سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://t.me/riazisara  (@riazisara)

(۱۲۶)

برای به دست آوردن قرینه یک خط نسبت به خط $x = y$ کافیست جای x و y را عوض کنیم

$$3y - 2x = 4 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت } y=x} 3x - 2y = 4 \xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}} -2y = 4 \to y = -2$$

گزینه ۱ درست است.

(۱۲۷)

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x|$$

$$\Rightarrow \text{if}; \ x \geq 0 \longrightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \to -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 3x$$

$$\xRightarrow{\times(-2)} 2x^2 + x - 9 < -6x \to 2x^2 + 7x - 9 < 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

x		$-\frac{9}{2}$		1	
$2x^2+7x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$(-\tfrac{9}{2}, 1) \cap [0, +\infty) = (0, 1)$$

$$\text{if} \ x < 0 \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + (-x) \Rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > x$$

$$\xRightarrow{\times(-2)} 2x^2 + x - 9 < -2x \longrightarrow 2x^2 + 3x - 9 < 0 \to \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

x		-3		$\frac{3}{2}$	
$2x^2+7x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

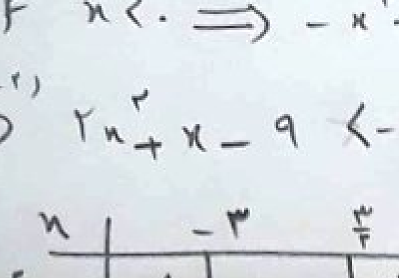
$$(-3, \tfrac{3}{2}) \cap (-\infty, 0) = (-3, 0)$$

جواب نهایی

$$(-3, 0) \cup (0, 1) = (-3, 1) - \{0\}$$

$$\text{طول نقطه وسط} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

(۱۲۸)



قضیه کسینوس ها

$$x^2 = (5-\sqrt{6})^2 + (5+\sqrt{6})^2 - 2(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 - 10\sqrt{6} + 6 + 25 + 10\sqrt{6} + 6 - 2(25-6) \times (-\tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow x^2 = 81 \longrightarrow x = 9$$

(۱۲۹)

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix} \quad A\times A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۶\\ ۹ & ۲۲\end{bmatrix}$$

مجموع اعداد = $۷+۶+۹+۲۲=۴۴$

---

(۱۳۰) میانگین به روش مستقیم

x_i	-۱۷	-۱۰	-۵	۰	۵	۱۰
f_i		۲	۶	۸	a	۴

میانگین حسابی $= \dfrac{-۱۰\times۲+(-۵)\times۵+۰\times۸+۵\times a+۱۰\times۴}{۲+۵+۸+a+۴} = \dfrac{-۲۰-۲۵+۰+۵a+۴۰}{۱۹+a}$

$$= \frac{-۵+۵a}{۱۹+a}$$

مد = میانگین حسابی

$$۱۸=\frac{-۵+۵a}{۱۹+a}+۱۷ \longrightarrow \frac{-۵+۵a}{۱۹+a}=۱ \Longrightarrow -۵+۵a=۱۹+a$$

$$\Longrightarrow ۴a=۲۴ \longrightarrow a=۶$$

درصد داده‌های نسبی $= \dfrac{\text{فراوانی}}{\text{کل}}\times۱۰۰ = \dfrac{۶}{۲۵}\times۱۰۰ = ۲۴$

---

(۱۳۱)

اصلاع $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\bar{x}$ اصلاع $= \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=۲۵$ $\Big\}\longrightarrow CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}\longrightarrow \sigma=۲۵\times۰.۰۶=۱.۵$

$CV=۱.۶$

مجذورات $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2 \Longrightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \dfrac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}=?$

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\dots x_n}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow (۱.۵)^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}-(۲۵)^2 \longrightarrow \frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}=۲.۲۵+۶۲۵$$

$$=۶۲۷.۲۵$$

(۱۳۲)

$n(S) = ۳۶$

$A = \{(۱,۳),(۲,۲),(۱,۳),(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲),(۶,۶)\}$

$n(A) = ۹$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$

---

(۱۳۳)

$\begin{cases} P>۰ \to \frac{c}{a}>۰ \to \frac{-۲}{m-۶}>۰ \to m-۶<۰ \to \boxed{m<۶} \quad (I) \\ S<۰ \to -\frac{b}{a}<۰ \to -\frac{-۲m}{m-۶}<۰ \to \frac{۲m}{m-۶}<۰ \\ \Delta>۰ \end{cases}$

	m	۰	۶
$۲m$	$-$	۰ $+$	$+$
$m-۶$	$-$	$-$	۰ $+$
	$+$	۰ $-$	$\nexists$ $+$

$\boxed{۰<m<۶} \quad (II)$

$(-۲m)^۲ - ۴(m-۶)(-۲) > ۰$

$۴m^۲ + ۱۲m - ۷۲ > ۰$

$۴(m^۲ + ۳m - ۱۸) > ۰$

	m	-۶	۳
	$+$	۰ $-$	۰ $+$

$\boxed{(-\infty,-۶) \cup (۳,+\infty)} \quad (III)$

اشتراک $(I), (II), (III) \Rightarrow (۳,۶) \Rightarrow ۳<m<۶$

---

(۱۳۴)

$\frac{\sin x \cos\frac{\pi}{۴} - \cos x \sin\frac{\pi}{۴}}{\sin x \cos\frac{\pi}{۴} + \cos x \sin\frac{\pi}{۴}} = ۲$

$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x + \cos x)} = ۲ \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = ۲$

$\frac{\div \cos x}{\text{صورت و مخرج}} \quad \frac{\tan x - ۱}{\tan x + ۱} = ۲ \to \tan x - ۱ = ۲\tan x + ۲ \to \tan x = -۳$

(۱۲۵)

$2x-3=t \rightarrow x=\frac{t+3}{2}$

$f(t)=4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2-14\left(\frac{t+3}{2}\right)+13$

$f(t)=4\left(\frac{t^2+6t+9}{4}\right)-7t-21+13$

$f(t)=t^2+6t+9-7t-21+13=t^2-t+1$

$\Rightarrow f(x)=x^2-x+1$

---

(۱۲۶)

Hop: $\lim_{x\to 4} \frac{7x-10}{\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{7(4)-10}{\frac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{4}}}\times\left(-\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)}$

$= \frac{18}{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{4}} = \frac{18}{-\frac{1}{8}} = -144$

---

(۱۲۷)

حد راست: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=a\,Log_2^{1+3}=a\,Log_2^4=a.(2)=2a$

حد چپ: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=a(2)+2^{2-3}=2a+2^{-1}=2a+\frac{1}{2}$

مقدار $f(2)=2a$

$\Rightarrow 2a+\frac{1}{2}=2a \rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$

$f(2)=(-\frac{1}{2})(2)+2^{2-3}=-2+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}=-1.5$

---

(۱۲۸)

$y'=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin x=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)$

$=4\times\frac{1}{2}\sin 2x(-\cos 2x)=-2\sin 2x\cos 2x$

$=-2\times\frac{1}{2}\sin 4x=-\sin 4x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} -\sin 4(\frac{\pi}{4})$

$=-\sin\pi=-1$

(۳۹)

$$\binom{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$p = \frac{3}{4}$

$n = 5$

$k = 4$ یا 5

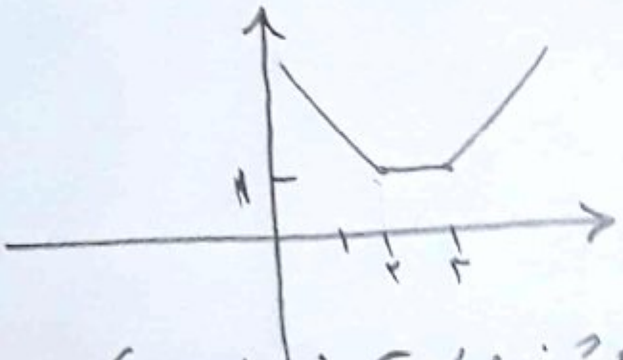
$$= 5\left(\frac{81}{256}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{243}{1024}$$

$$= \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} = \frac{648}{1024} = \frac{324}{512}$$

$$= \frac{81}{128} = \frac{162}{256}$$

---

(۴۰) نمودار تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ یک نمودار سهمی به صورت زیر است



این نمودار در بازه $(2, 5-)$ اکیداً نزولی است $(x < 2)$

$$x < 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) + (-(x-3)) = -2x + 5$$

$$f(x) = y(x) \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = -2x + 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ قبول} \\ x = \frac{5}{2} \text{ قبول} \end{cases}$$

پس دو نقطه مشترک هستند

---

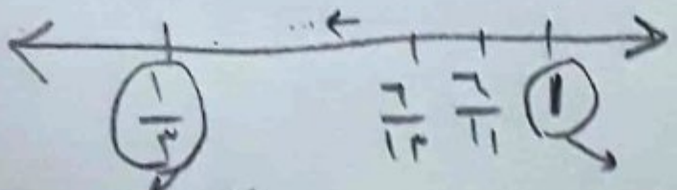
(۴۱)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

$n = 1 \rightarrow u_1 = 1$

$n = 2 \rightarrow u_2 = \frac{6}{11}$

$n = 3 \rightarrow u_3 = \frac{6}{13}$



کوچکترین فاصله با $\frac{1}{3}$

بزرگترین فاصله با 1

$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ = تفاضل (کمترین)

(۱۴۲)

$۴۰ = ۶۰ - ۵۰e^{-۰/۲۵t} \longrightarrow -۲۰ = -۵۰e^{-۰/۲۵t} \longrightarrow e^{-۰/۲۵t} = \frac{۲}{۵}$

$\ln \frac{۲}{۵} = -۰/۲۵t \longrightarrow -\ln(\frac{۵}{۲})^{-۱} = -۰/۲۵t$

$\Rightarrow -\ln ۲/۵ = -۰/۲۵t \rightarrow t = \frac{۰/۹۱}{۰/۲۵} = ۳/۶۴$

سه ماه و ۲۴ روز که می‌شود سه ماه و نوزده روز

(۱۴۳)

$\tan x \cdot \tan ۲x = ۱ \longrightarrow \tan ۲x = \frac{۱}{\tan x} \longrightarrow \tan ۲x = \cot x$

$\rightarrow \tan ۲x = \tan(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۲x = k\pi + (\frac{\pi}{۲} - x)$

$\Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

(۱۴۴)

پیوستگی
$\begin{cases} -۲^+: \ ۴a - ۲b + ۴ \\ -۲^-: \ -۸ - (-۲) = -۸ + ۲ = -۶ \Rightarrow ۴a - ۲b + ۴ = -۶ \\ f(-۲) = ۴a - ۲b + ۴ \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{۴a - ۲b = -۱۰}$

مشتق‌پذیری
$\begin{cases} ۲ax + b \longrightarrow f'(-۲^+) = -۴a + b \\ ۳x^۲ - ۱ \quad f'(-۲^-) = ۱۱ \end{cases} \longrightarrow \boxed{-۴a + b = ۱۱}$

$\begin{cases} ۴a - ۲b = -۱۰ \\ -۴a + b = ۱۱ \end{cases}$

$-b = ۱ \rightarrow b = -۱ \ , \ a = -۳$

$f(-۱) = -۳(۱)^۲ + (-۱)(۱) + ۴ = -۳ - ۱ + ۴ = ۰$

(۱۴۵)

$\frac{۱۴x - ۲y'}{۲\sqrt{۷x^۲ - ۲y}} + ۲yy' = ۰ \xrightarrow{(۱,۳)} \frac{۱۴ - ۲y'}{۲} + ۶y' = ۰$

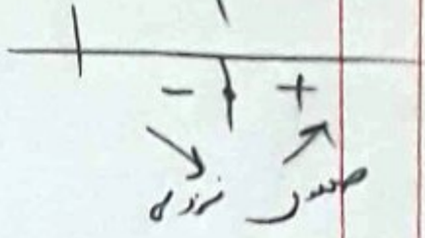
$\times ۲ \quad ۱۴ - ۲y' + ۱۲y' = ۰ \rightarrow ۱۰y' = -۱۴ \rightarrow y' = -\frac{۷}{۵}$

شیب خط قائم برابر $\frac{۵}{۷}$ (وارونه و معکوس)

(۱۴۴)

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2} - 4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

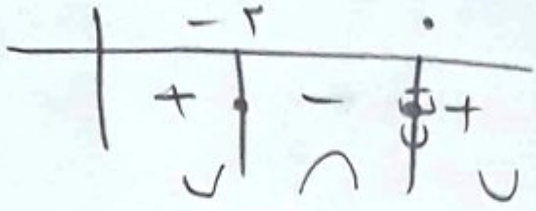
$$= \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{همواره مثبت} \qquad \rightarrow 4x-4=0 \rightarrow x=1$$



بازه‌ی نزولی $(-\infty, 1)$

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4x^{-\frac{2}{3}}}{9} + \frac{8}{9x^{\frac{5}{3}}} = \frac{4x+8}{9x^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{4x+8}{9x\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{گواهیت}$$

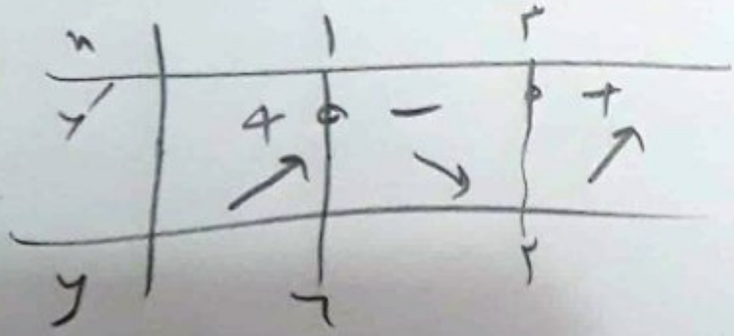


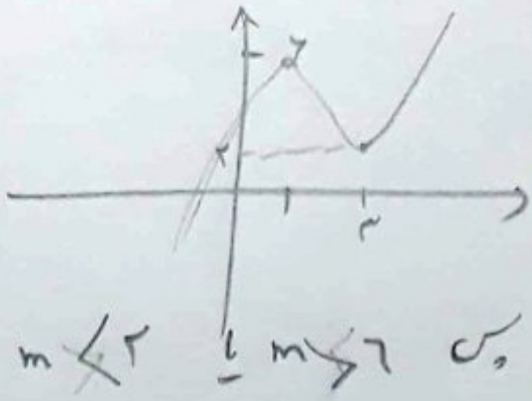
در بازه‌ی $(-2, 0)$ همواره تقعر رو به پایین

اشتراک: $(-\infty, 1) \cap (-2, 0) = (-2, 0)$

۱۴۷

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$





پس $m > 6$ یا $m < 2$

۱۴۸

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(\ )^2}$$

$$(x-3)^2+(y-6)^2 = 4(x^2+y^2)$$

$$x^2-6x+9+y^2-12y+36 = 4x^2+4y^2$$

$$-3x^2-6x+9-3y^2-12y+36=0$$

$$-3x^2-6x-3y^2-12y+45=0$$

چون ضریب x^2 و y^2 باهم برابر است پس یک دایره داریم دنبال طول قطر است

$$\xrightarrow{\div(-3)} x^2+2x+y^2+4y-15=0$$

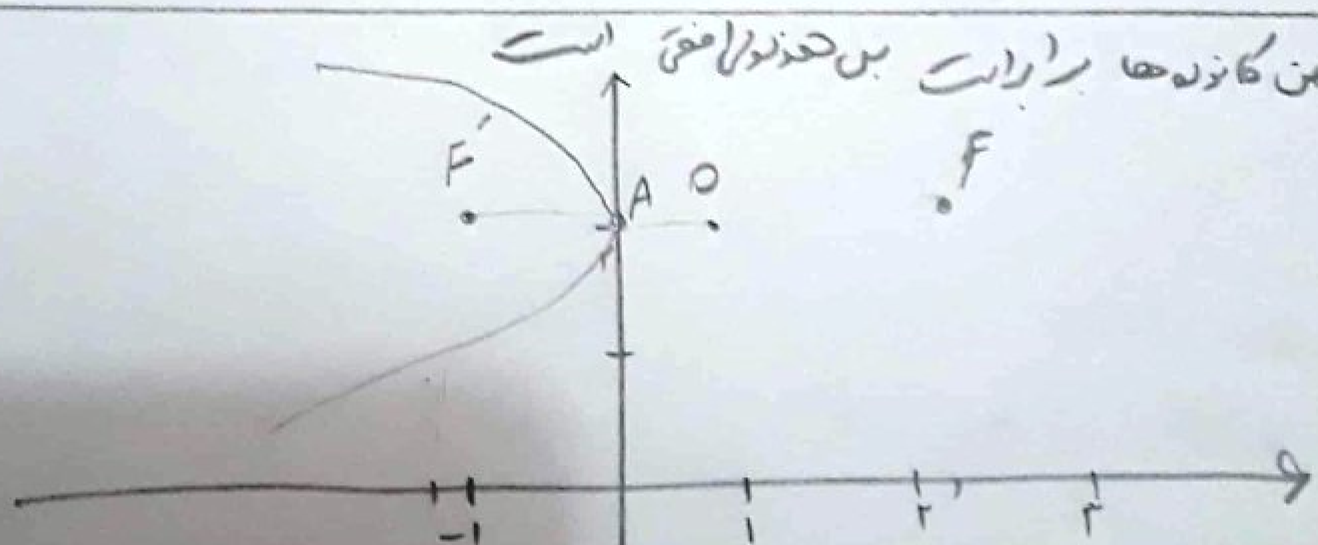
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4(15)} = \frac{1}{2}\sqrt{80}$$

$$= \frac{1}{2}\times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{قطر} = 2r = 2\times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

---

۱۴۹ چون عرض کانون‌ها برابر است پس هذلولی افقی است



$$FF' = 2c \to (1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5}) = 2c \to c=\sqrt{5}$$

$$O = \left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1,2) \to OA = a \to \boxed{a=1}$$

ادامه سوال ۱۴۹

$c^2 = a^2 + b^2$

$5 = 1 + b^2 \rightarrow b = 2$

معادله هذلولی افقی

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

شیب مجانب‌های هذلولی افقی $\pm\frac{b}{a}$ است پس

$m = + \frac{2}{1} = 2$

مرکز هذلولی محل تلاقی مجانب‌ها است

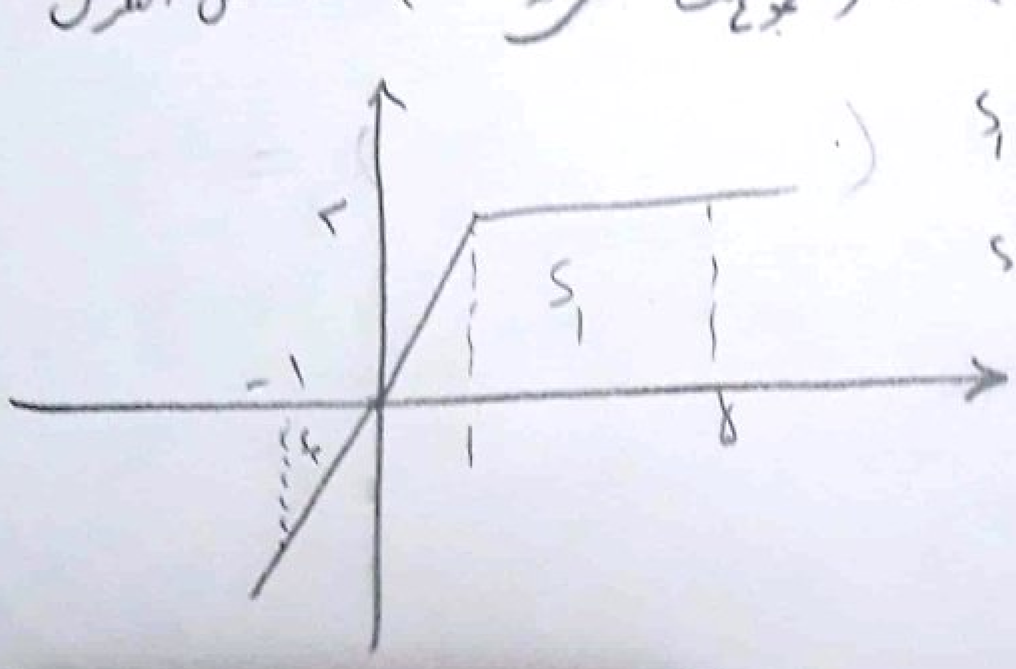
$O(1, 2)$

معادله مجانب هذلولی

$y - 2 = 2(x-1) \rightarrow y = 2x$

---

۱۵۰) (مجموع مساحت‌ها زیر محورها) − (مجموع مساحت بالای محورها) = حاصل انتگرال



$S_1 = \frac{1}{2}(5+4) \times 3 = 13.5$

$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$

حاصل انتگرال $= 13.5 - 1.5 = 12$

---

۱۵۱) $\int_1^4 \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{2x^3}{x^2} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int 2x\,dx - \int x^{-\frac{3}{2}} dx$

$= x^2 - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = x^2 + 2x^{-\frac{1}{2}} = x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} \Big]_1^4 = (16+1) - (1+2)$

$= 17 - 3 = 14$