



حل تشریحی سوالات ریاضی

کنکور سراسری **تیر ماه** ۱۴۰۲

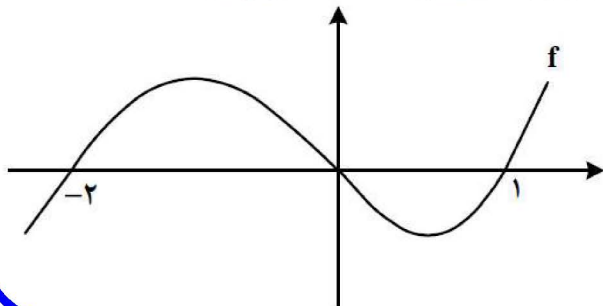
رشته علوم تجربی

تهیه و تنظیم: عزیز اسدی

دانلود از سایت ریاضی سرا

سوال ۱:

نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



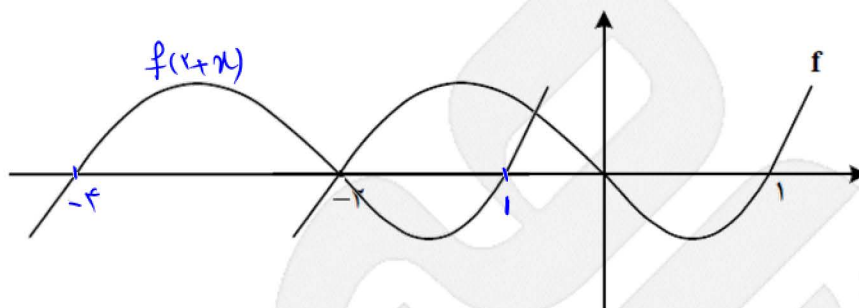
(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۵

حل:



$$-\frac{f(x)}{f(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+1)} \leq 0$$

x	-4	-2	-1	0	1
$f(x)$	-	0	+	+	0
$f(x+1)$	-	+	0	-	+
$\frac{f(x)}{f(x+1)}$	+	-	-	+	-

$$D_f = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$$

بنابراین دامنه تابع شامل ۳ عدد $\{-3, 0, 1\}$ است.

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۲:

اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $\text{gof}(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

۶ (۴)

-۶ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)

حل:

$$f(-\frac{5}{3}) = 2(-2) - (-\frac{5}{3}) = -\frac{7}{3}$$

$$f(-\frac{7}{3}) = 2(-3) - (-\frac{7}{3}) = -\frac{11}{3}$$

$$g(-\frac{7}{3}) = f([\frac{-7}{3} + f(-\frac{7}{3})]) = f([\frac{-7}{3} + (-\frac{11}{3})]) = f(-6) = 2(-6) - (-6) = -6$$

گزینه ۳



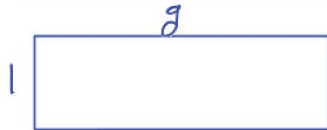
RIAZISARA

سوال ۳:

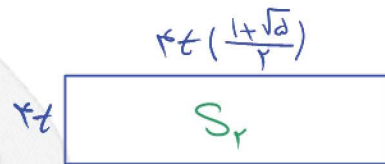
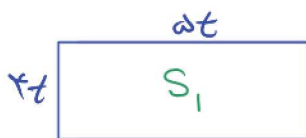
نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ (۳) $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

حل:



$$\frac{g+1}{g} = \frac{g}{1} \Rightarrow g^2 - g - 1 = 0 \Rightarrow g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (عدد طلایی)}$$



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{(4t) \times 4t \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}{(4t)(5t)} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$$

گزینه ۲

سوال ۴:

ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4} \right]$

کدام است؟

(۴) -۱

(۳) -۲

(۲) -۳

(۱) -۴

حل:

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 2ax^2 + ax - 6$$

$$2x^2 + 2x + \frac{1}{x} - ax - \frac{a}{x} + b = 2ax^2 + ax - 6$$

$$2x^2 + (2-a)x + \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x} + b\right) = 2ax^2 + ax - 6 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{ab}{4} \right] = \left[\frac{-4}{4} \right] = -1 \quad \text{گزینه ۳}$$

RIAZISARA

سوال ۵:

اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f(x^5)$ کدام است؟

- (۱) $(0, 5)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(5, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } y = x \text{ معرور} \\ \text{اگر } y = \log x \text{ معرور} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = (x + \log x)^5$$

$$f(f(x)) < f(x^5) \Rightarrow f(x) < x^5 \Rightarrow (x + \log x)^5 < x^5$$

$$\Rightarrow x + \log x < x \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

گزینه ۲

سوال ۶:

صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

حل:

$2x^2 - (m+2)x + m = 0 \xrightarrow{\text{مربع ضرایب همفر}} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{m}{2} \end{cases}$

ارتفاع مثلث: $|y(0)| = |m|$: اندازه مابعد مثلث: $|\frac{m}{2} - 1|$

$S = \frac{1}{2} |m| \cdot |\frac{m}{2} - 1| = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} m(m-2) = 3 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 3 \\ m(m-2) = -3 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ (حساب ندارد)} \end{cases}$

طول رأس سهمی: $x_s = \frac{m}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_s = -\frac{1}{2} \\ x_s = \frac{3}{2} \end{cases}$ گزینه ۴

سوال ۷:

تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & 2x+3 \leq 0 \\ 2+2mx-x^2 & 2x+3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای

مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟

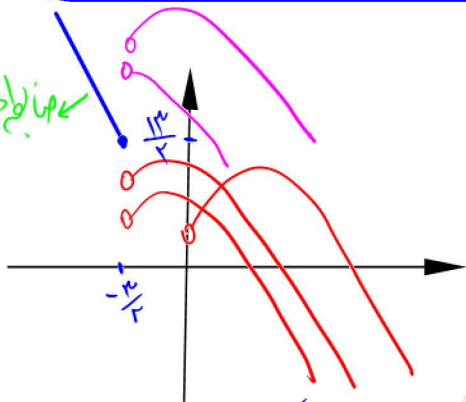
(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲

(۱) ۳

حل:



$$f(x) = \begin{cases} -3x+2 & x \leq -\frac{3}{2} \\ -x^2+2mx+2 & x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

مطابق شکل دیده می شود در صورتی که طول رأس کمی بزرگتر از $-\frac{3}{2}$ باشد، (نمودارهای قرمز رنگ) تابع یک به یک (وارون پذیر) نخواهد بود. یعنی باید $x_s \leq -\frac{3}{2}$ باشد.

$$x_s = \frac{-2m}{-2} = m \leq -\frac{3}{2} \quad \textcircled{I}$$

منتهای عرض کمی نیز به ازای x ها بزرگتر از $-\frac{3}{2}$ باید از $\frac{13}{4}$ کوچکتر باشد. (نمودارهای صورتی رنگ) می دانیم بدترین عرض به ازای $x=m$ (طول رأس) به دست می آید؛

$$-x^2+2mx+2 < \frac{13}{4} \Rightarrow -m^2+2m^2 < \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 < 4,5 \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{II} \Rightarrow m = -2$$

$$f^{-1}(-19) = K \Rightarrow f(K) = -19 \xrightarrow{\text{مناظره}} -K^2 - 4K + 2 = -19 \Rightarrow K^2 + 4K - 21 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = -7 & \text{غفلت} \\ K = 3 & \checkmark \end{cases}$$

گزینه ۱

سوال ۸:

اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.4$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $x^2(\log 30) + 2x(\log 6) - \log \frac{5}{6} = 0$ چقدر

است؟

۱ (۴)

۱/۴ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۷ (۱)

حل:

$$\log 30 = \log 3 + \log 10 = 0.4 + 1 = 1.4$$

$$\log 6 = \log 3 + \log 2 = 0.7$$

$$\log \frac{5}{6} = \log 5 - \log 6 = (1 - \log 2) - \log 6 = (1 - 0.3) - 0.7 = 0$$

$$1.4x^2 + 1.2x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \Rightarrow \text{اختلاف ریشه‌ها} = 1 \quad \text{گزینه ۴}$$

توضیح: در محاسبات بالا مقدار $\log \frac{5}{6}$ را برابر صفر شده است. (در حالی که $\log 5$ عددی منفی است).
این استنباط به دلیل محاسبه تقریبی مقادیر $\log 3$ و $\log 2$ در صورت مسئله رخ داده است.

RIAZISARA

سوال ۹:

اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5\sqrt{6}}$ (۲) $\frac{1}{75\sqrt{3}}$ (۳) $-\frac{1}{75\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{1}{5\sqrt{6}}$

حل:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{3}$$

از طرف

$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x + \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3\pi}{4} < x < \pi \Rightarrow \cos x + \sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

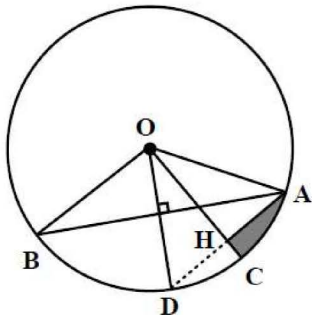
$$\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x} = \frac{1}{(\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cdot \cos x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{4}{3\sqrt{3}}} = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۱۰:

مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\angle AOB = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



(۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(۲) $\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}$

(۳) $\pi - \sqrt{3}$

(۴) $\pi - \sqrt{2}$

حل:

$$S = \pi r^2 = \pi \rightarrow r = 1 \quad \angle AOD = 60^\circ \quad \angle AOH = 30^\circ \quad \angle H = 90^\circ$$

$$AC \text{ طول کمان} = \frac{1}{12} (2\pi) = \frac{\pi}{6} \quad OH = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad AH = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad CH = 1 - OH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{اختلاف محیط ها: } (AO + OH + AH) - (AH + HC + \widehat{AC}) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) - (1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۱۱:

خطوط $3y + x = -9$ و $ax - y = 3$ ، یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می کنند. اگر مرکز دایره ای که از این سه نقطه می گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

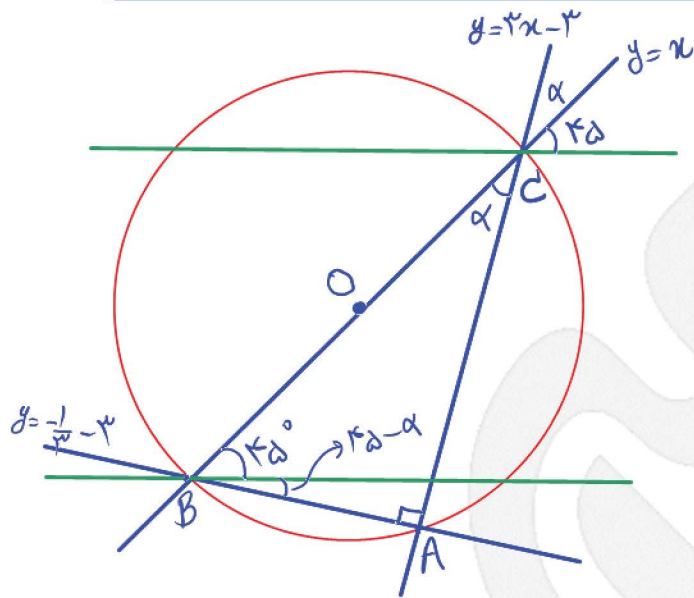
$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

حل:



نقاط B، C و O (مرکز دایره) روی یک خط (قطر دایره)

قرار دارند، بنابراین زاویه مقابل A قائمه است.

(با محاسبه ریب AC و AB نیز می توان نشان داد که $A = 90^\circ$)

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow B + C = 90^\circ \xrightarrow{C = \alpha} B = 90^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow B - C = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \tan(B - C) = \tan(90^\circ - 2\alpha) = \cot 2\alpha$$

از طرفی

$$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ ax - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y + x = -9 \\ 3ax - 3y = 9 \end{cases} \rightarrow (3a + 1)x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \Rightarrow A = (0, -3)$$

$$3y + x = -9 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - 3 \quad (\text{خط } AB)$$

$$ax - y = 3 \Rightarrow y = ax - 3 \quad \xrightarrow{AB \perp AC} \quad a = 3 \quad (\text{خط } AC)$$

$$\tan(45^\circ + \alpha) = 3 \Rightarrow \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 3 \Rightarrow 1 + \tan \alpha = 3 - 3 \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

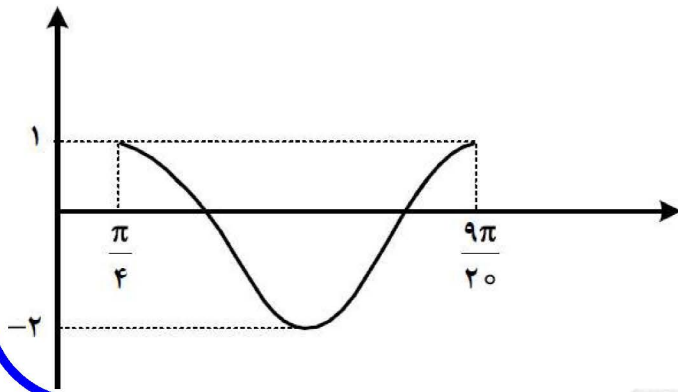
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\tan(B - C) = \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{3}{4} \quad \text{گزینه ۲}$$

بنابراین

سوال ۱۲:

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



(۱) ۱۵

(۲) -۱۵

(۳) ۷/۵

(۴) -۷/۵

حل:

$$\cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(2bx - \frac{\pi}{2}) + 1}{2} = \frac{\sin(2bx) + 1}{2}$$

$$y = \frac{a}{2} \sin(2bx) + \frac{a}{2} + c$$

$$T = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} &= \left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = a + c = 1 \\ \text{min} &= -\left| \frac{a}{2} \right| + \frac{a}{2} + c = -2 \Rightarrow c = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow ab = 3(5) = 15$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۱۳:

اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4x}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+8x}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$

کدام است؟

$-\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

حل:

$$\sin\left(\frac{\pi+4x}{2}\right) = \cos 2x$$

$$\cos\left(\frac{\pi+8x}{2}\right) = -\sin 4x = -2\sin 2x \cos 2x$$

$$\frac{1}{\cos 2x} + \frac{1}{-2\sin 2x \cos 2x} = 0 \Rightarrow \frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x \cos 2x} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan 2\alpha = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۱۴:

مقدار غیر صفر حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2b}{ax - b}$ کدام است؟

$\frac{1}{24}$ (۴)

$\frac{1}{48}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

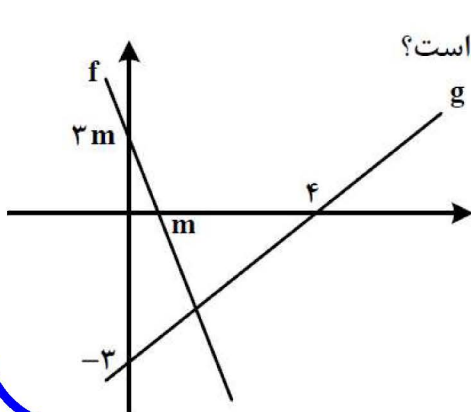
$\frac{1}{12}$ (۱)

حل: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2b}{ax - b} = \frac{0}{a-a} \neq 0 \Rightarrow a-a=0 \Rightarrow b=aa$

HoP: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \right)}{a} = \frac{aa \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{2 \times 2} \right)}{a} = \frac{1}{4}$ گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۱۵:



شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟

- (۱) -۳
- (۲) ۳
- (۳) -۴
- (۴) ۴

حل:

$$f(x) = -2x + 3m$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-2x + 3m|}{\frac{3}{2}x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\frac{3}{2}x} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۱۶:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x + a)^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$$

اگر تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می تواند باشد؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{5\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

حل: نکته: تابع $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ وقتی پیوسته است که Δ عبارت زیر رادیکال منفی یا صفر باشد.

در عبارت $\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}$ داریم $3 + (m-4) = m-1$ یعنی یکی از ریشه ها $x = -1$ و دیگری $x = \frac{-(m-4)}{3}$ است؛ بنابراین برای پیوسته بودن تابع باید عبارت زیر رادیکال ریشه منفی داشته باشد پس:

$$\frac{-(m-4)}{3} = -1 \Rightarrow m = 7$$

پس $x = a$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است؛ لذا $a = -1$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3 + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3} |x+1|}{|x+1| |x^2 - x + 1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \textcircled{I}$$

$$f(a) = f(-1) = \frac{2 \sin b}{3\sqrt{1}} = \frac{2 \sin b}{3} \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} = \textcircled{II} \Rightarrow \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3} \quad \text{گزینه ۱}$$

RIAZISARA

سوال ۱۷:

اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

حل:

$$D_f = D_g = (-\infty, 0) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \quad g(x) = \frac{1}{2x^3}$$

$$g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2})) = (f \circ g)'(-\sqrt[3]{2}) = A$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}} = x \Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1$$

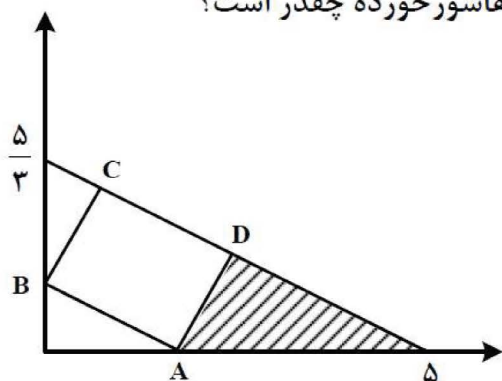
$$\Rightarrow A = 1$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۱۸:

در شکل زیر، مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشور خورده چقدر است؟



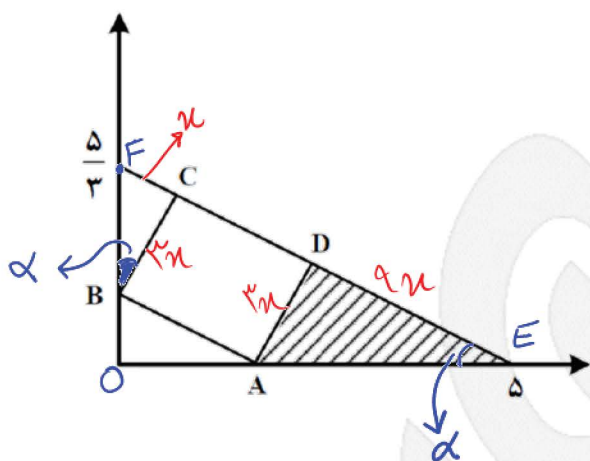
(۱) $\frac{15}{8}$

(۲) $\frac{15}{16}$

(۳) $\frac{25}{12}$

(۴) $\frac{25}{24}$

حل:



$$\triangle BCF \sim \triangle EAF \sim \triangle EOF$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{FC}{BC} = \frac{1}{3}$$

فرض کنید $FC = x$ ، آنگاه $AD = 2x$ و $DE = 9x$

از طرفی

$$(FE)^2 = 5^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 25 + \frac{25}{9} = \frac{250}{9} \Rightarrow FE = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

$$DC = \frac{5\sqrt{10}}{3} - x - 9x = \frac{5\sqrt{10}}{3} - 10x$$

$$S_{ABCD} = 2x(-10x + \frac{5\sqrt{10}}{3}) = -20x^2 + \frac{10\sqrt{10}}{3}x \quad x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-\frac{10\sqrt{10}}{3}}{-20} = \frac{\sqrt{10}}{12}$$

بنابراین

$$S_{AED} = \frac{1}{2} (2x)(9x) = \frac{2 \times 10}{2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

گزینه ۲

سوال ۱۹:

در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می کنیم به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته های مختلف را تا جایی ادامه می دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

حل:

داریم جملات دنباله حسابی با قدر نسبت d برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{(n^2-1)d^2}{12}$$

$$\xrightarrow{n=7} \sigma^2 = \frac{(49-1)(2)^2}{12} = 14 \Rightarrow \sigma = 4 \Rightarrow \bar{x} = 8$$

بنابراین عدد وسط داده ها، ۸ است؛

۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴

حذف کوچکترین داده و اضافه کردن داده بعدی (۱۲) به مجموعه داده ها، در واقع افزایش ۲ واحدی تمام داده ها است که تأثیری بر مقدار انحراف معیار ندارد و انحراف معیار تمام دسته ها $\sigma = 4$ است.

$14 =$ مجذور انحراف معیار = میانگین داده ها دسته آخر

داده های جدید: ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۲

$$22 - 14 = 8$$

(به تمام داده ها ۸ واحد اضافه شده است)

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۲۰:

چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

۴۳۱ (۴)

۳۴۱ (۳)

۲۲۱ (۲)

۱۳۱ (۱)

حل:

عددی مضرب ۲ است که هم مضرب ۲ هم مضرب ۳ باشد. از طرفی ارقام عدد مورد نظر فقط ۱ و ۲ هستند. بنابراین رقم یکان الزاماً ۲ است و ده رقم است چپ ترکیبی از ارقام ۱ و ۲ است به طوری که مجموع ارقام این ده رقم و رقم یکان (۲)، مضرب ۳ باشد.

یکان
۲

عددی مضرب ۳ = ۲ + مجموع ده رقم است چپ

حالات مختلف ارقام است چپ :

تعداد ارقام ۱	تعداد ارقام ۲
۵	۱۰
۳	۷
۲	۴
۱	۱

$$\text{تعداد اعداد} = \binom{10}{0} + \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} = 1 + 120 + 45 + 10 = 176$$

گزینه ۳

RIAZISARA

سوال ۲۱:

یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار k ام «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+5}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۵

حل:

در n پرتاب برای اینکه برای بار k ام «رو» ظاهر شود باید در $n-1$ پرتاب قبلی $k-1$ بار «رو» ظاهر شده باشد؛

احتمال مورد نظر $\times$: $\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}}$ ؛ احتمال $k-1$ «رو» در $n-1$ پرتاب
احتمال «رو» در پرتاب n ام $\frac{1}{2}$

$$\text{احتمال } k \text{ بار رو آمدن در } n \text{ پرتاب (پرتاب آخر رو)} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}$$

$$\text{احتمال } k \text{ بار «رو» در } n \text{ پرتاب} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$\frac{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}}{\frac{\binom{n}{k}}{2^n}} = \frac{k}{k+5} \Rightarrow \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k}{k+5}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{k}{k+5} \Rightarrow n = k+5$$

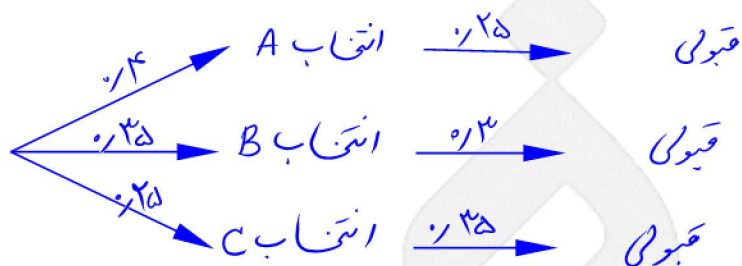
$$n+k = 2k+5 \xrightarrow{k \geq 1} \begin{cases} k=1 \rightarrow n+k=7 & \times \\ k=2 \rightarrow n+k=9 & \checkmark \end{cases} \text{گزینه ۲}$$

سوال ۲۲:

احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال $\frac{3}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{5}$ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

(۱) $\frac{20}{55}$ (۲) $\frac{29}{55}$ (۳) $\frac{20}{25}$ (۴) $\frac{29}{25}$

حل:



$$\frac{25}{4} \quad \begin{array}{r} 125 \\ 125 \\ \hline 178 \\ 178 \\ \hline 870 \end{array}$$

احتمال قبولی: $(\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}) + (\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}) + (\frac{2}{5} \times \frac{1}{5}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{29}{250}$

$\frac{29}{250} \times 100 = 11.6\%$ گزینه ۴

سوال ۲۳:

نقاط $A(-1, 4)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1-x, y+3)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

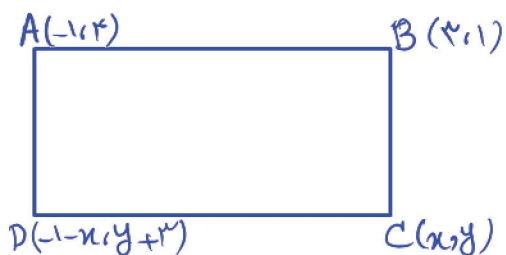
۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

حل:



$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2} = 5$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{1-4}{3+1} = -\frac{3}{4} \\ m_{CD} = \frac{-3}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{x+1} = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$BC \perp AB \Rightarrow m_{BC} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{y-1}{x-3} = \frac{4}{3} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} \frac{y-1}{\frac{3}{4}-3} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -1$$

$$BC = \sqrt{(3-\frac{3}{4})^2 + (1+1)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

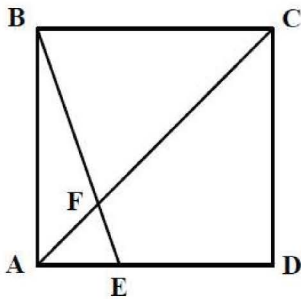
$$\text{محیط مستطیل} = 2(5 + \frac{5}{2}) = 15$$

گزینه ۳

RIAZISARA

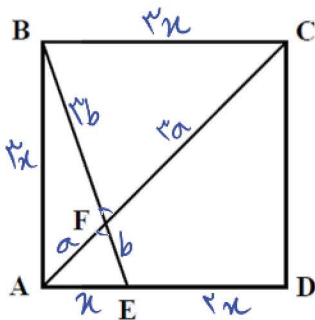
سوال ۲۴:

در مربع شکل زیر، اندازه ED دو برابر AE است. طول EF چند برابر AF است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
(۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
(۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

حل:



$$\triangle BFC \sim \triangle EFA \quad (\text{نسبت مشابه } k=3)$$

$$\frac{b}{a} = ?$$

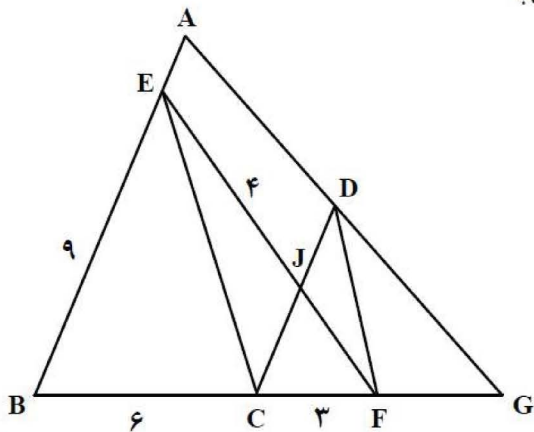
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABE: (2x)^2 + (x)^2 = (4b)^2 \Rightarrow 10x^2 = 16b^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{10}}{4}x \\ \triangle ABC: (2x)^2 + (3x)^2 = (4a)^2 \Rightarrow 13x^2 = 16a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{13}}{4}x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۲۵:

در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و $EC \parallel DF$ است. اندازه DF چقدر است؟



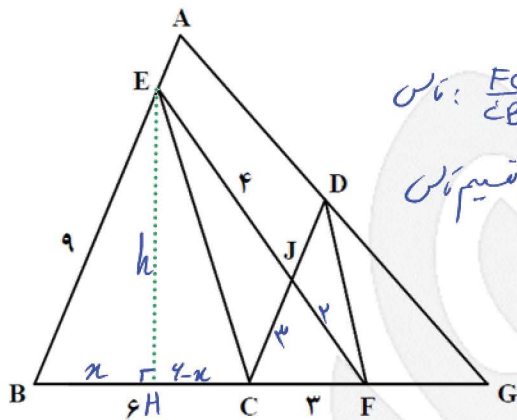
(۱) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

(۲) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{33}}{4}$

(۴) $\frac{\sqrt{33}}{2}$

حل:



(نسبت شباهت $K=2$) $\triangle ECJ \sim \triangle FDJ \Rightarrow \frac{EC}{FD} = \frac{CJ}{DJ} = \frac{FJ}{JE} \Rightarrow \frac{4}{FD} = \frac{FJ}{4} \Rightarrow FJ = 2 \Rightarrow EC \parallel DF$

تقسیم‌ها: $\frac{CJ}{BE} = \frac{FC}{FB} \Rightarrow \frac{CJ}{9} = \frac{3}{9} \Rightarrow CJ = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABH: h^2 = 11 - x^2 \\ \triangle FHC: h^2 = 34 - (4-x)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 11 - x^2 = 34 - (4-x)^2 \Rightarrow 11 - x^2 = 34 - (16 - 8x + x^2) \Rightarrow x = 7$$

$$\rightarrow h^2 = 11 - 49 = -38$$

$\triangle AHC: (CE)^2 = h^2 + (4-x)^2 = 32 + 1 = 33 \Rightarrow CE = \sqrt{33} \Rightarrow FD = \frac{1}{2} CE = \frac{\sqrt{33}}{2}$ گزینه ۴

توضیح: اطلاعات این سوال هیچ فایده‌ای ندارد زیرا در محاسبات $x=7$ به دست می‌آید که با توجه به شکل $x < 4$ است!!!

سوال ۲۶:

طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

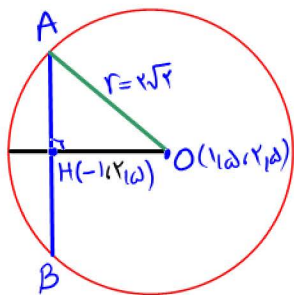
$\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳)

$\sqrt{7}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

حل:



$$f(x, y): x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow O(1.5, 2.5)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 25 - 2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$OH = \sqrt{(2.5)^2 + (0)^2} = 2.5 = \frac{5}{2}$$

$$AH^2 = (2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$AB = 2AH = 2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = \sqrt{7}$$

گزینه ۲

RIAZISARA

سوال ۲۷:

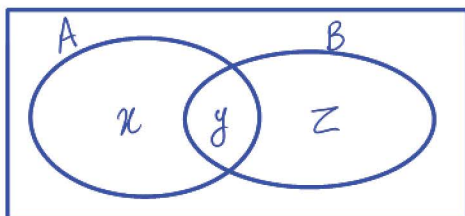
مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)



حل:

$$m - k = 14 \Rightarrow (x + y) - (y + z) = 14 \Rightarrow x - z = 14$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (x + y + z) - (y) = 20 \Rightarrow x + z = 20$$

$$\Rightarrow x = 17, z = 3$$

$$n(B - A) = z = 3$$

گزینه ۴

RIAZISARA

سوال ۲۸:

در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a^2 = 5a_3a + 2a_4a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d ، کدام می تواند باشد؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

حل:

$$2(a+d)^2 = 5(a+2d) \cdot a + 2(a+d)a$$

$$\frac{a_4}{d} = \frac{a+3d}{d} = \frac{a}{d} + 3 = ?$$

$$2(a^2 + 2ad + d^2) = 5a^2 + 10ad + 2a^2 + 2ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 4ad + 2d^2 = 7a^2 + 12ad \Rightarrow 2a^2 + 4ad - 7d^2 = 0 \xrightarrow{\div d^2} 2\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{d}\right) - 7 = 0$$

$$\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 56}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{d} = -2 \\ \frac{a}{d} = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{a_4}{d} = -2 + 3 = 1 \\ \frac{a_4}{d} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱

RIAZISARA

سوال ۲۹:

اگر $A = \{\log_q x + 3 \log_{x^2} 3 : x > 1\}$ باشد، کوچک ترین عضو مجموعه A کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{6}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۱)

حل:

$$K(x) = \log_{x^2} x + 3 \log_{x^2} 3 = \frac{1}{2} \log_x x + \frac{3}{2} \log_x 3$$

$$\log_x x = t > 0$$

$$K(t) = \frac{1}{2} t + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{t}\right)$$

$$K'(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2t^2} = 0 \rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{3} \text{ غلط} \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$K(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} (\sqrt{3}) + \frac{3}{2(\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

گزینه ۲

سوال ۳۰:

حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{y^2}{y^2 - 1} \right\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

حل:

$$y = 0 \rightarrow x = -1$$

$$y = \pm 1 \rightarrow x \text{ وجود ندارد}$$

$$f = \{(-1, 0), (2, \pm 2), (3, \pm 5)\}$$

$$y = \pm 2 \rightarrow x = 2$$

باید حداقل ۳ عضو حذف شود.

$$y = \pm 3 \rightarrow x = \frac{9}{8} \notin \mathbb{Z}$$

گزینه ۲

$$y = \pm 4 \rightarrow x = \frac{16}{15} \notin \mathbb{Z}$$

$$y = \pm 5 \rightarrow x = 3$$

$$y = \pm 6 \rightarrow x = \frac{36}{35} \notin \mathbb{Z}$$

$$y = \pm 7 \rightarrow x = \frac{49}{48} \notin \mathbb{Z}$$

$$y = \pm 8 \rightarrow x = \frac{64}{63} \notin \mathbb{Z}$$

$$y \in \{\pm 9, \pm 10, \dots\} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

RIAZISARA

حل تشریحی سوالات ریاضی کنکور سراسری گروه آزمایشی علوم تجربی
تهیه و تنظیم: عزیز اسدی (ریاضی سرا) ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

با آرزوی موفقیت و سربلندی شما عزیزان

عزیز اسدی

RIAZISARA