



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۱-۱- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 5 - |x-1|$ و $y = |x|$ ، کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

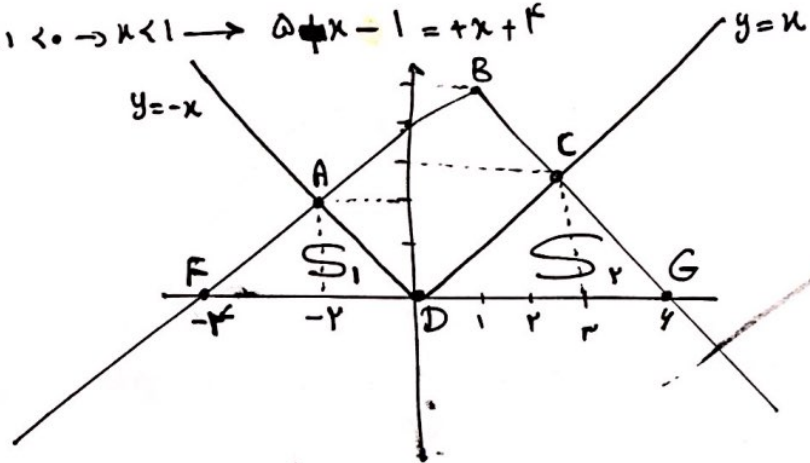
۹ (۲)

۸ (۱)

است. دو تابع را رسم می کنیم

$$y = 5 - |x-1| = \begin{cases} x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow 5-x+1 = 4-x = y \\ x-1 < 0 \rightarrow x < 1 \rightarrow 5-x-1 = 4-x = y \end{cases}$$

$$y = |x| = \begin{cases} x \geq 0 & y = x \\ x < 0 & y = -x \end{cases}$$



حل بخورد

$$y = 5 - |x-1|$$

با محور x ها $\rightarrow 5 - |x-1| = 0 \rightarrow 5 = |x-1| \Rightarrow x-1 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 5 \rightarrow x = 6 \\ x-1 = -5 \rightarrow x = -4 \end{cases}$

حل بخورد دو نمودار $\begin{cases} x = -x+4 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \\ -x = x+4 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$ مساحت $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{BFG} - S_1 - S_2$

$$S_{BFG} = \frac{5 \times 1}{2} = 2.5 \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{4 \times 2^2}{2} = 8 \\ S_2 = \frac{4 \times 2^2}{2} = 8 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 25 - 8 - 8 = 9 \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

۱-۲- یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می رسد؟ $(\log 19 = 1.278, \log 2 = 0.301)$

می رسد؟ $(\log 19 = 1.278, \log 2 = 0.301)$

۲۵ (۴)

۲۱.۵ (۳)

۱۸.۵ (۲)

۱۷ (۱)

روز اول a روز دوم $(\frac{95}{100})a$ روز سوم $(\frac{95}{100})^2 a$... روز n $(\frac{95}{100})^{n-1} a$

$$\Rightarrow \text{روز } n = \frac{a}{r}$$

$$\frac{a}{r} = (\frac{95}{100})^{n-1} a \Rightarrow \frac{1}{r} = (\frac{95}{100})^{n-1} \Rightarrow r = (\frac{100}{95})^{n-1}$$

$$\log \Rightarrow \log r = \log (\frac{100}{95})^{n-1} = (n-1) \log \frac{100}{95} = (n-1) (\log 100 - \log 95) = (n-1) (2 - \log 95)$$

$$\Rightarrow -1.301 = (n-1) (2 - 1.978) \Rightarrow -1.301 = 0.022 n \Rightarrow n = 21.5 \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۱۰۳- از رابطه $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ مقدار لگاریتم $\log(x+5)$ در پایه ۴ کدام است؟
 (۱) ۵/۰ (۲) ۷۵/۰ (۳) ۲۵/۱ (۴) ۵/۱

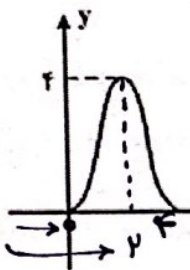
$$\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1) \Rightarrow \log(x+2)(2x-1) = \log(4x+1)$$

$$\Rightarrow (x+2)(2x-1) = 4x+1 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 4x+1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25 \rightarrow x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \rightarrow \log\left(\frac{2(-1)-1}{-4}\right) \rightarrow -1$$

$$\Rightarrow \log_4(2x+5) = \log_4\left(2\left(\frac{3}{2}\right) + 5\right) = \log_4 8 = \log_4 2^3 = \frac{3}{2} \log_4 2 = \frac{3}{2} = 1,5 \rightarrow \text{گزینه ۴}$$



۱۰۴- شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. کدام است b کدام است a ؟
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲
 مرکز بازه ۰ است که فعلی max می باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = a + b \cos 0 = a + b \\ f(2) = 4 \rightarrow x=2 \rightarrow y=4 \Rightarrow 4 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = a - b \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a - b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow 2 + b = 0 \rightarrow b = -2$$

۱۰۵- معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

از تغییر متغیر استفاده می کنیم

$$\boxed{x^2 - 2x = t} \Rightarrow t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \rightarrow x^2 - 2x = -1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ t = 2 \rightarrow x^2 - 2x = 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-2) = 12 \end{cases}$$

۳ ریشه متمایز

در کل ۳ ریشه متمایز

۱۰۶- اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x+1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

(۱) $[0, 1)$ (۲) $[0, 2)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

$$\text{اگر } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{x+|x|}{|x+1|+x} = \frac{x-x}{|x+1|+x} = \frac{0}{|x+1|+x} = 0$$

$$\text{اگر } x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{x+x}{|x+1|+x} = \frac{2x}{x+1+x} = \frac{2x}{2x+1} = 2 \cdot \frac{x}{2x+1} = 2 \cdot \frac{x+1-1}{2x+1} = 2 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)$$

$$2 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) = 2 - \frac{2}{2x+1} \xrightarrow{\text{حد از ۲}} \begin{matrix} f(0) = 0 \\ f(\infty) = 2-0 = 2 \end{matrix} \Rightarrow R_f = [0, 2)$$

۱۰۷- کدام یک از تابع های زیر، یک به یک است؟

(۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$ (۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$ (۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$ (۴) $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

اگر تابع صعودی یا معکوس باشد ۲-۱ یک به یک می باشد و اگر تابع دارای مشتق

مثبت یا منفی باشد یک به یک است
 مشتق $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ $\rightarrow$ صعودی
 مشتق $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\rightarrow$ در بعضی نقاط مثبت و در بعضی نقاط منفی

مشتق $h'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ $\rightarrow$ اگر $x > 1 \rightarrow h' > 0$ $\rightarrow$ صعودی
 اگر $x < 1 \rightarrow h' < 0$ $\rightarrow$ معکوس
 مشتق $p'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $\rightarrow$ اگر $x < 1 \rightarrow p' > 0$ $\rightarrow$ صعودی
 اگر $x > 1 \rightarrow p' < 0$ $\rightarrow$ معکوس

۱۰۸- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$ کدام است؟

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{6}$

نکته $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\cos - \alpha = \cos \alpha$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin 2x \sin 4x = \frac{1}{2} [\cos(-2x) - \cos 6x] = \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 6x]$$

$$\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 6x] + \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \xrightarrow{\times 2} \cos 2x - \cos 6x = 2 \cos^2 x$$

نکته $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos 6x = 2 \cos^2 x \rightarrow -1 - \cos 6x = 0 \rightarrow \cos 6x = -1$$

$$\Rightarrow \cos 6x = -1 \rightarrow 6x = (2k+1)\pi \rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۱۰۹ - حاصل $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4} \cot \frac{11\pi}{3})$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{\pi}{6}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۱)

$\checkmark$ $\cos^{-1} - \alpha = \pi - \cos^{-1} \alpha$

$\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4} \cot \frac{11\pi}{3}) = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4} \cot(2\pi - \frac{\pi}{3})) = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4} x - \cot \frac{\pi}{3}) = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4} x - \frac{\sqrt{3}}{3})$

$\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{4}) = \pi - \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \rightarrow$ $\checkmark$

۱۱۰ - حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ کدام است؟

$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 \rightarrow \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{1 - \tan^2 x}{|\sin x + \cos x|} = \frac{1 - \tan^2 x}{\sin x + \cos x} \xrightarrow{\text{حوسبات}}$

$\frac{0 - 2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{\cos x - \sin x} = \frac{-2(-1)(1 + (-1)^2)}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{+4}{-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

$\checkmark$

تابع $\sin$ و $\cos$ در ربع دوم به ترتیب نزولی و صعودی هستند

۱۱۱ - اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

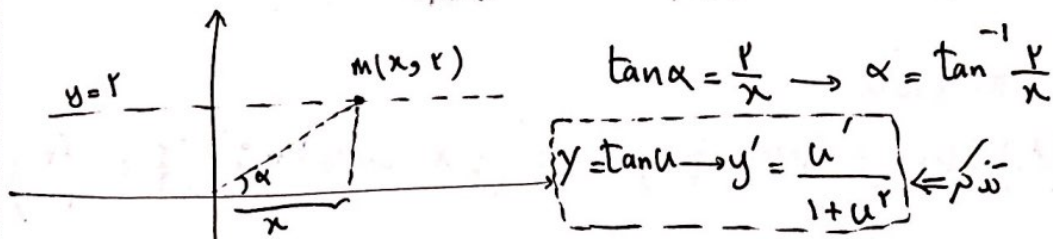
$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \xrightarrow{\text{منفصل}} f'_+(1)$ مشتق راست در نقطه $x=1$

$x > 1 \rightarrow |x| = x \quad [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 - 1 + x}}$

$\rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2} \rightarrow$ $\checkmark$

۵ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندسی خاکن ۵۵۷ ۹۱۳ ۰۹۱۳

۱۱۲ - نقطه $M(x, y)$ بر روی خط $y = 2$ متغیر است. زاویه خطی که نقطه M را به مبدأ مختصات وصل کند با جهت مثبت محور x ها، $\alpha(x)$ است. آهنگ تغییرات α نسبت به تغییر x ، در لحظه $x = 4$ ، کدام است؟
 (۱) -0.2 (۲) -0.1 (۳) 0.05 (۴) 0.15



طبق تذکر $\frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \xrightarrow{x=4} \frac{d\alpha}{dt} = -0.1 \rightarrow$ گزینه ۲

۱۱۳ - به ازای اعداد طبیعی $n \geq n_0$ فاصله نقاط دنباله $\left\{ \frac{2n^2+1}{n^2+2n} \right\}$ از نقطه همگرایی خود، کمتر از 0.04 است.

کوچکترین مقدار n_0 ، کدام است؟

(۴) ۹۹

(۳) ۹۸

(۲) ۹۷

(۱) ۹۶

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2n} = 2 \leftarrow$ نقطه همگرایی $\Rightarrow \left| \frac{2n^2+1}{n^2+2n} - 2 \right| < \frac{\epsilon}{100}$

$\Rightarrow \left| \frac{2n^2+1-2n^2-4n}{n^2+2n} \right| < \frac{1}{25} \rightarrow \frac{4n-1}{n^2+2n} < \frac{1}{25} \rightarrow n^2+2n > 100n-25$

$\Rightarrow n^2 - 98n + 25 > 0 \rightarrow$ با چک کردن گزینه ها کمترین n ای

که فاصله برای آن بهر مقدار است $n=98$ می باشد $\leftarrow$ گزینه ۳

۱۱۴ - دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right\}$ ، به کدام عدد، همگرا است؟

(۴) $\frac{1}{e}$

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{e}$

(۱) $\sqrt{e}$

فرصت کنید
 جواب حد
 است A
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \ln A$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{0}{=} \frac{0 - \frac{2}{n^3}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{2n}{n^3+n}$

$\Rightarrow \lim = 0 \Rightarrow 0 = \ln A \Rightarrow A = 1 \rightarrow$ گزینه ۳

۱۱۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x^2-x-6} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در بازه $(2, 3)$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

چون می خواهیم تابع در بازه $(2, 3)$ پیوسته باشد باید در نقطه $x=2$ پیوستگی راست داشته باشد

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{x - [x^+]}{x^2 - x - 6} = \frac{x - 2}{x^2 - x - 6} \stackrel{H}{=} \frac{1}{2x - 1} \xrightarrow{x=2} \frac{1}{11}$$

$f(2) = a \Rightarrow a = \frac{1}{11} \rightarrow$ گزینه ۱

۱۱۶- تعداد نقاط ناپیوسته نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+4}}{1 + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{x+5}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نقاط ناپیوستگی توابع کسری دیش های مخرج که داخل دامنه باشد است

$\sqrt{x+4} \rightarrow x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4$ یا $[-4, \infty)$

$1 + \sqrt{x+1} = 0 \rightarrow \sqrt{x+1} = -1$ به توان ۳ $x+1 = -1 \rightarrow x = -2$ داخل دامنه $\rightarrow$

$x+5 = 0 \rightarrow x = -5 \notin [-4, \infty)$ فقط نقطه $x = -2$

۱۱۷- خط راستی بر نمودار تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می کند شیب این خط کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

خطی که هم بر تابع مماس و هم از آن عبور می کند خط مماس در نقطه عطف می باشد

$y = x^3 - 2x^2 + 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 3 \rightarrow y'' = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$y'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) = \frac{5}{3} \rightarrow$ گزینه ۴

۱۱۸ - خط قائم بر نمودار $f(x) = \frac{\cos 2x}{2 - \sin x}$ در نقطه تلاقی منحنی با محور y ها، نیمساز ناحیه اول را با کدام طول، قطع می کند؟

$\frac{0.5}{2} \quad \frac{0.3}{2} \quad \frac{0.2}{2} \quad \frac{0.1}{1}$
 $\Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{\cos 0}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2} \rightarrow (0, \frac{1}{2}) \quad y' = \frac{-2 \sin 2x (2 - \sin x) - \cos 2x (-\cos x)}{(2 - \sin x)^2}$
 $\Rightarrow y(0) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{شیب قائم} = -4 \rightarrow \text{معادله خط} \quad y - \frac{1}{2} = -4(x - 0) \Rightarrow y = -4x + \frac{1}{2}$

$\begin{cases} y = x \\ y = -4x + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = -4x + \frac{1}{2} \Rightarrow 5x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{10} \rightarrow \text{گزینه ۱}$

۱۱۹ - از رابطه $y + xy^2 + x = 7$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $(1, 2)$ ، کدام است؟

$\frac{2}{2} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{2}{4}$
 $\frac{0 + y^2 + 1}{\text{شتق نسبت به } x} + \frac{y' + 2xyy'}{y} + 0 = 0 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=2}} 4 + 1 + y' + 4y' = 0 \Rightarrow 5y' = -5 \Rightarrow y' = -1$

$\frac{2yy'}{x} + \frac{2yy' + y'' + 2xy'y' + 2xyy''}{y} = 0$

$\Rightarrow -4 + y'' + -4 + 2 + 4y'' = 0 \Rightarrow 5y'' = 4 \Rightarrow y'' = \frac{4}{5}$

۱۲۰ - تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر از مرتبه دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4 - x^2)$ است.

اگر $f^{-1}(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ ، کدام است؟

$\frac{2}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{-2}{2} \quad \frac{-3}{1}$
 $g'(x) = \underbrace{(-2x)}_{\text{دومی}} \underbrace{f'(4-x^2)}_{\text{دومی}}$
 $g''(x) = \underbrace{-2}_{\text{مشتق اولی}} x \underbrace{f'(4-x^2)}_{\text{دومی}} + \underbrace{(-2x)}_{\text{دومی}} \underbrace{(-2x) f''(4-x^2)}_{\text{مشتق دومی}}$

$g''(\sqrt{3}) = \underbrace{-2 \times \underbrace{f'(4-3)}_{-5}}_{+10} + \underbrace{(-2\sqrt{3})(-2\sqrt{3})}_{-1} \underbrace{f''(4-3)}_{-1}$
 $+10 + (-12) = -2 \rightarrow \text{گزینه ۳}$

۱۲۱- نقطه $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله $y = x\sqrt{x}$ طوری حرکت می کند که فاصله آن از مبدأ مختصات، با

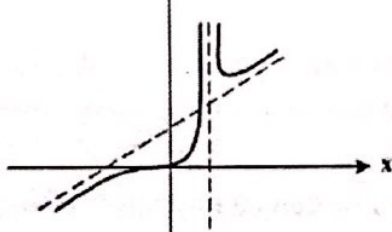
سرعت $\frac{1}{3}$ واحد در ثانیه، زیاد می شود. مقدار $\frac{dx}{dt}$ در نقطه ای به طول ۸، کدام است؟

$$M(x, y) = M(x, x\sqrt{x}) = M(x, x^{\frac{3}{2}}) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x^{\frac{3}{2}})^2} = \sqrt{x^2 + x^3} \rightarrow x$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \times \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2x + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x^2 + x^3}} = \frac{x(2 + \frac{3}{2\sqrt{x}})}{2\sqrt{x^2 + x^3}} = \frac{2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1 + x}} \quad x=8 \rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{2 + \frac{3}{4}}{2\sqrt{9}} = \frac{11}{12}$$

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x^2 + ax^2}{x^2 + bx + 1}$ است. مقدار مینیمم نسبی تابع، کدام است؟



۴,۵ (۱)

۶ (۲)

۶,۲۵ (۳)

۶,۷۵ (۴)

۱) چون یک جواب داریم $\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4 = 0 \rightarrow b = \pm 2$

جواب ما x با طول منفی که مخالف شکل است

$b=2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1 \rightarrow$ صفای با شکل

۲) $x=0$ تنها نقطه ای است که تابع محور x را قطع می کند

$$y = \frac{x^2(x+a)}{x^2+bx+1} = 0 \rightarrow x^2(x+a) = 0 \rightarrow x=0 \text{ or } x=-a$$

$x+a=0 \rightarrow x=-a$ باید منفی باشد $x=0$ محور x را قطع می کند

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow 3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)(3(x-1) - 2x) = 0 \rightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0 \rightarrow x=0, 1, 3$$

تأثیری در شکل ندارد

۱۲۳- مقدار متوسط (میانگین) تابع $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$ بر بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{22}{9}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{17}{9}$ (۱)

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-1} \int_1^4 \frac{2x-1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 4 - \left(\frac{4}{3} - 2 \right) \right) = \frac{22}{9}$$

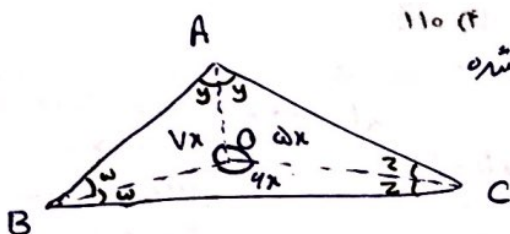
$$= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 4 \right) - \left(\frac{4}{3} - 2 \right) \right) = \frac{22}{9} \rightarrow \text{جواب ۳}$$

۱۲۴- اگر $F(x) = x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ باشد، $F'(\sqrt{3})$ کدام است؟

$$F'(x) = 1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - 0 \right)$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow F'(\sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}} = 3 \rightarrow \text{گزینه ۱}$$

۱۲۵- در مثلث ABC نیمسازهای زاویه داخلی، در نقطه O تقاطع اند. اگر زاویه های AOB و BOC و COA متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگترین زاویه این مثلث چند درجه است؟



چون نسبت زاویه های AOB و BOC و COA در صورت سوال داده شده است می توان آن ها را به ترتیب $7x$ ، $6x$ و $5x$ در نظر گرفت

$$7x + 6x + 5x = 360 \Rightarrow 18x = 360 \Rightarrow x = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{AOB} = 7x = 7(20) = 140 \\ \hat{AOC} = 5x = 5(20) = 100 \\ \hat{BOC} = 6x = 6(20) = 120 \end{cases}$$

$$A+B+C=180 \Rightarrow 2y+2w+2z=180 \Rightarrow y+w+z=90 \quad (1)$$

$$\hat{AOB} + \hat{BOA} + \hat{BAO} = 180 \Rightarrow 140 + w + y = 180 \Rightarrow w + y = 40 \quad (2)$$

$$\hat{AOC} : y + 5x + z = 180 \rightarrow y + z = 10 \quad (3)$$

$$\hat{BOC} : w + 6x + z = 180 \rightarrow w + z = 40 \quad (4)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow z = 50 \Rightarrow \hat{C} = 2z = 100$$

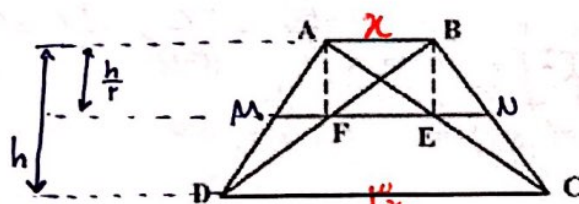
$$(1) \text{ و } (3) \Rightarrow w = 10 \Rightarrow \hat{B} = 2w = 20$$

$$(1) \text{ و } (4) \Rightarrow y = 30 \Rightarrow \hat{A} = 2y = 60$$

بزرگترین زاویه C = 100 $\rightarrow$ گزینه ۳

۱۲۶- در دوزنقه ABCD، نسبت قاعده ها $\frac{1}{3}$ ، خط واصل به اواسط ساق ها، اقطار دوزنقه را در E و F قطع کرده است.

مساحت چهار ضلعی ABEF، چند برابر مساحت دوزنقه اولیه است؟



طبق کس تقییه های در دوزنقه MN موازی AB و DC می باشد (صورت مشابه سال ۱۱۰)

$$AB \parallel EN, \triangle ABC \xrightarrow{\text{بالتقیه}} EN = \frac{1}{3} AB \quad (1)$$

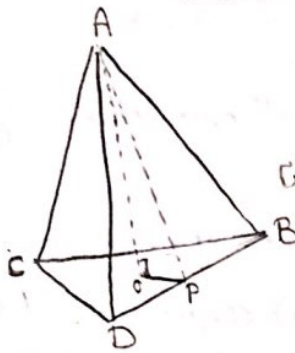
$$FN \parallel DC, \triangle BDC \xrightarrow{\text{بالتقیه}} DC = 3FN \rightarrow FN = \frac{1}{3} DC \rightarrow FE + EN = \frac{1}{3} DC$$

$$(1) \rightarrow FE + \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} DC \rightarrow FE = \frac{1}{3} (DC - AB) \rightarrow FE = \frac{1}{3} (3x - x) = x$$

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} (x + 3x) \times \frac{h}{3}}{\frac{1}{3} (x + 3x) h} = \frac{hx}{3hx} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

۱۲۷- در یک چهار وجهی منتظم، هر وجه آن مثلث متساوی الاضلاع است. طول هر یال آن $2\sqrt{6}$ واحد است. ارتفاع این

هرم، کدام است؟

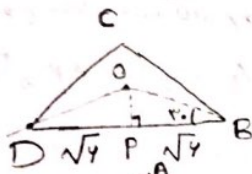


چون هر وجه مثلث متساوی الاضلاع است پس در هر وجه میانه ارتفاع و نیم ساز یکی می باشد

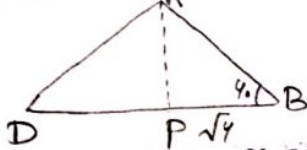
$$h = AO = ?$$

$$\Delta AOP : AO^2 = AP^2 - OP^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = 14 \Rightarrow AO = \sqrt{14}$$

گزینه ۴



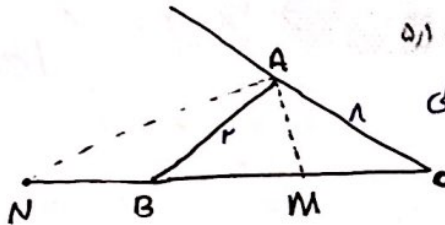
$$\tan 30^\circ = \frac{OP}{PB} = \frac{OP}{\sqrt{4}} \rightarrow OP = \sqrt{4}$$



$$\tan 40^\circ = \frac{AP}{PB} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{AP}{\sqrt{4}} \Rightarrow AP = 3\sqrt{2}$$

۱۲۸- در مثلث ABC، طول اضلاع ۹، BC = ۸ و AC = ۲ و AB = ۲ است. نیمسازهای زاویه A ضلع BC را در M و N

قطع می کنند. اندازه MN، کدام است؟



۵/۱ (۴)

۴/۸ (۳)

۴/۵ (۲)

۴/۲ (۱)

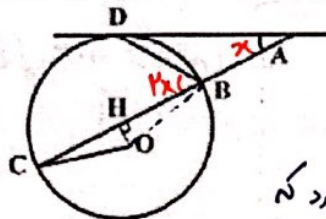
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BM}{4+BM} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BM}{4+BM} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BM}{8+BM} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BM}{12} \Rightarrow BM = 6$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{NB}{NC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{NB}{4+NB} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{NB}{4+NB} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{NB}{8+NB} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{NB}{12} \Rightarrow NB = 6$$

$$\Rightarrow NB = 6 \quad NM = NB + MB = 6 + 6 = 12 \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{NM}{8} \Rightarrow NM = 12$$

۱۲۹- در شکل زیر، AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر $\widehat{DBC} = 2\widehat{DAC}$ باشد، زاویه

$\widehat{COH}$ چند برابر زاویه $\widehat{DAC}$ است؟



۲/۵ (۱)

۳ (۲)

۳/۵ (۳)

۴ (۴)

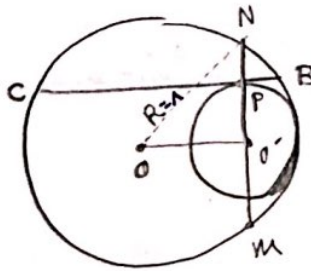
حل: $\widehat{DAB}$ را x نام گذاری می کنیم
چون OH عمود بر CB است می توان ثابت کرد که
زاویه COH نصف $\widehat{COB}$ می باشد حال $\widehat{COB}$ را بدست آوریم

$$\widehat{CD} = 2\widehat{B} \Rightarrow \widehat{CD} = 4x$$

$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow x = \frac{4x - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow \widehat{DB} = 2x \Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{CD} + \widehat{DB} = 4x + 2x = 6x$$

$$\widehat{COB} = 6x \Rightarrow \widehat{COH} = \frac{\widehat{COB}}{2} = \frac{6x}{2} = 3x = 3\widehat{DAC} \Rightarrow \frac{3}{2}$$

۱۲۰- دو دایره به شعاع های ۴ و ۸ واحد، در نقطه A مماس درونی هستند. وتر BC از دایره بزرگ، موازی خط المرکزین و بر دایره کوچک در نقطه P مماس است. اندازه $PB \times PC$ کدام است؟

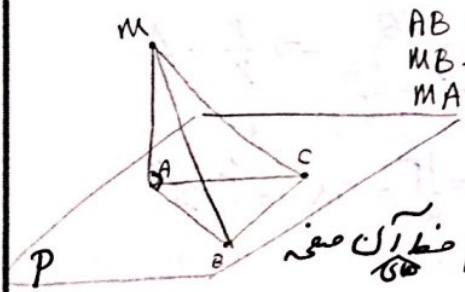


وایع است که حاصل دو مرکز $OO' = 8 - 4 = 4$
 $PB \times PC = PN \times PM$ (رابطه طوی در دایره)
 $ON = R - OO' = 8 - 4 = 4 \Rightarrow ON = 4\sqrt{3}$
 چون BC بر دایره کوچکتر مماس است و P نقطه تماس است و $BC \parallel BC$ پس $O'N = 4$ و $O'P = 4$ و $PN = O'N - O'P = 4\sqrt{3} - 4$ و $PM = PO' + O'M = 4 + 4\sqrt{3}$
 و به خاطر اینکه $OO' \perp BC$ و $PM \perp BC$ و $PN \perp BC$ پس $PM \parallel PN$ و $PN = O'N - O'P = 4\sqrt{3} - 4$
 $PB \times PC = (4 + 4\sqrt{3})(4\sqrt{3} - 4) = 32$ (گزینه ۲)

۱۲۱- بازتاب خط Δ به معادله $2y + x = 6$ نسبت به خط $y = -x$ خط Δ' است. معادله خط Δ' کدام است؟
 $y - 2x = 8$ (۴) $y + 2x = -2$ (۳) $y + 2x = 2$ (۲) $y + 2x = -6$ (۱)
 معادله بازتاب $R(x, y) = (-y, x) \rightarrow -x - y = 4 \Rightarrow 2x + y = -4$ (گزینه ۱)

۱۲۲- مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) در صفحه P است. نقطه M خارج صفحه P است. به طوری که $MA \perp AB$ و $MB = MC$ کدام نتیجه گیری نادرست است؟

$MA \perp BC$ (۴) $MA \perp P$ (۳) $MA \perp AC$ (۲) $MB \perp BC$ (۱)



$AB = AC$
 $MB = MC$
 MA مشترک
 $\Delta MAB \cong \Delta MAC \Rightarrow \hat{MAB} = \hat{MAC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow MA \perp AC$ (گزینه ۲)

وقتی خطی (MA) بر دو خط متقاطع (AB و AC) از صفحه ای (P) عمود باشد بر آن صفحه عمود است $\Leftarrow MA \perp P$ و همچنین بر تمام خط های آن صفحه عمود است $\Leftarrow MA \perp BC$ (گزینه ۴)
 نتایج گزیده ای که می توان نتیجه گرفت گزیده ای باشد

۱۲۳- بردار a با هر یک از دو محور Ox و Oy زاویه 60° درجه و با محور Oz زاویه حاده می سازد. این بردار عمود بر صفحه ای با کدام معادله است؟

$$\begin{aligned} 2x + 2y + \sqrt{2}z &= 0 \quad (۲) \\ x - \sqrt{2}y + z &= 0 \quad (۱) \\ x + y + \sqrt{2}z &= 0 \quad (۳) \end{aligned}$$

زاویه 60° $\rightarrow \alpha$ زاویه 60° $\rightarrow \beta$ زاویه 60° $\rightarrow \gamma$
 $\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}$ $\cos \beta = \frac{a_y}{|a|}$ $\cos \gamma = \frac{a_z}{|a|}$
 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
 وقتی برداری بر صفحه عمود باشد باید در نرمال آن صفحه موازی است که نتایج گزیده صحیح گزیده ای باشد

زاویه 60° $\rightarrow \alpha$ زاویه 60° $\rightarrow \beta$ زاویه 60° $\rightarrow \gamma$
 حاصلی سازد (طبق صورت سوال منفی)

۱۳۴- اگر $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, 2, -4)$ باشند. حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار a و b و $a \times b$ ساخته شود، کدام است؟

۲۲۵ (۱) ۲۳۰ (۲) ۲۴۵ (۳) ۲۵۰ (۴)

جمع متوازی السطوح: $V = |a \cdot (b \times c)| \Rightarrow V = |(a \times b) \cdot (a \times b)| = |a \times b|^2$

بسم بردار a و b و $a \times b$

$a \times b = (2, -3, 1) \times (1, 2, -4) = (10, 9, 7) \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{100 + 81 + 49} \Rightarrow |a \times b| = 14 \Rightarrow 14^2 = 196 \Rightarrow 196 \rightarrow 230$

۱۳۵- کوتاهترین فاصله بین دو خط به معادلات $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ و $\frac{x-1}{3} = -y+4 = \frac{z}{5}$ ، کدام است؟

۲۱۰ (۱) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

خط اول $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \rightarrow u_1 = (0, 0, 1) \rightarrow A(2, 5, 1)$

خط دوم $\begin{cases} u_2 = (3, -1, 5) \\ \text{نقطه روی خط} \end{cases} \rightarrow B(5, 4, 0)$

فاصله بین دو خط موازی: $\text{طول عمود مشترک} = \frac{|AB \cdot (u_1 \times u_2)|}{|u_1 \times u_2|}$

دو خط باید بردارهای u_1 و u_2 و نقاط A و B داشته باشند

استاده از فرمول $\Rightarrow \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, 3, 0)|}{|(1, 3, 0)|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow 210$

۱۳۶- به ازای کدام مقدار a خط هادی سهمی $0 = x^2 - 12y + ax + 8$ ، به معادله $x = \frac{21}{8}$ است؟

۵ و ۱۶ (۴) ۵ و ۱۲ (۳) ۲ و ۱۶ (۲) ۲ و ۱۲ (۱)

استاده از سهمی را به فرم $2(y^2 - 4y + 9 - 9) = -ax - 8 \Rightarrow 2(y-3)^2 - 18 = -ax - 8 \Rightarrow 2(y-3)^2 = -ax + 10 \Rightarrow (y-3)^2 = -\frac{a}{2}x + \frac{5}{1}$

نقطه $P(x, y)$ روی سهمی $\Rightarrow x = \alpha - \beta \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{1}{a} + \frac{a}{8}$

سهمی افقی $\Rightarrow (y-3)^2 = -\frac{a}{2}(x - \frac{1}{a})$

۱۳۷- به ازای کدام مقدار a فاصله کانون های مقطع مخروطی $0 = 3x^2 + 4y^2 + 16y + a$ برابر ۲ می باشد؟

۸ (۴) ۶ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

استاده از سهمی را به فرم $3x^2 + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) = -a \Rightarrow 3x^2 + 4(y+2)^2 = -a$

به فرم استاندارد $\Rightarrow 3x^2 + 4(y+2)^2 = -a+16 \Rightarrow \frac{3x^2}{-a+16} + \frac{4(y+2)^2}{-a+16} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{-a+16}{3}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{-a+16}{4}} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 1 = \frac{-a+16}{3} - \frac{-a+16}{4} = \frac{-4a+64+3a-48}{12} = \frac{-a+16}{12}$

$\Rightarrow 1 = \frac{-a+16}{12} \Rightarrow a = 4$

۱۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C^T ، کدام است؟

برای محاسبه درایه های قطر اصلی C^T کافی است سطر اول در ستون اول + سطر دوم در ستون دوم + سطر سوم در ستون سوم

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 & 1+1+1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ $\rightarrow 14 = 14 \times 1 \Rightarrow$ جمع درایه ها + سطر چهارم $\times$ ستون چهارم را حساب کنید

۱۳۹- مقادیر x از رابطه $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

پیش شرط به سطر اول

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-3)(0-1-6(x+2)) + (x-2)(4)(x+3) = 0$$

$$-(x-3)x^2(x+2) + 4(x^2+x-4) = 0$$

$$\Rightarrow -4(x^2-x-4) + 4(x^2+x-4) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 5x - 4 = 0 \rightarrow (x-1)(x+4) = 0 \rightarrow x = -4, x = 1$$

گزینه ۳

۱۴۰- سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر $\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 2 & 4 \\ c & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$ باشد، سه صفحه با

کدام طول متقاطع اند؟

حله به روش کرامر $\Rightarrow$ تغییر سطر دوم به سطر اول $\Rightarrow$ طول متقاطع ۳ صغی

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 2 & 4 \\ c & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۱

ساله	هري							
۴	۰	۱	۱	۳	۴	۵	۸	۹
۵	۱	۲	۲	۴	۶	۷	۸	
۶	۰	۲	۳	۳	۴	۶		

ابتدا داده ها را به صورت زیر مرتب می کنیم چون تعداد داده ها فرد (۲۱) است داده ۱۱ ام میانه یا همان Q_2 می باشد

همچنین میانه های Q_1 و Q_3 را به دست می آوریم

میانه های بیشتر از Q_2 هستند پس مطابق زیر داده های داخل صعبه به ترتیب ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰ و ۶۱ و ۶۲

میانه های کمتر از Q_2 به ترتیب ۴۰، ۴۱، ۴۳، ۴۴، ۴۵ و ۴۶ و ۴۷

پس میانه های $Q_1 = 44.5$ و $Q_3 = 41$

حال برای راحتی حسابات از تمام اعداد داخل صعبه عددی درخواه مثلاً ۵۲ کم می کنیم و سپس میانه های را حساب کرده و با حاصل ۵۲ تفاضل می کنیم (تایید میانی)

از میانگین $\bar{x} = 52 + 0.9 = 52.9$ و از میانگین $\bar{x} = 52.9 - 0.9 = 52$

۱۴۲- در جدول فراوانی داده های آماری زیر، انحراف معیار، پاشی و کداه است؟

x	27	29	31	33	35
f	7	10	13	11	9

ابتدا از داده ها ۳۱ (میان) کم می کنیم

$$\begin{array}{c|ccccc} x-31 & -6 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ \hline f & 1 & 1 & 13 & 11 & 9 \end{array} \rightarrow \bar{x}-31 = \frac{-6 \times 1 + (-2) \times 1 + 0 \times 13 + 2 \times 11 + 4 \times 9}{50} = \frac{1}{50} = 0.02 \rightarrow \bar{x} = 31 + 0.02 = 31.02$$

$$\begin{array}{c|ccccc} x-31.02 & -6.02 & -2.02 & -0.02 & 0.98 & 2.98 \\ \hline f & 1 & 1 & 13 & 11 & 9 \end{array} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-6.02)^2 \times 1 + (-2.02)^2 \times 1 + (-0.02)^2 \times 13 + (0.98)^2 \times 11 + (2.98)^2 \times 9}{50}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{33.8}{50} = 0.676 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0.676} = 0.82 \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

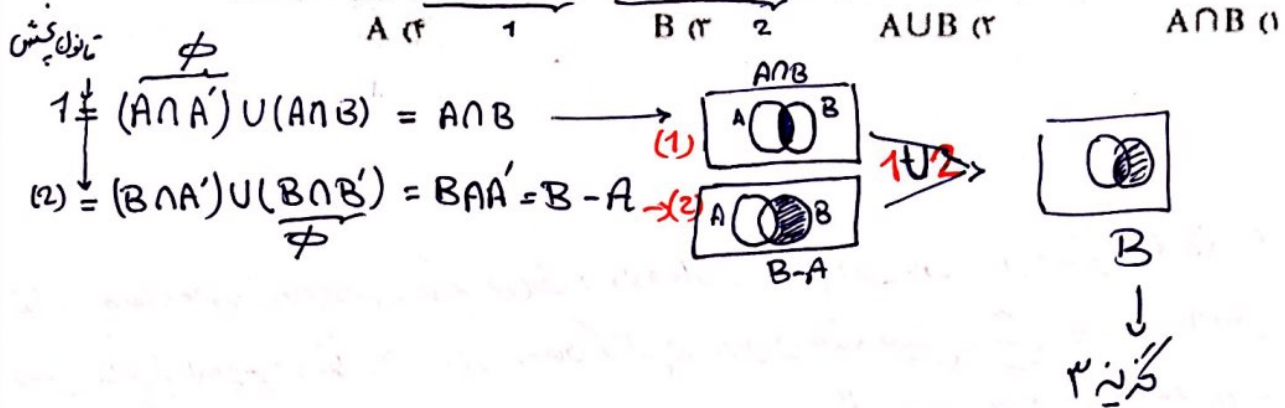
حسابات بدون مبداء اشتباه !!!

۱۴۳- علی، احمد، روزبه، داود و حامد برحسب اندازه قد مرتب می‌شوند. می‌دانیم که حداقل دو نفر آنان از علی کوتاهتر هستند - داود از روزبه کوتاهتر است - احمد کوتاهترین پسر نیست - داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

(۱) روزبه بلندتر از علی (۲) داود بلندتر از احمد (۳) احمد بلندتر از حامد (۴) احمد بلندتر از علی

(1) حلب اول ← صداقل دو قسم از علی کوتاهتر ← پس علی می تواند وسطه را بگیرد ← علی ← (2) حلب دوم ← داود از روزبه کوتاهتر ← پس می توان دلود سمت چپ روزبه (3) حلب سوم ← احد کوتاهتر پس نیست روزبه (داود) علی (3) حامد (3) روزبه (3) داود (3) علی (3) (3) حلب چهارم ← داود از علی بلندتر گزیده ۴ غلط است

۱۴۴- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$ برابر کدام است؟



۱۴۵- رابطه $R = \{(a, b) : |2a - b| \leq 3\}$ بر روی مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7\}$ تعریف شده است. تعداد عضوهای این رابطه، کدام است؟

نسبتاً a را یکی از حالت در نظر می گیریم و بار بار در می آوریم

$a, b \in \{1, 3, 5, 7\}$

$a = 1 \rightarrow |2 - b| \leq 3 \rightarrow b = 1, 3, 5$ (۳ عضو)
 $a = 3 \rightarrow |6 - b| \leq 3 \rightarrow b = 3, 5, 7$ (۳ عضو)
 $a = 5 \rightarrow |10 - b| \leq 3 \rightarrow b = 7$ (۱ عضو)

مجموعاً ۷ عضو

گزینه ۲

۱۴۶- مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ را به چند طریق می توان، به دو مجموعه سه عضوی و یک مجموعه تک عضوی افراز کرد. به طوری که فاقد $\{a\}$ باشد؟

مرحله سوم: $\binom{5}{3} = 10$
 مرحله دوم: $\binom{4}{2} = 6$
 مرحله اول: $\binom{1}{1} = 1$

$10 \times 6 \times 1 = 60$

اگر a در مرحله سوم انتخاب می شود
 $\binom{6}{3} = 20$

اگر a نیست چون در مرحله ۳م انتخاب می شود
 $\binom{6}{3} = 20$

۱۴۷- ظرف A شامل ۵ مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آن ها از ۱۰ بیشتر است؟

ظرف A: $\{1, 3, 5, 7\}$
 ظرف B: $\{2, 4, 6, 8\}$

$P(\text{حاصل ضرب کمتر یا مساوی ۱۰}) = 1 - P(\text{حاصل ضرب بیشتر از ۱۰})$

$n(S) = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} = 20$

حالت های حاصل ضرب کمتر یا مساوی ۱۰: $(1, 2), (1, 4), (3, 2), (5, 2)$

حالت های حاصل ضرب بیشتر از ۱۰: $(1, 6), (1, 8), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6), (7, 2), (7, 4), (7, 6), (7, 8)$

$1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = ۰.۸$

گزینه ۴

۱۴۸- سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آن ها به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ است. با کدام احتمال

لااقل یکی از آنان موفق می شود؟

راه اول

$$\frac{19}{24} \quad (1) \quad \frac{5}{6} \quad (2) \quad \frac{11}{12} \quad (3) \quad \frac{23}{24} \quad (4)$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{23}{24}$$

لااقل یکی قبول شود
همی کدام قبول نشود

راه دوم

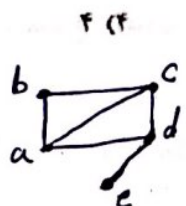
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

b e
↑ ↑

۱۴۹- دنباله درجه رأس های یک گراف به صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۳ می باشد. چند مسیر متمایز بین دو رأس با درجه های ۱ و ۲ وجود دارد؟

وجود دارد؟

ابنه اگر ام را رسم می کنیم



۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

این مطابق شکل تعداد مسیر بین دو رأس b و e
رای خواهد

$$bcde - bacde - bcade - baede$$

۴ مسیر ← ۴ گزین

۱۵۰- عدد پنج رقمی $N = \overline{a746b}$ مضرب ۳۶ می باشد. باقی مانده تقسیم بزرگ ترین عدد N بر ۱۱، کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

عدد مضرب ۴ است که در رقم آخر آن مضرب ۴ باشد

$$N = \overline{a746b} \rightarrow \text{مضرب ۴} \rightarrow 4 \div b \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ b=4 \\ b=8 \end{cases}$$

مضرب ۹ → $a+b+7+4+6+b \equiv 0 \pmod{9}$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+b=10 \\ a+b=19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \rightarrow a=1 \\ b=4 \rightarrow a=6 \\ b=8 \rightarrow a=1 \end{cases}$$

چون می خواهیم N بزرگترین عدد را با a و b را انتخاب می کنیم

باقیمانده
تقسیم ۱۱

$$4-7+4-6+4+b = 1$$

۱۵۱- باقی مانده تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۲ برابر ۵ و باقی مانده تقسیم دو برابر عدد A بر عدد ۱۷ برابر ۹ می باشد.

باقی مانده تقسیم بزرگ ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲، کدام است؟

۷ (۴) ۶ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱) صفر

$$A = 22k + 5 \xrightarrow{\times 2} 2A = 44k + 10$$

$$2A = 17k' + 9 \rightarrow 44k + 10 = 17k' + 9 \rightarrow 17k' - 44k = 1$$

معادله ساید را حل می کنیم

برای حل معادله
ساید ابته
یک جواب دلخواه
به دست می آوریم

$$k' = \frac{44k + 1}{17} \xrightarrow{\text{بجای اقلین}} k_0 = 7 \Rightarrow k' = 19$$

۳ گزین ۴۸ ۴۸ ۴۸ ۴۸

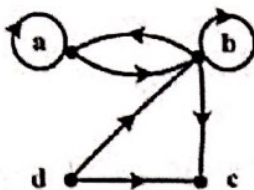
$$k = k_0 + \frac{17}{44}q \Rightarrow k = 7 + 17q \rightarrow A = 22k + 5 = 22(7 + 17q) + 5$$

باقیمانده
تقسیم ۱۲

$$\Rightarrow A = 391q + 44 \xrightarrow{4 \div} A = 97q + 11$$

۱۲

۱۵۲- شکل زیر، گراف جهت‌دار رابطه R است. تعداد یک‌ها، در درایه ماتریس مجاورت M(ROR) کدام است؟



- Y (1)
A (7)
9 (7)
10 (F)

نکته $m(R \cup R) = [m(R)]^2$

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [M(R)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 4 \times 4 \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

۱۵۳- تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی نامعادله $x + y + z \leq 5$ ، کدام است؟

(۱) ۵۰ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۶۰

$x_1 + \dots + x_k = n \rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

$$\begin{aligned} x+y+z=1 &\rightarrow \binom{1+r-1}{r} = \binom{r}{r} = r \\ x+y+z=1 &\rightarrow \binom{r+r-1}{r} = \binom{r}{r} = r \\ x+y+z=r &\rightarrow \binom{r+r-1}{r} = \binom{0}{r} = 1 \\ x+y+z=r &\rightarrow \binom{r+r-1}{r} = \binom{y}{r} = 1 \\ x+y+z=\omega &\rightarrow \binom{\omega+r-1}{r} = \binom{y}{r} = r \end{aligned}$$

۱۵۴- یک تاس را به تکرار پرتاب می‌کنیم. احتمال ظاهر شدن عدد ۴ قبل از آمدن عدد ۶، کدام است؟

$$\frac{r}{f} \quad \frac{r}{r} \quad \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r}$$

۱۵۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع $x=0, 1, 2, 3$ ؛ $P(X=x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{3-x}}{a}$ یک تابع احتمال است؟

۱۵۵- به ازای کدام مقدار n ، تابع $x = 0, 1, 2, 3$ ؛ $P(X=x) = \frac{\binom{x}{n} (1-x)^n}{n}$ یک تابع احتمال است؟

جمع احتمالها $\rightarrow P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

$$\frac{\binom{0}{0} \binom{4}{3}}{a} + \frac{\binom{0}{1} \binom{4}{2}}{a} + \frac{\binom{0}{2} \binom{4}{1}}{a} + \frac{\binom{0}{3} \binom{4}{0}}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1x^5 + 2x^4 + 1x^3 + 1x^1}{a} = 1 \rightarrow a = 1x^5 \rightarrow x^5$$