سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

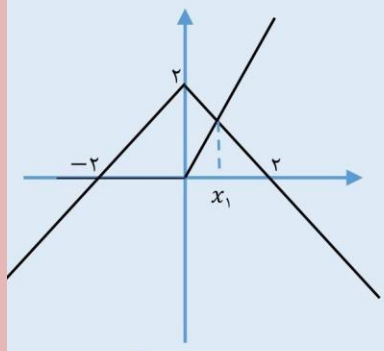
کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

۱۲۶-

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1, a_2 = 3 = 2^2 - 1, a_3 = 7 = 2^3 - 1, \dots, a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

۱۲۷-



$$x > 0 \to 2 - x = x + x \to x_1 = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

۱۲۸-

$$\log_3 2x^2 + 1 - \log_3 x + 2 = 1 = \log_3 \frac{2x^2 + 1}{x + 2} \to 3 = \frac{2x^2 + 1}{x + 2} \to 2x^2 - 3x - 5 = 0 \to x = -1, \frac{5}{2}$$

$$\log_8 2x - 1 = \log_8 2 \times \frac{5}{2} - 1 = \log_8 4 = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$$

۱۲۹-

$$(A \times B)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

۱۳۰-

$$d_{\text{نامعلوم}} = 360^\circ - \left(100^\circ + 35^\circ + 70^\circ + 75^\circ\right) = 80^\circ \to \overbrace{x_{\text{نامعلوم}}}^{32} = \frac{80}{360} \times x_{\text{کل}} \to x_{\text{کل}} = 144$$

$$x_B = \frac{75}{360} \times 144 = 30$$

۱۳۱-

$$\bar{x} = E(x_i) = 15, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \to \sigma = 3 \to \sigma^2 = E\left(x_i^2\right) - E(x_i)^2 \to E\left(x_i^2\right) = 3^2 + 15^2 = 234$$

۱۳۲-

تعداد کل حالات برابر $\binom{5}{3} = 10$ خواهد بود (برداشت کارت بدون اهمیت دادن به ترتیب آن)

زمانی عدد سه کارت برداشته شده مضرب ۳ است، که مجموعه ارقام بر۳ بخش‌پذیر باشد. کل حالت‌های مطلوب را می‌شماریم:

۱و۲و۳ - ۲و۴و۳ - ۳و۴و۵ - ۱و۳و۵ : در مجموع ۴ حالت. پس: $P = \frac{4}{10}$

۱۳۳-

$$\left|\frac{2 - x}{2x - 3}\right| > 1 \to |2 - x| > |2x - 3| \to (2 - x)^2 > (2x - 3)^2 \to x^2 - 4x + 4 > 4x^2 - 12x + 9$$
$$\to 3x^2 - 8x + 5 < 0$$

ریشه‌های معادله برابرند با: $\frac{5}{3}, 1$ علامت بین دو ریشه منفی خواهد بود، لذا: $1 < x < \frac{5}{3}$

۱۳۴-

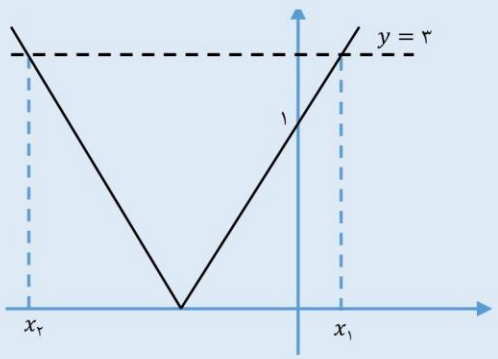
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-2\alpha) = -2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2} \overset{\text{توان دو}}{\Longrightarrow} \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \to -2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{4}$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵-

$$gof(x) = \sqrt{۴(x^۲ + x) + ۱} = \sqrt{(۲x + ۱)^۲} = |۲x + ۱| = ۳$$
$$\rightarrow x_۱ = ۱ , x_۲ = -۲$$



$$S = \frac{(۳) \times (۱ + ۲)}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

۱۳۶-

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax + \sqrt{۴x^۲ + ۵}}{۲x + ۲} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + \sqrt{۴x^۲}}{۲x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(a + ۲)x}{۲x} = \frac{۵}{۲} \rightarrow a = ۳$$

$$\lim_{x \to -۱} f(x) = \frac{۰}{۰} \overset{\text{هوپیتال}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -۱} \frac{a + \frac{۸x}{۲\sqrt{۴x^۲ + ۵}}}{۲} = \frac{a + \frac{-۸}{۲ \times ۳}}{۲} = \frac{۵}{۶}$$

۱۳۷-

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = a = \lim_{x \to ۰} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{\cos x}\,(\sqrt{\cos x} - ۱)}{۱ - \cos^۲ x} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{\cos x}\,(\sqrt{\cos x} - ۱)}{(۱ + \cos x)\,(۱ - \sqrt{\cos x})(۱ + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{-\sqrt{\cos x}}{(۱ + \cos x)\,(۱ + \sqrt{\cos x})} = -\frac{۱}{۴}$$

۱۳۸-

بنا به تعریف مشتق، حاصل حد داده شده برابر مشتق تابع f در نقطه‌ی $x = ۲$ خواهد بود:

$$f'(x) = ۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲ \left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)' = ۳\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\right)\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)' =$$

$$۳\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{x+۲}{۲x-۳}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\right)\left(\frac{(۲x-۳) - ۲(x+۲)}{(۲x-۳)^۲}\right) \rightarrow f'(۲) = ۳ \times ۴ \times \left(\frac{۱}{۲}(۴)^{-\frac{۱}{۲}}\right)\left(\frac{-۷}{۱}\right) = -۲۱$$

۱۳۹-

دو پدیده مستقل داریم، پس $P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{۹}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{۷۲}{۱۰۰}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۹}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰} - \frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{۹۸}{۱۰۰}$$

۱۴۰-

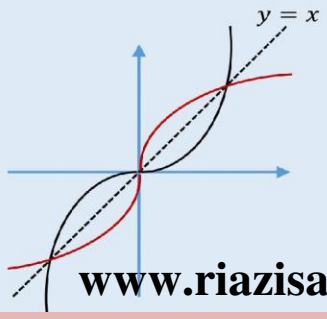
$$P(x = ۳) = \binom{۶}{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^۳ = ۲۰ \times \frac{۳^۳}{۴^۶} \quad , P(x = ۴) = \binom{۶}{۴}\left(\frac{۳}{۴}\right)^۴\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ = ۱۵ \times \frac{۳^۴}{۴^۶}$$

$$\frac{P(x = ۴)}{P(x = ۳)} = \frac{۱۵ \times \frac{۳^۴}{۴^۶}}{۲۰ \times \frac{۳^۳}{۴^۶}} = \frac{۱۵ \times ۳}{۲۰} = \frac{۹}{۴}$$

۱۴۱-

شکل نمودار را کشیده و نسبت به خط $y = x$ تقارن می‌دهیم:

$$x > ۰ \rightarrow f(x) = x^۲ , x < ۰ \rightarrow f(x) = -x^۲$$



www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۲-

دنباله نزولیست پس $0 < q < 1$، لذا $q^n = 0 \ (n \to +\infty)$.

ضمناً هر جمله نصف مجموع جملات بعدی است، پس:

$$t_1 = \frac{1}{2}(t_2 + t_3 + \cdots + t_n) = \frac{1}{2}(S_n - t_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1(1-q^n)}{1-q} - t_1\right) \to 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) \to q = \frac{2}{3}$$

۱۴۳-

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 = 2(1-\cos^2 x) + 3\cos x \to 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \to \cos x = -\frac{1}{2}, 2$$

$$\to \cos x = -\frac{1}{2} \to x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \to x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

۱۴۴-

نقطه‌ی پای عمود را (a, a^2) می‌نامیم$(a > 0)$. مشتق در این نقطه از منحنی برابر است با $2a$. لذا شیب خط عمود خواهد شد:

$$-\frac{1}{2a}$$

$$m = -\frac{1}{2a} = \frac{a^2 - \frac{9}{2}}{a - 0} \to -\frac{1}{2} = a^2 - \frac{9}{2} \to a = 2$$

۱۴۵-

خط مماس بر منحنی عمود بر نیمساز ربع اول است، پس شیب خط برابر -1 خواهد بود، یعنی: $y' = -1$. از معادله منحنی مشتق می گیریم:

$$1 + \frac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} + y' = 0 = 1 + \frac{y - x}{2\sqrt{xy}} - 1 \to y = x$$

عبارت به دست آمده را در معادله منحنی جایگزین می کنیم:

$$x + \sqrt{xy} + y = 12 = x + \sqrt{x^2} + x \to 2x + |x| = 12 \to x = 4$$

۱۴۶-

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = (x-1)^2 - 16 = 0 \to x = -3, 5$$

$$f(-3) = 27, f(-4) = \frac{68}{3}, f(3) = -45 \to min = -45, max = 27$$

۱۴۷-

$$f(-4) = 0 = (-4)^4 + a(-4)^3 + b(-4) \to 16a + b = 64$$

$$f'(0) = 0 = 4x^3 + 3ax^2 + b \to b = 0 \to a = 4$$

برای یافتن مینیمم مشتق را برابر صفر قرار می‌دیم:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0 \to x = -3 \to f(-3) = (-3)^4 + 4(-3)^3 = -27$$

۱۴۸-

شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز یعنی نقطه‌ی $(2, -1)$ تا خط $l: x - y - 1 = 0$:

$$r = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \to C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2 = 2, \quad y = 0 \to (x-2)^2 = 1 \to x = 1, 3$$

۱۴۹-

$$kx^2 - 2y^2 + 4y = 4 \to kx^2 - 2(y-1)^2 = 2 \to \frac{x^2}{\frac{2}{k}} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \to a^2 = \frac{2}{k}, b^2 = 1 \to c^2 = a^2 + b^2$$

$$= \frac{k+2}{k} \to e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{k+2}{k}}}{\sqrt{\frac{2}{k}}} = \sqrt{\frac{k+2}{2}} = \sqrt{3} \to k = 4$$

۱۵۰-

$$\int_{-1}^{1} (|3x| - [x])dx = 2\int_{0}^{1} 3x \ dx - \int_{-1}^{0} -dx = (3x^2)_0^1 - (-1) = 4$$

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

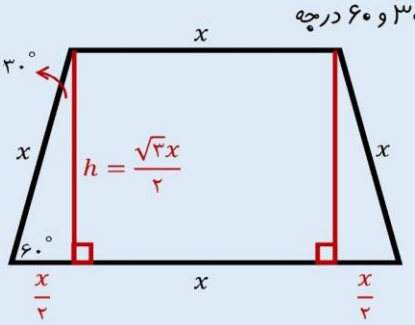
۱۵۱-

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2}dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int (x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}})\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}+C = 2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(2x+2)+C \to f(x) = 2x+2$$

۱۵۲-

شکل رو می‌کشیم، همه چیز مشهود است! با استفاده از ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ی ۳۰ و ۶۰ درجه



طول قاعده‌ی بزرگ رو به دست می‌آریم. محیط برابر است با:

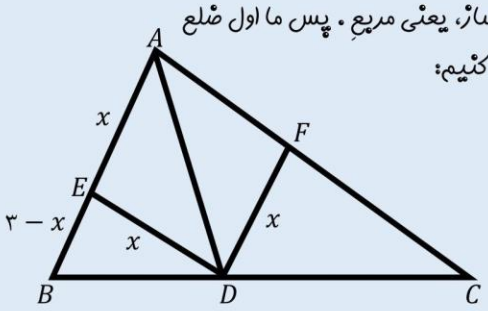
$$4x + 2\times\frac{x}{2} = 5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

مساحت برابر است با: $S = \frac{3\sqrt{3}(6+12)}{2} = 27\sqrt{3}$

۱۵۳-

راه اول: آخی! چه طراح خوبی. خواسته با شکلی که داده شمارو راهنمایی کنه!!! هر چند بدون این راهنمایی هم می‌شه سؤال رو حل کرد، اما طراح ممنون...!

خط DE موازی AC خط DF موازی AB رسم شده (خودمون فهمیدیم)، پس $AEDF$ متوازی‌الاضلاع و چون $\hat{A} = 90^\circ$، پس $AEDF$ مستطیل می‌شه. AD قطر این مستطیل! پس یه مستطیل داریم که قطرش شده نیمساز، یعنی مربع. پس ما اول ضلع مربع رو به دست می‌آریم و بعد قطرش رو ... . ضلع مربع رو x می‌نامیم و از تالس استفاده می‌کنیم:



$$ED||AC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{3-x}{3} = \frac{x}{7} \Rightarrow$$

$$21 - 7x = 3x \Rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{21}{10}\sqrt{2} = 2/1\sqrt{2}$$

راه دوم: این راه رو بیش‌تر بچه‌های ریاضی می‌فهمن.

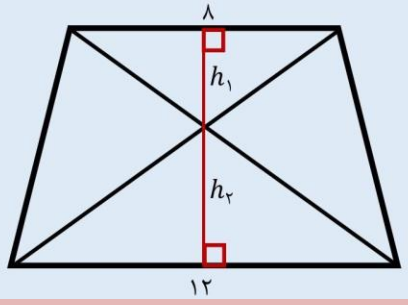
$$BC = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}\ , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{3}{10} = \frac{BD}{\underbrace{BC}_{\sqrt{58}}} \Rightarrow BD = \frac{3\sqrt{58}}{10}\ , CD = \frac{7\sqrt{58}}{10}$$

$$AD = \sqrt{AB.AC - BD.DC} = \sqrt{3\times 7 - \frac{3\sqrt{58}}{10}\times\frac{7\sqrt{58}}{10}} = \sqrt{21 - \frac{21\times 58}{100}} = \sqrt{\frac{21\times 100 - 21\times 58}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{21\times 42}{100}} = \sqrt{\frac{21\times 21\times 2}{100}} = \frac{21}{10}\sqrt{2}$$

۱۵۴-

می‌دونیم در هر ذوزنقه مثلث‌های پایین و بالایی متشابه هم هستن و دو مثلث مجاور به ساق‌ها، هم‌مساحتن.



$$S_{\text{کل}} = \frac{10(8+12)}{2} = 100\ , \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h_1}{\underbrace{h_1+h_2}_{10}} = \frac{2}{5} \Rightarrow h_1 = 4\ , h_2 = 6$$

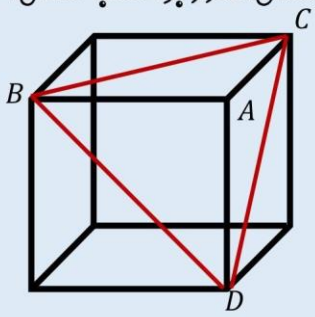
$$\Rightarrow S_{\text{مثلث بالا}} = \frac{4\times 8}{2} = 16\ , S_{\text{مثلث پایین}} = \frac{6\times 12}{2} = 36$$

$$\Rightarrow S_{\text{مثلث مجاور ساق}} = \frac{100-16-36}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۵-

با کمی هوشمندی می‌بینیم سؤال از ما مساحت مثلث BCD رو می‌خواد که البته متساوی‌الاضلاع! چون هر سه ضلعش، قطر وجوه مکعب هستن.



$$BC = CD = BD = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴\sqrt{۲})^{۲} = ۸\sqrt{۳}$$

مهندس پیمان باب اله زاده
مدرس ریاضیات کنکور _ دبیرستان _دانشگاه **(شهر بابل 09118988970)**

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا