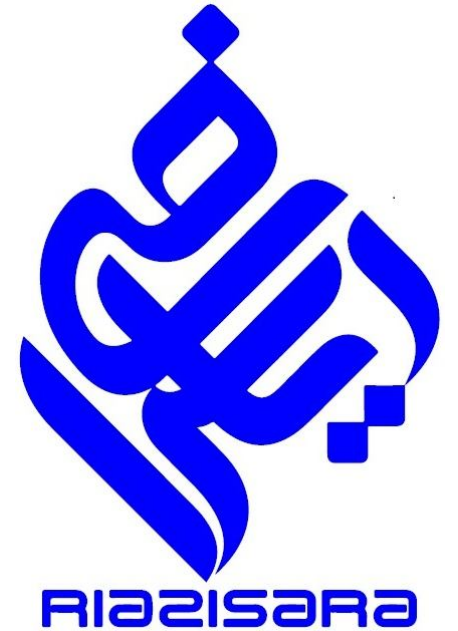




حل تشریحی سوالات
کنکور تیر ماه 1403

گروه آزمایشی ریاضی و فنی
(نوبت دوم)



تهیه و تنظیم: عزیز اسدی

دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر $x+1$ ، $x-1$ ، $2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

$$r = \frac{x}{2x+1} = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 + x \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \\ x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow r_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \end{cases} \rightarrow r_1 \cdot r_2 = \frac{-2}{4 - 2} = -1$$

در خصوص گزاره منطقی $((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ، کدام مورد صحیح است؟

(۱) همواره درست است. ✓

(۲) همواره نادرست است.

(۳) تنها وقتی درست است که p درست باشد.

(۴) تنها وقتی درست است که q نادرست باشد.

$$\begin{aligned}
 & [(\sim p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (\sim p \vee r) \\
 & \equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge r] \vee (\sim p \vee r) \\
 & \equiv (p \wedge \sim q) \vee \underbrace{\sim r} \vee \underbrace{\sim p} \vee r \\
 & \equiv \underbrace{(\sim r \vee r)}_T \vee [(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \equiv T
 \end{aligned}$$

اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $[-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۲۴/۷۵ (۴)

✓ ۲۳/۲۵ (۳)

۱۴/۲۵ (۲)

۱۳/۷۵ (۱)

$$x_s = 2/5 \rightarrow \frac{-a}{-10} = 2/5 \rightarrow a = 25$$

$$y_s = -5\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 25\left(\frac{5}{2}\right) - 8 = \frac{-125}{2} + \frac{125}{2} - 8 = \frac{-125 + 125 - 16}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

اگر $\Gamma(X)$ باقیمانده تقسیم $2 - X^{14}$ بر $X^2 + X + 1$ باشد، مجموع ضرایب چند جمله‌ای $\Gamma(X)$ کدام است؟ ($X \neq 1$)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۴ ✓

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -x - 1 \quad (1)$$

$$\underbrace{(x^2 + x + 1)}_{=0} (x - 1) = 0 \rightarrow x^3 - 1 = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x^{14} = (x^3)^4 \cdot x^2 = 1 \times x^2 = x^2 \rightarrow 2 - x^{14} = 2 - x^2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \Gamma(x) = 2 - (-x - 1) = x + 3$$

مجموع ضرایب = ۴

برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگ‌تر از -3 است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۳ ✓

(۱) ۴

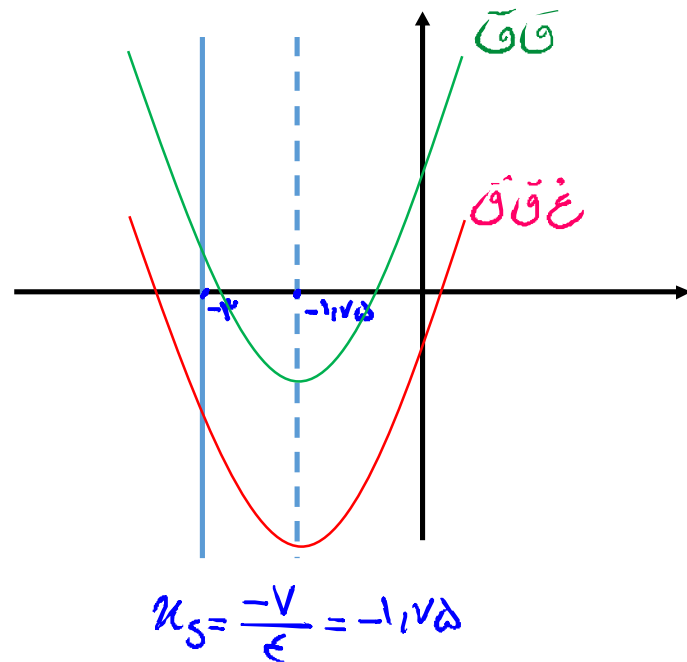
برای اینکه معادله دو ریشه داشته باشد باید $\Delta > 0$
 مطابق شکل حواره یکی از ریشه‌ها معادله از -3 بزرگتر است. برای اینکه ریشه دیگر نیز از -3 بزرگتر باشد،

باید $f(-3) > 0$
 ②

① $\rightarrow 49 - 14m > 0 \rightarrow m < \frac{49}{14} = 3.5$

② $\rightarrow 2(-3)^2 + 7(-3) + m > 0 \rightarrow m > 3$

$\rightarrow m \in \{4, 5, 6\}$



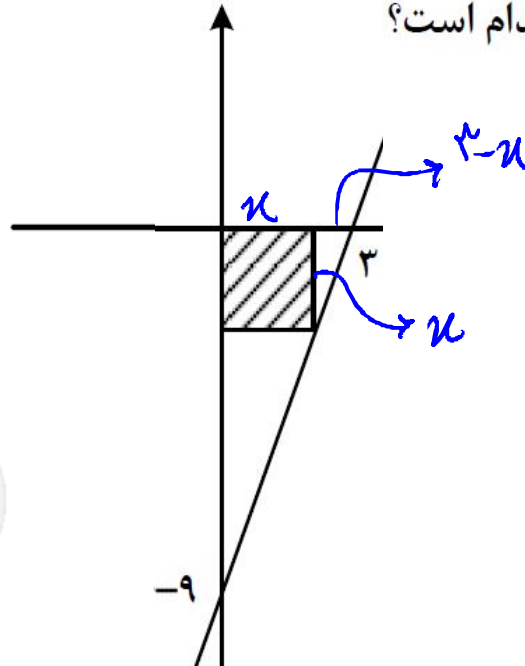
در شکل زیر، قطر مربع هاشور خورده، کدام است؟

(۱) $2/5\sqrt{2}$

(۲) $3/5\sqrt{2}$

(۳) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$ ✓

(۴) $\frac{9}{\sqrt{2}}$



تصمیمات: $\frac{3-x}{x} = \frac{x}{9}$

ضلع مربع $\rightarrow x = \frac{9}{4}$

قطر مربع $= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{142}{14}} = \sqrt{\frac{11}{1}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$

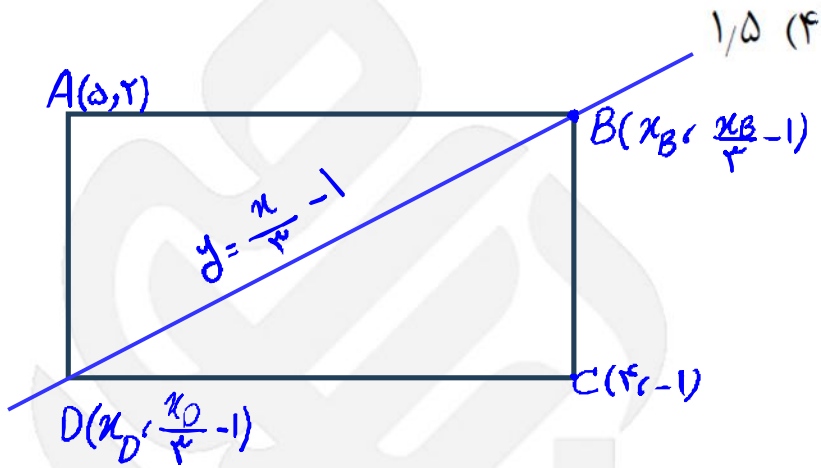
در یک مستطیل، نقاط $A(5, 2)$ و $C(4, -1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x - 3y = 3$ واقع اند. اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

✓ ۳ (۱)

۳/۵ (۲)

۱ (۳)

۱/۵ (۴)



$$BD = AC$$

$$\rightarrow \sqrt{(x_B - x_D)^2 + \left(\frac{x_B}{3} - 1 - \frac{x_D}{3} + 1\right)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (2+1)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(x_B - x_D)^2 + \frac{1}{9}(x_B - x_D)^2} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{10}{9}(x_B - x_D)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \frac{\sqrt{10}}{3} |x_B - x_D| = \sqrt{10} \rightarrow |x_B - x_D| = 3$$

ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ است، برای چند مقدار a $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است؟

۱ (۴)

✓ ۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

به ازای $|a| = 1$ مساوی به صورت $f(1) = f(2)$ است که جواب ندارد.

$$1 - |a| < 1 \rightarrow f(1 - |a|) = 2(1 - |a|) - 1 = 1 - 2|a|$$

$$2 + |a| > 1 \rightarrow f(2 + |a|) = (2 + |a|)^2 - (2 + |a|) - 7 = 4 + 4|a| + |a|^2 - 2 - |a| - 7 = |a|^2 + 3|a| - 5$$

$$\rightarrow 1 - 2|a| = |a|^2 + 3|a| - 5 \rightarrow |a|^2 + 5|a| - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -2 \text{ غلط} \end{cases}$$

نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$ ، در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می کند؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

$$1+x > 0 \rightarrow x > -1 \quad (1)$$

$$1-\sqrt{1-x} > 0 \rightarrow 1 > \sqrt{1-x} \rightarrow 1 > |1-x| \rightarrow x > 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} D_f = [-1, 0]$$

از طرفی برد تابع نامنتهی است بنابراین نمودار f در ناحیه دوم و روی مبدا مختصات قرار دارد و لذا نمودار f در ناحیه چهارم و روی مبدا مختصات قرار می گیرد. در این صورت تنها نقطه اشتک f و f نقطه $(0,0)$ است.

اگر $\log \frac{1}{(x-2)^2} = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}(-x)$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۶ ✓

(۳) $\frac{1}{۴}$

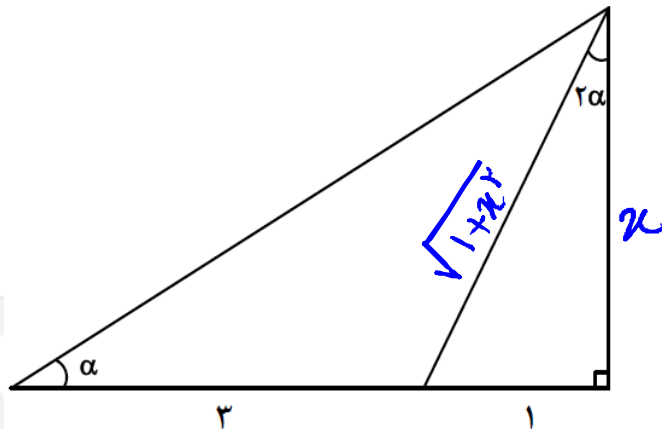
(۴) $-\frac{1}{۴}$

$$\log(x-u) - \log 1 + \log(x-2)^2 = 3 \longrightarrow \log(x-u) + \log(x-2)^2 = 3$$

$$\longrightarrow 3 \log(x-2) = 3 \longrightarrow \log(x-2) = 1 \longrightarrow x-2 = 10 \longrightarrow x = -1$$

$$\log_{\sqrt{2}} 1 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^0 = \frac{0}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 0 = 0$$

در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟



- 1 | 4 (1)
- 2 | 4 (2)
- 3 | 4 (3)
- 4 | 5 (4)
- 5 | 4 (5)



$$\tan \alpha = \frac{k}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{1}{k} \rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow \frac{2(\frac{k}{2})}{1 - \frac{k^2}{4}} = \frac{1}{k} \rightarrow \frac{k^2}{2} = 1 - \frac{k^2}{4} \rightarrow \frac{2k^2}{4} = \frac{4 - k^2}{4} \rightarrow 2k^2 = 4 - k^2 \rightarrow 3k^2 = 4 \rightarrow k^2 = \frac{4}{3} \rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

اگر $3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟



✓ $\frac{1}{a-4}$ (۱)

$\frac{1}{4-a}$ (۲)

$\frac{1}{a-3}$ (۳)

$\frac{1}{3-a}$ (۴)

$$3(1 - \cos^2 x) + a \cos^2 x = 4 \rightarrow (a - 3) \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{a - 3}$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \rightarrow \tan^2 x = a - 3 - 1 = a - 4$$

$$\rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{a - 4}$$



در مثلث ABC، اگر $\tan(B - C) = \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1 - 2\cos(B + C)}{4\sin B \cos C}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\tan B$ (۴) $\tan C$ ✓

$$\tan(B - C) = \sqrt{3} \rightarrow B - C = 4.0^\circ$$

می‌توان $B = 9.0^\circ$ و $C = 3.0^\circ$ فرض نمود در این صورت

$$\frac{1 - 2\cos(B + C)}{4\sin B \cos C} = \frac{1 - 2\cos 14.0^\circ}{4\sin 9.0^\circ \cos 3.0^\circ} = \frac{1 - 2(-\frac{1}{2})}{4 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 3.0^\circ = \tan C$$

تعداد جوابهای معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

۴ (۴)

✓ ۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{3\pi}{4} - x) \rightarrow \begin{cases} x = \frac{(2k+1)\pi}{3} & x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} & x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\checkmark -4 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

به ازای $x=0$ کسر باید به صورت $\frac{0}{0}$ باشد، بنابراین $a + \sqrt{(0+1)(0+1)} = 0 \rightarrow a = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b(cx+1) + c(bx+1)}{\sqrt{(bx+1)(cx+1)}} = \frac{b+c}{2\sqrt{1 \times 1}} = 2 \rightarrow b+c=4$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} = \frac{4}{-1} = -4$$

برای چند مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a + 1}$ یک مجانب قائم دارد؟

۷ (۴)

۵ (۳)

✓ ۴ (۲)

۲ (۱)

ریشه های صورت: $3x^2 - 8x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 & \xrightarrow{\text{ریشه ۳}} 9a + 3(1-a) + a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \\ x=-\frac{1}{3} & \xrightarrow{\text{ریشه } -\frac{1}{3}} \frac{a}{9} - \frac{1-a}{3} + a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{4}{13} \end{cases}$

$$a \neq 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow (1-a)^2 - 4a(a+1) = 0 \rightarrow \dots \rightarrow a = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$a = 0, \text{ فرع } = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

به ازای مقادیر طبیعی c ، تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > c \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام می تواند مقدار $\frac{a}{b}$ باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > c \end{cases}$$

-4 (۴) -3 (۳) -2 (۲) -1 (۱) ✓

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \rightarrow \underbrace{|c-1|}_{c-1} = ac^2 + bc + 2 \xrightarrow{c \geq 1} ac^2 + bc + 2 = c - 1 \quad (1)$$

$$f(-c) = \lim_{x \rightarrow -c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -c^-} f(x) \rightarrow \underbrace{|-c-1|}_{c+1} = ac^2 - bc + 2 \rightarrow ac^2 - bc + 2 = c + 1 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 2ac^2 + 2 = 2c \rightarrow a = \frac{c-2}{c^2} \qquad (1) - (2): 2bc = -2 \rightarrow bc = -1 \rightarrow b = \frac{-1}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{c-2}{c^2}}{\frac{-1}{c}} = \frac{2-c}{c} = \frac{2}{c} - 1 \quad c \in \mathbb{N} \rightarrow \left[\frac{2}{c} - 1\right] \in \{1, 0, -1\}$$

اگر $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(\frac{\sqrt{3}}{6}) - 2g'(\frac{\sqrt{3}}{6})$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ✓ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$$f(x) = \frac{(1 + \cos x)(1 - 2\cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

$$f(x) - 2g(x) = \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} - \frac{2}{1 - \cos x} = \frac{-\cos x(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = -\cos x$$

$$(f - 2g)'(x) = \sin x \longrightarrow (f - 2g)'(\frac{\sqrt{3}}{6}) = \sin \frac{\sqrt{3}}{6} = \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

به ازای چند مقدار صحیح m تابع

$$f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$$

دارای نقطه گوشه‌ای است؟

(۱) صفر

(۲) بیش از ۲

(۳) ۲

✓ (۴) ۱

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(a) = 0$$

$$f'_+(a) = \begin{cases} 1 & m=1 \\ 0 & m \geq 2 \end{cases}$$

$$f'_-(a) \neq f'_+(a) \rightarrow m=1$$

نقطه گوشه

تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

- $D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$ ۳ (۴) ۴ (۳) ✓ ۵ (۲) ۶ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+x^2} & x \leq -1 \end{cases}$$

نقاط ابتدا و انتها بازه
(جران) $x = 0, 1, -1$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} & x < -1 \end{cases}$$

طول نقطه اکстрیم نسبی (ماکزیمم نسبی) \rightarrow $x = \frac{1}{2}$ ✓ (جران) \rightarrow $x = -\frac{1}{2}$ ✗ ($-\frac{1}{2} \notin D_f$)

$m=1, n=0, k=4 \rightarrow m+n+k=5$

رضا می خواهد کتاب ریاضی و ۵ کتاب درسی دیگرش را روی هم بچیند. در چند حالت مختلف هنگام چیدن کتابها، کتابهای بیشتری بالای کتاب ریاضی قرار می گیرد؟

✓ ۳۶۰ (۱)

۳۰۰ (۲)

۲۴۰ (۳)

(۴)

		ریاضی
	ریاضی	
ریاضی		

$$۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ = ۳۶۰$$

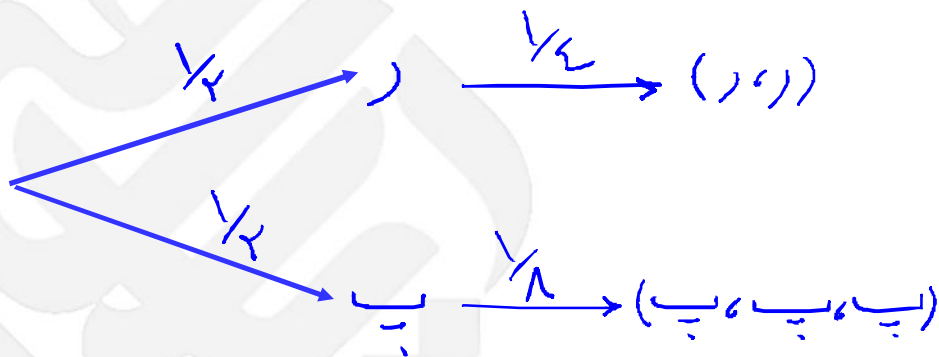
سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، ۲ سکه پرتاب کرده و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال همه سکه‌ها یکسان ظاهر می‌شوند؟

$$\frac{5}{16} \quad (4)$$

$$\frac{5}{12} \quad (3)$$

$$\checkmark \frac{3}{16} \quad (2)$$

$$\frac{3}{12} \quad (1)$$



$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

میانگین دسته اول با ۵ داده مختلف برابر میانگین دسته دوم با ۶ داده است، به طوری که تنها داده متفاوت بین دو دسته، داده a است. اگر واریانس دسته اول $\frac{2}{3}$ از واریانس دسته دوم بیشتر باشد، واریانس دسته اول کدام است؟

$$6/25 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$2/25 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

داده‌ها دسته اول: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ داده‌ها دسته دوم: $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a\}$

چون با اضافه شدن a به داده‌ها دسته اول، میانگین تغییر نکرد، پس $\bar{x} = a$

$$\sigma_1^2 = \frac{\overbrace{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_p - a)^2}^t}{5}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\overbrace{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_5 - a)^2}^t + \underbrace{(a - a)^2}_{\text{میشه}}}{6}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{2}{3} \rightarrow \frac{t}{5} = \frac{t}{6} + \frac{2}{3} \rightarrow \frac{t}{5} = \frac{t+4}{6} \rightarrow t=20 \rightarrow \sigma_1^2 = \frac{20}{5} = 4$$

در جریان یک مسابقه بازیکن A دو پنالتی می‌زند. این بازیکن با احتمال ۶۰ درصد پنالتی اول را گل می‌کند، در این صورت احتمال گل شدن پنالتی دوم ۸۰ درصد و در غیر این صورت ۳۰ درصد خواهد بود. با کدام احتمال وضعیت گل شدن دو پنالتی متفاوت است؟

- ۰/۴۴ (۱)
 ۰/۲۴ (۲)
 ۰/۶ (۳)
 ۰/۳ (۴)

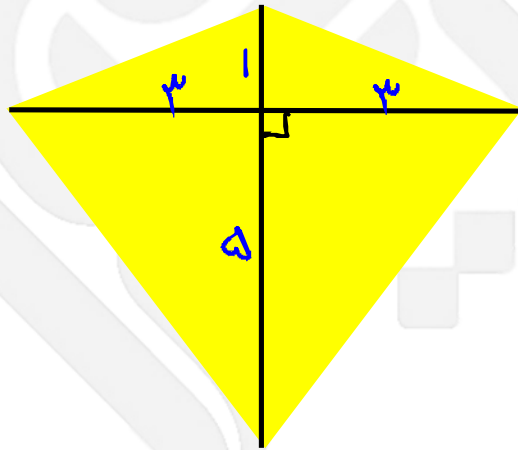
$$P(\text{دوم گل شود و اول گل نشود}) + P(\text{اول گل شود و دوم گل نشود})$$

$$= (0.4 \times 0.2) + (0.6 \times 0.4) = 0.08 + 0.24 = 0.32$$

برای کدام گزاره، می تون مثال نقض ارائه کرد؟

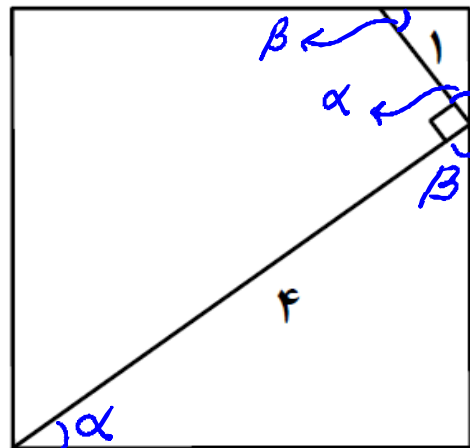
- (۱) هر چهارضلعی که قطرهای یکدیگر را نصف کنند، متوازی الاضلاع است.
- (۲) اندازه میانه‌های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث، با هم برابرند.
- (۳) هر چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود بر هم، مربع است. ✓
- (۴) نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رسند.

مسئله نقض (کایت)



مساحت مربع شکل زیر، چقدر است؟

در مثلث قائم الزاویه با نسبت $K=4$ مستطابند.



۱۳/۳۱ (۱)

۷/۲۹ (۲)

۱/۴۱ (۳)

✓ ۱۰/۲۴ (۴)

$4x$

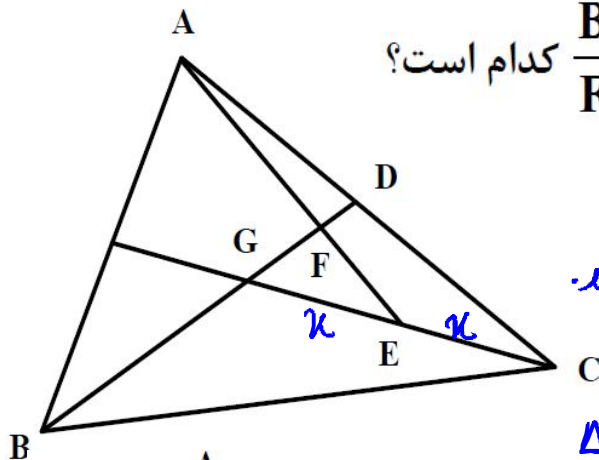
$$y + x = 4x \rightarrow y = 3x$$

در مثلث قائم الزاویه بزرگ:

$$(5x)^2 + (3x)^2 = (4x)^2 \rightarrow 25x^2 = 14 \rightarrow x^2 = \frac{14}{25}$$

$$S = (4x)^2 = 14x^2 = 14 \left(\frac{14}{25} \right) = \frac{254}{25} = 10,24$$

در شکل زیر، G مرکز ثقل مثلث ABC است. اگر $GE = EC$ باشد، مقدار $\frac{BD}{FD}$ کدام است؟



نقطه همزی میانه ها مثلث (مرکز ثقل)، حریمانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می کند.

✓ ۹ (۱)

۸ (۲)

۶ (۳)

۵ (۴)

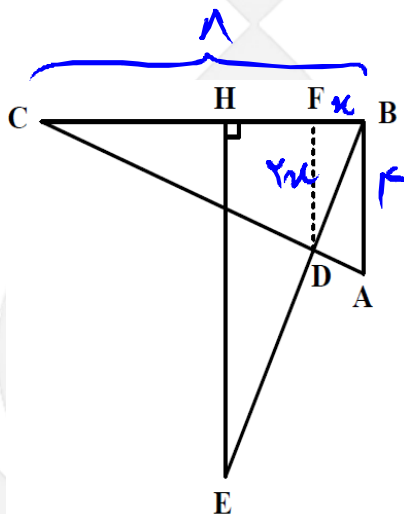
$$\Delta AGC: \xrightarrow{\text{میان } GD \text{ و } AE} \frac{GF}{FD} = 2 \xrightarrow{FD=y} GF=2y \rightarrow GD=3y$$

$$\Delta ABC: \xrightarrow{\text{میان } CM \text{ و } AD} \frac{BG}{GD} = 2 \rightarrow \frac{BG}{3y} = 2 \rightarrow BG=6y$$

$$\rightarrow BD=9y$$

$$\frac{BD}{FD} = \frac{9y}{y} = 9$$

در شکل زیر، دو مثلث ABC و BEH هم‌نهشت هستند. اگر $AB = 4$ ، $EH = 1$ و $DF \parallel EH$ باشد، اندازه BF کدام است؟



- ۱/۴ (۱)
- ✓ ۱/۶ (۲)
- ۲/۴ (۳)
- ۲/۶ (۴)

$$AB = 4 \rightarrow BH = 4$$

$$\triangle BFD \sim \triangle BHE \rightarrow \frac{x}{FD} = \frac{BH}{EH} = \frac{4}{1} \rightarrow FD = 2x$$

$$\triangle ABC: \frac{FD \parallel AB}{\text{تعیین تناسب}} \rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{FD}{AB} \rightarrow \frac{1-x}{4} = \frac{2x}{4} \rightarrow x = \frac{1}{6} = 1,7$$

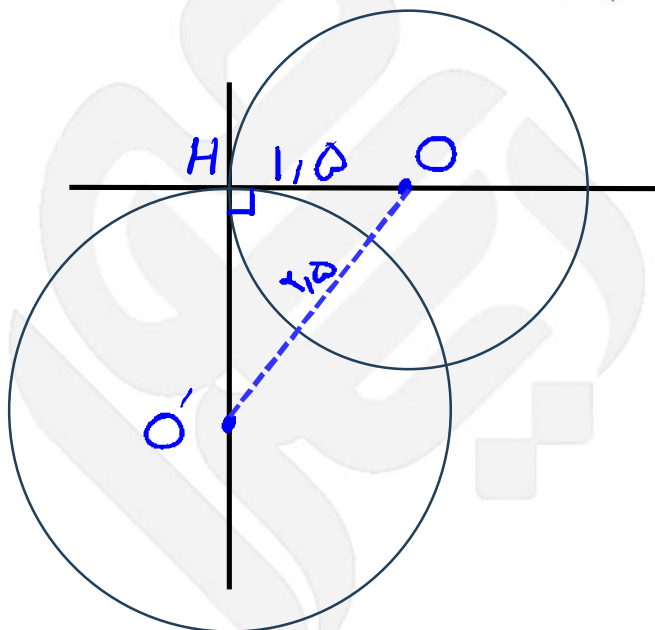
مماس‌های رسم‌شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر $1/5$ و فاصله بین مراکز دو دایره $2/5$ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

✓ ۲ (۴)

۳ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)



هر مماس از مرکز دایره دیگر می‌گذرد.

$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = (2/5)^2 - (1/5)^2 = 4/25 - 1/25 = 3/25 = 4$$

$$\rightarrow O'H = 2$$

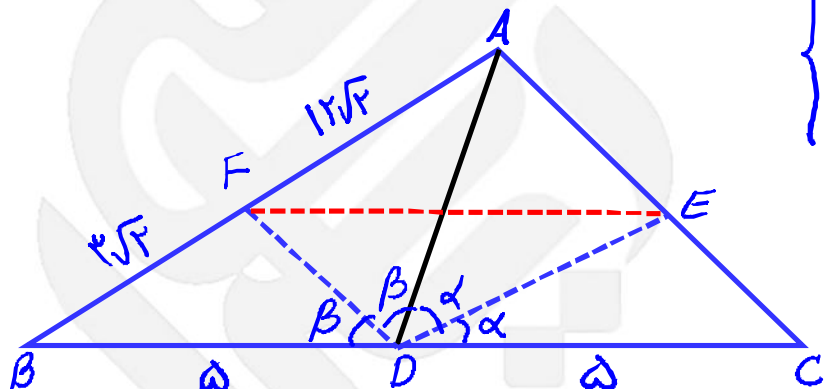
در مثلث ABC ، $BC = 10$ ، نقطه D وسط BC و DE و DF به ترتیب نیمساز زوایای \hat{ADC} و \hat{ADB} هستند. اگر $AF = 12\sqrt{2}$ و $BF = 3\sqrt{2}$ باشد، طول نیمساز DE کدام است؟

$$2\sqrt{7} \quad (۴)$$

$$\sqrt{7} \quad (۳)$$

$$6 \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$3 \quad (۱)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FB} = \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 4 \xrightarrow{BD=5} AD=20 \\ \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} = \frac{20}{5} = 4 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow FE \parallel BC \rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{FE}{10} = \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} \rightarrow FE = 8$$

$$\triangle ABD: DF^2 = AD \cdot BD - AF \cdot FB = 20 \cdot 5 - 12\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 100 - 72 = 28$$

$$(\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ) \rightarrow \triangle DFE: DE^2 = FE^2 - DF^2 = 64 - 28 = 36 \rightarrow DE = 6$$

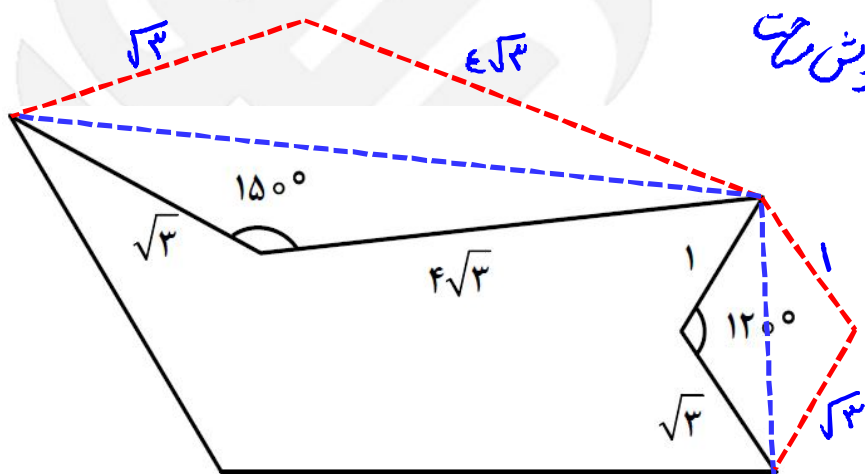
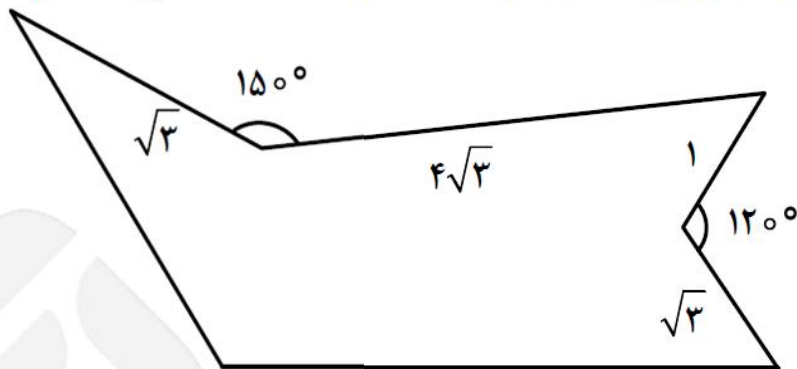
میزان افزایش مساحت شکل زیر، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۹

(۳) ۷/۵

(۴) ۴/۵



$$\text{افزایش مساحت} = 2 \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 4\sqrt{3} \times \sin 150^\circ \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \sin 120^\circ \right)$$

$$= 9 + \frac{3}{5} = 7,5$$

اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $2A - 3B^{-1}$ کدام است؟

-4 (4)

-3 (3)

✓ -2 (2)

-1 (1)

$$A = \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{از چپ ضرب در } A} 2A - 3B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(-2) + 0 = -2$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^2 چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

✓ ۳ (۴)

-۳ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های } A^2}{\text{مجموع درایه‌های } A} = \frac{4}{2} = 2$$

خط $x = -\frac{5}{4}$ خط هادی سهمی به معادله $3y^2 - 3x - ay = 0$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

✓ ۱۲ (۱)

$$3y^2 - 3x - ay = 0 \rightarrow y^2 - \frac{a}{3}y = x \xrightarrow{+\frac{a^2}{12y}} y^2 - \frac{a}{3}y + \frac{a^2}{12} = x + \frac{a^2}{12}$$

$$\rightarrow \left(y - \frac{a}{6}\right)^2 = x + \frac{a^2}{12} \rightarrow S\left(\frac{-a^2}{12}, \frac{a}{6}\right)$$

$$4P = 1 \rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$\text{مقادیر: } x = -P + \alpha \rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{-a^2}{12} \rightarrow a^2 = 12 \rightarrow a = \pm 4$$

$$\text{اختلاف} = 4 - (-4) = 12$$

مساحت مثلثی برابر ۶۴ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $A(3, a, b)$ ، $B(-1, -a, b)$ و $C(5, -4, b)$ هستند. طول ضلع AB کدام می تواند باشد؟

۱۰√۲ (۴)

✓ ۴√۲ (۳)

✓ ۴√۱۰ (۲)

۲√۱۰ (۱)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(44) = 14$$

$$\vec{AB} = (-2, -a, 0)$$

$$\vec{AC} = (2, -a-4, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 0, 14 + a)$$

$$\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 14 \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{0 + 0 + (14 + a)^2} = 14$$

$$\rightarrow |14 + a| = 28 \rightarrow |a + 14| = 28$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow \vec{AB} = (-2, -2, 0) \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 0} = 4\sqrt{2} \\ a = -4 \rightarrow \vec{AB} = (-2, 4, 0) \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 0} = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

گزینه‌ها ۲ و ۳ هر دو صحیح هستند!

عدد صحیح a مضرب ۸ و باقیمانده تقسیم آن بر ۲۳ برابر ۵ است. باقیمانده تقسیم $\frac{a}{4}$ بر ۲۳ کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۳ (۳)

✓ ۷ (۲)

۵ (۱)

$$a = 1K \rightarrow 1K \equiv 5 \pmod{23} \rightarrow 1K \equiv 28 \pmod{23} \rightarrow 2K \equiv 7 \pmod{23} \rightarrow K \equiv 15 \pmod{23} \rightarrow K = 15$$

$$a = 1K = 1(15) = 15$$

$$\frac{a}{4} = 3 \pmod{23} \equiv 7$$

RIAZISARA

۱۰ است؟

(۱) ۵۹

در چند زیرمجموعه از مجموعه $\{۱۲, ۱۳, ۱۵, ۱۸, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶\}$ حاصل ضرب کوچکترین و بزرگترین عضو، مضرب

(۴) ۶۲

(۳) ۶۱ ✓

(۲) ۶۰

زیرمجموعه‌ای مورد نظر باید به صورت $\{a, b, c, d\}$ باشد که در آنجا عضو اعداد آبی، اجباری و عضو اعداد قرمز اختیاری است!

$\{۱۲, ۱۳, ۱۵\}$

$$\rightarrow 2^3 - 2^0 = 8 - 1 = 7$$

$\{۱۲, ۱۳, ۱۵, ۱۸, ۲۳, ۲۴, ۲۵\}$

$$\rightarrow 2^7 - 2^0 = 128 - 1 = 127$$

$\{۱۵, ۱۸\}$

$$\rightarrow 2^2 - 2^0 = 4 - 1 = 3$$

$\{۱۵, ۱۸, ۲۳, ۲۴\}$

$$\rightarrow 2^4 - 2^0 = 16 - 1 = 15$$

$\{۱۵, ۱۸, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶\}$

$$\rightarrow 2^6 - 2^0 = 64 - 1 = 63$$

$\{۱۸, ۲۳, ۲۴, ۲۵\}$

$$\rightarrow 2^4 - 2^0 = 16 - 1 = 15$$

$\{۲۴, ۲۵\}$

$$\rightarrow 2^2 - 2^0 = 4 - 1 = 3$$

$\{۲۵, ۲۶\}$

$$\rightarrow 2^2 - 2^0 = 4 - 1 = 3$$

مجموع حالت = ۶۱

سوال 37 کنکور ریاضی تیر ماه 1403

به ازای برخی مقادیر طبیعی n ، معادله سیاله $۵۷x + ۱۳۳y = ۲۲n - ۱$ دارای جواب است. مجموع ارقام کوچک ترین عدد دو رقمی n ، کدام است؟

✓ ۴ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$\begin{aligned}
 (۵۷, ۱۳۳) &= ۱۹ \rightarrow ۲۲n - ۱ \equiv ۰ \pmod{19} \rightarrow ۲۲n \equiv ۱ \pmod{19} \xrightarrow{-۱۹n} ۳n \equiv ۱ \pmod{19} \\
 \rightarrow ۳n &\equiv -۱۸ \pmod{19} \rightarrow n \equiv -۶ \pmod{19} \rightarrow n = ۱۹k - ۶ \xrightarrow{k=1} n = ۱۳ \\
 &\rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۱ + ۳ = ۴
 \end{aligned}$$

حداقل چند عضو از مجموعه $\{14, 15, 16, \dots, 20, 22, 23, 24, \dots, 28\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع، لااقل سه عضو انتخاب شده، اعداد متوالی باشند؟

۹ (۴)

۱۰ (۳)

✓ ۱۱ (۲)

۱۲ (۱)

سعی می‌کنیم اعدادی را انتخاب کنیم که هیچ سه‌تایی از آنها متوالی نباشند، مثلاً $14, 15, 17, 18, 20, 22, 23, 25, 26, 28$ (بدترین حالت ممکن)

۱۴، ۱۵، ~~۱۶~~، ۱۷، ۱۸، ~~۱۹~~، ۲۰، ۲۲، ۲۳، ~~۲۴~~، ۲۵، ۲۶، ~~۲۷~~، ۲۸

در بدترین حالت با انتخاب ۱۰ عدد مشخص شده هیچ سه عضوی متوالی نیستند، با انتخاب یک عضو دیگر از اعداد حفظ نموده، اولین سه عدد متوالی را می‌توانیم داشت.

بنابراین انتخاب حداقل $10 + 1 = 11$ عضو لازم است.

در گراف G ، $\Delta(G) + 2\delta(G) = 17$ ، $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2$ و G با حداقل تعداد رأس رسم شده است. اگر \bar{G} همبند باشد، بیشترین تعداد یال‌های گراف G ، کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۶ (۳)

✓ ۲۸ (۲)

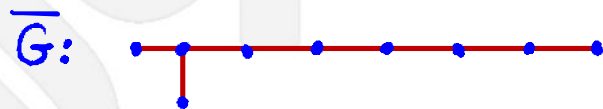
۳۰ (۱)

$$\Delta(G) + 2\delta(G) = 17 \quad (1)$$

$$\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2 \rightarrow (p-1 - \delta(G)) - (p-1 - \Delta(G)) = 2 \rightarrow \Delta(G) - \delta(G) = 2 \quad (2) \quad \text{از طرفی}$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow \begin{cases} \Delta(G) = 7 \\ \delta(G) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta(\bar{G}) = p-1-5 = p-6 > 0 \\ \delta(\bar{G}) = p-1-7 = p-8 > 0 \end{cases} \rightarrow p-8 > 0 \rightarrow p \geq 9$$

اگر $p=9$ آنگاه $\delta(\bar{G})=1$ و $\Delta(\bar{G})=3$



$$\rightarrow \varphi(\bar{G}) = 1 \rightarrow \varphi(G) = \binom{9}{2} - 1 = 36 - 1 = 35$$

کلاس های آنلاین ریاضی سرا

متوسطه اول

متوسطه دوم

کنکور



مدرس:

عزیز اسدی

هماهنگی: ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲