



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...و

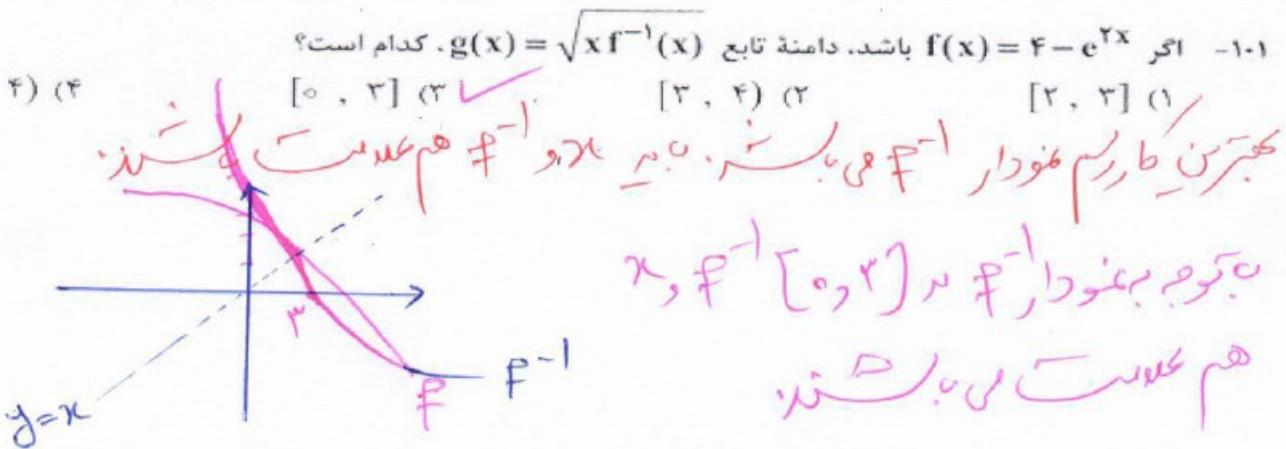
کanal سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

# حل مسأله



۱۰۲ - به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{a}x - a$  همواره بالای محور  $x$  هاست؟

-۱ <  $a$  < ۱ (۴) ✓ ۳ <  $a$  (۳) ۰ <  $a$  < ۴ (۲)  $a < -1$  (۱)

$$1-a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

$$\Delta = 4a + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow 4 + a - a^2 < 0 \Rightarrow a^2 - a - 4 > 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-2) > 0 \Rightarrow -2 < a < 2 \quad (2)$$

لذا  $-2 < a < 1$  برای  $(1), (2)$  برابر است.

۱۰۳ - تابع با ضابطه  $f(x) = a + \log_2(3x+b)$  از دو نقطه  $(11, 15)$  و  $(5, 15)$  می‌گذرد.  $a$  کدام است؟

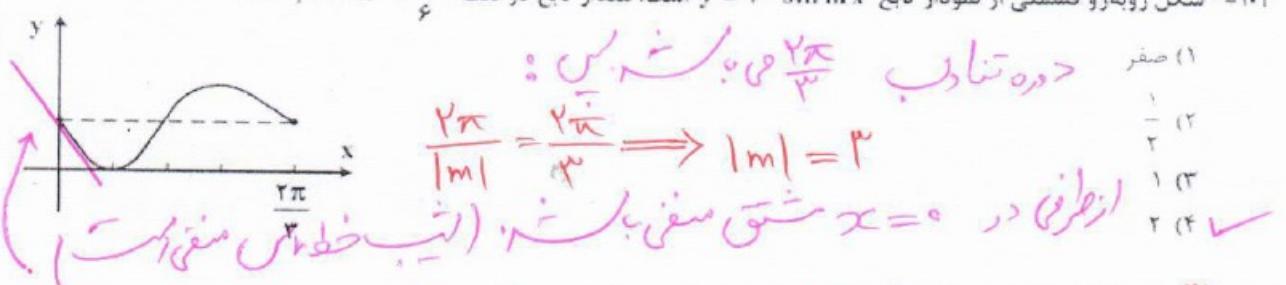
$$\begin{cases} (2, 11) \rightarrow a + \log_2(12+b)^2 = 11 \\ (5, 15) \rightarrow a + \log_2(15+b)^2 = 15 \end{cases}$$

$$\log_2(15+b)^2 - \log_2(12+b)^2 = 2 \rightarrow \log_2 \left( \frac{15+b}{12+b} \right)^2 = 2$$

$$\left( \frac{15+b}{12+b} \right)^2 = 2 \rightarrow b = 1 \rightarrow a = 14$$

در اینجا باید  $b \neq 0$  نظر نداشتم.

۱۰۴ - شکل رویه و قسمتی از هموار تابع  $y = 1 - \sin mx$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟



$$y' = -m \cos mx \xrightarrow{x=0} y' = -m < 0 \Rightarrow m > 0 \Rightarrow m = 3$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

- ۱۰۵ - نمودارهای دو تابع  $g(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^x + \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $f(x) = 2^x$  در نقطه A متقاطع‌اند. فاصله نقطه A تا نقطه (۱، ۰) کدام است؟

$\sqrt{5}$  (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$  (۲) ✓

۱ (۱)

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}})^x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}^x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^x$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{2}}{2} = t \Rightarrow t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow A(\frac{1}{2}, 2)$$

عائد:  $\sqrt{(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{2}$

- ۱۰۶ - به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم  $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله

$2x^2 - x - 2 = 0$  می‌باشد؟

۱۵ (۴)

۱۳ (۳) ✓

۱۱ (۲)

۹ (۱)

فرضیه:  $2x^2 - x - 2 = 0$  داشته باشیم، بنابراین  $\alpha, \beta$  ریشه‌های آن است. از  $\alpha^3 + \beta^3 = 0$  خواهیم داشت.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = \frac{m}{\lambda} = \alpha^3 - 3\alpha\beta\alpha = \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} = \frac{13}{\lambda} \rightarrow [m=14]$$

- ۱۰۷ -  $g(x) = \sqrt{x - x^2}$  و  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  کدام است؟

$\mathbb{R} - (-1, 1)$  (۴)

$\mathbb{R}$  (۳)

$[-1, 1]$  (۲) ✓

$[0, 1]$  (۱)

عدد دو زایی در مجموعه کم.

بنابراین مجموعه  $(0, 1)$  را شووند.

پس مجموعه  $(0, 1)$  را شووند.

- ۱۰۸ - حاصل  $\cos(\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}(-\frac{1}{2}))$  کدام است؟

$\frac{4}{5}$  (۴)

$\frac{3}{5}$  (۳)

$-\frac{3}{5}$  (۲)

$-\frac{4}{5}$  (۱) ✓

$$\tan^{-1}(-\frac{1}{2}) = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1 + (-\frac{1}{2})^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

- ۱۰۹ - حاصل  $\frac{1}{2} \cos 40^\circ$  کدام است؟

$$\begin{aligned} & \text{رسانی} \quad \text{cot} 40^\circ \quad \text{رسانی} \\ & \cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ \cos 40^\circ - 1}{\cos 40^\circ} = \frac{\cancel{\cos 40^\circ} \left( \frac{1}{2} (\cos 40^\circ + \cos 40^\circ) - 1 \right)}{\cos 40^\circ} \\ & = \frac{\cancel{\cos 40^\circ} \left( \frac{1}{2} + \cos 40^\circ - 1 \right)}{\cos 40^\circ} = \frac{1 + \cos 40^\circ - 1}{\cos 40^\circ} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- ۱۱۰ - جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  با شرط  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (\checkmark)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

مکانیزم حل:

$$\sin x + \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin x \cos x + \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0 \xrightarrow{\sin x \neq 0} 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

- ۱۱۱ - حد عبارت  $\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$ , وقتی  $x \rightarrow 0^+$  کدام است؟

$$1 \quad (\checkmark)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{x}{2} \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

- ۱۱۲ - مشتق تابع  $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\sqrt{x}\right)$  در نقطه  $x = \frac{1}{4}$  کدام است؟

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$  (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (۳)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$  (۲) ✓

$\frac{4}{\sqrt{3}}$  (۱)

$$y' = \left(0 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}(\sqrt{x})\right)\right)$$

$$\underset{x=\frac{1}{4}}{=} y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- ۱۱۳ - دو دنباله با جمله عمومی  $\{b_n - a_n\}$  و  $b_n = n \ln(n+1)$ ،  $a_n = n \ln(n)$  مفروض آنده، دنباله  $\{b_n - a_n\}$  چگونه است؟

۱) همگرا به ۰

۲) نزولی - کراندار

۳) همگرا به صفر

۴) واگرا

$$b_n - a_n = n \ln(n+1) - n \ln(n) = n (\ln(n+1) - \ln(n))$$

$$= n \left( \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$$

- ۱۱۴ - تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cos \frac{\pi}{4}x & ; |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

۱) همگراه ناپیوسته

۲) صفر

۳) به معنی هم جزو صحیح است.

۴) واگرا

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] \cos \frac{\pi}{4}x = [1^-] \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0}$$

- ۱۱۵ - منحنی به معادله  $y = \sqrt[x^r - x^s]{x^r - x^s}$  با کدام طول محاسب خود را قطع می‌کند؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{1}{6}$  (۲)

$\frac{1}{9}$  (۱) ✓

$$y = \sqrt[x]{(x - \frac{1}{r})} = x - \frac{1}{r}$$

$$x - \frac{1}{r} = \sqrt[x^r - x^s]{x^r - x^s} \Rightarrow x^r - x^s + \frac{1}{r}x - \frac{1}{r} = x^r - x^s$$

(ازم) (زیرا رادیکال استفاده نمایم)

$$\Rightarrow \frac{1}{r}x = \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{r}}$$

منظر (۴)

- ۱۱۶ - به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، معادله درجه سوم  $3x^3 + ax - 1 = 0$  دارد؟

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{3}\right) \quad (\checkmark)$$

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{2}{3}\right) \quad (3)$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{4}\right) \quad (1)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{4} - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{a}\right) < 0$$

$$\Rightarrow (3a - 1)(4a - 2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < a < \frac{2}{3}$$

- ۱۱۷ - اگر  $\theta$  زاویه بین دو معاس چپ و راست در نقطه گوش نمودار تابع  $y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$  باشد،  $\tan \theta$  کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (\checkmark)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$  : لزومی زلوجین در نمودار

$$\begin{cases} y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}, x \geq 1 \\ y = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+3}}, x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{عمل مترشونده}} \begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow y'(1) = \frac{1}{2} \\ y' = \frac{-1}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow y'(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{3}$$

- ۱۱۸ - اگر تابع  $f$  در  $x = -2$  مشتق پذیر و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)+3}{h} = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه مشتق  $f'(x)$  در  $x = -2$  کدام است؟

$$14 \quad (\checkmark)$$

$$12 \quad (1)$$

$$10 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

$$y = x^2 f(x) \rightarrow y' = 2x f(x) + x^2 f'(x)$$

با محاسبه  $f(-2) = \frac{1}{2}$  و  $f'(-2) = -3$  نتیجه می شود:

$$y'(-2) = -2f(-2) + 2f'(-2) = -2 \times \frac{1}{2} + 2 \times (-3) = -1 + 2 = 1$$

- ۱۱۹ - تابع با ضابطه  $f(x) = x + e^{2x}$  مفروض است. معادله خط معاس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

$$2y + x = 1 \quad (4)$$

$$2y - x = -2 \quad (3)$$

$$y - 2x = -2 \quad (2)$$

$$2y - x = -1 \quad (1) \quad (\checkmark)$$

$x + e^{2x} = 1 \xrightarrow{x = 0} \boxed{x = 0}$  نقطه ای در  $f$  موردنظر است که عرض نقطه ای را  $y - 0 = \frac{1}{2}(x-0)$  نویسید.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+2e^0} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow 2y - x = -1$$

- ۱۲. خط قائم بر نمودار  $x^2y - \ln(2x-y) = 12$  در نقطه (۲، ۳)، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

$$y'_x = -\frac{2x - \frac{1}{2x-y}}{x^2 + \frac{1}{2x-y}} \quad \text{لایه} \quad y' = \cancel{\text{لایه}} \quad y' = -2$$

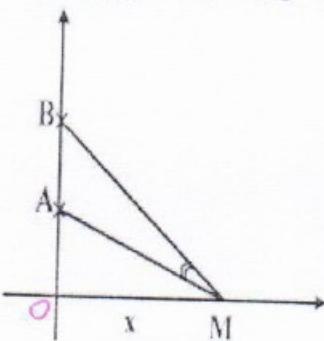
-۴ (۲) ✓

-۵ (۱)

**شیوه طبقه**

$$\Rightarrow m = +\frac{1}{2}, y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{لایه} \Rightarrow x = -4$$

- ۱۲. دو نقطه A و B به بلندی های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود. تا زاویه AMB بیشترین مقدار ممکن باشد؟



۲۷ (۱)

۶ (۲)

۲۷۱۰ (۳) ✓

۷ (۴)

$$OM^2 = x^2 = OA \times OB = 5 \times 8 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

آن تست برای این سوال خوب تر از درست طبع نشده است.

- ۱۲۲. نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x; x \in [0, 2\pi]$  در کدام بازه صعودی و تغیر آن رو به پایین است؟

- ( $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$ ) (۱)      ( $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ ) (۲)      ( $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ ) (۳)      ( $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ ) (۴) ✓

$$y' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 2 \cos x (\sin x - 1)$$

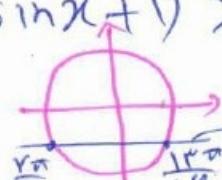
برای این دو بازه صعودی باشند. بنابراین  $y' > 0$  در این دو بازه از طرفی  $\sin x - 1 \leq 0$  باشند. بنابراین  $\sin x < 1$  در دو بازه دوره نتادب در  $[0, \frac{\pi}{2}]$  و  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  متفق است.

$$y' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = \sin 2x - 2 \cos x$$

$$y'' = 2 \cos 2x + 2 \sin x \frac{\cos x = 1 - \sin^2 x}{\sin x} \Rightarrow y'' = 2 \sin^2 x - \sin x - 1 > 0$$

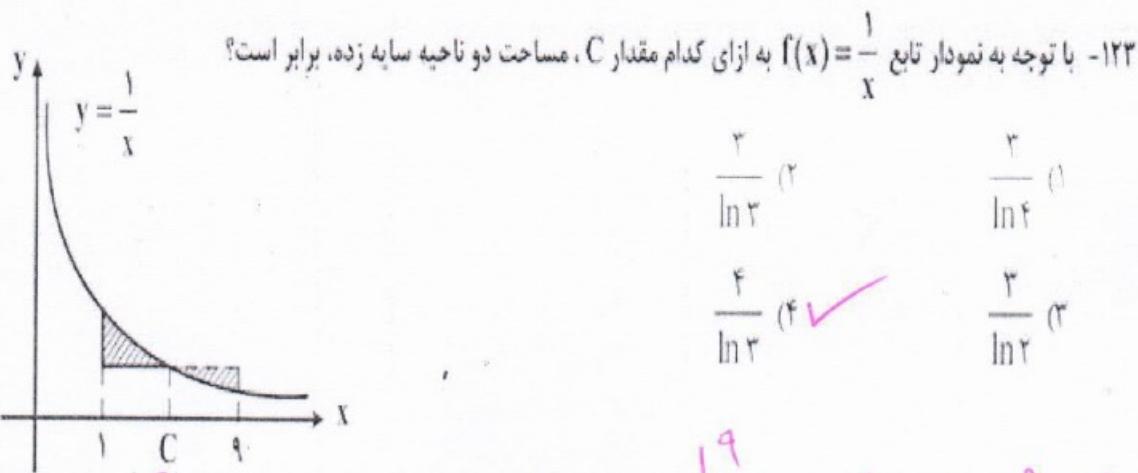
$$\Rightarrow (\sin x - 1)(2 \sin x + 1) > 0 \quad \text{متوجه می شویم} \Rightarrow 2 \sin x + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \quad \text{لایه} \rightarrow \frac{7\pi}{4} < x < \frac{13\pi}{4}$$



آخر این دو جواب قابل نظر نیستند.  
نیز نیز این دو جواب قابل نظر نیستند.

(۴ تجھ)



$$\begin{aligned}
 F(C) &= \frac{\int_1^9 \frac{1}{x} dx}{9-1} = \frac{\ln(x)|_1^9}{8} = \frac{\ln 9 - \ln 1}{8} \\
 &= \frac{\ln 9 - 0}{8} = \frac{\ln 9^4}{8} = \frac{4 \ln 9}{8} = \frac{\ln 9^4}{4} \\
 \Rightarrow \frac{1}{C} &= \frac{\ln 9^4}{4} \Rightarrow C = \frac{4}{\ln 9^4}
 \end{aligned}$$

۱۲۴ - حاصل انتگرال  $\int_0^4 \sqrt{(x^2 - 2x)^2} dx$  گدام است؟

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \sqrt{(x^2 - 2x)^2} dx &= \int_0^4 |x^2 - 2x| dx = \int_0^4 (2x - x^2) dx + \int_4^2 (x^2 - 2x) dx \\
 &= (x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^4 + (\frac{x^3}{3} - x^2) \Big|_4^2 = (4 - \frac{64}{3}) - 0 + \\
 &\quad \left( \frac{64}{3} - 16 \right) - \left( \frac{16}{3} - 4 \right) = 8
 \end{aligned}$$

با روش منفعت  
از ۱۲۱