



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

۱۲۶- گزینه ۴

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_1 = 1$$

$$\text{if } n=2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$\text{if } n=3 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$

$$\text{if } n=4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \dots$$

یعنی هر جمله این دنباله برابر است با دو برابر جمله ی مقابل اش به اضافه یک ، که جمله عمومی دنباله فوق $t_n = 2^n - 1$ می باشد .

۱۲۷- گزینه ۳

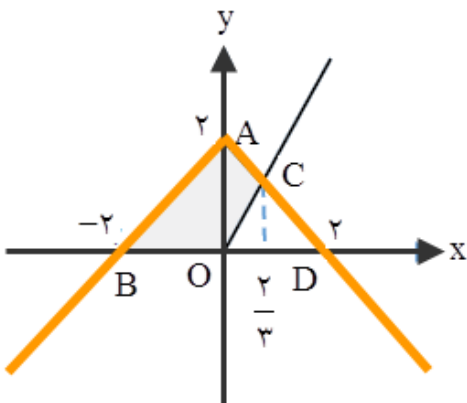
با استفاده از تعریف قدر مطلق ، ضابطه های دو تابع را به صورت زیر می نویسیم .

$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} 2x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & , x \geq 0 \\ 2 + x & , x < 0 \end{cases}$$

محل تلاقی دو نمودار $2x = 2 - x \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$ می باشد

و بنابر این داریم :

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$



۱۲۸- گزینه ۴

$$\log_2\left(\frac{2x^2+1}{x+2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 2^1 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log_8(2x-1) = \log_8 4 = \log_8 2^2 = \frac{2}{3} \log_8 2 = \frac{2}{3} \quad \text{جواب } x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول است . لذا داریم :}$$

۱۲۹- گزینه ۱

$$(A.B) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad |AB| = (-8)(3) - (4)(-7) = 4$$

$$(A.B)^{-1} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ +7 & -8 \end{bmatrix}$$

۱۳۰ - گزینه ۲

ابتدا زاویه مربوط به گروه خونی نامعلوم به صورت زیر به دست می آوریم :

$$70^{\circ} + 75^{\circ} + 100^{\circ} + 35^{\circ} = 280^{\circ} \Rightarrow 360^{\circ} - 280^{\circ} = 80^{\circ}$$

$$\frac{32}{80^{\circ}} = \frac{N}{360^{\circ}} \Rightarrow N = 144 \text{ نفر}$$

حال تعداد کل افراد را حساب می کنیم .

$$\frac{75^{\circ}}{360^{\circ}} \times 144 = 30 \text{ نفر}$$

تعداد افراد مربوط به گروه خونی B را حساب می کنیم .

۱۳۱ - گزینه ۳

$$CV = \frac{\delta}{\bar{x}} \Rightarrow 0.2 = \frac{\delta}{15} \Rightarrow \delta = 3 \Rightarrow \delta^2 = 9$$

$$\delta^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow 9 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (15)^2 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = 225 + 9 = 234$$

۱۳۲ - گزینه ۲

$$n(S) = \boxed{5} \boxed{4} \boxed{3} = 60$$

$$A = \{\boxed{123}, \boxed{135}, \boxed{234}, \boxed{345}\} \Rightarrow n(A) = 4 \times 3! = 24$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0.4$$

۱۳۳ - گزینه ۲

$$\frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 \Rightarrow |2-x| > |2x-3| \Rightarrow (2-x)^2 > (2x-3)^2 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{3} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

روش دوم : برای سریع تر به جواب برسیم مقدار گذاری بهتر است .

۱۳۴ - گزینه ۱

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

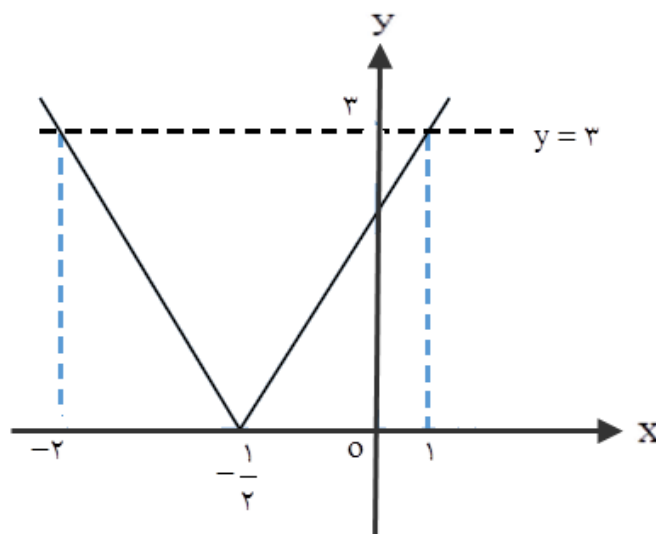
۱۳۵ - گزینه ۳

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

$$(g \circ f)(x) = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$



۱۳۶ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + |2x|}{2x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(a+2)}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{-3 + 3}{-2 + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{5}{6}$$

۱۳۷ - گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos x}}{\cos x + \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\cos x + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\cos x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{(1 + \cos x)(\cos x + \sqrt{\cos x})} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

روش دوم: می توان از قاعده هوییتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{2 \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(-1 + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}})}{2 \sin x \cdot \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1 + \frac{1}{2\sqrt{\cos x}})}{2 \cos x} = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

۱۳۸ - گزینه ۱

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 = \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{-1}{(2x-3)^2} \right) \times \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^{\frac{3}{2}-1}$$

$$f'(2) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{-1}{1} \right) \times (4)^{\frac{1}{2}} = -21$$

۱۳۹ - گزینه ۴

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0/9 + 0/8 - (0/9 \times 0/8) = 0/98$$

۱۴۰ - گزینه ۴

$$P(x=4) = \binom{6}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^4 \left(\frac{1}{4} \right)^2, \quad P(x=3) = \binom{6}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^3 \left(\frac{1}{4} \right)^3$$

$$\frac{P(x=4)}{P(x=3)} = \frac{\binom{6}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^4 \left(\frac{1}{4} \right)^2}{\binom{6}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^3 \left(\frac{1}{4} \right)^3} = \frac{15 \times \frac{3}{4}}{20 \times \frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

۱۴۱ - گزینه ۳

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

۱۴۲ - گزینه ۳

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}, \quad 0 < q < 1$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(a_2 + a_3 + \dots + a_n) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n - a_1) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}(S_n - a_1)$$

$$2a_1 = S_n - a_1 \Rightarrow S_n = 3a_1 \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = 3a_1 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

۱۴۳ - گزینه ۱

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(-2)(2) = 25$$

$$\cos x = \frac{-3 + 5}{2(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = \frac{-3 - 5}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۱۴۴ - گزینه ۲

$$A \Big|_{4/5}^0 \quad B \Big|_{\alpha^2}^{\alpha}, \quad m'_{AB} = \frac{\alpha^2 - 4/5}{\alpha - 0}, \quad m = 2\alpha$$

$$P = -1 \Rightarrow \frac{\alpha^2 - 4/5}{\alpha} \times 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

۱۴۵ - گزینه ۳

$$y = x \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m' = -1, \quad x + \sqrt{xy} + y - 12 = 0$$

$$f'(x, y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1} = -1 \Rightarrow 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1 \Rightarrow y = x$$

$$x + \sqrt{x^2} + x = 12 \Rightarrow 2x + |x| = 12 \stackrel{y=x}{\Rightarrow} 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$
 چون خط $y = x$ نیمساز ربع اول می باشد.

۱۴۶ - گزینه ۲

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

چون جواب $x = 5$ در بازه $[-4, 3]$ قرار ندارد پس قابل قبول نیست.

$$\max = f(-3) = 27 \quad f(-4) = \frac{68}{3} \quad \min = f(3) = -45$$

۱۴۷ - گزینه ۳

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Big|_{-4}^0 \Rightarrow (-4)^4 + 3a(-4)^2 + 0 = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = x^4 + 4x^3$$

$$f'(x) = 4x^2 + 12x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 4x(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\min = f(-3) = (-3)^2(-3+4) = -27$$

۱۴۸ - گزینه ۱

$$O \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad x-y-1=0 \quad R=d=\frac{|1(2)+(-1)(-1)+(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + (0+1)^2 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۱۴۹ - گزینه ۴

$$kx^2 - 2(y-1)^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2}{k}} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{k} \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{2}{k}}} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{1 + \frac{k}{2}} \Rightarrow 3 = 1 + \frac{k}{2} \Rightarrow k = 4$$

۱۵۰ - گزینه ۴

روش اول: نمودار دو تابع را به صورت جداگانه رسم کرده و مساحت هر کدام را حساب میکنیم.

$$\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx = \int_{-1}^1 |3x| dx - \int_{-1}^1 [x] dx = (2 \times \frac{1 \times 3}{2}) + (1 \times 1) = 3 + 1 = 4$$

روش دوم:

$$\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx = \int_{-1}^0 (|3x| - [x]) dx + \int_0^1 (|3x| - [x]) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-3x + 1) dx + \int_0^1 (3x + 0) dx = \left(-\frac{3x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 4$$

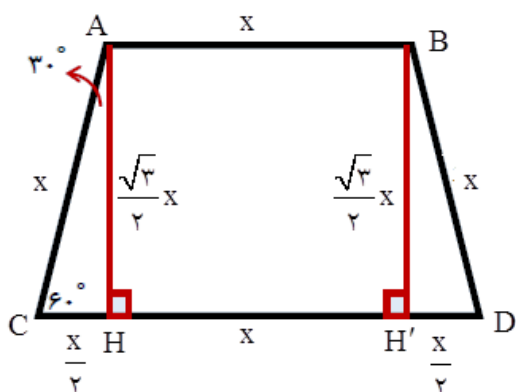
۱۵۱ - گزینه ۱

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+x)}{x^2} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^2 + (x-1)(\sqrt{x}) - x}{x^2} dx = \int \frac{x + (x-1)(\sqrt{x}) - x}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}) dx = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \frac{1}{\sqrt{x}}(2x + 2) + C$$

۱۵۲ - گزینه ۲

نکته: در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه ی 30° برابر نصف وتر و ضلع روبرو به زاویه ی 60° برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.



$$P = 30$$

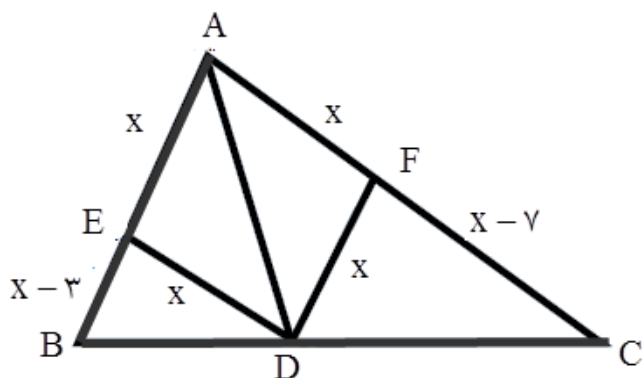
$$x + x + x + \frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} = 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$S = \frac{(6+12) \times 3\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

۱۵۳ - گزینه ۴

از نقطه D دو خط عمود بر اضلاع قائمه مثلث ABC رسم می کنیم. لذا چهار ضلعی ADEF یک مربع است و AD قطر آن می باشد.



$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$\triangle ABC \approx \triangle DFC \Rightarrow \frac{AB}{DF} = \frac{AC}{FC} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{7}{7-x}$$

$$\Rightarrow x = 2/1$$

$$AD = x\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$$

۱۵۴ - گزینه ۲

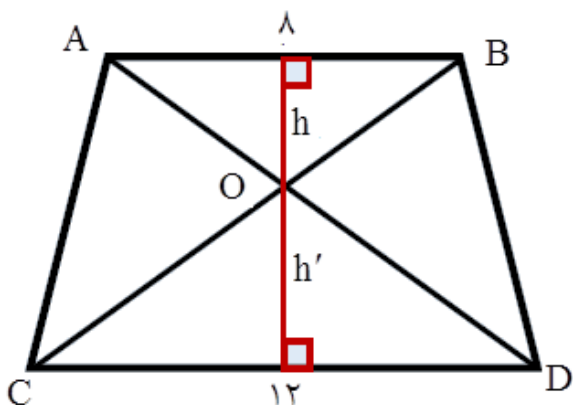
با استفاده از قضیه خطوط موازی $\triangle AOB \approx \triangle DOC$ می باشند.

$$\triangle AOB \approx \triangle DOC \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{1}{12} \Rightarrow h' = \frac{3}{2}h$$

$$h + h' = 10 \Rightarrow h + \frac{3}{2}h = 10 \Rightarrow h = 4 \Rightarrow h' = 6$$

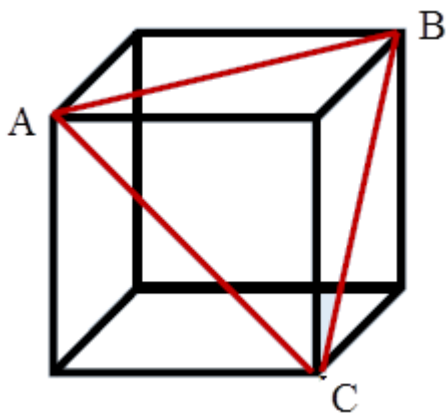
$$S_{\triangle AOB} = \frac{1 \times 4}{2} = 16, \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1 \times 10}{2} = 40$$

$$S_{\triangle BOD} = 40 - 16 = 24$$



۱۵۵ - گزینه ۴

چون سه ضلع مثلث قطره‌های وجه مکعب هستند پس مثلث ABC متساوی الاضلاع می باشد .



$$AB = AC = BC = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (32) = 8\sqrt{3}$$

(سید علی موسوی ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)

ایمیل: seyedalimousavi48@gmail.com