۱۲۶- دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

حل)

$$f^{-1}(g(2a))=6 \Rightarrow f(6)=g(2a)$$

از ضابطه تابع f داریم، $f(6)=3$

$$\Rightarrow g(2a)=3, g(x)=\frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a)=\frac{2a}{2a-1} \Rightarrow \frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow 6a-3=2a \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

تحلیل سوال: مبحث تابع از مباحثی است که فراوانی سوال بالایی دارد. در این مبحث، قسمت های تابع مرکب و معکوس توابع در چند سال اخیر همواره مورد سوال قرار گرفته است. سوال بالا سوالی مفهومی و ترکیبی از قسمت های مختلف تابع است. دانش پژوه باید به مباحث دوتایی ها و مفهوم آن ها، تابع معکوس، تابع مرکب و مسائل مقدار تابع با توجه به ضابطه، تسلط داشته باشد.

۱۲۷- از دو معادله دو مجهولی $2^{x-7}\times 4^{x+y}=1$ و $\log y=2\log 3+\log x$ ، مقدار y کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

حل) از معادله اول داریم:

$$2^{x-7}\times 4^{x+y}=1 \Rightarrow 2^{x-7}\times\left(2^2\right)^{x+y}=1 \Rightarrow 2^{x-7}\times 2^{2x+2y}=1$$

$$\Rightarrow 2^{(x-7)+(2x+2y)}=1 \Rightarrow 2^{3x+2y-7}=1 \Rightarrow 3x+2y-7=0$$

از معادله دوم داریم:

$$\log y=2\log 3+\log x \Rightarrow \log y=\log 3^2+\log x \Rightarrow \log y=\log 9x \Rightarrow y=9x$$

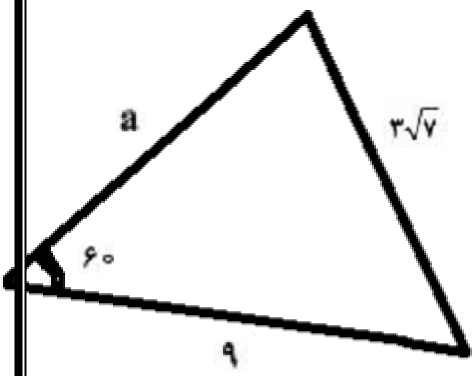
$$\begin{cases}3x+2y-7=0\\ y=9x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=3\end{cases}$$

تحلیل سوال: از مبحث لگاریتم در سال های اخیر حتما یک سوال آمده است. مطالعه این قسمت نیاز به پایه خاصی ندارد و با کمی تمرین و تست بر این مبحث مسلط می شوید.

۱۲۸- در مثلثی یکی از زاویه ها ۶۰ درجه و ضلع مقابل به این زاویه $۳\sqrt{۷}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازهٔ ضلع سوّم کدام است؟

۱) ۳ ، ۶   ۲) ۴ ، ۷   ۳) $۴\sqrt{۳}$ ، $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$ ، $۳\sqrt{۲}$

حل) طبق قانون کسینوس ها داریم:



$$\left(3\sqrt{7}\right)^2 = a^2 + 9^2 - 2a \times 9 \times \cos(60)$$
$$\Rightarrow 63 = a^2 + 81 - 9a \Rightarrow a^2 - 9a + 18 = 0$$
$$\Rightarrow (a-6)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 6, a = 3$$

تحلیل سوال: قوانین سینوس و کسینوس در مثلث اهمیت زیادی در سوالات هندسه دارند و معمولا در طی سال های اخیر مورد سوال قرار می گیرند.

۱۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A^{-1}.(۲B)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & -۷ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ -۷ & ۱۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ \\ -۹ & ۱۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۱۴ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$

حل)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3\times4 - 2\times5}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

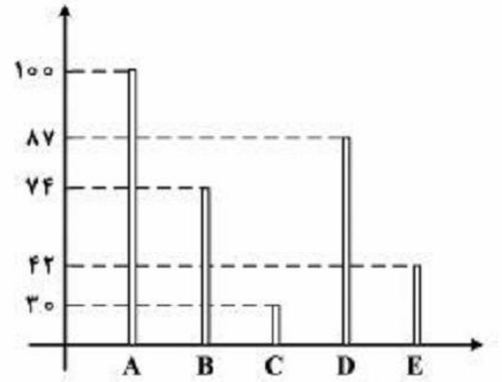
$$A^{-1}.(2\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \times 2\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

تحلیل سوال: از مبحث ماتریس در سال های اخیر، سالی یک سوال آمده است. مطالعه این مبحث نیاز به پایه خاصی ندارد و با کمی مطالعه و تمرین بر روی آن مسلط می شوید. از مبحث ماتریس، معکوس گیری از ماتریس غالبا و در اکثر سال ها مورد سوال بوده است.

از آنجا که مطالعه این مبحث، زمان‌بر نیست و تست ساده ای از آن مطرح می شود، اینجانب همواره به دانش پژوهان خود توصیه می کنم از مطالعه این مبحث ساده غافل نشوند.

۱۳۰- نمودار میله‌ای روبه‌رو، تعداد کارکنان با مهارت فنی، در ۵ گروه متمایز است. در نمایش آن با نمودار دایره‌ای، زاویهٔ مربوط به گروه B، چند درجه است؟

۱) ۷۵
۲) ۸۰
۳) ۸۴
۴) ۹۲



$$\frac{74}{100+87+74+42+30}\times 360=\frac{74}{333}\times 360=80$$

تحلیل سوال: مبحث آمار سالی ۲ تا سوال می آید. معمولا یکی ساده است و آن یکی نیاز به حساب و کتاب زیادی دارد و وقت گیر است. مطالعه آن پایه ریاضیاتی قوی ای لازم ندارد و با تست و تمرین بر مباحثش مسلط می شود.

سوال بالا بسیار راحت بود.

۱۳۱- ضریب تغییرات، در داده‌های آماری زیر، با فراوانی تجمعی داده شده، کدام است؟

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳۳	۴۴	۵۰

۱) ۰٫۱۶
۲) ۰٫۱۸
۳) ۰٫۲۴
۴) ۰٫۲۸

$$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\quad \bar{x}=\frac{6\times 7+8\times 9+10\times 17+12\times 11+14\times 6}{50}=10$$

$$\sigma^2=\frac{\sum F_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}=\frac{7(6-10)^2+9(8-10)^2+17(10-10)^2+11(12-10)^2+6(14-10)^2}{50}$$

$$=\frac{288}{50}=5.76\Rightarrow \sigma=\sqrt{5.76}=2.4\Rightarrow Cv=\frac{2.4}{10}=0.24$$

تحلیل سوال: سوال بالا روند محاسباتی نسبتا طولانی ای دارد و زمان بر است. بهتر است آن را در صورت اضافه آوردن وقت، حل کرد.

۱۳۲- در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

روش اول:

تعداد حالات انتخاب سه مهره غیر همرنگ

$$p(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{60}{\frac{12\times11\times10}{3\times2}}=\frac{3}{11}$$

تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از ۱۲ مهره

روش دوم:

جایگشت احتمالات

$$p(\mathrm{A})=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}\times3!=\frac{3}{11}$$

احتمال اولی سفید | احتمال دومی سیاه | احتمال سومی آبی

تحلیل سوال: در احتمال، مسائل مختلف انتخاب مهره ها شامل انتخاب مهره های هم رنگ، غیر همرنگ و ... غالبا مورد پرسش قرار می گیرد.

۱۳۳- مجموعه جواب نامعادلهٔ $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$، به کدام صورت است؟

۱) $x < \frac{1}{2}$ ۲) $x < 3$ ۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

$$-1 \prec \frac{3x+1}{x-3} \prec 3$$

$$1)\ -1 \prec \frac{3x+1}{x-3} \Rightarrow -1 - \frac{3x+1}{x-3} \prec 0 \Rightarrow \frac{-x+3-3x-1}{x-3} \prec 0 \Rightarrow \frac{-4x+2}{x-3} \prec 0$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$-4x+2$		+	0	−		−	
$x-3$		−		−	0	+	
$f(x)=\frac{-4x+2}{x-3}$		−	0	+	○	−	

$$\Rightarrow x \prec \frac{1}{2}, x \succ 3 \quad (1)$$

$$-1 \prec \frac{3x+1}{x-3} \prec 3$$

$$2)\ \frac{3x+1}{x-3} \prec 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 \prec 0 \Rightarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} \prec 0 \Rightarrow \frac{10}{x-3} \prec 0$$

$$\Rightarrow x \prec 3 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow x \prec \frac{1}{2}$$

روش دوم: حذف گزینه ها، x=1 در بازه گزینه های دوم و سوم و چهارم است. ولی x=1 در صورت سوال صدق نمی کند.

تحلیل سوال: نامساوی های کسری و کسری-قدرمطلقی در سال های اخیر مورد توجه طراحان بوده است.

۱۳۴- اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$\tan x - \cot x = -2\cot 2x$$

$$\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = -2\,\text{cotx}$$

$$\text{tanx} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = -2\,\text{cotx} = -2\times\frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

تحلیل سوال: این سوال استفاده از یک اتحاد ساده و تابلوی! مثلثاتی است و نکته دیگری ندارد.

۱۳۵- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$

حل)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}, \quad g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$$

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

تحلیل سوال: همان طور که قبلا هم گفته شد، مبحث تابع از مباحث مهم و پرسوال کنکور است. همچنین در این مبحث، قسمت ترکیب توابع بسیار مهم است و همواره در سال های اخیر مورد سوال طراحان بوده است.

۱۳۶- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \left(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{x(x-2)}-\frac{x+1}{x-2}\right)=\infty-\infty$$

بعد از گرفتن مخرج مشترک داریم:

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6-x(x+1)}{x(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6-x(x+1)}{x(x-2)}\right)=-\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x(x-2)}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+3)(x-2)}{x(x-2)}\right)=-\frac{5}{2}$$

تحلیل سوال: از مبحث حد سالی ۲ الی ۳ سوال مطرح می شود(معمولا ۲تا). یکی از این ۲ سوال، معمولا شامل حدهای به فرم $\infty-\infty$ است که راه غالب آن ها استفاده از مخرج مشترک و بعد از آن ساده سازی به کمک اتحادها و یا هوپیتال است. برای حل این سوال ها لازم است به اتحاد ها و تجزیه ها مسلط باشید.

ضمن اینکه حدهای مثلثاتی هم در برخی سال ها مورد سوال قرار گرفته است که لازمه اش تسلط به مثلثات و اتحادهای مثلثاتی است.

۱۳۷- تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x\neq ۰\\ a & ; x=۰\end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x=۰$ پیوسته است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

برای پیوستگی تابع در نقطه صفر، باید حد تابع در این نقطه با مقدارش برابر باشد. برای گرفتن حد تابع $\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ در نقطه صفر، دو روش داریم:

روش اول: ضرب در مزدوج رادیکال و ساده سازی

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\times\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-\left(1-x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x}=2\Rightarrow a=2$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow hop$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to 0}2\sqrt{1-x}=2\Rightarrow a=2$$

تحلیل سوال: همان طور که گفته شد از مبحث حد سالی ۲ الی ۳ سوال مطرح می شود(معمولا ۲تا). در یکی از این ۲ سوال، معمولا استفاده از هوپیتال لازم است. همچنین ضرب در مزدوج در حل اکثر حدهای رادیکالی به کار می آید.

حدهای مثلثاتی هم در برخی سال ها مورد سوال قرار گرفته است که لازمه اش تسلط به مثلثات و اتحادهای مثلثاتی است.

۱۳۸- مشتق تابع $y=2\cos^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$ در نقطه $x=\frac{\pi}{6}$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y=\cos^n u\rightarrow y'=-nu'\sin u\cos^{n-1}u$$

فرمول

$$y=2\cos^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})\rightarrow y'=-2\times 2\times\left(-\frac{1}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)\cos^{(2-1)}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}\right)=\sin(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{\pi}{8})$$

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

تحلیل سوال: مباحث مشتق و کاربرد آن تاکنون، بیشترین فراوانی را در سوالات کنکور داشته اند. در اولین قدم باید به تمامی فرمول های مشتق گیری مسلط باشید. همچنین توانمندی در درک این مبحث و بالتبع حل سوالات مشتق نیاز به پایه ریاضیاتی قوی ای(تسلط به مباحث تابع و مثلثات و ...) دارد. در سال های اخیر ۵ سوال مستقیم از مشتق آمده است و یک سوال حد(استفاده از هوپیتال) هم آن را در بر گرفته است. یعنی مجموعا ۶ سوال. البته امسال مجموعا ۴ سوال به مشتق اختصاص یافته(۳ تا سوال مشتق، یکی هوپیتال) که علت آن فراوانی بالای سوالات قسمت هندسه بوده است!

در این سوال یک مشتق گیری ساده و با استفاده از فرمول های مشتق گیری مثلثاتی مورد پرسش قرار گرفته است. البته در آخر دانش آموز باید به فرمول های مثلثاتی مسلط باشد تا بتواند به مسئله جواب بدهد. لذا توصیه بنده به آن دسته از دانش پژوهانی که می خواهند سراغ مباحث حد و مشتق بروند این است که در ابتدا بر مبحث مثلثات مسلط باشند و بعد به این مباحث مراجعه کنند.

۱۳۹- در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۵٫۲ ۲) ۱۵٫۶ ۳) ۱۵٫۸ ۴) ۱۶٫۲

حل) $0.6\times0.18+0.4\times0.12=0.156=15.6\%$

تحلیل سوال: از مباحث آنالیز ترکیبی و احتمال، سالی ۲ الی ۳ تا سوال می آید. خواندش پایه ریاضیاتی قوی ای نمی خواهد ولی مستلزم تمرین و تکرار است. وقتی در اثر تکرار زیاد بر آن مسلط شوید، تست های کنکور را به سادگی می توانید حل کنید.

سوال بالا مثلا از مبحث احتمال شرطی است، در صورتیکه اگر کسی کل ریاضی را هم نخوانده باشد، با یک دودوتا چهارتای عقلی قادر به حل آن خواهد بود. مبحث احتمال شرطی از مباحث مهم و پر سوال احتمال است.

۱۴۰- دانش‌آموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۱۳۵}{۵۱۲}$ ۳) $\frac{۴۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۲۷}{۵۱۲}$

نکته: در برخی مسائل نتیجه آن دو حالت دارد: مثل پرتاب سکه، تیراندازی(به هدف خوردن و نخوردن)، جنسیت نوزاد(دختر بودن یا پسر بودن). در اینگونه مسائل، اگر آزمایش را n بار تکرار کنیم، احتمال اینکه در x تای آن پیروز باشیم عبارت است از:

احتمال پیروزی در هر مرحله P است(احتمال شکست 1-p است).

$$\binom{n}{x}p^x(1-\mathrm{p})^{n-x}$$

حل) احتمال موفقیت در پاسخ به سوال: $\frac{1}{4}$

احتمال عدم موفقیت در پاسخ به سوال: $\frac{3}{4}$

۳ تا از ۶ سوال را انتخاب می کنیم.

$$\binom{6}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{6\times5\times4}{3!}\times\frac{3^3}{4^6}=\frac{135}{4^5}=\frac{135}{1024}$$

به ۳ سوال پاسخ درست داده شود.

به ۳ سوال دیگر پاسخ درست داده نشود

تحلیل سوال: هر ساله یکی از سوالات احتمال، از قسمت توزیع دو جمله ای و مسائل پیروزی و شکست است که با به خاطر سپردن یک فرمول ساده و کمی تمرین از عهده حل آن بر می آیید.

۱۴۱- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$، کدام است؟

۱) $-x^2$ ۲) x^2 ۳) $x|x|$ ۴) $-x|x|$

حل)

روش اول: امتحان گزینه) اگر نقطه $(4,2)$ را تست کنیم، بنابراین باید نقطه $(2,4)$ در ضابطه معکوس صدق کند که با این کار گزینه های ۱ و ۴ حذف می شوند. اگر نقطه $(-4,-2)$ تست شود، بنابراین باید نقطه $(-2,-4)$ در ضابطه معکوس صدق کند که با این کار گزینه ۲ نیز حذف می شود. بنابراین فقط گزینه ۳ پاسخ صحیح خواهد بود.

روش دوم:

$$\begin{aligned}&if\quad x\geq 0\to y=\sqrt{x}>0\Rightarrow x=y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2\\&if\quad x<0\to y=-\sqrt{-x}<0\Rightarrow x=-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2\\&\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}\end{aligned}$$

تحلیل سوال: پیدا کردن ضابطه تابع وارون از قسمت های مهم و پرسوال مبحث تابع است.

۱۴۲- کوچکترین کران بالای دنبالهٔ $a_n=\dfrac{3n^2+1}{2n^2+n}$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{13}{10}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل) حد تابع وقتی $n\to\infty$ می رود، برابر است با ضریب عبارت حاوی بزرگترین درجه در صورت، تقسیم بر ضریب عبارت حاوی بزرگترین درجه در مخرج که برابر است با $\frac{3}{2}=1.5$

در گام بعد باید صعودی-نزولی بودن دنباله را مشخص کنیم. برای این کار چند جمله اول را بررسی می کنیم:

$$a_1=\frac{3(1)^2+1}{2(1)^2+1}=\frac{4}{3},\ a_2=\frac{3(2)^2+1}{2(2)^2+2}=\frac{13}{10}<1.5,\ a_3=\frac{3(3)^2+1}{2(3)^2+3}=\frac{28}{21}=1.36<1.5$$

$$a_4=\frac{3(4)^2+1}{2(4)^2+4}=\frac{49}{36}=1.38<1.5\ ...$$

بنابراین دنباله صعود می کند تا به 1.5 میل کند. پس 1.5 کوچکترین کران بالای آن محسوب می شود.

اما شاید تشخیص اینکه دنباله از جمله دوم به بعد صعودی است، کار مشکلی باشد. چون تشخیص بزرگتر یا کوچکتر بودن بین $\frac{13}{10}$ و $\frac{28}{21}$ و $\frac{49}{36}$ بدون استفاده از ماشین حساب دشوار است. برای این کار می توان دنباله را به صورت یک تابع در نظر گرفت و از آن مشتق گیری کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n=\frac{3n^2+1}{2n^2+n}\rightarrow f(x)=\frac{3x^2+1}{2x^2+x}\rightarrow f'(x)=\frac{6x(2x^2+x)-(4x+1)(3x^2+1)}{(2x^2+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-4x-1}{(2x^2+x)^2}$$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	max	↘ ↘	min	↗	

$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ بین ۱ و ۲ است. از آنجا که از بعد از آن، مشتق تابع مثبت شده است، بنابراین دنباله از جمله دوم به بعد صعودی می شود تا به a_∞ یعنی $\frac{3}{2}$ برسد. بنابراین کوچکترین کران بالای آن $\frac{3}{2}$ است.

تحلیل سوال: از مبحث دنباله ها گاهی یک سوال می آید. برای این مبحث، تسلط بر قسمت حد در بینهایت مبحث حد لازم است. از این مبحث، قسمت کران داری دنباله ها، قسمت ساده ای نیست. از این قسمت، از سال ۸۹ تاکنون سوال نیامده بود که امسال آمد! سوال بالا سوال سختی بود که حل آن مستلزم زمان کافی است. اگر وقت این گونه سوالات را به سوالات دیگر اختصاص دهید، برد خواهید کرد! البته اگر وقت اضافه داشتید حل کنید و حالشو ببرید!

۱۴۳- از دو معادلهٔ $\ln(2x+1)+\ln(y-2)-\ln y=\ln 3$ و $\ln(2y-3x)+\ln 2=0$، مقدار xy، کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۰

حل)

$$\ln(2y-3x)+\ln 2=0 \Rightarrow \ln((2y-3x)\times 2)=0 \Rightarrow 4y-6x=1 \Rightarrow y=\frac{6x+1}{4} \quad (1)$$

$$\ln(2x+1)+\ln(y-2)-\ln y=\ln 3 \Rightarrow \ln\left(\frac{(2x+1)(y-2)}{y}\right)=\ln 3$$

$$\frac{(2x+1)(y-2)}{y}=3 \Rightarrow 2xy+y-4x-2=3y \Rightarrow xy-y-2x-1=0 \quad (2)$$

جایگذاری (۱) در (۲)

$$\Rightarrow x\left(\frac{6x+1}{4}\right)-\frac{6x+1}{4}-2x-1=0 \Rightarrow 6x^2+x-6x-1-8x-4=0$$

$$\Rightarrow 6x^2-13x-5=0 \Rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{169+120}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{30}{12}=\frac{5}{2} \to y=\frac{6\left(\frac{5}{2}\right)+1}{4}=4 \Rightarrow xy=10$$ قابل قبول

$$x_2=-\frac{1}{3} \to y=\frac{6\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{4}=-\frac{1}{4} \Rightarrow xy=\frac{1}{12}$$

غیر قابل قبول، به علت مشکل دامنه. البته این جواب هم در گزینه ها نیست.

تحلیل سوال: بازهم معادلات لگاریتمی! حل این سوال اندکی طولانی و زمان بر است. بهتر است در انتها و در صورت اضافه داشتن وقت، این گونه سوالات حل شوند.

۱۴۴- جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$، کدام است؟

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

حل)

$$\cos(2x) + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x + 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\cos 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3}) \to 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

تحلیل سوال: معادلات مثلثاتی هر سال مورد سوال قرار گرفته است. امسال هم از این قاعده مستثنی نبود. در سوال بالا یک معادله مثلثاتی به کمک استفاده از اتحادهای مثلثاتی حل شد.

تذکر مهم: بار دیگر ملاحظه می کنید که تسلط بر اتحادهای مثلثاتی تا چه حد برای حل سوالات اهمیت دارد!

۱۴۵- معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $\sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} = 9$ در نقطهٔ $(4, 1)$، کدام است؟

۱) $y + 9x = 37$ ۲) $y + 6x = 25$ ۳) $2y + 3x = 14$ ۴) $y + 3x = 13$

حل:

$$\sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} = 9 \to f(x,y) = \sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} - 9 = 0$$

$$m = y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}}$$

$$(4,1) \to m = y'_x = -\frac{2+\frac{4}{4}}{\frac{1}{3}} = -9$$

شیب خط مماس بدست آمد. برای نوشتن معادله خط مماس داریم :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \to y - 1 = -9(x-4) \Rightarrow y + 9x = 37$$

تحلیل سوال: همان طور که قبلا هم اشاره شد، مباحث مشتق و کاربرد آن تاکنون، بیشترین فراوانی را در سوالات کنکور داشته اند. در مبحث مشتق، مشتق گیری ضمنی و نوشتن معادله خط مماس و یا عمود، هر سال مورد سوال قرار گرفته است.

۱۴۶- اگر $A(1, -3)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = ax^3 - x^2 - 3x + b$ باشد. مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

حل: $A(1,-3)$ نقطه عطف. بنابراین داریم:

$$y = ax^3 - x^2 - 3x + b \rightarrow y' = 3ax^2 - 2x - 3 \rightarrow y'' = 6ax - 2$$

$$y''(1) = 0 \rightarrow 6a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$y(1) = -3 \rightarrow \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 - 3 \times 1 + b = -3 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$$

از نقطه عطف توانستیم a و b را بدست بیاوریم. حال که ضابطه تابع را داریم، مقدار ماکزیمم تابع (عرض تابع در نقطه ماکزیمم نسبی) را پیدا می کنیم:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3} \rightarrow y' = x^2 - 2x - 3$$

$$y' = 0 \rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \rightarrow x = 3, x = -1$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
			max		min		

از جدول تعیین علامت مشتق تابع، می فهمیم که نقطه x=-1، طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است. بنابراین کافی است بجای x در ضابطه تابع مقدار 1- را قرار دهیم. حاصل می شود:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3} \rightarrow y(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

تحلیل سوال: از مبحث کاربرد مشتق، قسمت های نقطه عطف و ماکزیمم و مینیمم ها هر سال مورد پرسش قرار می گیرند.

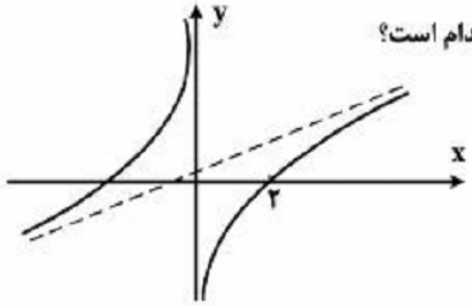
۱۴۷- شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{ax^2-1}{x+b}$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۲



حل) برای حل این گونه سوالات محل تلاقی نمودار تابع با محورهای مختصات را حتما چک کنید. این نمودار در x=2 محور xها را قطع کرده است. بنابراین داریم: $f(2)=0\to a(2)^2-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{4}$

برای بدست آوردن b به سراغ بررسی مجانب قائم می رویم. b در مخرج است و محتمل ترین راه بررسی مجانب قائم است. در این نمودار X=0 مجانب قائم است. بنابراین داریم: $x+b=0, x=0\Rightarrow b=0$

$$\Rightarrow a+b=\frac{1}{4}$$

تحلیل سوال: از مبحث منحنی ها سالی یک سوال می آید که معمولا با تسلط بر مباحث تابع و حد و مجانب و مشتق، موفق به حل آن می شوید. سوالات این قسمت پیچیدگی خاصی ندارند ولی باید بر مفاهیم حد و مجانب و مشتق مسلط باشید.

۱۴۸- محور تقارن یک سهمی با رأس (۳ , ۱-) موازی محور x ها است. اگر این سهمی از نقطهٔ (۹ , ۵) بگذرد، فاصلهٔ کانون تا خط هادی آن، کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

محور تقارن موازی محور xها است. بنابراین سهمی افقی است. در نتیجه داریم:

$$(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)\to\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow(y-3)^2=4p(x+1)$$

از آنجا که سهمی از نقطه $\begin{pmatrix}5\\ 9\end{pmatrix}$ می گذرد داریم:

$$(9-3)^2=4p(5+1)\Rightarrow p=\frac{3}{2}$$

فاصله کانون تا خط هادی برابر با 2p است. بنابراین جواب مقدار $2\times\frac{3}{2}=3$ می شود.

تحلیل سوال: از مبحث مقاطع مخروطی سالی ۲ سوال می آید که قابل حل هستند. البته گاهی اوقات ممکن است دشوار باشند. ولی اگر بر فرم های هر شکل و نکات و فرمول های آن مسلط باشید می توانید تست های این قسمت را حل کنید. تسلط بر این مبحث مستلزم تمرین زیاد است. در سوال بالا فقط کافی بود نکات سهمی را به ذهن سپرده بودید.

۱۴۹- در بیضی به معادلهٔ $16y^2+5x^2-10x=75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می‌کند. اندازهٔ MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

حل)

$$16y^2+5x^2-10x=75 \xrightarrow{\div 5} \frac{16}{5}y^2+x^2-2x=15 \to \frac{16}{5}y^2+x^2-2x+1-1=15$$

$$\to \frac{16}{5}y^2+(x-1)^2=16 \xrightarrow{\div 16} \frac{y^2}{5}+\frac{(x-1)^2}{16}=1 \Rightarrow a=\sqrt{16}=4, b=\sqrt{5}$$

$$MN=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 5}{5}=2.5$$

تحلیل سوال: نکته سوال بالا این بود که عبارت جبری را به فرم کلاسیک تبدیل کنید که این کار مستلزم تسلط بر مباحث اتحاد و تجزیه است. البته تسلط آن چنانی نمی خواست و در هندسه تحلیلی، فقط تسلط بر اتحاد های مربع دو جمله ای کفایت می کند.

۱۵۰- اگر $f(x)=x-|x-2|$ باشد، حاصل $\int_0^4 f(x)dx$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل)

$$\text{if } 0<x<2 \to f(x)=x-(-(x-2))=2x-2$$

$$\text{if } x>2 \to f(x)=x-(x-2)=2$$

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\int_0^2(2x-2)dx+\int_2^4 2dx=$$

$$x^2-2x\ \Big]_0^2+2x\ \Big]_2^4=(2^2-2\times 2)-(0)+(2\times 4)-(2\times 2)=4$$

تحلیل سوال: از مبحث انتگرال سالی دو سوال می آید که همواره هر دو سوال واقعا ساده هستند! برای کسی که به مباحث تابع شامل قدر مطلق، براکت و مثلثات مسلط باشد حل سوال انتگرال در کنکور به راحتی آب خوردن است! در کل اگر پایه ریاضی قوی و حتی متوسطی دارید، حتما مبحث انتگرال را مطالعه نمایید. معمولا هم انتگرال های توابع چند جمله ای مورد پرسش می گیرد که باید تابع را باز کنید و یکی یکی انتگرال بگیرید. در سوال بالا فقط کافی بود تابع را در ریشه قدر مطلق بشکنید و انتگرال بگیرید.

۱۵۱- اگر $\int (۳x+\frac{۱}{x})^۲ dx = \frac{۱}{x} f(x)+C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $۳x^۳+۶x^۲-۱$ ۲) $۳x^۳+۳x-۱$ ۳) $۳x^۴+۳x^۲-۱$ ۴) $۳x^۴+۶x^۲-۱$

حل: خیلیی ساده هست !!! ابتدا با استفاده از اتحاد عبارت داخل انتگرال را باز می کنیم. سپس از فرمول $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ استفاده می کنیم. بنابراین داریم:

$$\int\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\left(9x^2+2\times 3x\times\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)dx =$$

$$=\int\left(9x^2+6+x^{-2}\right)dx = 9\times\frac{x^3}{3}+6x+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c = 3x^3+6x-\frac{1}{x}+c$$

$$3x^3+6x-\frac{1}{x}+c = \frac{1}{x}f(x)+c \Rightarrow f(x)=3x^4+6x^2-1$$

تحلیل سوال: همان گونه که در تحلیل سوال قبل هم اشاره شد انتگرال گیری از عبارت های چندجمله ای، غالبا مورد پرسش قرار می گیرد.

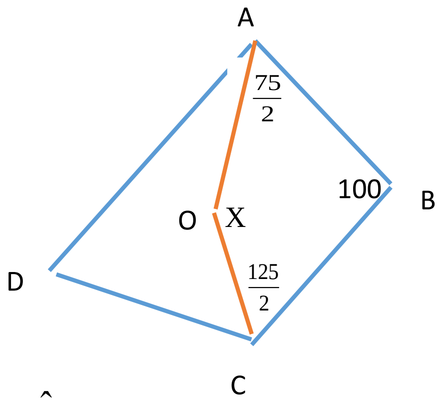
۱۵۳- در چهار ضلعی محدب ABCD، رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{3}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{C}}{5}=\frac{5\hat{D}}{12}$، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ متقابل $\hat{A}$ و $\hat{C}$، چند درجه است؟

۱) ۲۰   ۲) ۲۵   ۳) ۳۰   ۴) ۳۵

حل:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360\Rightarrow\frac{5\hat{D}}{4}+\frac{5\hat{D}}{3}+\frac{25\hat{D}}{12}+\hat{D}=360\Rightarrow\frac{15\hat{D}+20\hat{D}+25\hat{D}+12\hat{D}}{12}=360$$

$$\Rightarrow\frac{72\hat{D}}{12}=360\Rightarrow 6\hat{D}=360\Rightarrow\hat{D}=60\Rightarrow\hat{A}=\frac{5\hat{D}}{4}=75,\hat{B}=\frac{5\hat{D}}{3}=100,\hat{C}=\frac{25\hat{D}}{12}=125$$

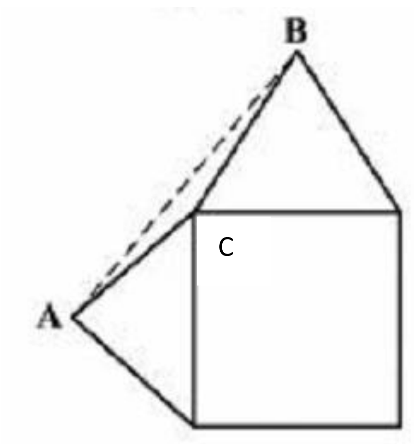


با توجه به شکل در چهارضلعی ABCO داریم:

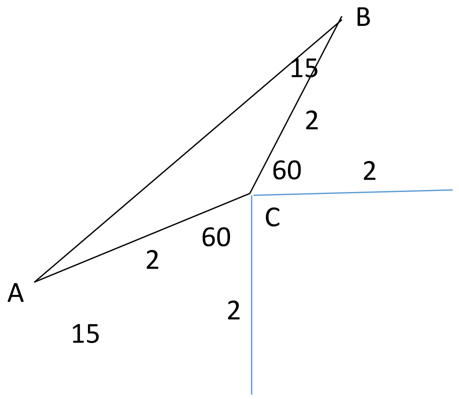
$$\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}+\frac{\hat{C}}{2}+\hat{X}=360\Rightarrow\frac{75}{2}+100+\frac{125}{2}+X=360\Rightarrow X=160;180-160=20$$

تحلیل سوال: در قسمت هندسه سوالات به سادگی مباحث قبل نیستند. یعنی این طور نیستند که اگر درس را خوانده باشید بتوانید براحتی تست را بزنید. این قسمت گاهی اوقات نیاز به خلاقیت دارد. بعضی سوالات آن ممکن است وقتگیر هم باشند. امسال هم متاسفانه یا خوشبختانه، آقای طراح علاقه زیادی به هندسه داشته اند و ۵ سوال را از این قسمت مطرح کرده اند! آن درسته از دانش پژوهانی که درصد خوب و مقبولی در ریاضی می خواهند(۷۵ تا ۸۵) می توانند این مبحث را حذف کنند و وقت مطالعه خود را روی باقی مباحث بگذارند. البته اگر کسی علاقه و درک هندسه بالایی داشته باشد و بخواهد ریاضی را بالای ۹۰ درصد بزند باید هندسه را هم بخواند.

۱۵۳- بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصلهٔ AB چند واحد است؟



۱) ۱+۲√۳
۲) ۳+√۳
۳) ۳+√۲
۴) √۶+√۲



حل) طبق شکل زاویه C در مثلث ABC برابر است با: $360-60-60-90=150$

روش اول: طبق قانون کسینوس ها داریم:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos(C)\Rightarrow AB^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos(150)$$

$$\cos(150)=\cos(180-150)=-\cos(30)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AB^2=8-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8+4\sqrt{3},\ 4\sqrt{3}=2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2},\sqrt{8}=\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}}\Rightarrow AB=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$$

روش دوم: طبق قانون سینوس ها داریم:

$$\frac{2}{\sin(15)}=\frac{AB}{\sin(150)}\Rightarrow AB=\frac{2\sin(150)}{\sin(15)},\quad \sin(150)=\sin(180-30)=\sin(30)=\frac{1}{2}$$

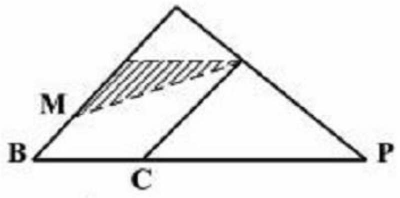
$$\sin(15)=\sin(45-30)=\sin45\cos30-\sin30\cos45=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$AB=\frac{2\sin(150)}{\sin(15)}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

تحلیل سوال: همان طور که گفتم، حل سوالات هندسه برای دانش آموزان تجربی ساده نیست. این سوال هم از این قاعده مستثنی نبود. اگر کسی از طریق قانون کسینوس ها این سوال را حل می کرد خیلی بعید بود که به جواب گزینه ها برسد. راه ساده تر، استفاده از قانون سینوس ها بود که همان هم مستلزم تسلط بر مثلثات بود.

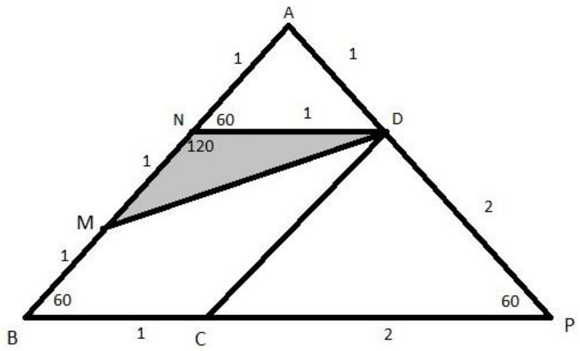
۱۵۴- در شکل زیر، نقطهٔ M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC=\frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگترین مثلث‌ها است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

حل: از آن جا که $\frac{PC}{PB}=\frac{2}{3}$ می توان PC را برابر ۳ گرفت. اما باز هم کار را راحت تر می کنیم و مثلث را متساوی الاضلاع فرض می کنیم. با این فرض اندازه زوایا و اضلاع در شکل مقابل نشان داده شده است.



طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{PC}{PB}=\frac{PD}{PA}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AD}{DP}=\frac{1}{2},$$
$$\text{ND} \parallel \text{BP}\Rightarrow\frac{AD}{DP}=\frac{AN}{NB}=\frac{1}{2}$$

از آنجا که طول AB برابر ۳ فرض شد بنابراین اندازه AN=1 و NB=2. چون M وسط ضلع BN است، بنابراین مقدار MN=1 می شود.

$$\frac{ND}{BP}=\frac{AD}{AP}=\frac{1}{3},BP=3\Rightarrow ND=1$$

ND و MN بدست آمد. حال برای محاسبه مساحت مثلث MND از قضیه سینوس ها باید زاویه بین ND و MN را بدست آورد. چون BP موازی ND است و خط AB مورب، بنابراین اندازه زاویه AND ۶۰ درجه است. در نتیجه زاویه MND ۱۲۰ درجه می شود. حال داریم:

$$\frac{S_{MND}}{S_{ABP}}=\frac{\frac{1}{2}ND\times MN\times\sin 120}{\frac{1}{2}AB\times BP\times\sin 60}=\frac{1\times1}{3\times3}=\frac{1}{9}$$

تحلیل سوال: همان طور که گفتم حل سوالات هندسه برای دانش آموزان تجربی ساده نیست. این سوال هم از این قاعده مستثنی نبود. اگر فرض مثلث متساوی الاضلاع انجام نشود، حل سوال زمان بر است. در واقع این سوال مستلزم اندکی خلاقیت بود.

۱۵۵- یک ظرف استوانه‌ای مدرّج به قطر دهانهٔ ۸، تا ارتفاع ۱۰ واحد پُر از مایع است. اگر یک گوی کروی وزین داخل آن قرار گیرد، ارتفاع مایع $\frac{۲}{۳}$ واحد بالا می‌آید. سطح این کره، کدام است؟

۱) ۶π ۲) ۸π ۳) ۱۲π ۴) ۱۶π

حجم آب درون استوانه در حالت اولیه + حجم کره = حجم آب درون استوانه در حالت ثانویه

ارتفاع آب در حالت ثانویه = $10+\frac{2}{3}$ بنابراین داریم:

$$\pi r^2 h_2 = \pi r^2 h_1 + \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \pi \times 4^2 \times \left(10+\frac{2}{3}\right) = \pi \times 4^2 \times 10 + \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$4^2 \times (10+\frac{2}{3}-10) = \frac{4}{3}R^3 \Rightarrow R = 2 \rightarrow S = 4\pi R^2 = 16\pi$$

تحلیل سوال: بر خلاف سایر قسمت های هندسه، سوالات حجم و مساحت را می توان با مسلط بودن به روی فرمول های حجم ها و مساحت ها براحتی حل کرد. از این قسمت غافل نشوید!

چند نکته از سوالات سال ۹۶

۱- قسمت های مهم مباحثی که هر سال از آنها سوال آمده و بسیار مهم هستند، عبارتند از: ۱-تابع: تابع معکوس و نوشتن ضابطه آن، تابع مرکب(fog و gof) ۲- مثلثات: معادلات مثلثاتی و اتحادهای آن، قانون سینوس ها و کسینوس ها در مثلث ۳- حد: حدهای کسری $\infty - \infty$ و حدهای رادیکالی- استفاده از هوپیتال ۴- مشتق و کاربرد آن: فرمول های مشتق گیری، مشتق ضمنی، مشتق تابع معکوس(گاهی)، نوشتن معادله خط مماس و قائم، نقطه عطف و ماکزیمم و مینیمم نسبی ۵- ماتریس: معکوس گیری از ماتریس و عملیات ضرب روی آن و پیدا کردن ماتریس مجهول ۶- احتمال: بسط دو جمله ای و مسائل پیروزی و شکست ۷- هندسه: قوانین سینوس ها و کسینوس ها در مثلث، قانون سینوس ها در محاسبه مساحت، قضیه تالس، روابط حجم و مساحت ۸- انتگرال: انتگرال گیری از چند جمله ای ها

۲- از مبحث مشتق فقط سه سوال مطرح شد که اگر هوپیتال سوال حد را هم در نظر بگیریم، می شود ۴ تا. این در حالی است که در سال های قبل از این قسمت ۶ سوال مطرح می شده. البته سوالات مشتق امسال ترکیبی بودند و تمام نکات سوالات سال های قبل را در بر داشتند!

۳- سوالات هندسه در امسال یکی دو تا از سال های قبل بیشتر بود.

۴- از مثلثات ۲ تا سوال مستقیم آمد، همچنین از مثلثات در حل ۲ سوال هندسه و ۱ سوال مشتق استفاده شد. یعنی جمعا ۵ سوال!

۵- از قسمت های ساده دنباله های عددی و ضرب و جمع ریشه های معادله دجه ۲، برخلاف سال های قبل، سوالی نیامد.

۶- نکته قابل توجه امسال، آمدن ۲ سوال از مبحث لگاریتم بود.

در نهایت می توان گفت دشواری سوال ها از سال قبل بیشتر بود!