

سہ ماہی
اسلم احمدی - وحید حسین ظہری
دبیر دبیرہ کاسی شہریت دکن

مسائل و جواب کنور ریاضی - ۹۵ درس ریاضیات دفتر ۱۲۰۷

۱۰۱. اگر $\alpha = \sqrt{3\sqrt{2}} - 2$ و $\beta = \sqrt{3\sqrt{2}} + 2$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$ کی قیمت

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$$

$$= 3\sqrt{2} + 2 + 3\sqrt{2} - 2 + \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)(3\sqrt{2} + 2)}^2 = 4\sqrt{2} + \sqrt{4} = 7\sqrt{2}$$

۱۰۲. بی از اکسٹیم مجموعہ مقادیر m منحنی بہ معادلہ $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x کے ساتھ دو نقطہ بہ طول ہاں منقطع قطع ہو سکتا ہے۔

$$\Delta > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{a} > 0, \quad -\frac{b}{a} < 0 \end{array} \right.$$

$$P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m > 2$$

۱۔ اثرات (۱)، (۲)، (۳)

$$S = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow -\frac{-2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \quad (۲)$$

۱۰۳۔ نمونہ کار دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ منقطع ہاں بہ طول ۱۔ متقاطع

ہستہ اگر $f(x) = \frac{1}{3}$ ہاں مقدار $f^{-1}(27)$ کی قیمت

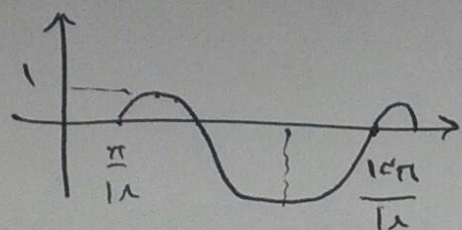
$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{-a+b} = (\frac{1}{9})^{-1} = 3^2 \Rightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{2a+b} = 3^{-1}$$

$$2a = -3 \Rightarrow a = -1, \quad b = 1$$

$$f^{-1}(27) = x \Rightarrow f(x) = 27 \Rightarrow 3^{-x+1} = 3^3 \Rightarrow -x+1=3 \Rightarrow x=-2$$

۱۰۴- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + r \cos(bx + \frac{\pi}{4})$ را نشان می‌دهد. $a+b$ را بیابید.



$$y = a + r \sin bx$$

چون ماکزیمم برابر ۱ است بنابراین

$$a + r(\sin bx) = 1 \Rightarrow \underline{a = -1}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{12\pi}{12} \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow a+b = 2$$

۱۰۵- اگر عبارت $ax^3 + 2x^2 - 12x + 10 - a$ بر $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر باشد، a را بیابید.

$$(x-1)^2 \div x^2 - 2x + 1 \rightarrow$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow x-1 \text{ بر } P(x) \text{ بخش پذیر است}$$

$$3x^2 + 12x - 12 = P'(x)$$

$$\Leftarrow P'(1) = 0 \Rightarrow \text{بنابر این باید}$$

$$P'(1) = 3a + 12 - 12 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$$

۱۰۶- اگر مجموعه جواب نامعادله $\sqrt{3x+5} > 2|x-1| - x$ در (a, b) باشد، طول بازه (a, b) را بیابید.

$$x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{3x+5} > \frac{2x-2-x}{x-2} \rightarrow 3x+5 > \frac{x^2-2x+2}{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x < 0 \Rightarrow 1 < x < 7$$

$$x < 1 \Rightarrow \sqrt{3x+5} > 2-3x \rightarrow 3x+5 > 4-12x+9x^2 \Rightarrow 9x^2 - 15x + 1 < 0$$

$$0 < x < \frac{15}{9} \xrightarrow{x < 1} \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$\textcircled{1} \cup \textcircled{2} \Rightarrow 0 < x < 7 \Rightarrow \text{طول بازه} = \frac{7}{1}$$

$$x \geq 1 \rightarrow \sqrt{3x+5} > x-2 \xrightarrow{\text{مربع هر دو طرف}} \sqrt{3x-5} = x-2 \Rightarrow x = 0, 7$$

$$x < 1 \rightarrow \sqrt{3x+5} > 2-3x \xrightarrow{\text{مربع هر دو طرف}} \sqrt{3x-5} = 2-3x \Rightarrow x = 0, \frac{15}{9}$$

حل المسألة - 1.7

1.7 - دالة $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 2x)}$ نريد إيجاد مجالها.

$$1 - \log(x^2 - 2x) \geq 0 \Rightarrow \log(x^2 - 2x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow -2 < x \leq 4 \quad (1)$$

مجموعتين $(1) \ x < 0, x > 4 \xrightarrow{\text{لا بد من}} x^2 - 2x > 0$

$$(1) \cap (2) \quad [-2, 0) \cup (4, \infty]$$

1.8 - مجموع $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ في $[0, \pi]$ هو $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = -\cos 2x$$

$$\sin 2x = -\cos 2x \rightarrow 2 \sin x \cos x = -\cos 2x$$

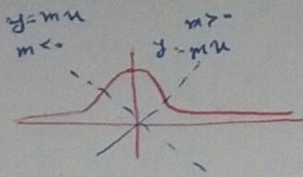
$$\Rightarrow \cos 2x (2 \sin x + 1) = 0 \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$$

۱۰۹ - نمودار تابع
در یک نقطه مشتک است

۱۰۹ - نمودار تابع
در یک نقطه مشتک است

$$\cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = mx \quad m \neq 0$$



$$\Rightarrow (-\infty, +\infty) - \{0\}$$

۱۱۰ - حد عبارت $[\sin(x - \frac{\pi}{4})] \cos x + [\tan x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \rightarrow [\sin(0^+)] \cos(\pi^+) + [x^+] = 3$$

$0 \quad x-1$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4}^- \rightarrow [\sin(0^-)] \cos(\pi^-) + [x^-] = 1 + 2 = 3$$

$-1 \quad x \quad -1$

حد برابر ۳ می باشد.

۱۱۱ - تعداد نقاط ناپیوسته تابع $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است

در این تابع $f(x) = [x^2]$ در نقاط x^2 صحیح است و در این بازه

$$x = -1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$$

در این نقاط ۱

نقطه ناپیوسته است

$$(m+2)y = mx$$

۱۱۲ - به ازای کدام مقادیر m خط به هم می خورد

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow -1 < y' < 1$$

$y' = \frac{m}{m+2}$

$$\Rightarrow -1 < \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow m > -1$$

سوال ۱۱۳ - حد و حد فوق و حد زیر

۱۱۳ - دنباله $\left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + 2} \right\}$ همگوشه است.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + 2} = \frac{1}{2}$ ، حد است $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$
 (همگوشه است)

۱۱۴ - حد و حد فوق و حد زیر $\frac{1}{x^2} (1 - x^2 [\frac{1}{x^2}])$ وقتی $x \rightarrow \infty$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - [\frac{1}{x^2}] \quad \frac{1}{x^2} = t \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t - [t]$

در اینجا $0 \leq t - [t] < 1$ پس حد فوق وجود ندارد.

۱۱۵ - بزرگ ترین و کوچک ترین $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\}$ که x_n یک دنباله است.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{3} , a'_n = \frac{-1}{(x_{n+1})^2} < 0$

$\inf = \frac{2}{3}$

دنباله نزاد و همگوشه است.

۱۱۶ - خط مماس به منحنی $y = \sqrt[3]{18x^3 + 2x^2}$ در نقطه $(0, 0)$ را با رسم منحنی قطع کنید.

$\sqrt[3]{18x^3 + 2x^2} \sim 2(x + \frac{2}{3x})$ و $x_{n+1} = \frac{1}{7}$ $x \rightarrow +\infty$

محلی در $(0, 0)$ برابر $y = \frac{1}{7}$

۱۱۷ - اگر $f(x) = \frac{1}{x} (x + \sqrt{x^2 + 2})$ و $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} (x - \sqrt{x^2 + 2})$ باشد

$f(-x) = \frac{1}{-x} (-x + \sqrt{x^2 + 2})$ / $f(x) f(-x) = \frac{1}{x} (-x^2 + x^2 + 2) = 1$

$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = m \Rightarrow \begin{cases} f(-x) = m \Rightarrow f^{-1}(m) = -x \\ f(x) = \frac{1}{m} \Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{m}) = x \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(m) + f^{-1}(\frac{1}{m}) = 0$

۱۱۸ - خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x+2)e^{1-x}$ در نقطه $x=1$ با خط مماس به منحنی نقطه تماس را به

صدا می‌دهد و من می‌دانم که $\tan \alpha$ را می‌دانم.

$$f'(x) = e^{1-x} - (x+2)e^{1-x} \Rightarrow f'(1) = 1 - (1+2) = -2 \Rightarrow m_1 = -2 \quad x=1$$

$$x=1 \rightarrow y=3 \Rightarrow y=3x \quad m_2 = 3$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-2 - 3}{1 - 6} \right| = 1$$

۱۱۹ - خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x=2$ بر منحنی $y = f(x)$ مماس است. حاصل

$$y = 3x - 2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow f'(2) = 3$$

$$f(2) = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times f'(2) = 0 \times 3 = 0$$

۱۲۰ - طول تقاطع عمود منوطه تابع $y = (5-x)\sqrt{x}$ را بیابید.

$$y = 5x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y'' = -\frac{5}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = -x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

۱۲۱ - در یک ساعت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ با دایره ارتفاع آن که به یک منحنی در یک صفحه مماس است.

$$V = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow r^2 h = 1$$

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{\pi}{\sqrt{h}} \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{h^3} + h} \Rightarrow S' = \frac{(-\frac{3}{h^4} + 1)\pi}{2\sqrt{h^3 + \frac{1}{h}}} = 0$$

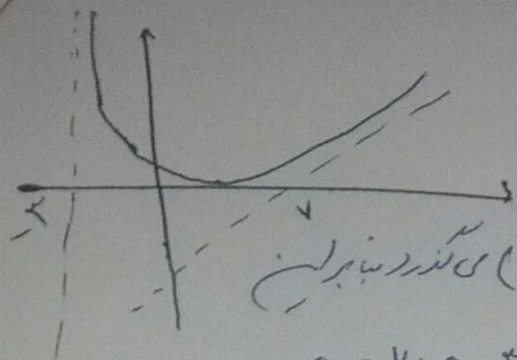
$$\Rightarrow \frac{1}{h^4} = 1 \Rightarrow h = 1$$

نقطهٔ مماس

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$$

۱۲۲. شکل درجه دوم است که نمودار آن به شکل زیر است

ب. عدد b



مماس در $x = -2$ و $c = -2$

چون $y = x + a - 2$ مماس در $(v, 0)$ است

مماس مایل آن

$$0 = v + a - 2 \Rightarrow a = -2$$

در مماس در $x = -2$ داریم $x^2 - 2x + b = (x - 2)^2 \Rightarrow b = 2$

۱۲۳. مقدار میانگین تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$ در بازه $[2, 5]$ کدام است

۱۲۳. مقدار میانگین تابع

$$M = \frac{1}{5-2} \int_2^5 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{x}\right) \Big|_2^5 = \frac{1}{3} \left(\left(5 + \frac{2}{5}\right) - \left(2 + 1\right)\right) = \frac{4}{3}$$

۱۲۵. حاصل $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2x}{2 \sin^2 x} dx$ کدام است

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cot^2 x dx = -x - \cot x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\pi}{4} - 0\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$