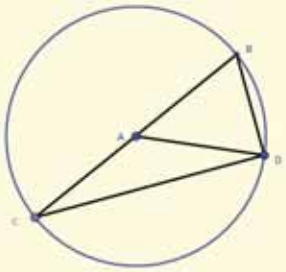
۸. بــرای زیبایی پروژهٔ خود در محیط جئوجبرا جســت‌وجو و تنظیمات متفاوتی (مانند رنگ، ســبک خط‌هــا، و...) را روی شکل‌ها پیاده کنید.

تمرین

۱. تصویر ۸ را در جئوجبرا رسم کنید و توسط آن موارد زیر را نشان دهید:

- اندازهٔ زاویهٔ CAB (زاویهٔ نیم‌صفحه) مســاوی با ۱۸۰ درجه است (علت آن را با استفاده از زاویهٔ مرکزی بررسی کنید).
- در هر مثلث متساوی‌الساقین اندازهٔ زاویه‌های پای ساق با هم برابر هســتند. همچنین، زاویهٔ قائمه تصویر را اندازه بگیرید و با استفاده از زاویهٔ محاطی علت آن را بررسی کنید.

۲. توسط جئوجبرا نشان دهید، مجموع زوایای روبه‌رو به هم در یک چهارضلعی محاط شــده در دایره، یعنی چهارضلعی‌ای که هر چهار رأس آن روی دایره است، برابر با ۱۸۰ درجه است و با استفاده از خاصیت زاویهٔ محاطی آن را بررسی کنیم.



تصویر۸

از خانــم زهره پندی که در آماده ســازی این مطلب همکاری کردند سپاسگزارم.

یکان‌اع

ماشین‌حساب دوست‌داشتنی من

آن موقع که من بچه‌تـــر بودم، توی همهٔ خانه‌ها ماشین‌حســـاب نبود. اگر هم بـــود، توی خانه و مدرسه خیلی اجازهٔ استفاده از آن داده نمی‌شد. ما باید همهٔ محاسبات را با همان شیوهٔ سنتی قلم و کاغذ انجـــام می‌دادیم. برای همین اگر یک‌وقت ماشین‌حساب می‌آمد دستم، با کلی هیجان شروع می‌کردم به وارد کردن اعـــداد و اعمال که البته محدود می‌شـــد به جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و منتظر نتایج عجیب این محاســـبات بودم... الان خب اوضاع خیلی برای شما بچه‌ها فرق کرده است و دسترسی به ماشین‌حساب شده مثل آب خوردن. بـــرای همین می‌خواهم توی هر قســـمت با عنوان «ماشین‌حساب دوست‌داشـــتنی من» نتایج جالبی را که می‌توانید با ماشین‌حســـاب، خودتان به دست بیاورید، برای شما عزیزانم بیاورم. البته دوست دارم که شما هم در مورد چرایی این نتایج بیشتر فکر کنید و اگر دلایلی برای درســـتی یا نادرستی ایده‌هایی که مطرح می‌شوند دارید، برای ما بفرستید.

با آرزوی شادی برای شما

در ادامهٔ آزمایش‌هایی که با ماشین‌حساب انجام دادیم، این بار هم می‌خواهیم یک کار هیجان‌انگیز بکنیم!

یک عدد به ماشین‌حساب وارد کنید؛ مثل ۴.

بعد آن را به‌علاوه ۲ کنید: ۶=۲+۴

دوباره جواب رو با ۲ جمع کنید: ۸=۲+۶

و این کار رو چندین و چند بار تکرار کنید...

چیزهای جالبی در مورد این اعداد می‌شه کشف کرد، اما...

یکـــی از چیزهایی کـــه توجه من رو به خـــودش جلب می‌کنه، یکان‌های عددهای تولید شده است.

یک بار دیگه عددهایی که ماشین‌حســـاب تولید می‌کنه و یکان اون‌ها رو با هم ببینیم:

شـــمارهٔ اعداد	اولین	دومین	سومین	چهارمین	پنجمین	ششمین	هفتمین	هشتمین	نهمین	دهمین	یازدهمین	دوازدهمین	سیزدهمین	
عدد	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴	۲۶	۲۸	...
یکان عدد	۴	۶	۸	۰	۲	۴	۶	۸	۰	۲	۴	۶	۸	....

ـــــداد را بگو!

شراره تقی‌دستجردی

سؤال اول: بچه‌ها، شـــما بدون اینکه از ماشین‌حساب استفاده کنید و یا اینکه جمع بزنید، می‌تونید بگید توی جدول دو تا عدد بعدی چه اعدادی هستند و یکان‌هاشون چند است؟
بله درسته. عدد بعد از ۲۸، عدد ۳۰ است با یکان ۰ و عدد بعدی ۳۲ است با یکان ۲.
جالبه مگه نه؟! **همین‌طور اعداد ۴، ۶، ۸، ۰ و ۲ دارند تکرار می‌شوند.**

ســـؤال دوم: خوب حالا که این الگو رو پیدا کردید سریع به من بگید ببینم، یکان پنجمین عدد جدول چند می‌شه؟
آفرین! درســـته! عدد پنجم جدول، ۱۲ است که یکان آن ۲ می‌شه.

سؤال سوم: حالا سریع بگید ببینم، یکان عدد دهم جدول چند است؟
بله، درســـته! عدد دهم جدول ۲۲ اســـت که یکان آن هم ۲ می‌شه.

سؤال چهارم: بچه‌ها یکان پانزدهمین عدد جدول چه عددی می‌شه؟
بلـــه، آفریـــن! همون‌طور کـــه در ســـؤال اول گفتیم، پانزدهمین عدد ۳۲ است که یکان آن هم ۲ می‌شه.

سؤال پنجم: خب فکر کنم شما هم تا الان به کشف بزرگ من رســـیدین و احتمالاً می‌تونید بدون اینکه اعداد رو در جدول اضافه کنید، خیلی سریع بگید که یکان بیستمین عدد جدول چند می‌شه. خیلی خوبه.
من می‌دونستم که شـــما می‌تونید به راحتی جواب بدید. بله باز هم عدد ۲.
یکان‌های اعـــداد، پنجم، دهم، پانزدهم، بیســـتم، بیست و پنجم، سی‌ام و... همگی ۲ است.
بچه‌های خوب، ســـؤال‌هایی که می‌شـــه در مورد این جدول پرسید، زیاد هســـتند. اما من فعلاً تا همین جا تمامش می‌کنم و در یادداشت بعدی، سؤال‌های دیگری رو مطرح می‌کنم.
خیلی خوش‌حال می‌شـــم که الگوهای جالبی رو که در جدول کشـــف می‌کنید، برای ما هم بفرستید تا با نام شما روی سایت مجله بذاریم.

پاسخ کی می‌تونه حل کنه؟!

آمنه ابراهیم‌زاده طاری

۱ پاسخ: ۸، ۱۶، ۳۲ و ۶۴

۲ پاسخ: ۱۴

راه‌حل: تقسیم مداد‌شمعی‌ها بین جعبه‌ها به یکی از شکل‌های زیر است:

- آبی/ سبز، قرمز، زرد ـ سبز/ آبی، قرمز، زرد
- قرمز/ آبی، سبز، زرد ـ زرد/ آبی، قرمز، سبز
- آبی، سبز/ زرد، قرمز ـ آبی، زرد/ سبز، قرمز
- آبی، قرمز/ زرد، سبز

این‌ها شدند هفت حالت، ولی دو جعبهٔ چپ و راست با هم فرق دارند. پس در هر یک از حالت‌های بالا، می‌توانیم جای جعبه‌ها را عوض کنیم و به یک حالت جدید برسیم.

۳ پاسخ: ۵ تا.

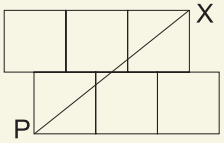
راه‌حل: شادی حتماً دست کم یک سنگ از هر رنگ خریده است. پس می‌توانیم از هر رنگ یکی را کنار بگذاریم. قیمت این سه سنگ با هم ۸ هزار تومان است. در این صورت، به جز این سه سنگ، او هفت سنگ به ارزش ۱۰ هزار تومان خریده است.

● امکان ندارد دو تا از این هفت سنگ نقره‌ای باشند. چون در آن صورت ارزش این دو سنگ به تنهایی ۱۰ هزار تومان می‌شود.

● امکان ندارد یکی از این هفت سنگ نقره‌ای باشد. چون در آن صورت ارزش این سنگ و شش سنگ دیگر بیشتر از ۱۰ هزار تومان می‌شود. پس بین این هفت سنگ، هیچ‌کدام نقره‌ای نیست. اگر تمام این سنگ‌ها قرمز باشند، قیمت آن‌ها ۷ هزار تومان می‌شود که کمتر از ۱۰ هزار تومان است. اگر به جای یک سنگ قرمز، یک سنگ آبی بگذاریم، قیمت هزار تومان بیشتر می‌شود. پس برای اینکه به ۱۰ هزار تومان برسیم، باید به جای سه تا از هفت سنگ، سنگ آبی بگذاریم. پس بین این هفت سنگ، سه تا آبی و چهار تا قرمز است. یک سنگ قرمز را هم اول کار کنار گذاشته بودیم، پس شادی کلاً ۵ سنگ قرمز خریده است.

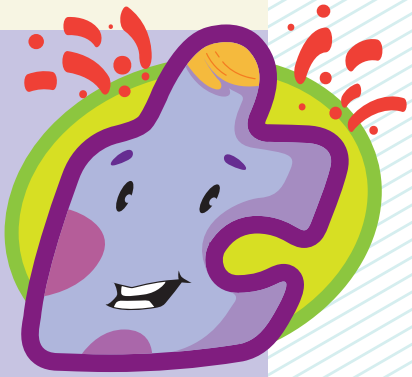
۴ پاسخ: نقطهٔ X

راه‌حل: خطی که از P رسم می‌کنیم، مربع بالایی را قطع نمی‌کند و مربع بالایی کاملاً در یک طرف خط قرار می‌گیرد. پس می‌توانیم مربع بالایی را قبل از کشیدن خط، مانند شکل زیر جابه‌جا کنیم و آن را به سمت چپ ردیف دوم انتقال دهیم. در این صورت به راحتی دیده می‌شود که خط مورد نظرمان از نقطهٔ X می‌گذرد.



پاسخ پازلی فکر کنید

از صفحه ۲۵ مجله



کاکورو ۳

	۱۳	۱۶		۱۸
۷	۴	۳	۱۶	۴
۱۷ / ۱۲	۹	۲	۱	۵
۹		۱۷	۶	۸
۳		۱۸	۵	۷

کاکورو ۴

۷	۱۴		۲۱	۲۴
۴	۳	۱۳	۶	۷
۳	۲	۱۲ / ۷	۴	۸
۱۴	۵	۴	۲	۳
۲۲	۴	۳	۹	۶

کاکورو ۵

	۱۷	۱۱ / ۲۲	۳	۸
۲۴	۷	۹	۸ / ۲۱	
۱۳	۶	۷	۱۲	۶
۲۲	۳	۲	۹	۸
۱۵	۱	۴	۳	۷

کاکورو ۶

	۲۳	۳۲	۳۲	۲۵
۱۳	۴	۱	۳	۵
۲۶	۸	۹	۲	۷
۱۷	۹	۳	۱	۴
۲۳	۲	۴	۸	۹
	۶ / ۱۰	۲	۴	۱۰
۲۶	۷	۸	۹	۲
۲۲	۳	۶	۵	۸

کاکورو ۷

	۲۳	۳۴	۳۸	۱۶
۲۲	۴	۷	۸	۳
۱۴	۵	۳	۴	۲
۲۲	۸	۵	۳	۶
۲۲	۶	۴	۷	۵
	۳ / ۱۱	۱	۲	۱۱
۲۳	۲	۸	۹	۴
۲۷	۹	۶	۵	۷

ریاضی دلپذیر با عمو ریاضی

اعداد جادویی

هوشنگ شرقی

باز هم شبی دیگر، مهمانی دیگر و من بودم و بچه‌ها که از من نمایشی می‌خواستند. رو به آن‌ها که دورم جمع شده بودند، گفتم: «امشب می‌خوام همه‌تون رو تو بازی شرکت بدم!»

رضا گفت: «پس باید خیلی هیجان‌انگیز باشه!»

من ادامه دادم: «البته، خواهید دید که خیلی جالبه» و با کمی مکث گفتم: «همه‌تون یه ورق کاغذ و یه خودکار آماده کنید.» کمی بعد هرکدام از بچه‌ها با یک برگ کاغذ و یک خودکار در دست آماده بودند. پس رو به آن‌ها گفتم: «هر کس یه عدد پنج رقمی دلخواه روی کاغذش بنویسه. فقط تمام رقم‌های عددتون یکسان نباشن. مثلاً عدد ۲۲۲۲۲ رو انتخاب نکنید. یعنی تو پیغمبرا **جرجیس** رو انتخاب نکنید! البته عددتون می‌تونه دو تا یا سه تا از رقم‌هاش تکراری باشه.»

بچه‌ها به سرعت عددهایشان را انتخاب کردند و روی کاغذ نوشتند و وقتی کارشان تمام شد، گفتم: «حالا مقلوب عددی رو که انتخاب کردید، زیر اون بنویسید. مقلوب یک عدد، عددیه که از برعکس کردن جای رقم‌های اون به دست می‌یاد. مثلاً اگه عدد ۳۵۸۱۲ رو انتخاب کردین, مقلوبش می‌شه: ۲۱۸۵۳»

بچه‌ها که با توضیح من متوجه موضوع شده بودند، شروع به نوشتن کردند که یکدفعه صدای **سهراب** بلند شد: «عمو ببخشید، اگه رقم یکان عدد من صفر باشد، مثلاً عدد ۲۳۵۸۰ باشه، اون‌وقت مقلوبش چی می‌شه؟!»

من گفتم: «خُب می‌دونید که رقم صفر در سمت چپ بی‌ارزشه، پس مقلوبش در واقع یه عدد چهاررقمی می‌شد. یعنی عدد تو می‌شه: ۸۵۳۲، درسته؟»

و او پس از تأیید حرفم سرش را پایین انداخت و کارش را ادامه داد. کمی بعد گفتم: «حالا اگه کارتون تموم شده، از این دو

عدد، عدد بزرگ‌تر رو از عدد کوچک‌تر کم کنید و تفاضلشون رو به دست بیارید.»

رضا فریاد زد: «عمو می‌تونیم از ماشین‌حساب استفاده کنیم؟»

گفتم: «آره اگه تنبلی‌تون می‌یاد دو تا عدد پنج رقمی رو از هم تفریق کنید، می‌تونید از ماشین‌حساب هم استفاده کنید؛ البته اگه طرز کارشو بلد باشید!»

همه خندیدیم و کمی بعد بچه‌ها کارشان تمام شده بود. گفتم: «حالا هرکس، دور یکی از رقم‌های عدد حاصل از تفریق، به دلخواه یه دایره بکشه و اون رقم رو این‌جوری از بقیه جدا کنه. انتخاب این عدد هم دست خودتونه.»

همه این کار را کردند. بعد گفتم: «خُب حالا نوبت منه!» و از **علی** که جلوتر از همه نشسته بود خواستم، همهٔ رقم‌های عدد حاصل از تفریق را، به جز رقمی که دور آن دایره کشیده است، به من بگوید و او گفت: «هشت، نه، صفر و دو.»

من بلافاصله گفتم: «عددی که دورش دایره کشیدی، هشته؟»

او با تعجب گفت: «آره، از کجا فهمیدید؟!» بعد رو به رضا گفتم: «تو بگو رقم‌های عدد آخرت که دورشون خط نکشیدی...»

و رضا گفت: «پنج، چهار، سه، دو.»

من گفتم: «اون یکی هم چهاره، درسته؟»

او هم با تعجب گفت: «درسته!»

از دخترم **ترانه** که پرسیدم، گفت: «پنج و چهار و هفت و دو»

و من گفتم: «رقم آخر، صفره؟» و او گفت: «نه بابا!»

من فوری گفتم: «پس نهه؟» و او گفت: «بله درسته!»

به همین ترتیب توانستم رقم‌های چند نفر دیگر را هم حدس بزنم. چند تا از بچه‌ها که هیجان‌زده شده بودند گفتند: «عمو راهش چیه، برامون بگو!»

گفتم: «باشه می‌گم. ببینید بچه‌ها، یکی از راه‌های برخورد با یک مسئله، کوچک کردن اونه.»

سهراب گفت: «یعنی مثلاً بیاییم با یه عدد کوچک‌تر، مثلاً دورقمی همین کارو بکنیم؟» گفتم: «آفرین، درست گفتی! یه عدد دورقمی را از مقلوبش کم کن و این کار رو با چند عدد دیگه امتحان کنید.»

بچه‌ها مشغول شدند و دوباره سهراب گفت: «مثلاً بیست و چهار، مقلوبش چهل و دو می‌شه و ۱۸=۲۴-۴۲، یا اینکه: ۳۶=۱۵-۵۱ و...»

بهزاد ادامه داد: «همهٔ این تفریق‌ها، بر عدد ۹ بخش‌پذیرن.»

گفتم: «آفرین! درست حدس زدی. در حالت کلی هم این رو می‌شه ثابت کرد. می‌دونید که مقدار هر عدد دو رقمی برابره با ده برابر رقم دهگان به اضافهٔ رقم یکان. مثلاً ۳۶ برابره با سه تا ده به اضافهٔ شش تا یک. بعد روی تختهٔ وایت‌بردی که رو دیوار نصب شده بود، نوشتم:

$$\overline{ab} = ۱۰a + b$$

$$\overline{ba} = ۱۰b + a$$

و توضیح دادم که منظورم از $\overline{ab}$ عددی دو رقمی است که رقم دهگان آن **a** و رقم یکان آن b است و نه a×b. بعد ادامه دادم: «حالا فرض می‌کنیم عدد بزرگ‌تر $\overline{ab}$ باشد، پس داریم:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (۱۰a + b) - (۱۰b + a)$$

$$= ۱۰a + b - ۱۰b - a = ۹a - ۹b = ۹(a - b)$$

و می‌بینید که این حاصل همیشه مضرب نهه!
در حالت کلی هم این موضوع درسته و می‌شه ثابت کرد که تفاضل هر عدد از مقلوب اون همیشه مضرب نهه و بر نه بخش‌پذیره. حالا بگید، چه عددی بر نه بخش‌پذیره؟»
رضا فوری گفت: «عددی که مجموع رقم‌هایش به نه بخش‌پذیر باشه!» گفتم: «کاملاً درسته من از شما خواستم که یه عدد پنج رقمی رو از مقلوبش کم کنید که حاصل یه عدد پنج رقمی و گاهی چهاررقمی می‌شد. این عدد مضرب نهه، پس مجموع رقم‌هاش مضرب نهه. من همهٔ رقم‌های این عدد رو به جز یکی، از شما پرسیدم. بعد هم توی ذهنم اونا رو با هم جمع می‌کردم. حالا کافی بود اولین عدد مضرب نه بعد از این مجموع رو در نظر بگیریم و اون رو از این مجموع کم کنم، تا عددی رو که شما جدا کردین پیدا کنم! به همین سادگی!
مثلاً وقتی علی چهار عددش رو گفت: «هشت، نه، صفر و دو، من اون‌ها رو با هم جمع کردم: ۱۹=۲+۰+۹+۸. اولین عدد مضرب نه بعد از ۱۹ چیه؟» بچه‌ها گفتند: «۲۷» و من گفتم: «۲۷ منهای ۱۹ می‌شه هشت و این همون عددی بود که علی دورش خط کشیده بود!»
سهراب پرسید: «پس چرا در مورد ترانه اشتباه کردید؟»
گفتم: «آهان، نکتهٔ خوبی بود! فقط یه مشکل هست. اگه مثل ترانه، عددهایی که اعلام می‌کنین، مجموعشون، خودش مضرب نه باشه در این صورت رقم آخر می‌تونه صفر یا نه باشه که من شانسی یکی‌شون رو می‌گم. اگه درست بود که هیچ، وگرنه اون یکی جوابه!»
بچه‌ها راضی از این بازی که منطق ریاضی آن را هم فهمیده بودند، مشغول امتحان کردن عددهای مشابه شدند. همین موقع دوباره سهراب گفت: «عمو در مورد تاریخچهٔ این موضوع هم بگید، درست مثل دفعه‌های قبل» و من توضیح دادم:

تاریخچهٔ موضوع

دیوفانتوس، ریاضی‌دان یونانی قرن سوم قبل از میلاد، در زمینهٔ مباحث نظریهٔ اعداد کارهای قابل توجهی انجام داد و مسائلی شبیه این را برای نخستین بار مطرح کرد. در کارهای ریاضی‌دانان ایرانی، همچون **خوارزمی** و **فخری** و **جمشید کاشانی** نیز در زمینهٔ ویژگی اعداد و مقلوب آن‌ها مطالب و مسائلی دیده می‌شود، اما این سرگرمی را به‌طور خاص برای نخستین بار، **مارتین گاردنر**، ریاضی‌دان معاصر آمریکایی، در یکی از کتاب‌هایش مطرح کرد.

داستان ادامه دارد!

قبل از آنکه بچه‌ها پراکنده شوند، به آن‌ها گفتم: «می‌خوام یه تحقیق در مورد همین تفاضل عددهای سه رقمی بکنید و ببینید چه ویژگی‌هایی داره. سعی کنید یه سرگرمی از توی این موضوع دربیارید. دفعهٔ بعد نوبت یکی از شماست که به جای من برنامه رو شروع کنه!»
با صدای خوش دعوت صاحب‌خانه به شام، همگی رو به اتاق پذیرایی هجوم بردیم!

خانوادهٔ جغدهای چاق و لاغر

هُدی ماهور

برای ساخت یک خانوادهٔ جغد، به مقداری پارچه رنگی، قیچی و نخ و سوزن، مقوا، پنبه یا الیاف مصنوعی و چند دکمهٔ سیاه احتیاج دارید. اگر از دو رنگ پارچه استفاده کنید، جغدهای زیباتری خواهید داشت. مراحل ساخت یک جغد نه‌چندان چاق و نه‌چندان لاغر در ادامه آمده است:

۱. ابتدا روی هر دو پارچه بخشی از یک دایره به شعاع ۲۰ سانتی‌متر را رسم کنید؛ روی یکی از پارچه‌ها قطاعی با زاویهٔ ۸۰ و روی پارچهٔ دیگر قطاعی با زاویهٔ ۴۰ درجه بکشید.

۲. روی پارچه‌ها را به سمت هم قرار دهید. ابتدا یکی از شعاع‌های قطاع بزرگ‌تر را به یکی از شعاع‌های قطاع کوچک‌تر بدوزید. سپس همین کار را برای دو شعاع دیگر دو قطاع انجام دهید.

۳. پارچهٔ دوخته شده را برگردانید. حالا یک مخروط دارید از دو رنگ پارچه.

۴. مخروط را طوری قرار دهید که قطاع کوچک‌تر در جلو قرار گیرد و دو طرفش به مقدار برابر از پارچهٔ رنگ دیگر دیده شود. کمی از بالای مخروط را تا کنید و نوک آن را به پارچهٔ جلویی کوک بزنید. حالا سر جغد شما درست شده است. می‌توانید در همین مرحله چشم‌های جغدتان را هم بدوزید.

۵. داخل شکم جغد را از پنبه یا الیاف مصنوعی پر کنید. بعد با نخ و سوزن، دور تا دور پایین جغد را کوک بزنید. لازم نیست کوک‌ها خیلی ریز باشند.

۶. قبل از گره زدن نخ، تا جایی که می‌توانید نخ را بکشید تا شکم جغد کاملاً بسته شود و پنبه‌ها از داخل شکمش خارج نشوند. حالا باید نخ را گره بزنید.

۷. روی مقوا دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر و روی پارچه دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر ببرید. دایرهٔ مقوایی را وسط دایرهٔ پارچه‌ای بگذارید، دور تا دور پارچه را کوک‌های درشت بزنید و مانند مرحلهٔ ۶، قبل از گره زدن نخ را بکشید تا دایرهٔ پارچه‌ای دورتادور مقوا را بگیرد.

۸. حالا فقط باید دایرهٔ درست شده از مرحلهٔ قبل را به پایین بدن جغدتان وصل کنید. جغدتان آماده است!

قرار بود خانواده‌ای از جغدها بسازیم، نه فقط یکی. برای ساختن جغدهای دیگر، مراحل بالا را تکرار کنید. فقط در مرحلهٔ ۱، زاویهٔ قطاع‌ها را تغییر دهید. با این کار، مخروط‌های متفاوتی به دست می‌آورید. این مخروط‌های متفاوت، چاقی و لاغری جغدهایتان را تغییر می‌دهند. برای درست کردن جغدهای لاغر، از زاویه‌های کمتر استفاده کنید و برای درست کردن جغدهای چاق، از زاویه‌های بزرگ‌تر.

راستی با تغییر زاویه‌ها، قد جغدها هم کمی تغییر می‌کند، ولی نه آن‌قدر زیاد که به چشم بیاید. پس اگر می‌خواهید جغدهای قدبلندتری داشته باشید، بد نیست که شعاع قطاع‌ها را هم تغییر دهید.

چندوجهی‌های منتظم

دست‌سازه‌های ریاضی

محبوبه رمضانی
حمید قراکوزلی

همهٔ شما چند وجهی‌های منتظم را می‌شناسید. منتظم بودن یک چندضلعی از برابر بودن عناصر سازندهٔ آن، یعنی زوایا و اضلاع نتیجه می‌شود. حال می‌خواهیم با استفاده از چندضلعی‌های منتظم، با ابزار سادهٔ کش و نی چندوجهی بسازیم.

اما چه تعریفی برای چندوجهی منتظم داریم؟ چندوجهی شکلی فضایی است که هر وجه آن یک چندضلعی منتظم باشد. همهٔ وجه‌های آن با هم برابرند و در هر رأس آن، تعدادی مساوی از وجه‌ها و ضلع‌ها به هم می‌رسند. برای مثال، مکعب یک شش‌وجهی منتظم است، به طوری‌که شش وجه آن مربع‌هایی هم‌اندازه هستند.

با این تعریف اگر قرار باشد یک چندوجهی منتظم بسازیم، هریک از وجه‌های آن باید یک چندضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، پنج‌ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم و...) باشد. حال باید این موضوع را بررسی کنیم که آیا چندوجهی منتظم را که هر وجه آن یکی از شکل‌های فوق باشد می‌توان ساخت؟ برای بررسی این مطلب، از کنج‌های چندوجهی شروع می‌کنیم.

برای ساختن یک کنج، حداقل چند صفحه لازم است؟

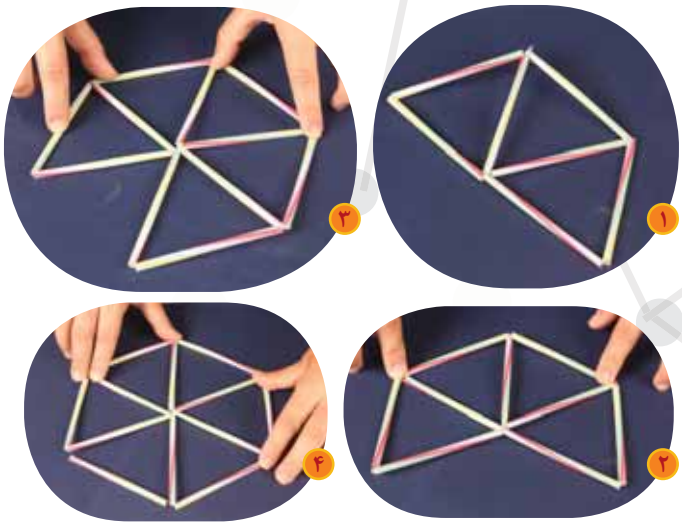
به کنج‌های اتاقی که در آن هستید، نگاه کنید. حداقل سه صفحه لازم است.

یک سؤال دیگر: حداکثر چند صفحه می‌توانند یک کنج را ایجاد کنند؟

برای پاسخ به این سؤال باید گفت: بستگی به زوایایی دارد که یک کنج را ایجاد می‌کنند. اجازه دهید مسئله را کمی بازتر کنیم.

اگر از یک نقطه در صفحه نیم‌خط‌هایی خارج شود، مجموع زوایایی که این نیم‌خط‌ها با هم دارند، ۳۶۰ درجه است؛ یعنی یک زاویهٔ تمام صفحه. وجه تسمیهٔ زاویه ۳۶۰° نیز از این جهت است این مسئله به ما خاطرنشان می‌کند که برای داشتن یک کنج، زاویهٔ ایجاد شده در آن باید کمتر از ۳۶۰° باشد.

تعدادی مثلث متساوی‌الاضلاع با استفاده از کاغذ و یا کش و نی به صورت‌های زیر تهیه کنید:



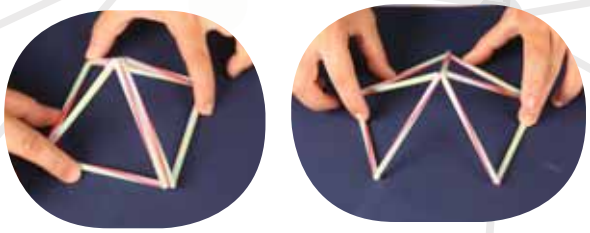
در حالت (۱) در نقطهٔ A، مجموع زوایا ۱۸۰° است که نسبت به زاویهٔ تمام صفحه ۱۸۰° درجه کمتر است و با بستن آن یک کنج خواهیم داشت.

در حالت‌های (۲) و (۳) نیز، مجموع زوایا در نقطهٔ A کمتر از ۳۶۰° درجه است که با بستن زاویهٔ باقی‌مانده، کنج ایجاد می‌شود. ولی در حالت (۴) در نقطهٔ A مجموع زوایا ۳۶۰° است؛ یعنی یک زاویه تمام صفحه که ایجاد کنج نمی‌کند.

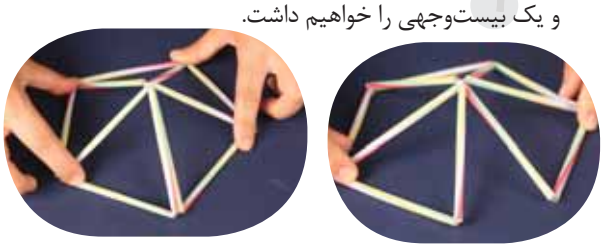
پس در هر کنج می‌توان ۳ یا ۴ یا ۵ مثلث متساوی‌الاضلاع داشته باشیم.

۱. سه مثلث متساوی‌الاضلاع، در نتیجه: زاویهٔ کنج $۳\times۶۰^\circ=۱۸۰^\circ$؛ یعنی یک چهاروجهی ایجاد می‌شود.

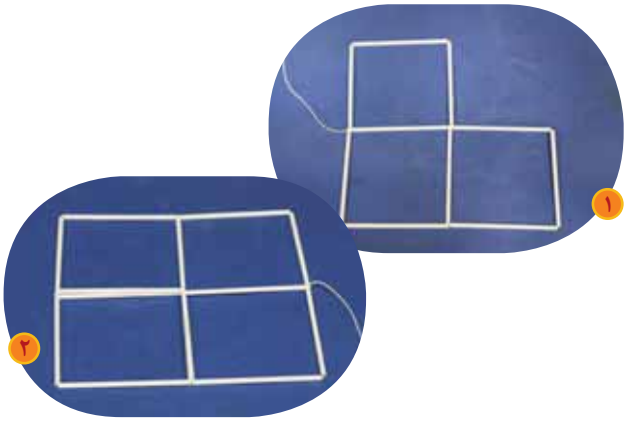
۲. چهار مثلث متساوی‌الاضلاع، در نتیجه: زاویهٔ کنج $۴\times۶۰^\circ=۲۴۰^\circ$ در یک هشت‌وجهی ایجاد می‌شود.



۳. پنج مثلث متساوی‌الاضلاع، در نتیجه: زاویهٔ کنج $۵\times۶۰^\circ=۳۰۰^\circ$ و یک بیست‌وجهی را خواهیم داشت.



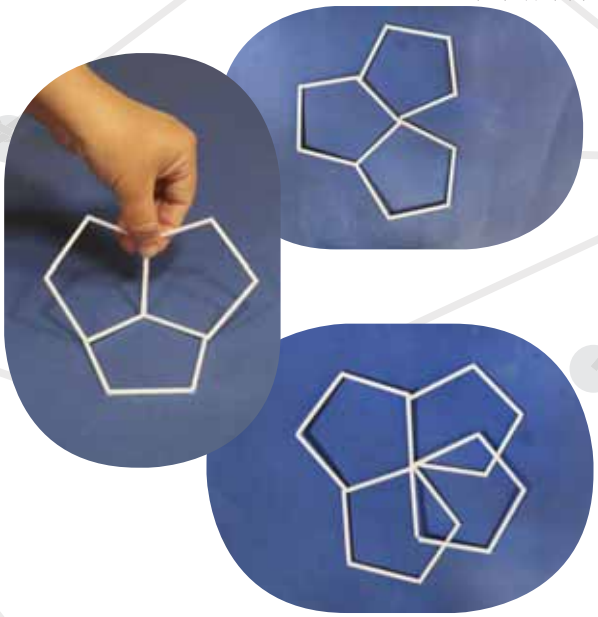
تعدادی مربع تهیه کنید و به صورت‌های زیر کنار هم بگذارید:



در حالت (۱) در نقطهٔ A زاویهٔ ایجاد شده $۳\times۹۰^\circ=۲۷۰^\circ$ است که از زاویهٔ تمام صفحه ۹۰ درجه کمتر است. بنابراین با بستن آن یک کنج خواهیم داشت. ولی در حالت (۲) زاویهٔ ایجاد شده در نقطهٔ A $۴\times۹۰^\circ=۳۶۰^\circ$ است که کنجی را ایجاد نمی‌کند. پس با داشتن مربع، کنج‌هایی سه مربعی خواهیم داشت که یک شش‌وجهی منتظم یا همان مکعب را تشکیل می‌دهند.

حال به سراغ پنج‌ضلعی منتظم می‌رویم که هر زاویهٔ داخلی آن ۱۰۸ درجه است.

اگر بخواهیم با توجه به مطالب فوق، کنج‌هایی با پنج‌ضلعی منتظم بسازیم، در هر کنج فقط ۳ پنج‌ضلعی قرار می‌گیرد:
$۳\times۱۰۸^\circ=۳۲۴^\circ$



چیدمان ۴ پنج‌ضلعی یا بیشتر، در هر کنج باعث ایجاد زاویهٔ بزرگ‌تر از ۳۶۰° خواهد شد؛ یعنی کنجی نخواهیم داشت. تنها چندوجهی ایجاد شده با پنج‌ضلعی‌های منتظم یک ۱۲ وجهی منتظم است.

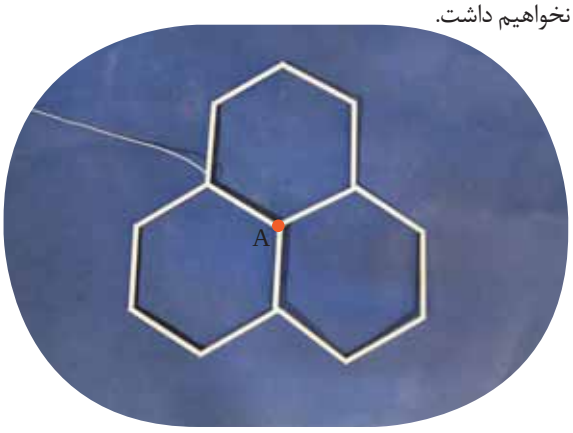
به نظر شما در شش‌ضلعی منتظم اوضاع چگونه است؟

هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. چیدمان ۳ شش‌ضلعی منتظم به صورت زیر است:
$۳\times۱۲۰^\circ=۳۶۰^\circ$

می‌بینید در نقطهٔ A یک زاویهٔ تمام صفحه داریم که ایجاد کنج نمی‌کند.

پس کار ما برای ایجاد کنج با چندضلعی‌های منتظم خاتمه می‌یابد، چون با بالا رفتن تعداد اضلاع، اندازهٔ زوایا بیشتر می‌شود.

بنابراین کنج‌هایی متشکل از شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی یا بالاتر نخواهیم داشت.



جعبه‌های جبری

زهرا صباغی

دوستان عزیز برای تمرین بیشتر عبارت‌های جبری می‌توانید به سایت «www.topmarks.co.uk» مراجعه کنید. در بالای صفحه روی «learning games» کلیک کنید. سپس گروه سنی ۱۱ تا ۱۴ سال را برگزینید و بعد از آن روی «Algebra» کلیک کنید. در این قسمت دو بازی وجود دارد:

۱ Alegbra Smash

در این بازی شما باید جمع عبارت‌های جبری دو جعبهٔ زیرین را به دست آورید و روی آن‌ها قرار دهید. در مراحل بالاتر مسائل سخت‌تر می‌شوند.

۲ Substitution Grids

این قسمت تمرینی برای محاسبهٔ عبارت‌های جبری است. شما باید عبارت‌های جبری را براساس مقدار داده شده محاسبه کنید و با کلیک روی آن‌ها جواب خود را چک کنید.

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)