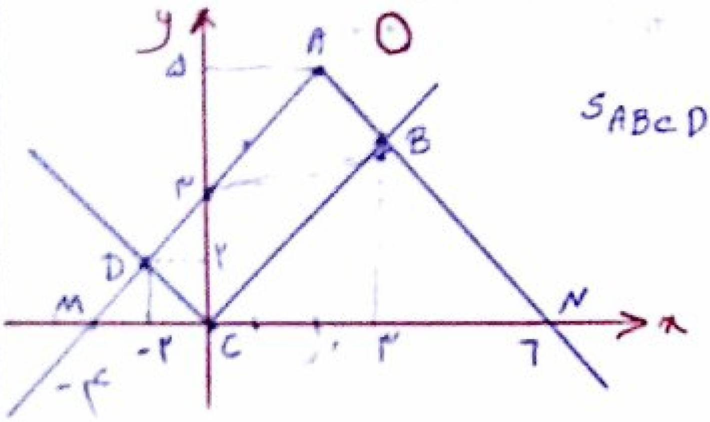


①

$$S_{ABCD} = S_{AMN} - S_{MDC} - S_{BCN}$$

$$= \frac{5\times10}{2} - \frac{2\times4}{2} - \frac{3\times6}{2} = 12$$

$(\log 19 = 1.287 , \log 2 = 0.301)$

④

فرض کنید A مقدار اولیه باشد هر روز 95% A باقی می ماند

$$\left(\frac{95}{100}\right)^t \cdot A = \frac{A}{2} \longrightarrow \left(\frac{95}{100}\right)^t = \frac{1}{2}$$

از طرفین لوگ بگیرید:

$$\log\left(\frac{95}{100}\right)^t = \log\frac{1}{2} \longrightarrow \log\left(\frac{19}{20}\right)^t = -0.301 \longrightarrow t\left[\log 19 - \log 20\right] = -0.301$$

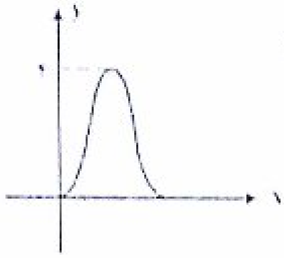
$$t(1.287 - 1.301) = -0.301 \longrightarrow t(-0.014) = -0.301 \longrightarrow t = 21.5$$

①

$$\log(x+2)(2x-1) = \log(4x+1) \longrightarrow (x+2)(2x-1) = 4x+1$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \checkmark \quad x = -1 \text{ غ ق ق}$$

$$\log_4^{2x+5} = \log_4^{2\times\frac{3}{2}+5} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2}\log_2^2 = \frac{3}{2}\times1 = \frac{3}{2}$$



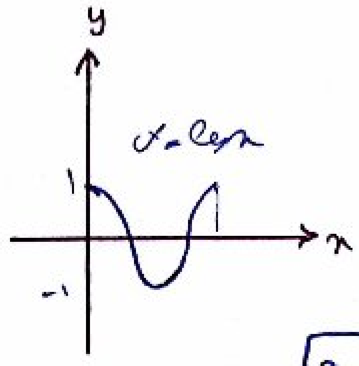
۱۰۴- شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$، در بازهٔ $[0,4]$ است. b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) 1 ۴) 2

نمودار $\cos\frac{\pi}{2}x$ با b به فرم صعودی رسم شده است لذا عدد b باید منفی باشد

یعنی گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.



چون منحنی از مبدأ گذشته پس $(0,0)$ در ضابطه صدق می‌کند

$$0=a+b\cos\frac{\pi}{2}\cdot 0 \longrightarrow 0=a+b$$

$$\boxed{a=-b}$$

یعنی نمودار $-2\cos\frac{\pi}{2}x$

۲ واحد بالا برده شده

اگر گزینه ۱ درست باشد: $b=-2 \longrightarrow a=2 \longrightarrow y=2-2\cos\frac{\pi}{2}x$

۱۰۵- معادله $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$، چند ریشهٔ حقیقی متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$x^2-2x=A$ فرض $\longrightarrow A^2-A-2=0 \longrightarrow A=2,\ A=-1$

$A=2 \longrightarrow x^2-2x=2 \longrightarrow x^2-2x-2=0 \longrightarrow$ ۲ ریشه

$A=-1 \longrightarrow x^2-2x=-1 \longrightarrow x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0,\ x=1$ یک ریشه مضاعف

کنکور ریاضی 97 پاسخ تشریحی ریاضی محمد قرقچیان

۱۰۲- اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x+1| + 1$، آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) $[0, 1)$ ۲) $[0, 2)$ ۳) $[0, +\infty)$ ۴) $[1, +\infty)$

$g(x) = |x+1| + 1$

مقدار $g(x)$ همواره بالای محور x ها می‌باشد و

هیچ وقت صفر نمی‌شود ...

... پس تابع $\frac{f}{g}$ بی‌نهایت نمی‌شود یعنی گزینه ۳

و ۴ حذف می‌شود

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f}{g}\right)x = \lim \frac{x+|x|}{|x+1|+1} = \frac{2x}{x} = 2$$

لذا گزینه ۲ صحیح است.

زیرا کران بالا عدد ۲ می‌باشد

۱۰۷- کدام یک از تابع‌های زیر، یک به یک است؟

۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$ ۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$ ۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ۴) $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

اگر $y' = 0$ ریشه نداشته باشد تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می‌باشد

گزینه ۱: $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \longrightarrow \frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \quad (1+2\sqrt{x}).$

لذا $y' > 0$ و اکیداً صعودی بود لذا خطوط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند

۱۰۸- جواب کلی معادله مثلثاتی $1-\sin^2 x = \sin 2x \sin 4x$، کدام است؟

می‌دانیم $\sin\alpha \sin B = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+B) - \cos(\alpha-B)\right]$

پس: $\sin 2x . \sin 4x = -\frac{1}{2}\left[\cos(2x+4x) - \cos(2x-4x)\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[\cos 6x - \cos 2x\right] = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

$-\frac{1}{2}\left[\cos 6x - \cos 2x\right] = \cos^2 x \rightarrow \cos 6x - (2\cos^2 x - 1) = 2\cos^2 x$

$1+\cos 6x = 0 \rightarrow \cos 6x = -1 = \cos\pi \longrightarrow 6x = 2k\pi \pm \pi \longrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

۱۰۹- حاصل $\cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\cot\frac{11\pi}{3}\right)$، کدام است؟

C

$\cot\frac{11\pi}{3} = \cot\frac{12\pi-\pi}{3} = \cot\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3}{2}\times -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

۱۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$، کدام است؟

می‌دانیم: $1+\sin 2x = (\sin x+\cos x)^2$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}} = \lim \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{|\sin x+\cos x|} = \lim \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{-\cos^2 x\,(\sin x+\cos x)}$$

$$= \lim \frac{(\cos x-\sin x)\cancel{(\cos x+\sin x)}}{-\cos^2 x\,\cancel{(\sin x+\cos x)}} = \frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x} = -2\sqrt{2}$$

۱۱۱- اگر $f(x)=\sqrt{x^2-[x]+[x]}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$، کدام است؟

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{0}{0} \longrightarrow H.p.:\ \frac{f'_+(1)}{1} = f'_+(1)$$

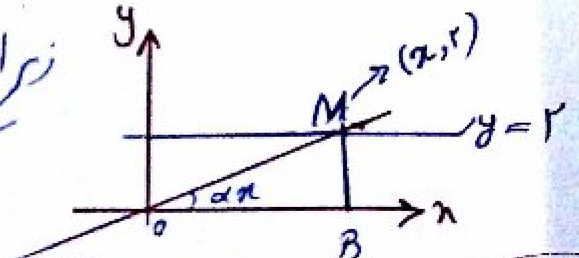
$$f(x)=\sqrt{x^2-[1^+]+x}=\sqrt{x^2-1+x}\longrightarrow f'(1)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{2(1)+1}{2\sqrt{1^2+1-1}}=\frac{3}{2}$$

۱۱۲- نقطه $M(x,2)$ بر روی خط $y=2$ متغیر است. زاویه خطی که نقطه M را به مبدأ مختصات وصل کند با جهت مثبت محور x ها، $\alpha(x)$ است. آهنگ تغییرات α نسبت به تغییر x در لحظه $x=4$، کدام است؟

$$\text{شیب خط}=\alpha x\longrightarrow tg(\alpha x)=\frac{2}{x}\longrightarrow$$ از طرفین مشتق بگیریم

زیرا



$$tg\,\alpha x=\frac{MB}{oB}=\frac{2}{x}$$

$$y=tg\,U\longrightarrow y'=U'[1+tg^2U]$$

$$\alpha'[1+tg^2\alpha x]=\frac{-2}{x^2}$$

$$x=4\longrightarrow\alpha'[1+tg^2 4\alpha]=\frac{-2}{16}\longrightarrow\alpha'[1+(\tfrac{1}{2})^2]=\frac{-1}{8}$$

$$tg\,4\alpha=\frac{2}{x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\alpha'=-0/1}$$

۱۱۳- به ازای اعداد طبیعی $n \geq$ ... فاصله نقاط دنباله $\left\{\frac{۲n^۲+۱}{n^۲+۲n}\right\}$ از نقطه همگرایی خود، کمتر از ... است. کوچکترین مقدار n کدام است؟

$$|a_n - l| < \varepsilon \longrightarrow \left|\frac{۲n^۲+۱}{n^۲+۲n} - ۲\right| < \frac{۴}{۱۰۰} \longrightarrow \left|\frac{-۴n+۱}{n^۲+۲n}\right| < \frac{۴}{۱۰۰}$$

$$\frac{n^۲+۲n}{-۴n+۱} > \frac{۱۰۰}{۴} \longrightarrow \frac{n^۲+۲n}{-۴n+۱} > ۲۵ \longrightarrow n^۲ - ۹۸n - ۲۵ = ۰$$

$$n = -۰/۲۵ \;,\; n = ۹۸/۲۵ \longrightarrow \min n = ۹۸$$

۱۱۴- دنباله $\left\{\left(۱+\frac{۱}{n^۲}\right)^n\right\}$، به کدام عدد همگراست؟

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow e$$

$$= e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1$$

کنکور ریاضی 97 پاسخ تشریحی ریاضی محمد قرقچیان

$x=۲$ ماست

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim \frac{x^2-x}{x^۳-x-۶} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم } \longrightarrow H.P$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۱}{۳x^۲-۱} = \frac{۱}{۳(۲)^۲-۱} = \frac{۱}{۱۱}$$

از طرفی مقدار تابع $\longrightarrow f(۲)=a$

شرط پیوستگی در $x=۲$

$a = ۱/۱۱$

دامنه تابع : $x+۴ \geq ۰ \longrightarrow x \geq -۴$

$x+۵ = ۰ \longrightarrow x=-۵$

$$D_{f(x)} = [-۴,+\infty) - \{-۵\} = [-۴,+\infty)$$

چون دامنه محدوده است نقطه ناپیوستگی نداریم .

در تابع درجه ۳ خط مماس بر منحنی که از منحنی عبور کند از نقطه عطف می‌گذرد

طول نقطه عطف تابع درجه ۳: $x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$

$y' = 3x^2 - 4x + 2$ شیب خط مماس در $x = \frac{2}{3}$ $= f'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) + 3 = \frac{5}{3}$

۱)

$$y' = \frac{-2\sin 2x\,(2-\sin x) - (-\cos x)(\cos 2x)}{(2-\sin x)^2}$$

محل تلاقی با هر محور به شکل زیر جواب بدهید

محل تلاقی با y $\Leftarrow$ $x = 0$

$y'(0) = \frac{1}{4}$ شیب خط مماس $\longrightarrow$ شیب خط قائم $= -4$

$x = 0 \longrightarrow y = \frac{\cos 2x}{2-\sin x} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \longrightarrow A(0, \frac{1}{2})$

معادله خط قائم: $(y - \frac{1}{2}) = -4(x - 0) \longrightarrow y = -4x + \frac{1}{2}$

محل تلاقی با نیمساز ناحیه اول با خط را مساوی خط $y = x$ قرار دهید

$y = -4x + \frac{1}{2}$ و $y = x \longrightarrow x = -4x + \frac{1}{2} \longrightarrow 5x = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{10}$

۱۱۹) گزینه ۳

$$\frac{-f'_x}{f'_y} = -\frac{y^2+1}{1+2xy} \xrightarrow[y=2]{x=1} \frac{-5}{5} = -1 = \boxed{y'_x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2yy'_x(1+2xy) - [2(y+y'_x \cdot x)](y^2+1)}{(1+2xy)^2}$$

$$x=1, y=2 \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{-30}{25} = \frac{6}{5}$$

۱۲۰) گزینه ۲

$$g(x) = f(4-x^2) \longrightarrow g'_x = -2x \cdot f'(4-x^2)$$

$$g''_x = -2f'(4-x^2) + 4x^2 f''(4-x^2) \longrightarrow x = \sqrt{3}$$

$$g''_{\sqrt{3}} = -2f'_1 + 12 f''_{(1)} = -2(-5) + 12(-1) = -2$$

فاصله نقطه M از مبدأ $OM = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(x\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2+x^3}$

$$OM' = \frac{2xx'+3x^2x'}{2\sqrt{x^2+x^3}} \quad , x=8 \quad = \frac{2\times 8x'+3\times 64x'}{2\sqrt{8^2+8^3}} = 1/3$$

$x' = /3$

C

$x=m$

چون در $x=m$ تابع مجانب قائم داشته و هر ۲ شاخه f به سمت $+\infty$ میرود لذا

$x=m$ ریشه مضاعف مخرج است لذا

$x^2-2x+1=(x-1)^2 \to \boxed{b=-2}$

چون تابع از $(0,0)$ گذشته و ریشه مکرر است

لذا $\boxed{a=0}$

$$y=\frac{x^3}{(x-1)^2} \to H.o.p \quad \frac{3\cancel{x^2}}{2(x-1)} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{(x-1)^2}} \to \frac{x}{x-1} = \frac{3}{2} \to \boxed{x=3}$$

$$y(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4} = 6.75$$

کنکور ریاضی 97 پاسخ تشریحی ریاضی محمد قرقچیان

۱۲۳- مقدار متوسط انتگرالی تابع $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x}}$ در بازه [۱،۴] کدام است؟

۱) $\frac{17}{9}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{22}{9}$

$$f_c = \frac{\int_1^4 \frac{2x-1}{\sqrt{x}}}{4-1} = \frac{1}{3}\int \left(2x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{22}{9}$$

$$f'_x = 1 \times \int_3^{x^2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} + \left[2x \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2)^2-1}} - 0\right]x$$

$$f'(\sqrt{3}) = 1\underbrace{\int_3^3 \boxed{}}_{=0} + \left[2\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\right]\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = 3$$