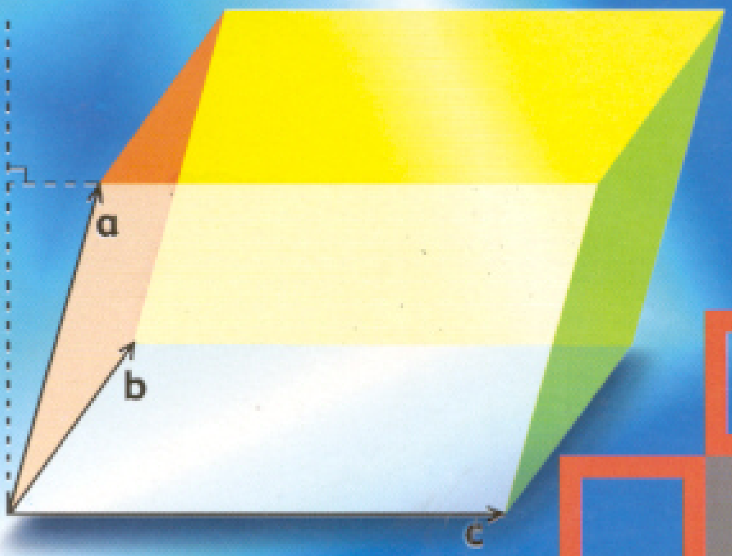
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تربیت عبادت است

# هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

## دورهٔ پیش دانشگاهی

## رشتهٔ علوم ریاضی

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$




۲۹۴/۱

# هندسه تحلیلی

## فصل ۱ بردارها

### قضیه (۱) (صفحه‌ی ۱۰)

**فرض کنیم a ، b و c سه بردار دلخواه $O=(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ بردار صفر و r و S دو عدد حقیقی باشند. در این صو**
داریم:

۱) $a+b=b+a$ **(خاصیت جابه‌جایی جمع)**

۲) $a+(b+c)=(a+b)+c$ **(خاصیت شرکت‌پذیری جمع)**

۳) $a+0=0+a=a$

۴) $a+(-a)=(-a)+a=0$

۵) $r(a+b)=ra+rb$

۶) $(r+s)a=ra+sa$

۷) $(rs)a=r(sa)$

۸) $1a=a$

۹) $0a=a0$

۱۰) $r0=0$

**اثبات:** بردارهای $a=(a_1,a_2,a_3)$، و $c=(c_1,c_2,c_3)$ را در نظر می‌گیریم، به ازای هر i داریم $b_i,c_i\in$
(یعنی مؤلفه‌های بردارها حقیقی‌اند) پس مؤلفه‌های بردارها در خصوصیات اعداد حقیقی صدق می‌کنند.

۱) بنا به تعریف جمع بردارها داریم:

$$=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$
$$=(b_1,b_2,b_3)+(a_1,a_2,a_3)$$
$$=(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)$$

در اعداد حقیقی دارای خاصیت جابه‌جایی است پس:

$$b_1=b_1+a_1$$
$$b_2=b_2+a_2$$
$$b_3=b_3+a_3$$

بنابراین:

$$b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)=(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3)$$
$$b=b+a$$

۲) طبق تعریف جمع بردارها داریم: $=(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)=(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$

از اینجا معادل b+c را در رابطه a+(b+c) وارد می‌کنیم، پس:

$$+c)=(a_1,a_2,a_3)+(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$$

$$a+(b+c)=(a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2), a_3+(b_3+c_3))$$

از آن‌جاکه جمع در اعداد حقیقی خاصیت شرکت‌پذیری دارد پس ادامه رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a+(b+c)=((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2, (a_3+b_3)+c_3)$$
$$=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)+(c_1, c_2, c_3)$$
$$=(a+b)+c$$

۳) در این‌جا نیز از تعریف جمع بردارها استفاده می‌کنیم:

$$a+o=(a_1, a_2, a_3)+(0,0,0)=(a_1+0, a_2+0, a_3+0)=(a_1, a_2, a_3)=a$$

پس $a+o=a$ (I)

$$o+a=(0,0,0)+(a_1, a_2, a_3)=(0+a_1, 0+a_2, 0+a_3)=(a_1, a_2, a_3)=a$$

پس $o+a=a$ (II)

حال از (I) و (II) داریم: $o+a=a=a+o$

۴) طبق تعریف قرینه دو بردار داریم: $-a=(-a_1, -a_2, -a_3)$

پس:
$$a+(-a)=(a_1, a_2, a_3)+(-a_1, -a_2, -a_3)=(a_1-a_1, a_2-a_2, a_3-a_3)$$
$$=(0,0,0)\Rightarrow a+(-a)=o \quad (I)$$

همچنین:
$$(-a)+a=(-a_1, -a_2, -a_3)+(a_1, a_2, a_3)=(-a_1+a_1, -a_2+a_2, -a_3+a_3)$$
$$=(0,0,0)\Rightarrow (-a)+a=o \quad (II)$$

از (I) و (II) داریم: $a+(-a)=o=(-a)+a$

۵) طبق تعریف ضرب عدد حقیقی در یک بردار داریم: $ra=r(a_1, a_2, a_3)=(ra_1, ra_2, ra_3)$

$$a+b=(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$\Rightarrow r(a+b)=r(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)=(r(a_1+b_1), r(a_2+b_2), r(a_3+b_3))$$
$$=(ra_1+rb_1, ra_2+rb_2, ra_3+rb_3)=(ra_1, ra_2, ra_3)+(rb_1, rb_2, rb_3)$$
$$=r(a_1, a_2, a_3)+r(b_1, b_2, b_3)=ra+rb$$
$$\Rightarrow r(a+b)=ra+rb$$

۶)
$$(r+s)a=(r+s)(a_1, a_2, a_3)=((r+s)a_1, (r+s)a_2, (r+s)a_3)$$
$$=(ra_1+sa_1, ra_2+sa_2, ra_3+sa_3)=(ra_1, ra_2, ra_3)+(sa_1, sa_2, sa_3)$$
$$=r(a_1, a_2, a_3)+s(a_1, a_2, a_3)$$

۷)
$$(rs)a=(rs)(a_1, a_2, a_3)=((rs)a_1, (rs)a_2, (rs)a_3)$$

طبق خواص اعداد حقیقی می‌دانیم که هرگاه z ، y و x سه عدد حقیقی باشند. داریم: $(xy)z=x(yz)$

پس در مورد رابطه‌ی $((rs)a_1, (rs)a_2, (rs)a_3)$ نیز داریم:

$$((rs)a_1, (rs)a_2, (rs)a_3)=(r(sa_1), r(sa_2), r(sa_3))=r(sa_1, sa_2, sa_3)=r(sa)$$

بنابراین $(rs)a=r(sa)$

۸) طبق تعریف ضرب بردارها در اعداد حقیقی داریم: $1a=1(a_1, a_2, a_3)=(1a_1, 1a_2, 1a_3)$
$$=(a_1, a_2, a_3)=a\Rightarrow 1a=a$$

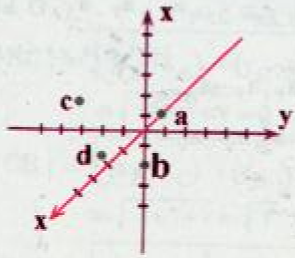
۹) طبق تعریف ضرب بردارها در اعداد حقیقی داریم:

$$0a=0(a_1, a_2, a_3)=(0a_1, 0a_2, 0a_3)=(0,0,0)=o\Rightarrow 0a=o$$

۱۰) طبق تعریف ضرب بردارها در اعداد حقیقی داریم:

$$r0=r(0,0,0)=(r.0, r.0, r.0)=(0,0,0)=o\Rightarrow ro=o$$

## تمرین (صفحه‌ی ۱۳)



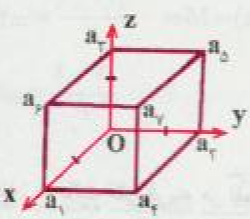

**۱ـ نقاطی با مختصات (۱ , ۱ , ۱)، (۲ـ , ۰ , ۰)، (۲ , ۲ـ , ۱) و (۳ـ , ۲ـ , ۱ـ) را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.**

a=(۱ , ۱ , ۱)
b=(۰ , ۰ , -۲)
c=(۱ , -۲ , ۲)
d=(-۱ , -۲ , -۳)

**توضیح:** برای نمایش هر نقطه در دستگاه مختصات قائم به روش زیر عمل می‌کنیم:
فرض کنید نقطه $A=(x_1,y_1,z_1)$ موجود باشد. مقدار $x_1$ را روی محور x جدا می‌کنیم. از این نقطه یک خط موازی محور yها و یک خط موازی محور z ها رسم می‌کنیم. همچنین مقدار $y_1$ را روی محور y ها جدا می‌کنیم و از این نقطه به موازات محور x ها و محور zها خطوطی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب $z_1$ را روی محور z جدا کرده و ازاین نقطه خطوطی به موازات محورهای x و y رسم می‌کنیم. محل تقاطع این خطوط رئوس یک مکعب با طول $x_1$ و عرض $y_1$ و ارتفاع $z_1$ می‌باشد. رأس دیگر این مکعب را رسم می‌کنیم این رأس همان نقطه A می‌باشد.

**۲ـ رئوس یک مکعب عبارتند از (۰ , ۰ , ۰)، (۰ , ۰ , ۲)، (۰ , ۲ , ۰)، (۲ , ۰ , ۰)، (۰ , ۲ , ۲)، (۲ , ۲ , ۰)، (۲ , ۰ , ۲) و (۲ , ۲ , ۲) این مکعب را در یک دستگاه مختصات قائم نمایش دهید.**

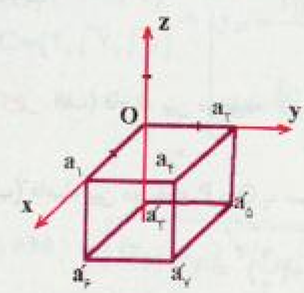
رئوس مکعب رانامگذاری می‌کنیم و هر یک از نقاط را در محور مختصات می‌یابیم. سپس آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم تا مکعب حاصل شود:




$O=(۰ , ۰ , ۰)$ ، $a_1=(۲ , ۰ , ۰)$
$a_2=(۰ , ۲ , ۰)$ ، $a_3=(۰ , ۰ , ۲)$
$a_4=(۲ , ۲ , ۰)$ ، $a_5=(۰ , ۲ , ۲)$
$a_6=(۲ , ۰ , ۲)$ ، $a_7=(۲ , ۲ , ۲)$

**۳ـ قرینه مکعب تمرین ۲ را نسبت به هر یک از صفحات مختصات قائم با مشخص کردن رؤوس پیدا کنید.**

قرینه مکعب نسبت به صفحه xoy
نقاط O و $a_2$ ، $a_1$ و $a_4$ بدون تغییر باقی می‌مانند و مؤلفه z در نقاط $a_3$ ، $a_5$ ، $a_6$ و $a_7$ قرینه می‌شود. یعنی نقاط به صورت زیر درمی‌آیند:



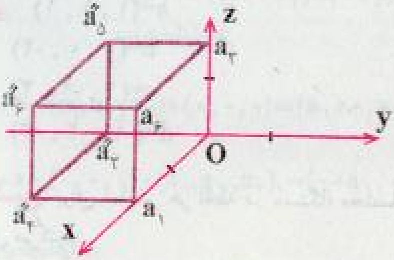

$O \to O, a_1 \to a_1, a_2 \to a_2, a_4 \to a_4$
$a_3 \to a'_3, a_5 \to a'_5, a_6 \to a'_6, a_7 \to a'_7$

$$\begin{cases} a'_3=(۰,۰,-۲) \\ a'_5=(۰,۲,-۲) \\ a'_6=(۲,۰,-۲) \\ a'_7=(۲,۲,-۲) \end{cases}$$

**نکته:** در حالت کلی قرینه هر نقطه دلخواه $(x , y , z)$ نسبت به صفحه xoy به صورت $(x , y , -z)$ می‌باشد.

۱) قرینه مکعب نسبت به صفحه xoz :

نقاط O، $a_1$، $a_3$ و $a_6$ بدون تغییر باقی می‌مانند و مولفه y در نقاط $a_2$، $a_4$، $a_5$ و $a_7$ قرینه می‌شود یعنی نقاط به صورت زیر درمی‌آیند:




$$O\to O,\ a_1\to a_1,\ a_3\to a_3,\ a_6\to a_6$$

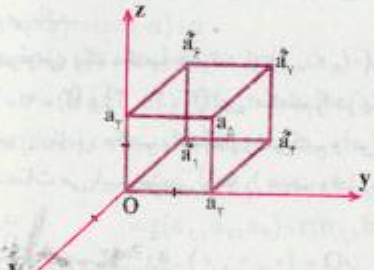
$$a_2\to a_2'',\ a_4\to a_4'',\ a_5\to a_5'',\ a_7\to a_7''$$

$$\begin{cases} a_2''=(0,-2,0)\\ a_4''=(2,-2,0)\\ a_5''=(0,-2,2)\\ a_7''=(2,-2,2)\end{cases}$$

**نکته:** در حالت کلی قرینه هر نقطه دلخواه $(x , y , z)$ نسبت به صفحه xoz به صورت $(x , -y , z)$ می‌باشد.

۳) قرینه مکعب نسبت به صفحه yoz :

نقاط O، $a_2$، $a_3$ و $a_5$ بدون تغییر باقی می‌مانند و مولفه x در نقاط $a_1$، $a_4$، $a_6$ و $a_7$ قرینه می‌شود یعنی نقاط به صورت زیر درمی‌آیند:




$$O\to O,\ a_2\to a_2,\ a_3\to a_3,\ a_5\to a_5$$

$$a_1\to a_1''',\ a_4\to a_4''',\ a_6\to a_6''',\ a_7\to a_7'''$$

$$\begin{cases} a_1'''=(-2,0,0)\\ a_4'''=(-2,2,0)\\ a_6'''=(-2,0,2)\\ a_7'''=(-2,2,2)\end{cases}$$

**نکته:** درحالت کلی قرینه هر نقطه دلخواه $(x , y , z)$ نسبت به صفحه yoz به صورت $(-x , y , z)$ می‌باشد.

**۴ـ در هر یک از حالات زیر، فاصله P از Q را پیدا کنید.**

**الف)** $P=(\sqrt{2},0,0)$ ، $Q=(0,1,1)$  **ب)** $P=(1,0,-\frac{1}{2})$ ، $Q=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$

**یادآوری:** فاصله بین دو نقطه دلخواه $P=(x_1,y_1,z_1)$ و $Q=(x_2,y_2,z_2)$ همان اندازه پاره‌خط PQ می‌باشد و داریم:

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

الف) فاصله بین دو نقطه P و Q به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$|PQ|=\sqrt{(0-\sqrt{2})^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2+1+1}=2$$

ب) فاصله بین دو نقطه P و Q به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$|PQ|=\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2+(0-(-\frac{1}{2}))^2}=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=1$$

**۵ـ محیط مثلث ABC را با فرض $A=(-۱,۰,۰)$ ، $B=(۲,۰,\sqrt{۷})$ و $C=(۳,\sqrt{۲},\sqrt{۷})$ پیدا کنید.**

محیط مثلث ABC به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود: محیط مثلث $ABC=|BA|+|CB|+|AC|$
بنابراین کافی است طول‌های پاره‌خط‌های AC و CB و BA رابیابیم:

$$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲+(z_C-z_A)^۲}=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(\sqrt{۲}-۰)^۲+(\sqrt{۷}-۰)^۲}$$
$$=\sqrt{۱۶+۲+۷}=۵$$

$$|CB|=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲+(z_B-z_C)^۲}=\sqrt{(۲-۳)^۲+(۰-\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۷}-\sqrt{۷})^۲}$$
$$=\sqrt{۱+۲+۰}=\sqrt{۳}$$

$$|BA|=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲+(z_A-z_B)^۲}=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-\sqrt{۷})^۲}$$
$$=\sqrt{۹+۰+۷}=۴$$

بنابراین محیط ABC به صورت زیر است:

$$۵+\sqrt{۳}+۴=۹+\sqrt{۳}$$

**۶ـ مختصات نقطه M وسط پاره‌خط PQ را که $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$ پیدا کنید.**

در هندسه مسطحه نقطه میانی دو نقطه به مختصات‌های $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ به صورت زیر است:

$$\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)$$

به طور کاملاً مشابه درهندسه فضایی نقطه میانی دو نقطه $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q=(x_۱,y_۱,z_۱)$ به صورت روبرو است:

$$\begin{cases} x_m=\dfrac{x_۰+x_۱}{۲} \\ y_m=\dfrac{y_۰+y_۱}{۲} \\ z_m=\dfrac{z_۰+z_۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow M=(x_m,y_m,z_m)$$

نقطه وسط پاره PQ همان نقطه میانی دو نقطه P و Q می‌باشد.

**۷ـ طول میانه AM از مثلث ABC را که در تمرین ۵ ذکر شده است به دست آورید.**

میانه AM پاره‌خطی است که ازرأس A به نقطه M یعنی وسط پاره‌خط BC کشیده، شده است. مختصات نقطه $A=(-۱,۰,۰)$ می‌باشد مختصات نقطه M را نیز با استفاده، از مختصات نقاط B و C می‌یابیم.

$$\begin{matrix} B=(۲,۰,\sqrt{۷}) \\ C=(۲,\sqrt{۲},\sqrt{۷}) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_m=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{۲+۳}{۲}=\dfrac{۵}{۲} \\ y_m=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۰+\sqrt{۲}}{۲}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ z_m=\dfrac{z_B+z_C}{۲}=\dfrac{\sqrt{۷}+\sqrt{۷}}{۲}=\dfrac{۲\sqrt{۷}}{۲}=\sqrt{۷} \end{cases} \Rightarrow M=\left(\frac{۵}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},\sqrt{۷}\right)$$

حال برای به دست آوردن طول میانی AM داریم:

$$|AM|=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲+(z_M-z_A)^۲}=\sqrt{\left(\frac{۵}{۲}-(-۱)\right)^۲+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۰\right)^۲+(\sqrt{۷}-۰)^۲}=\frac{\sqrt{۷۹}}{۲}$$

**۸ـ قضیه ۱ را ثابت کنید.**

این قضیه را قبلاً اثبات کرده‌ایم، به صفحه ۱ رجوع کنید.

**۹ـ در هر یک از حالات زیر، بردار هم‌ارز با پیکان $\overrightarrow{PQ}$ را به صورت $ai+bj+ck$ بنویسید.**

الف) $P=(3,-4,10)$ ، $Q=(0,0,0)$

ب) $P=(3,-1,3)$ ، $Q=(1,-3,2)$

ج) $P=(2,1+\sqrt{2},1+\sqrt{3})$ ، $Q=(2,1,1)$

الف)

$\overrightarrow{PQ}=(0-3,0+4,0-10)=(-3,4,-10)$

$\overrightarrow{PQ}=-3i+4j-10k$

ب)

$\overrightarrow{PQ}=(1-3,-3+1,2-3)=(-2,-2,-1)$

$\overrightarrow{PQ}=-2i-2j-k$

پ)

$\overrightarrow{PQ}=(2-2,-1-1-\sqrt{2},1-1-\sqrt{3})=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{PQ}=-\sqrt{2}j-\sqrt{3}k$

**۱۰ـ در هر یک از حالات زیر بردارهای $a+b$ ، $a-b$ و $ra$ را پیدا کنید.**

الف) $a=2i-5j+10k$ ، $b=-i+2j-3k$ و $r=2$

$a+b=(2i-5j+10k)+(-i+2j-3k)=i-3j+7k$

$a-b=(2i-5j+10k)+(-i+2j-3k)=3i-7j+13k$

$ra=2(2i-5j+10k)=4i-10j+20k$

ب) $a=i+j-3k$ ، $b=\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-3k$ و $r=-1$

$a+b=(i+j-3k)+(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-3k)=\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}j-6k$

$a-b=(i+j-3k)-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-3k)=\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}j$

$ra=-1(i+j-3k)=-i-j+3k$

ج) $a=2i$ ، $b=j+k$ و $r=\frac{1}{3}$

$a+b=(2i)+(j+k)=2i+j+k$

$a-b=(2i)-(j+k)=2i-j-k$

$ra=\frac{1}{3}(2i)=\frac{2}{3}i$

**۱۱ـ در هر یک از حالات زیر طول بردار a را پیدا کنید.**

الف) $a=i-j+k$ ب) $a=-3i+4j-12k$

ج) $a=\sqrt{2}i-j+k$ د) $a=4i-8j+8k$

**یادآوری:** طول بردار $a=xi+yj+zk$ به صورت زیر است:

$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

الف) $a=i-j+k\Rightarrow |a|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

ب) $a=-3i+4j-12k\Rightarrow |a|=\sqrt{(-3)^2+(4)^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$

ج) $a=\sqrt{2}i-j+k\Rightarrow |a|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

د) $a=4i-8j+8k\Rightarrow |a|=\sqrt{4^2+(-8)^2+8^2}=\sqrt{144}=12$

**۱۲ـ به ازای هر یک از بردارهای a که در تمرین ۱۱ ذکر شده‌اند، بردار $e_a$ را پیدا کنید.**

**یادآوری:** بردار $e_a$ یعنی برداریکه هم‌جهت با بردار a که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$e_a=\frac{a}{|a|}$$

الف)
$$a=i-j+k\,,\ |a|=\sqrt{3}\Rightarrow e_a=\frac{i-j+k}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}i-\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k$$

ب)
$$a=-3i+4j-12k\,,\ |a|=13\Rightarrow e_a=\frac{-3i+4j-12k}{13}=-\frac{3}{13}i+\frac{4}{13}j-\frac{12}{13}k$$

ج)
$$a=\sqrt{2}i-j+k\,,\ |a|=2\Rightarrow e_a=\frac{\sqrt{2}i-j+k}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$$

د)
$$a=4i-8j+8k\,,\ |a|=12\Rightarrow e_a=\frac{4i-8j+8k}{12}=\frac{1}{3}i-\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$$

## تمرین (صفحه‌ی ۲۳)

**۱ـ برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است، زاویه بین a و b را پیدا کنید.**

**الف)** $a=(1\,,1\,,0)$ ، $b=(0\,,-1\,,-1)$

**ب)** $a=(-4\,,2\,,-5)$ ، $b=(\frac{1}{2}\,,6\,,2)$

**ج)** $a=(1\,,0\,,0)$ ، $b=(\sqrt{3}\,,1\,,0)$

**د)** $a=(0\,,0\,,1)$ ، $b=(0\,,\sqrt{3}\,,1)$

**یادآوری:** کسینوس زاویه بین دو بردار $a=(x_1,y_1,z_1)$ و $b=(x_2,y_2,z_2)$ به صورت زیر است:

$$\cos\alpha=\frac{a.b}{|a|.|b|}$$

الف)
$$a.b=(1,1,0).(0,-1,-1)=(1)(0)+(1)(-1)+(0)(-1)=-1$$
$$|a|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}\,,\ |b|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$
$$\cos\alpha=\frac{a.b}{|a|\ |b|}=\frac{-1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\alpha=-60^\circ$$

ب)
$$a.b=(-4,2,-5).(\frac{1}{2},6,2)=(-4)(\frac{1}{2})+(2)(6)+(-5)(2)=0$$
$$|a|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{45}\,,\ |b|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+6^2+2^2}=\sqrt{\frac{161}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{a.b}{|a|\ |b|}=\frac{0}{\sqrt{45}.\sqrt{\frac{161}{2}}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$$

ج)
$$a.b=(1,0,0).(\sqrt{3},1,0)=(1)(\sqrt{3})+(0)(1)+(0)(0)=\sqrt{3}$$
$$|a|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1\,,\ |b|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+0}=2$$
$$\cos\alpha=\frac{a.b}{|a|\ |b|}=\frac{\sqrt{3}}{1\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=30^\circ$$

د)

$$a.b=(۰,۰,۱).(۰,\sqrt{۳},۱)=(۰)(۰)+(۰)(\sqrt{۳})+(۱)(۱)=۱$$

$$|a|=\sqrt{۰^۲+۰^۲+۱^۲}=۱,\ |b|=\sqrt{۰^۲+(\sqrt{۳})^۲+۱^۲}=۲$$

$$\cos\alpha=\frac{a.b}{|a|\,|b|}=\frac{۱}{۱\times ۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

**۲ـ نشان دهید بردارهای a، b و c که در زیر تعریف شده‌اند دوبه‌دو برهم عمودند.**

$$a=(۲,۱,-۱),\ b=(۳,+۷,۱۳),\ c=(۲۰,-۲۹,۱۱)$$

شرط عمود بودن دو بردار بر یکدیگر این است که ضرب داخلی آنها برابر صفر باشد.

حال ضرب داخلی دوبه‌دوی بردارهای c، b و a را می‌نامیم.

$$a.c=(۲,۱,-۱).(۲۰,-۲۹,۱۱)=(۲)(۲۰)+(۱)(-۲۹)+(-۱)(۱۱)=۰\Rightarrow a\perp c$$

$$a.b=(۲,۱,-۱).(۳,۷,۱۳)=(۲)(۳)+(۱)(۷)+(-۱)(۱۳)=۰\Rightarrow a\perp b$$

$$b.c=(۳,۷,۱۳).(۲۰,-۲۹,۱۱)=(۳)(۲۰)+(۷)(-۲۹)+(۱۳)(۱۱)=۰\Rightarrow b\perp c$$

**۳ـ برای هر یک از بردارهای a و b که در زیر آمده است. تصویر قائم a را روی امتداد b و قرینه‌ی a را نسبت به امتداد b پیدا کنید.**

الف) $a=(۲,-۱,۲)$ ، $b=(۱,۰,۰)$

ب) $a=(۱,۰,۰)$ ، $b=(-۲,۳,-۴)$

ج) $a=(۱,۱,۰)$ ، $b=(-۱,۲,۴)$

د) $a=(۲,۳,۱)$ ، $b=(۳,۲,۱)$

تصویر قائم بردار a روی امتداد b به صورت روبه‌روست:

$$a'=\frac{a.b}{|b|^۲}b$$

و قرینه بردار a نسبت به امتداد b نیز به صورت روبه‌روست:

$$a''=\frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a$$

توجه داشته باشید که بردار a و بردار b باید غیرصفر باشند.

الف) $a.b=(۲,-۱,۲).(۱,۰,۰)=(۲)(۱)+(-۱)(۰)+(۲)(۰)=۲$ و $|b|=\sqrt{۱^۲+۰^۲+۰^۲}=۱$

تصویر قائم بردار a روی امتداد b $=\frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{۲}{۱^۲}.(۱,۰,۰)=(۲,۰,۰)\to a'=(۲,۰,۰)$

قرینه بردار a نسبت به امتداد b :

$$\frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a=\frac{(۲)(۲)}{۱^۲}(۱,۰,۰)-(۲,-۱,۲)=(۲,۱,-۲)\Rightarrow a'=(۲,۱,-۲)$$

ب) $a.b=(۱,۰,۰).(-۲,۳,-۴)=(۱)(-۲)+(۰)(۳)+(۰)(-۴)=-۲$

$$|b|=\sqrt{(-۲)^۲+(۳)^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۲۹}$$

تصویر قائم بردار a روی امتداد b

$$=\frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{-۲}{(\sqrt{۲۹})^۲}.(-۲,۳,-۴)=(\frac{۴}{۲۹},\frac{-۶}{۲۹},\frac{۸}{۲۹})\Rightarrow a'=(\frac{۴}{۲۹},\frac{-۶}{۲۹},\frac{۸}{۲۹})$$

قرینه بردار a نسبت به امتداد b

$$=\frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a=\frac{(۲)(-۲)}{(\sqrt{۲۹})^۲}.(-۲,۳,-۴)-(۱,۰,۰)=(\frac{۸}{۲۹},\frac{-۱۲}{۲۹},\frac{۱۶}{۲۹})-(۱,۰,۰)$$

$$=(\frac{-۲۱}{۲۹},\frac{-۱۲}{۲۹},\frac{۱۶}{۲۹})\Rightarrow a''=(\frac{-۲۱}{۲۹},\frac{-۱۲}{۲۹},\frac{۱۶}{۲۹})$$

ج) $a.b=(۱,۱,۰).(-۱,۲,۴)=(۱)(-۱)+(۱)(۲)+(۰)(۴)=۱, |b|=\sqrt{(-۱)^۲+۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۱}$

تصویر قائم بردار a روی امتداد b $=\frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{۱}{(\sqrt{۲۱})^۲}.(-۱,۲,۴)=(\frac{-۱}{۲۱},\frac{۲}{۲۱},\frac{۴}{۲۱})$

قرینه بردار a نسبت به امتداد بردار b

$=\frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a=\frac{(۲)(۱)}{(\sqrt{۲۱})^۲}.(-۱,۲,۴)-(۱,۱,۰)=(\frac{-۲۳}{۲۱},\frac{-۱۷}{۲۱},\frac{۸}{۲۱})$

$\Rightarrow a''=(\frac{-۲۳}{۲۱},\frac{-۱۷}{۲۱},\frac{۸}{۲۱})$

د) $a.b=(۲,۳,۱).(۳,۲,۱)=(۲)(۳)+(۳)(۲)+(۱)(۱)=۱۳, |b|=\sqrt{۳^۲+۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۴}$

تصویر قائم بردار a روی امتداد b $=\frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{۱۳}{(\sqrt{۱۴})^۲}.(۳,۲,۱)=(\frac{۳۹}{۱۴},\frac{۲۶}{۱۴},\frac{۱۳}{۱۴})\Rightarrow a'=(\frac{۳۹}{۱۴},\frac{۱۳}{۷},\frac{۱۳}{۱۴})$

قرینه بردار a نسبت به امتداد بردار b

$=\frac{۲a.b}{|b|^۲}b-a=\frac{(۲)(۱۳)}{(\sqrt{۱۴})^۲}.(۳,۲,۱)-(۲,۳,۱)=(\frac{۳۹}{۱۴},\frac{۲۶}{۱۴},\frac{۱۳}{۱۴})-(۲,۳,۱)$

$=(\frac{۱۱}{۱۴},\frac{-۱۶}{۱۴},\frac{-۱}{۱۴})\Rightarrow a''=(\frac{۱۱}{۱۴},\frac{-۸}{۷},\frac{-۱}{۱۴})$

**۴ـ فرض کنید a ، b و c بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این خاصیت که a+b+c=o مقدار a.b+b.c+c.a رامحاسبه کنید.**

از ویژگی ۵ ضرب داخلی روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

I) $a.(a+b+c)=a.a+a.b+a.c$

II) $b.(a+b+c)=b.a+b.b+b.c$

III) $c.(a+b+c)=c.a+c.b+c.c$

و از آن‌جاکه a+b+c=o می‌دانیم ضرب داخلی هر بردار در صفر، بردار صفر می‌شود. پس تمام روابط I، II و III برابر صفرند و داریم:

$$\begin{cases}a.a+a.b+a.c=۰\\ b.a+b.b+b.c=۰\\ c.a+c.b+c.c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|^۲+a.b+a.c=۰\\ b.a+|b|^۲+b.c=۰\\ c.a+c.b+|c|^۲=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a.b+a.c=-|a|^۲\\ b.a+b.c=-|b|^۲\\ c.a+c.b=-|c|^۲\end{cases}$$

با جمع کردن طرفین سه رابطه اخیر داریم: $۲(a.b)+۲(a.c)+۲(b.c)=-(|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲)$

$\Rightarrow ۲(a.b+a.c+b.c)=-(|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲)$

$\Rightarrow a.b+b.c+c.a=\frac{-(|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲)}{۲}$

با جایگذاری اندازه بردارهای a، b و c از آن‌چه که در صورت مسئله داده شده است داریم:

$|a|=۱, |b|=۲, |c|=۳$

$a.b+b.c+c.a=\frac{-(۱^۲+۲^۲+۳^۲)}{۲}=\frac{-۱۴}{۲}=-۷$

**۵ـ فرض کنید a ، b و c سه بردار غیرصفر باشند اگر a.b=a.c با مثالی نشان دهید که لزومی‌ندارد b=c.**

برای این سؤال بیشمار مثال نقض وجود دارد ما به یکی از آنها بسنده می‌کنیم. فرض کنید داشته باشیم:

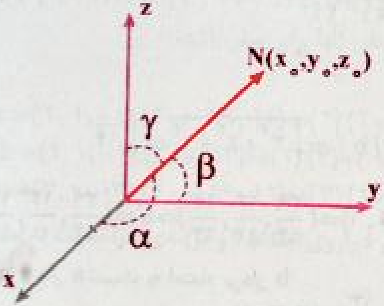
$a=(۲ , ۲ , ۲) , b=(۳ , -۱ , ۲) , c=(-۱ , ۳ , ۲)$

$a.b=(۲,۲,۲).(۳,-۱,۲)=(۲)(۳)+(۲)(-۱)+(۲)(۲)=۸$

$a.c=(۲,۲,۲).(-۱,۳,۲)=(۲)(-۱)+(۲)(۳)+(۲)(۲)=۸$

ملاحظه می‌کنیم که: $\Rightarrow a.b=a.c \xrightarrow{\text{اما}} b\neq c$

**۶ـ تصویر قائم بردار $a=(۴ , -۳ , ۲)$ را بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد به دست آورید.**




می‌دانیم که برای هر بردار دلخواه $N=(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ روابط زیر را برای کسینوس زوایای هادی بردار N داریم:

$$\cos\alpha=\frac{x_\circ}{|N|},\cos\beta=\frac{y_\circ}{|N|},\cos\gamma=\frac{x_\circ}{|N|}$$

در این سؤال، بردار مورد نظر با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد یعنی داریم:

$$\alpha=\beta=\gamma\Rightarrow\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma\Rightarrow\frac{x_\circ}{|N|}=\frac{y_\circ}{|N|}=\frac{z_\circ}{|N|}\Rightarrow x_\circ=y_\circ=z_\circ$$

پس هر برداری که با قسمت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی بسازد، برداری است که تمام مؤلفه‌های آن برابرند. آن را برداری چون $b=(B , B , B)$ در نظرمی‌گیریم، حال داریم:

تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b

$$\frac{a.b}{|b|^۲}b=\frac{(۴,-۳,۲).(B,B,B)}{(\sqrt{B^۲+B^۲+B^۲})^۲}(B,B,B)=\frac{۴B-۳B+۲B}{۳B^۲}(B,B,B)$$

$$=\frac{۳B}{۳B^۲}(B,B,B)=(۱,۱,۱)$$

تصویر قائم $a=(۴ , -۳ , ۲)$ بر هر بردار با خصوصیات ذکر شده در سؤال، بردار $(۱ , ۱ , ۱)$ می‌باشد.

**۷ـ فرض کنید $a=(۳ , -۶ , -۱)$ ، $b=(۱ , ۴ , -۵)$ و $c=(۳ , -۴ , ۱۲)$ تصویر قائم a+b را بر امتداد c به دست آورید.**

$a+b=(۳,-۶,-۱)+(۱,۴,-۵)=(۴,-۲,-۶)$

$(a+b).c=(۴,-۲,-۶).(۳,-۴,۱۲)=(۴)(۳)+(-۲)(-۴)+(-۶)(۱۲)=-۵۲$

$|c|=\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$

تصویر قائم a+b بر امتداد c $=\frac{(a+b).c}{|c|^۲}c=\frac{-۵۲}{۱۶۹}(۳,-۴,۱۲)=(-\frac{۱۵۶}{۱۶۹},\frac{۲۰۸}{۱۶۹},\frac{-۶۲۴}{۱۶۹})$

**۸ـ فرض کنید $a=(۱ , -۳ , ۴)$ ، $b=(۳ , -۴ , ۲)$ و $c=(-۱ , ۱ , ۴)$ تصویر قائم a را بر امتداد b+c به دست آورید.**

$b+c=(۳,-۴,۲)+(-۱,۱,۴)=(۲,-۳,۶)$

$a.(b+c)=(۱,-۳,۴).(۲,-۳,۶)=(۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۴)(۶)=۳۶$

$|b+c|=\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲+۶^۲}=\sqrt{۴۹}=۷$

تصویر قائم a بر امتداد بردار b+c $=\frac{a.(b+c)}{|b+c|^۲}(b+c)=\frac{۳۶}{۴۹}(۲,-۳,۶)=(\frac{۷۲}{۴۹},\frac{-۱۰۸}{۴۹},\frac{۲۱۶}{۴۹})$

**۹) الف) فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. نامساوی $|a.b| \le |a|\,|b|$ را ثابت کنید. (این نامساوی به نامساوی کشی ـ شوارتس معروف است.)**

اگر $\alpha$ زاویه بین دو بردار a و b باشد داریم:

$$a.b = |a|\,|b|\cos\alpha$$
$$\Rightarrow |a.b| = |a|\,|b|\,|\cos\alpha|$$

در مورد کسینوس هر زاویه رابطه مقابل موجود است: $|\cos\alpha| \le 1$ بنابراین روابط زیر موجود است:

$$|a.b| = |a|\,|b|\,|\cos\alpha| \le |a|\,|b| \ (1) \Rightarrow |a.b| \le |a|\,|b|$$

ب) به کمک الف ثابت کنید برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ داریم:

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3| \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

بردارهای $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ مفروضند طبق (الف) داریم:

$$|a.b| \le |a|\,|b|$$

می‌توان به جای $|a.b|$ و $|a|$ و $|b|$ در رابطه بالا، مقادیر زیر را جایگذاری کرد:

$$a.b=(a_1,a_2,a_3).(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \Rightarrow |a.b| = |a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$|b| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} = (b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

$|a.b| \le |a|\,|b|$ پس داریم:

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3| \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

توجه: توجه داشته باشید که می‌توان هر سه عدد حقیقی را مؤلفه‌های یک بردار فرض کرد، همان‌طورکه ما در حل این قسمت انجام داده‌ایم.

ج) به کمک ب ثابت کنید برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, a_3$ داریم:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2 \le \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$$

دو بردار a و b را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم:

$$a=(a_1,a_2,a_3),\ b=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow |a.b| = \left|\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{3}\right| = \left|\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right|$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\ |b| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|a.b| \le |a|\,|b| \xrightarrow{\text{با جایگذاری مقادیر } |a| \text{ و } |b| \text{ و } |a.b| \text{ داریم}} \left|\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right| \le \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2 \le \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$$

**۱۰ـ فرض کنید a و b دو بردار غیرصفر باشند. ثابت کنید a بر b عمود است اگر و فقط اگر $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$ (با اثبات این تمرین، اثبات جدیدی از کدام قضیه معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟)**

اگر بردار a بر بردار b عمود باشد، ضرب داخلی a و b صفر می‌باشد.

$$|a+b|^2=(a+b).(a+b)=(a+b).a+(a+b).b$$
$$=a.a+b.a+a.b+b.b=|a|^2+2a.b+|b|^2$$

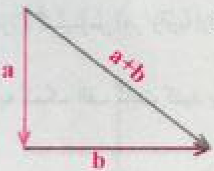
و از آن‌جا که $a.b=0$ داریم: $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2$

حال بر عکس، فرض کنیم $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2$ می‌خواهیم ثابت کنیم a بر b عمود است:

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2a.b \Rightarrow 2a.b=0 \Rightarrow a.b=0$$

و این شرط عمود بودن a بر b می‌باشد.

درمثلث زیر، یکی از ضلع‌ها بردار a ، دیگری بردار b و دیگری بردار a+b می‌باشد:




بردار a بر بردار b عمود است پس مثلث قائم‌الزاویه است و طبق این سؤال ثابت کردیم $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2$ و این همان قضیه فیثاغورث در مورد مثلث قائم‌الزاویه است. اثباتی که اینجا ارائه دادیم اثباتی دیگر برای قضیه فیثاغورث است.

**۱۱ـ فرض کنید a و b دوبردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث را ثابت کنید: $|a+b| \le |a|+|b|$**
**(با اثبات این تمرین، اثباتی جدید از کدام قضیه معروف هندسه ارائه کرده‌اید؟)**

$$|a+b|^2=(a+b).(a+b)=a.a+a.b+b.a+b.b=|a|^2+2a.b+|b|^2=$$
$$=|a|^2+2|a|\,|b|\cos\alpha+|b|^2$$

$$(|a|+|b|)^2=|a|^2+2|a|\,|b|+|b|^2$$

می‌دانیم $|\cos\alpha|\le 1$ پس:

$$|a+b|^2=|a|^2+2|a|\,|b|\cos\alpha+|b|^2\le|a|^2+2|a|\,|b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$$
$$\Rightarrow |a+b|^2\le(|a|+|b|)^2$$
$$\Rightarrow |a+b|\le|a|+|b|$$

**۱۲ـ فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید $|a+b|^2+|a-b|^2=2|a|^2+2|b|^2$**
**(تعبیر هندسی رابطه بالا چیست؟)**

$$\text{I)}\ |a+b|^2=(a+b).(a+b)=a.a+2a.b+b.b=|a|^2+2a.b+|b|^2$$
$$\text{II)}\ |a-b|^2=(a-b).(a-b)=a.a-2a.b+b.b=|a|^2-2a.b+|b|^2$$

رابطه‌های (I) و (II) را جمع می‌کنیم: $|a+b|^2+|a-b|^2=2|a|^2+2|b|^2$

**۱۳ـ فرض کنید a و b دو بردار باشند و a+b و a-b غیرصفر باشند. شرطی لازم و کافی برای عمود بودن a+b بر a-b را پیدا کنید. (کدام مطلب هندسی را از حل این تمرین به دست آورده‌اید؟)**

شرط لازم و کافی برای عمود بودن دو بردار، این است که ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد. در مورد دو بردار a+b و a-b نیز بایداین شرط برقرار باشد. پس داریم:

$$(a+b).(a-b)=a.a+b.a-a.b-b.b=a.a-b.b=|a|^2-|b|^2=0$$

پس شرط لازم و کافی برای عمود بودن a+b بر a-b این است که: $|a|^2=|b|^2$ یعنی باید اندازه دو بردار a و b برابر باشد.

## تمرین (صفحه‌ی ۳۲)

**۱ـ برای هر یک از بردارهای a ، b و c که در زیر آمده است، b×c و a.(b×c) را محاسبه کنید. |b×c| و |a.(b×c)| نمایانگر چه هستند؟**

الف) $a=(1,1,0)$ ، $b=(0,1,1)$ ، $c=(-1,-3,4)$

ب) $a=(-3,1,1)$ ، $b=(1,0,-1)$ ، $c=(1,1,-1)$

الف) $b\times c=(0,1,1)\times(-1,-3,4)=((1)(4)-(1)(-3),(1)(-1)-(0)(4),(0)(-3)-(1)(-1))$
$=(7,-1,1)$

$a.(b\times c)=(1,1,0).(7,-1,1)=(1)(7)+(1)(-1)+(0)(1)=6$

$|b\times c|=\sqrt{7^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{51}$

$|b\times c|$ یعنی اندازه بردار $b\times c$ و از رابطه زیر قابل محاسبه است:
اما $|a.(b\times c)|$ همان مقدار $a.(b\times c)$ می‌باشد ولی توجه داشته باشید که با علامت مثبت. در این‌جا $|\ |$ یعنی قدرمطلق.

$|a.(b\times c)|=6$

ب) $b\times c=(1,0,-1)\times(1,1,-1)=((0)(-1)-(-1)(1),(-1)(1)-(1)(-1),(1)(1)-(0)(1))$
$=(1,0,1)$

$a.(b\times c)=(-3,1,1).(1,0,1)=(-3)(1)+(1)(0)+(1)(1)=-2$

$|b\times c|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

$|a.(b\times c)|=|-2|=2$

**۲ـ برداری عمود بر دو بردار $a=(1,-3,2)$ و $b=(-2,1,-5)$ پیدا کنید.**

حاصلضرب خارجی دو بردار، بر هر دوی بردارها عمود است. پس می‌توان $a\times b$ را حساب کرد و این بردار، برداری عمود بر $a$ و بر $b$ است:

$a\times b=(1,-3,2)\times(-2,1,-5)=((-3)(-5)-(2)(1),(2)(-2)-(1)(-5),(1)(1)-(-3)(-2))$
$=(13,1,-5)$

برای اطمینان بیشتر صحت عمود بودن $a\times b$ را بر $a$ و $b$ بررسی می‌کنیم:

$(a\times b).a=(13,1,-5).(1,-3,2)=(13)(1)+(1)(-3)+(-5)(2)=0\Rightarrow a\times b\perp a$

$(a\times b).b=(13,1,-5).(-2,1,-5)=(13)(-2)+(1)(1)+(-5)(-5)=0\Rightarrow a\times b\perp b$

**۳ـ فرض کنید $a$، $b$ و $c$ سه بردار غیرصفر باشند. اگر $a\times b=a\times c$، با مثالی نشان دهید که لزومی ندارد $b=c$.**

بردارهای روبرو را در نظر بگیرید: $a=(2,3,5)\ ,\ b=(-1,0,1)\ ,\ c=(1,3,6)$

داریم:

$a\times b=(2,3,5)\times(-1,0,1)=((3)(1)-(0)(5),(5)(-1)-(2)(1),(2)(0)-(3)(-1))$
$=(3,-7,3)$

$a\times c=(2,3,5)\times(1,3,6)=((3)(6)-(5)(3),(5)(1)-(2)(6),(2)(3)-(3)(1))$
$=(3,-7,3)$

$\Rightarrow a\times b=a\times c=(3,-7,3)\xrightarrow{\text{اما}}b\neq c$

**۴ـ فرض کنید $a$ و $b$ بردارهایی به طول $a$ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $a-2b$ و $3a+2b$ تولید می‌شود پیدا کنید.**

طبق نتیجه صفحه ۳۰ کتاب درسی، مساحت مثلثی که با دو بردار $a-2b$ و $3a+2b$ تولید می‌شود برابر است با:

$\frac{1}{2}|(a-2b)\times(3a+2b)|$

بنابراین کافی است اندازه بردار $(a-2b)\times(3a+2b)$ را طبق روابطی که قبلاً داشتیم بیابیم و در رابطه بالا قرار دهیم:

$(a-2b)\times(3a+2b)=a\times(3a+2b)-2b\times(3a+2b)=3(a\times a)+2(a\times b)-6(b\times a)-4(b\times b)$
$=2(a\times b)-6(b\times a)=8(a\times b)\Rightarrow|(a-2b)\times(3a-2b)|=$
$=|8(a\times b)|=8|a||b|\sin\alpha=(8)(5)(5)\sin\frac{\pi}{4}=100\sqrt{2}$

مساحت مثلث $=\frac{1}{2}(100\sqrt{2})=50\sqrt{2}$

**۵ـ بردارهای a و b مفروض اند با این خاصیت که ۳=|a| ، ۲۶=|b| و ۷۲=|a×b|، مقدار a.b رامحاسبه کنید.**

با توجه به این‌که $|a\times b| = |a|\,|b| \sin\alpha$ می‌توان $\alpha$ یعنی زاویه بین دو بردار a و b را یافت. پس:

$$۷۲=(۳)(۲۶)\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۷۲}{۷۸}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بدون مراجعه به جدول sin و cos نمی‌توان مقدار زاویه $\alpha$ را پیدا کرد بنابراین از یکی از روابط مثلثاتی استفاده می‌کنیم تا مقدار $\cos\alpha$ را بیابیم: $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

$$\Rightarrow\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^۲+\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۲۵}{۱۶۹}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۵}{۱۳}$$

حال مقدار a.b را از رابطه زیر به دست می‌آوریم: $a.b=|a|\,|b|\cos\alpha=(۳)(۲۶)(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$

توجه داشته باشید که دو مقدار ۳۰ و ۳۰ـ را برای a.b به دست آوردیم.

**۶ـ فرض کنید a ، b و c بردارهایی دلخواه و i ، j و k بردارهای یکه باشند. عبارات زیر را ساده کنید.**

الف) $i\times(j+k)-j\times(i+k)+k\times(i+j+k)$

ب) $(a+b+c)\times c+(a+b+c)\times b+(b-c)\times a$

ج) $(۲a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)$

د) $۲i.(j\times k)+۳j.(i\times k)+۴k.(i\times j)$

الف)

$$i\times(j+k)-j\times(i+k)+k\times(i+j+k)=(i\times j)+(i\times k)-(j\times i)-(j\times k)+(k\times i)+(k\times j)+(k\times k)$$
$$=(k)+(-j)-(-k)-(i)+(j)+(-i)+(۰)=k-j+k-i+j-i=-۲i+۲k$$

ب)

$$(a+b+c)\times c+(a+b+c)\times b+(b-c)\times a$$
$$=(a\times c)+(b\times c)+(c\times c)+(a\times b)+(b\times b)+(c\times b)+(b\times a)-(c\times a)$$
$$=(a\times c)+(b\times c)+(۰)+(a\times b)+(۰)-(b\times c)-(a\times b)+(a\times c)$$
$$=۲(a\times c)$$

ج)

$$(۲a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)$$
$$=۲a\times(c-a)+b\times(c-a)+b\times(a+b)+c\times(a+b)$$
$$=۲(a\times c)-۲(a\times a)+(b\times c)-(b\times a)+(b\times a)+(b\times b)+(c\times a)+(c\times b)$$
$$=۲(a\times c)-۲(۰)+(b\times c)-(b\times a)+(b\times a)+(۰)-(a\times c)-(b\times c)$$
$$=(a\times c)$$

د)

$$۲i.(j\times k)+۳j.(i\times k)+۴k.(i\times j)=۲i.(i)+۳j.(-j)+۴k.(k)$$
$$=۲(i.i)-۳(j.j)+۴(k.k)=۲|i|^۲-۳|j|^۲+۴|k|^۲=۲-۳+۴=۳$$

**۷ـ فرض کنید a ، b و c سه بردار باشند با این خاصیت که a+b+c=۰ ثابت کنید a×b=b×c=c×a .**

می‌دانیم که ضرب خارجی هر بردار غیرصفر در بردار صفر، بردار صفر می‌شود. یعنی:

$$a\times(a+b+c)=۰\Rightarrow(a\times a)+(b\times b)+(a\times c)=۰\Rightarrow(۰)+(a\times b)+(a\times c)=۰$$
$$\Rightarrow(a\times b)=-(a\times c)\Rightarrow a\times b=c\times a$$

همچنین: $b\times(a+b+c)=۰\Rightarrow(b\times a)+(b\times b)+(b\times c)=۰\Rightarrow(b\times a)+(۰)+(b\times c)=۰$

$$\Rightarrow(b\times c)=-(b\times a)\Rightarrow b\times c=a\times b$$

**۸ـ فرض کنید a ، b ، c و d بردارهایی باشند با این خاصیت که $a\times b=c\times d$ و $a\times c=b\times d$ . ثابت کنید اگر بردارهای $a-d$ و $b-c$ غیرصفر باشند، آنگاه با هم موازیند:**

به سادگی از ضرب خارجی دو بردار $a-d$ و $b-c$ ملاحظه می‌شود که این دو با هم موازیند زیرا ضرب خارجی آن‌ها، بردار صفر می‌شود:

$$(a-d)\times(b-c)=a\times(b-c)-d\times(b-c)=(a\times b)-(a\times c)-(d\times b)+(d\times c)$$

طبق فرض مسئله: $a\times c=b\times d$ و $a\times b=c\times d$ با جایگذاری آن‌ها در رابطه بالا داریم:

$$(a-d)\times(b-c)=(c\times d)-(b\times d)-(d\times b)+(d\times c)$$
$$=(c\times d)-(b\times d)+(b\times d)-(c\times d)=0$$

**۹ـ فرض کنید a ، b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=0$ ثابت کنید بردارهای a ، b و c در یک صفحه قرار می‌گیرند.**

**یادآوری:** بردارهای a ، b و c هم‌صفحه‌اند، هرگاه $|a.(b\times c)|=0$

مقدار $|a.(b\times c)|$ را می‌یابیم اگر این مقدار صفر باشد، سه بردار a ، b و c در یک صفحه‌اند:

به جای $b\times c$ می‌توان از فرض مسئله استفاده کرد و مقدار معادل آن‌را قرار داد، داریم:

$$(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=0\Rightarrow b\times c=-((a\times b)+(c\times a))=(b\times a)+(a\times c)$$

حال این مقدار را در $|a.(b\times c)|$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\left|a.(b\times c)\right|=\left|a.((b\times a)+(a\times c))\right|=\left|a.(b\times a)+a.(a\times c)\right|$$

می‌دانیم که $a.(a\times c)=0$ و $a.(b\times a)=0$ پس مقدار رابطه بالا، صفر می‌شود پس: $|a.(b\times c)|=0$

بنابراین سه بردار a ، b و c هم‌صفحه‌اند (در یک صفحه قرار می‌گیرند)

**۱۰ـ فرض کنید a ، b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید:** $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$

بردارهای $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ و $c=(c_1,c_2,c_3)$ را در نظر می‌گیریم با محاسبه:

$$a\times(b\times c)=(a_1,a_2,a_3)\times((b_1,b_2,b_3)\times(c_1,c_2,c_3))$$

داریم:

$$(I)\quad (a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3),a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$\text{و}\quad a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2))$$

به همین ترتیب داریم:

$$(a.c)b-(a.b)c=((a_1,a_2,a_3).(c_1,c_2,c_3))(b_1,b_2,b_3)-((a_1,a_2,a_3).(b_1,b_2,b_3))(c_1,c_2,c_3)$$
$$(II)=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1,b_2,b_3)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1,c_2,c_3)$$
$$=(b_1a_2c_2+b_1a_3c_3-c_1a_2b_2-c_1a_3b_3,b_2a_1c_1+b_2a_3c_3-c_2a_1b_1-c_2a_3b_3$$
$$,b_3a_1c_1+b_3a_2c_2-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2)=(a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$,a_3(b_2c_3-bc_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1),a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2))$$

و داریم (I)=(II) و مسئله ثابت شد.

**۱۱ـ فرض کنید a ، b و c بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید:** $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$

با استفاده از سؤال ۱۰ داریم:

$$I)\ a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$$
$$II)\ b\times(c\times a)=(b.a)c-(b.c)a$$
$$III)\ c\times(a\times b)=(c.b)a-(c.a)b$$

با جمع سه رابطه (I) و (II) و (III) داریم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=(a.c)b-(a.b)c+(b.a)c-(b.c)a+(c.b)a-(c.a)b$$
$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$

**۱۲ـ فرض کنید p ، q ، r و s بردارهایی دلخواه باشند. ثابت کنید بردارهای $a=p\times s$ ، $b=q\times s$ و $c=r\times s$ در یک صفحه قرار می‌گیرند.**

مقدار $|a.(b\times c)|$ را می‌یابیم. اگر صفر شود ثابت می‌شود که سه بردار a ، b و c در یک صفحه‌اند.

$$b\times c=b\times(r\times s)=(b.s)r-(b.r)s=((q\times s).s)r-((q\times s).r)s=-((q\times s).r)s$$

$q\times s$ بردار b می‌باشد و ضرب نقطه‌ای دو بردار یک عدد است پس $(q\times s).r$ یک عدد حقیقی است بنابراین $-((q\times s).r)s$ یک بردار در راستای بردار s است.

طبق فرض $a=p\times s$ بنابراین بردار a و s برهم عمودند و بردار a با هر بردار دیگری که هم راستای s باشد زاویه ۹۰° می‌سازد پس بردار a بر بردار $-((q\times s).r)s$ که همان $b\times c$ می‌باشد، عمود است بنابراین ضرب داخلی آن‌ها صفر می‌شود. داریم:

$|a.(b\times c)|=0$

پس سه بردار a ، b و c در یک صفحه قرار دارند.

## فصل ۲ معادلات خطی و صفحه

### تمرین (صفحه‌ی ۴۱)

**۱ـ در هر یک از حالات زیر معادلات پارامتری ومتقارن خطوطی راکه در یک نقطه از آن‌ها داده شده است و امتداد آنها نیز موازی بردار مفروض u است، پیدا کنید.**

الف) $(-2 , 1 , 0)$ ، $u=(3 , -1 , 5)$

ب) $(-10 , 13 , 20)$ ، $u=(11 , -13 , -15)$

ج) $(7 , -1 , 2)$ ، $u=(-1 , 1 , 0)$

د) $(-3 , 6 , 2)$ ، $u=(1 , -1 , 0)$

الف) معادله پارامتری خط گذرا از نقطه $(-2 , 1 , 0)$ که موازی بردار $u=(3 , -1 , 5)$ است به صورت زیر است:

$$\begin{cases}x=-2+3t\\y=1-t\\z=0+5t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2+3t\\y=1-t\\z=5t\end{cases}$$

و معادله متقارن آن به صورت زیر است:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-0}{5}\Rightarrow\frac{x+2}{3}=1-y=\frac{z}{5}$$

ب) معادله پارامتری خط گذرا از نقطه $(-10 , 13 , 20)$ که موازی بردار $u=(11 , -13 , -15)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases}x=-10+11t\\y=13-13t\\z=20-15t\end{cases}$$

و معادله متقارن آن به صورت زیر است:

$$\frac{x+10}{11}=\frac{y-13}{-13}=\frac{z-20}{-15}$$

ج) معادله پارامتری خط گذرا از نقطه $(7 , -1 , 2)$ که موازی بردار $u=(-1 , 1 , 0)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases}x=7-t\\y=-1+t\\z=2+0t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7-t\\y=t-1\\z=2\end{cases}$$

و معادله متقارن آن به صورت زیر است:

$$\frac{x-۷}{-۱}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z-۲}{۰}\Rightarrow\begin{cases}۷-x=y+۱\\ z=۲\end{cases}$$

و معادله پارامتری خط گذرا از نقطه (۲ , ۶ , ۳-) که موازی بردار (۰ , ۱- , ۱)=u است به صورت زیر است:

$$\begin{cases}x=-۳+t\\ y=۶-t\\ z=۲+۰t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t-۳\\ y=۶-t\\ z=۲\end{cases}$$

معادله متقارن خط به صورت زیر است:

$$\frac{x+۳}{۱}=\frac{y-۶}{-۱}=\frac{z-۲}{۰}\Rightarrow\begin{cases}x+۳=۶-y\\ z=۲\end{cases}$$

**۲- معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه (۲ و ۱- و ۳) و موازی خط زیر را پیدا کنید.**

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۳}{۲}=z$$

بردار (۱ و ۲ و ۴) = x برداری موازی خط $z=\frac{y+۳}{۲}=\frac{x-۱}{۴}$ می‌باشد پس این بردار با خط مورد نظر ما نیز موازی است برای نوشتن معادله پارامتری خط گذرا از نقطه (۲ و ۱- و ۳) و موازی با بردار x به صورت زیر است:

$$\frac{x-۳}{۴}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۲}{۱}$$

**۳ـ معادلات پارامتری خط گذر از نقاط (۷ , ۵ , ۲-) و (۰ , ۱ , ۱-) را پیدا کنید.**

نقاط (۷ , ۵ , ۲-)=A و (۰ , ۱ , ۱-)=B از خط مورد نظر داده شده است. بردار $\overline{AB}$ برداری موازی این خط است بردار $\overline{AB}$ به صورت زیر است:

$$\overline{AB}=(-۱+۲, ۱-۵, ۰-۷)=(۱,-۴,-۷)$$

حال خط گذرا از نقطه (۷ , ۵ , ۲-) و موازی بردار (۷- , ۴- , ۱) را می‌نویسیم:

$$\frac{x+۲}{۱}=\frac{y-۵}{-۴}=\frac{z-۷}{-۷}\Rightarrow x+۲=\frac{۵-y}{۴}=\frac{۷-z}{۷}$$

**۴ـ نشان دهید خط گذرا از نقاط (۵ , ۰ , ۰) و (۴ , ۱- , ۱) عمود بر خط زیر است:**

$$\frac{x}{۷}=\frac{y-۳}{۴}=\frac{z+۹}{۳}$$

خط گذرا از نقاط (۵ , ۰ , ۰)=A و (۴ , ۱- , ۱)=B خطی موازی بردار $(۱,-۱,-۱)=\overline{AB}$ است پس کافی است بردار $\overline{AB}$ را با بردار (۳ , ۴ , ۷)=u که برداری موازی خط داده شده است مقایسه کنیم داریم:

$$\overline{AB}.\vec{u}=(۱,-۱,-۱).(۷,۴,۳)=(۱)(۷)+(-۱)(۴)+(-۱)(۳)=۷-۴-۳=۰$$

از آن‌جا که ضرب داخلی دو بردار، صفر شد پس بردار $\vec{u}$, $\overline{AB}$ بر یکدیگر عمودند پس خط گذرا از نقاط (۵ , ۰ , ۰) و (۴ , ۱- , ۱) عمود بر $\frac{x}{۷}=\frac{y-۳}{۴}=\frac{z+۹}{۳}$ است.

**۵ـ a و b را طوری تعیین کنید تا نقطه‌ی (۱ , b , a) روی خط گذرا از نقطه (۷ , ۵ , ۲) و (۲ , ۳ , ۰) قرار گیرد.**

خط گذرا از دو نقطه (۷ , ۵ , ۲)=A و (۲ , ۳ , ۰)=B موازی بردار $(-۵,-۲,-۲)=\overline{AB}$ است و با معادله پارامتری زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{x-۲}{-۲}=\frac{y-۵}{-۲}=\frac{z-۷}{-۵}\Rightarrow\frac{۲-x}{۲}=\frac{۵-y}{۲}=\frac{۷-z}{۵}$$

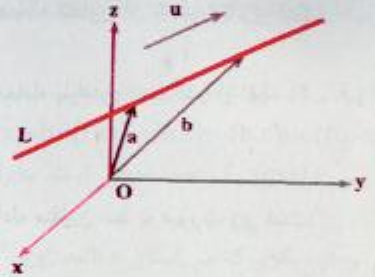
مختصات نقطه (۱ , b , a) باید در معادله خط $\frac{۷-z}{۵}=\frac{۵-y}{۲}=\frac{۲-x}{۲}$ صدق کند. پس داریم: $\frac{۲-a}{۲}=\frac{۵-b}{۲}=\frac{۷-۱}{۵}$

با حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases}\frac{۲-a}{۲}=\frac{۶}{۵}\\ \frac{۵-b}{۲}=\frac{۶}{۵}\end{cases}$$

مقادیر $a=-\frac{۲}{۵}$ و $b=\frac{۱۳}{۵}$ به دست می‌آید.

**۶ـ u را برداری می‌گیریم که موازی خط مفروض L است. نشان دهید اگر a و b بردارهایی باشند که از مبدأ مختصات شروع شوند و انتهای آن روی L قرار گیرد، آن‌گاه $u\times a=u\times b$.**




بردار $u'$ که در شکل نشان داده‌ایم تفاضل دو بردار b و a می‌باشد:

$$u'=b-a$$

دو بردار u و $u'$ موازی می‌باشند بنابراین:

$$u\times u'=۰$$

پس داریم:

$$u\times u'=۰\Rightarrow u\times(b-a)=۰\Rightarrow u\times b-u\times a=۰\Rightarrow u\times b=u\times a$$

**۷ـ فاصله مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطه (۳ ، ۳- ، ۳-) و موازی بردار (۴- ، ۲- ، ۴) پیدا کنید.**

نقطه $P_۰=(-۳,-۳,۳)$ نقطه‌ای روی خط و بردار $u=(۴, -۲, -۴)$ برداری موازی آن خط است. فاصله نقطه $O=(۰, ۰, ۰)$ تا این خط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D=\frac{\left|u\times\overrightarrow{P_۰O}\right|}{|u|}=\frac{\left|(۴,-۲,-۴)\times(۳,۳,-۳)\right|}{\left|(۴,-۲,-۴)\right|}=\frac{\left|(۱۸,۰,۱۸)\right|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۶}=۳\sqrt{۲}$$

**۸ـ فاصله دو خط موازی زیر را پیدا کنید.**

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲},\ \frac{x}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۳}{-۲}$$

می‌توان یک نقطه دلخواه از خط $\frac{x}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۳}{-۲}$ مانند $A=(۰ , ۲ , ۳)$ در نظر گرفت آن‌گاه فاصله نقطه A تا خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲}$ همان فاصله دو خط موازی است نقطه دلخواه $B=(۱ , -۱ , ۲)$ را از خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲}$ در نظر می‌گیریم، هم‌چنین این خط با بردار $u=(۲ , -۱ , -۲)$ موازی است فاصله نقطه A تا این خط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D=\frac{\left|u\times\overrightarrow{AB}\right|}{|u|}=\frac{\left|(۲,-۱,-۲)\times(۱,-۳,-۱)\right|}{\left|(۲,-۱,-۲)\right|}=\frac{\left|(-۵,۰,-۵)\right|}{\left|(۲,-۱,-۲)\right|}=\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۳}$$

فاصله بین دو خط موازی داده شده در صورت مسئله $\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۳}$ است.

**۹ـ فاصله نقطه (۴- ، ۰ ، ۵) را از خط زیر پیدا کنید.**

$$x-۱=\frac{y+۲}{-۲}=\frac{z+۱}{۲}$$

بردار $u=(۱ , -۲ , ۲)$ موازی خط داده شده است. نقطه $P_۰=(۱,-۲,-۱)$ را به دلخواه از آن انتخاب می‌کنیم. آن‌گاه فاصله نقطه $P=(۵ , ۰ , -۴)$ از این خط به صورت زیر است:

$$D=\frac{\left|u\times\overrightarrow{P_۰P}\right|}{|u|}=\frac{\left|(۱,-۲,۲)\times(۴,۲,-۳)\right|}{\left|(۱,-۲,۲)\right|}=\frac{\left|(۲,۱۱,۱۰)\right|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲+۲^۲}}=\frac{\sqrt{۴+۱۲۱+۱۰۰}}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

**۱۰ـ فاصله نقطه (۰ , ۱ , ۲) را از خط زیر پیدا کنید:**

$$x-1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{2}$$

نقطه $P_0=(1,-2,-1)$ از خط $x-1=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ را در نظر می‌گیریم، بردار $u=(1,-2,2)$ نیز موازی این خط است. فاصله نقطه $P=(0,1,2)$ ازاین خط به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$D=\frac{|u\times\overrightarrow{P_0P}|}{|u|}=\frac{|(1,-2,2)\times(1,3,1)|}{|(1,-2,2)|}=\frac{|(-8,1,5)|}{|(1,-2,2)|}=\frac{\sqrt{(-8)^2+1^2+5^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\Rightarrow D=\frac{\sqrt{110}}{3}$$

**۱۱ـ وضعیت نسبی خطوط ذکر شده در تمرین ۱ را به ترتیب زیر تعیین کنید:**
**(الف و ب) ، (ب و ج) ، (ج و د)**

با مقایسه بردارهای موازی خطوط (الف) و (ب) می‌بینیم که این دو خط موازی نیستند و بر یکدیگر عمود هم نیستند. این دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند برای پیدا کردن نقطه تقاطع کافی است درمعادله پارامتری آن‌ها x و y و z برابر قرار دهیم. پس داریم:

$$(\text{الف})\begin{cases}x=-2+3t\\y=1-t\\z=5t\end{cases}\qquad(\text{ب})\begin{cases}x=-10+11t\\y=13-13t\\z=20-15t\end{cases}$$

$$-2+3t=-10+11t\Rightarrow t=1$$

به ازای $t=1$ نقطه (۵ , ۰ , ۱) درهر دو خط الف و ب قرار دارد و نقطه تقاطع این دو خط است.

برای دو خط (ب) و (ج) داریم:

این دو خط موازی نیستند اما هیچ نقطه تقاطعی نیز ندارند بنابراین متنافرند.

از روی دو بردار $u_1=(11,-13,-15)$ و $u_2=(-1,1,0)$ که به ترتیب خطوط موازی خطوط (ب) و (ج) هستند. درمی‌یابیم که این دو خط موازی نیستند پس یا متقاطعند یا متنافرند. با مساوی قرار دادن معادلات پارامتری آنها در هر یک از مختصات x و y و z می‌بینیم که به هیچ نقطه مشترکی نمی‌رسیم پس نقطه تقاطعی ندارند بنابراین متنافرند.

در مورد دو خط (ج)و (د) با مقایسه خطوط موازی این دو خط یعنی $u_1=(-1,1,0)$ و $u_2=(1,-1,0)$ درمی‌یابیم که دو خط (ج) و (د) موازیند زیرا:

$$|u_1\times u_2|=|(-1,1,0)\times(1,-1,0)|=|(0,0,0)|=0\Rightarrow u_1\parallel u_2$$

## تمرین (صفحه‌ی ۴۷)

**۱ـ درهر یک از حالات زیر معادله صفحه گذرا از نقطه $P_0$ و عمود بر بردار n را پیدا کنید.**

الف) $P_0=(-1,2,4)$ ، $n=(-4,15,\frac{-1}{2})$

ب) $P_0=(2,0,-2)$ ، $n=(2,3,-4)$

ج) $P_0=(9,17,-17)$ ، $n=(2,0,-3)$

د) $P_0=(2,3,-5)$ ، $n=(0,1,0)$

الف) خط گذرا ازنقطه (۴ , ۲ , ۱-) که بر بردار $n=(-4,15,\frac{-1}{2})$ عمود است به صورت زیر است:

$$T_1:-4(x+1)+15(y-2)-\frac{1}{2}(z-4)=0\Rightarrow-4x+15y-\frac{1}{2}z-32=0$$

ب) خط گذرا از نقطه (۲ , ۰ , ۲-) که بر بردار (۲ , ۳ , ۴-) عمود است، به صورت زیر است:

$T_2: 2(x-2)+3(y-0)-4(z+2)=0 \Rightarrow 2x+3y-4z-8=0$

ج) خط گذرا از نقطه (۹ , ۱۷ , ۱۷-) که بر بردار (۲ , ۰ , ۳-) عمود است، به صورت زیر است:

$T_3: 2(x-9)+0(y-17)-3(z+17)=0 \Rightarrow 2x-3z-69=0$

د) خط گذرا از نقطه (۲ , ۳ , ۵-) که بر بردار (۰ , ۱ , ۰) عمود است، به صورت زیر است:

$T_4: 0(x-2)+1(y-3)+0(z+5)=0 \Rightarrow y-3=0$

**۲ـ معادله صفحه گذرا از سه نقطه (۲ , ۱- , ۴)، (۵ , ۳ , ۵) و (۲ , ۴ , ۳) را پیدا کنید.**

با استفاده از نقاط (۲ , ۱- , ۴)=A و (۵ , ۳ , ۵)=B و (۲ , ۴ , ۳)=C دو بردار $\overline{AB}=(3,4,1)$ و $\overline{AC}=(0,5,-1)$ را داریم. ضرب خارجی این دو بردار، برداری است که بر هر دو عمود است همچنین بر صفحه گذرا از این دو بردار نیز عمود است. پس بااستفاده از بردار $u=\overline{AB}\times\overline{AC}$ و یکی از نقاط A ، B یا C معادله صفحه گذرا از این سه نقطه را نوشت:

$u=\overline{AB}\times\overline{AC}=(3,4,1)\times(0,5,-1)=(-9,3,15)$

صفحه مورد نظر دارای معادله زیر است:

$T: -9(x-2)+3(y+1)+15(z-4)=0$

$\Rightarrow T=-9x+3y+15z-39=0$

**۳ـ معادله صفحه گذرا از نقطه (۱ , ۱- , ۲) و خط $x+2=y+1=\frac{z+5}{2}$ را پیدا کنید.**

دو نقطه به دلخواه روی خط $x+2=y+1=\frac{z+5}{2}$ در نظر می‌گیریم. نقاط (۵- , ۱- , ۲-)=A و (۳ , ۳ , ۲)=B روی این خط واقع‌اند. معادله صفحه گذرا از سه نقطه (۲ , ۱- , ۱)=C و A و B به صورت زیراست:

$\overline{AC}=(3,0,7), \overline{AB}=(4,4,8)$

$u=\overline{AB}\times\overline{AC}=(4,4,8)\times(3,0,7)=(28,-4,-12)$

$T: 28(x-1)-4(y+1)-12(z-2)=0$

$\Rightarrow T: 28x-4y-12z-8=0$

**۴ـ معادله صفحه گذرا از دو خط زیررا پیدا کنید.**

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{4}, \frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{4}$

از آنجایی که دوخط داده شده موازیند نمی‌توان از ضرب خارجی بردارهای موازی آنهااستفاده کرد و معادله صفحه گذرا از این دو خط رانوشت. می‌توان سه نقطه به دلخواه ازاین دو خط انتخاب کرد و صفحه گذرا از این سه نقطه را به دست آورد. دو نقطه (۰ , ۴ , ۳-)=A و (۸ , ۸ , ۳)=B روی خط $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{4}$ قرار دارند ونقطه (۵ , ۱- , ۱)=C روی خط $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{4}$ قرار دارد. با استفاده از سه نقطه C و B و A بردارهای $\overline{AB}=(6,4,8)$ و $\overline{AC}=(4,-5,5)$ را داریم بنابراین بردار $n=\overline{AB}\times\overline{AC}$ عمود بر صفحه گذرا از دو خط داده شده در صورت مسئله‌اند و داریم:

$n=\overline{AB}\times\overline{AC}=(6,4,8)\times(4,-5,5)=(60,2,-46)\xrightarrow[\text{صورت روبروست}]{\text{معادله صفحه به}} T: 60(x+3)+2(y-4)-46z=0$

**۵ـ معادله فصل مشترک صفحه‌های $x-z=1$ و $2x-3y+4z=2$ را پیدا کنید.**

فصل مشترک دوصفحه $T_1: x-z=1$ و $T_2: 2x-3y+4z=2$ خطی است که با ضرب خارجی دو بردار $n_1=(1,0,-1)$ و $n_2=(2,-3,4)$ موازی است:

$u=n_1\times n_2=(1,0,-1)\times(2,-3,4)=(-3,-2,-3)$

همچنین یک نقطه مشترک بین دو صفحه $T_1$ و $T_2$ می‌یابیم و با استفاده از آن نقطه و بردار u معادله فصل مشترک دوصفحه $T_1$ و $T_2$ را می‌نویسیم، نقطه (۰ , ۰ , ۱) روی هر دو صفحه $T_1$ و $T_2$ قرار دارد. فصل مشترک دوصفحه $T_1$ و $T_2$ خطی است موازی بردار u و گذرا از نقطه (۰ , ۰ , ۱) ومعادله آن به صورت روبروست:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-3}$$

**۶ـ معادله صفحه گذراز نقطه (۱۴ , ۱۲ , ۹-) و عمودبر دو صفحه تمرین ۵ را پیدا کنید.**

صفحه $T_1: x-z=1$ دارای بردار عمود $n_1=(1,0,-1)$ می‌باشد.

صفحه $T_2: 2x-3y+4z=2$ دارای بردار عمود $n_2=(2,-3,4)$ می‌باشد.

صفحه گذرا از نقطه (۱۴ , ۱۲ , ۹-) که بر دو صفحه $T_1$ و $T_2$ عمود است دارای بردار عمودی است به صورت $n=n_1\times n_2$ پس با استفاده از نقطه (۱۴ , ۱۲ , ۹-) وبردار n می‌توان معادله صفحه موردنظر را نوشت:

$n=n_1\times n_2=(1,0,-1)\times(2,-3,4)=(-3,-6,-3)$

معادله صفحه: $T:-3(x+9)-6(y-12)-3(z-14)=0$

$\Rightarrow T: -3x-6y-3z+87=0$

**۷ـ فاصله نقطه (۴ , ۱- , ۳) را از صفحه $2x-y+2z=5$ پیدا کنید.**

فاصله نقطه $P=(4,-1,3)$ از صفحه $2x-y+2z=5$ با بردار عمود $n=(2,-1,2)$ و یک نقطه دلخواه $P_0=(1,1,2)$ روی صفحه، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D=\frac{|n.\overline{P_0P}|}{|n|}=\frac{|(2,-1,2).(2,-2,2)|}{|(2,-1,2)|}=\frac{|(2)(2)+(-1)(-2)+(2)(2)|}{|(2,-1,2)|}=\frac{10}{3}$$

**۸ـ فاصله مبدأمختصات رااز صفحه $ax+by+cz=d$ پیداکنید.**

بردار $n=(a,b,c)$ بردار عمود بر صفحه $ax+by+cz=d$ می‌باشد یک نقطه دلخواه روی این صفحه $A=(0,0,\frac{d}{c})$ می‌باشد با استفاده از نقطه A و مبدأ مختصات $O=(0,0,0)$ بردار $\overline{OA}=(0,0,\frac{d}{c})$ را داریم حال فاصله مبدأ مختصات تا صفحه $ax+by+cz=d$ از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$D=\frac{|n.\overline{DA}|}{|n|}=\frac{|(a,b,c).(0,0,\frac{d}{c})|}{|(d,b,c)|}=\frac{|(a)(0)+(b)(0)+(c)(\frac{d}{c})|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

**۹ـ آیا چهار نقطه (۲ , ۳ , ۲)، (۳- , ۱- , ۱)، (۱- , ۰ , ۱) و (۵ , ۹ , ۵) همگی روی یک صفحه قرار دارند؟** از هر سه نقطه در فضا فقط وفقط یک صفحه می‌گذرد. کافی است صفحه گذرا از سه نقطه $A=(2,3,2)$ و $B=(1,-1,-3)$ و $C=(1,0,-1)$ را به دست آوریم سپس بررسی کنیدآیا نقطه $D=(5,9,5)$ نیز در آن صفحه است.

معادله صفحه گذرا از سه نقطه A، B و C به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$\overline{AB}=(-1,-4,-5),\overline{AC}=(-1,-3,-3)$

$n=\overline{AB}\times\overline{AC}=(-1,-4,-5)\times(-1,-3,-3)=(-3,2,-1)$

معادله صفحه $T: -3(x-1)+2(y+1)-(z+3)=0\Rightarrow T:-3x+2y-z+2=0$

نقطه $D=(5,9,5)$ درمعادله صفحه T صدق می‌کند. زیرا:

$-3(5)+2(9)-(5)+2=0$

پس هر چهار نقطه در یک صفحه واقعند.

**۱۰ـ خط $L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+5}{7}$ و صفحه $T: 2(x-1)+2(y+3)-z=0$ مفروض است. دو نقطه روی $L$ به فاصله ۳ از $T$ پیدا کنید.**

ابتدا معادله خط را به صورت پارامتری آن می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-5+7t \end{cases}$$

نقطه دلخواه $P$ روی این خط دارای مختصات زیر است:

$P=(2t+1, 3t-1, 7t-5)$

همچنین نقطه دلخواه $P_0=(1,-3,0)$ روی صفحه $T$ را در نظر می‌گیریم. بردار $n=(2, 2, -1)$ نیز برداری عمود بر صفحه $T$ است. فاصله نقطه $P$ از صفحه $T$ از رابطه $D=\frac{|n.\overrightarrow{P_0P}|}{|n|}$ به دست می‌آید. بردار $\overrightarrow{P_0P}$ دارای مختصات $\overrightarrow{P_0P}=(2t, 3t-2, 7t-5)$ می‌باشد. می‌خواهیم نقاطی را بیابیم که روی خط $L$ واقع باشند و فاصله‌شان تا صفحه $T$، ۳ باشد:

$$3=\frac{|(2,2,-1).(2t, 3t-2, 7t-5)|}{|(2,2,-1)|}=\frac{|(2)(2t)+(2)(3t+2)+(-1)(7t-5)|}{3}=\frac{|3t+9|}{3}$$

$$\Rightarrow |3t+9|=9 \Rightarrow \begin{cases} 3t+9=9 \Rightarrow t=0 \\ 3t+9=-9 \Rightarrow t=-6 \end{cases}$$

پس دو نقطه $a_1$ و $a_2$ روی خط $L$ به فاصله ۳ از صفحه $T$ عبارتند از: $a_1=(1,-1,5)$ و $a_2=(-11,-19,-47)$

**۱۱ـ کدام‌یک از صفحه‌های زیر برهم منطبق اند، یا باهم موازی‌اند یا برهم عمودند؟**

الف) $x+2y-3z=2$

ب) $15x-9y-z=2$

ج) $-2x-4y+6z+4=0$

د) $5x-3y-\frac{1}{3}z-1=0$

صفحه‌های (الف) و (ج) برهم منطبق‌اند با ضرب صفحه $x+2y-3z=2$ در $-2$ به معادله صفحه $-2x-4y+6z=-4$ می‌رسیم. هردو صفحه یکی هستند.

ـ صفحه‌های (ب) و (د) موازیند زیرا دارای بردارهای عمودی هستند که موازیند.

بردار $(15, -9, -1)$ بر صفحه $15x-9y-z=2$ عمود است و بردار $(5,-3,-\frac{1}{3})$ بر صفحه $5x-3y-\frac{1}{3}z-1=0$ عمود است دو بردار $(15, -9, -1)$ و $(5,-3,-\frac{1}{3})$ موازی‌اند پس صفحه‌های عمود بر این خطوط نیز موازیند.

ـ صفحه‌های (ج) و (د) برهم عمودند زیرا بردار $(-2, -4, 6)$ که بر صفحه $-2x-4y+6z+4=0$ عمود است بر بردار $(5,-3,-\frac{1}{3})$ که بر صفحه $5x-3y-\frac{1}{3}z-1=0$ عمود است، عموداست. زیرا:

$(-2,-4,6).(5,-3,-\frac{1}{3})=0$

ـ صفحه‌های (الف) و (د) بر هم عمودند، زیرا بردار $(1, 2, -3)$ که بر صفحه $x+2y-3z=2$ عمود است بر بردار $(5,-3,-\frac{1}{3})$ که صفحه $5x-3y-\frac{1}{3}z-1=0$ عمود است، عمود است. زیرا:

$$(5,-3,-\frac{1}{3}).(1,2,-3)=(5)(1)+(-3)(2)+(-\frac{1}{3})(-3)=0 \Rightarrow (5,-3,-\frac{1}{3}) \perp (1,2,-3)$$

ـ صفحه (ب) نیز بر دو صفحه (الف) و (ج) عمود است. زیرا بردار $(15, -9, -1)$ که بر صفحه $15x-9y-z=2$ عمود است بر بردار $(1, 2, -3)$ که بر صفحه $x+2y-3z=2$ عمود است همچنین بر بردار $(-2, -4, 6)$ که بر صفحه $-2x-4y+6z+4=0$ عمود است، عمود می‌باشد زیرا:

$$(15,-9,-1).(1,2,-3)=(15)(1)+(-9)(2)+(-1)(-3)=0 \Rightarrow (15,-9,-1) \perp (1,2,-3)$$

$$(-2,-4,6).(15,-9,-1)=(-2)(15)+(-4)(-9)+(6)(-1)=0 \Rightarrow (-2,-4,6) \perp (15,-9,-1)$$

**۱۲ـ در هر یک از موارد زیر وضعیت نسبی خط و صفحه‌ی داده شده را بررسی کنید.**

الف) $x-3y+5z=12,\ \frac{x-3}{8}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+3}{-1}$

ب) $5x+4y-6z=2,\ \frac{x}{8}=\frac{y+1}{23}=\frac{z+1}{22}$

ج) $x-2y+2z=5,\ \frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{7}$

الف) بردار (۱- , ۵ , ۸) موازی خط $\frac{x-3}{8}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+3}{-1}$ می‌باشد.

بردار (۵ , ۳- , ۱) بر صفحه $x-3y+5z=12$ عمود می‌باشد.

وضعیت این دو بردار را نسبت به هم بررسی می‌کنیم این دو بردار باهم موازی نیستند بر یکدیگر عمود نیز نیستند. دو بردار متقاطعند بنابراین خط، صفحه را قطع می‌کند. معادله پارامتری خط به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=8t+3 \\ y=5t+4 \\ z=-t-3 \end{cases}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله صفحه، نقطه تقاطع را به دست می‌آوریم:

$$(8t+3)-3(5t+4)+5(-t-3)=12 \Rightarrow -12t-36=0 \Rightarrow t=-3$$

نقطه (۶- , ۱۹ , ۲۷) روی صفحه و خط موردنظر واقع است (نقطه تقاطع آن‌هاست)

ب) بردار (۲۲ , ۲۳ , ۱۸) موازی خط $\frac{x}{8}=\frac{y+1}{23}=\frac{z+1}{22}$ می‌باشد. بردار (۶- , ۴ , ۵) بر صفحه $5x+4y-6z=2$ عمود می‌باشد. وضعیت این دو بردار رانسبت به هم بررسی می‌کنیم. این دو بردار بر هم عمودند. زیرا:

$$(5,4,-6).(8,23,22)=0$$

بنابراین صفحه و خط موازیند. و نقطه‌ی تقاطعی ندارند.

ج) بردار (۷ , ۵ , ۴-) موازی خط $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{7}$ است. بردار (۲ , ۲- , ۱) عمود بر صفحه $x-2y+2z=5$ می‌باشد. وضعیت این دو بردار را نسبت به هم بررسی می‌کنیم. این دو بردار بر هم عمودند. زیرا:

$$(1,-2,2).(-4,5,7)=0$$

بنابراین خط و صفحه موازیند و نقطه تقاطعی ندارند.

**توجه:** هنگامی‌که خط و صفحه موازیند امکان دارد روی هم منطبق باشند یعنی خط کاملاً در صفحه واقع باشد. بنابراین کافی است یک نقطه به دلخواه انتخاب کنیم اگر درمعادله صفحه صدق نکرد پس خط و صفحه تقاطع ندارند وگرنه خط کاملاً در صفحه واقع است.

**۱۳ـ معادله صفحه گذرا از نقطه (۳ , ۲ , ۱-) را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید:**

**الف) با صفحه xy موازی باشد.**

**ب) بر محور x ها عمود باشد.**

**ج) بر محور y ها عمود باشد.**

الف) صفحه موازی صفحه xy بر بردار (۱ , ۰ , ۰) عمود است. بنابراین معادله صفحه گذرا از نقطه (۳ , ۲ , ۱-) که بر خط (۱ , ۰ , ۰) عمود است، به صورت زیر است:

$$0(x+1)+0(y-2)+1(z-3)=0 \Rightarrow z-3=0 \Rightarrow z=3$$

نقاط روی این صفحه دارای x و y متفاوت‌اند اما همگی دارای $z=3$ می‌باشند.

ب) صفحه‌ای که بر محور x ها عمود باشد با صفحه yz موازی است پس بر بردار (۰ , ۰ , ۱) عمود است بنابراین معادله صفحه گذرا از نقطه (۳ , ۲ , ۱-) که بر محور x ها عمود باشد دارای معادله زیر است:

$$1(x+1)+0(y-2)+0(z-3)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

نقاط روی این صفحه دارای y و z متفاوت‌اند اما همگی دارای $x=-1$ می‌باشند.

ج) صفحه‌ای که بر محور yها عمود باشد موازی با صفحه xz است و بر برداری که (۰ , ۱ , ۰) نیز عمود است، با استفاده از این بردار معادله صفحه گذرا از نقطه (۳ , ۲ , ۱-) و عمود بر بردار (۰ , ۱ , ۰) را می‌نویسیم:

$$۰(x+۱)+۱(y-۲)+۰(z-۳)=۰ \Rightarrow y-۲=۰ \Rightarrow y=۲$$

تمام نقاط روی این صفحه دارای x و z متفاوت‌اند اما همگی دارای y=۲ می‌باشند.

**۱۴ـ معادله صفحه گذرا از نقطه $(۲,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ و عمود بر خط زیر را پیدا کنید.**

$$\begin{cases} x=۲t+۳ \\ y=۶t+۶, t\in R \\ z=۹t \end{cases}$$

بردار (۹ , ۶ , ۲) برداری است که با خط داده شده موازی است، از آن‌جایی که صفحه موردنظر بر این خط عمود است پس بر بردار (۹ , ۶ , ۲) نیز عمود است. پس معادله صفحه گذرا از نقطه $(۲,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ و عمود بر بردار (۹ , ۶ , ۲) به صورت روبرو قابل محاسبه است:

$$۲(x-۲)+۶(y-\frac{۱}{۲})+۹(z-\frac{۱}{۳})=۰ \Rightarrow ۲x+۶y+۹z=۱۰$$

**۱۵ـ معادله خط گذرا ازنقطه (۰ , ۱- , ۲) و عمود بر صفحه ۲x-۳y+۴z=۵ را پیدا کنید.**

از آن‌جایی که خط موردنظر بر صفحه ۲x-۳y+۴z=۵ عمود است وبردار (۴ , ۳- , ۲) نیز بر این صفحه عمود است پس بردار (۴ , ۳- , ۲) موازی خط مورد نظر می‌باشد حال با استفاده از این بردار موازی خط و نقطه (۰ , ۱- , ۲) که روی خط واقع است می‌توان معادله خط رابه دست آورد:

$$L:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{-۳}=\frac{z-۰}{۴} \Rightarrow L:\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۱}{-۳}=\frac{z}{۴}$$

معادله پارامتری خط $L:\begin{cases} x=۲+۲t \\ y=-۱-۳t \\ z=۰+۴t \end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases} x=۲+۲t \\ y=-۱-۳t \\ z=۴t \end{cases}$

**۱۶ـ خط L با معادلات $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۳}{۳}=-z$ و صفحه T با معادله ۳x-۲y+۴z=-۱ مفروض است.**

**الف) نقطه $P_۰$، نقطه تقاطع L و T را پیدا کنید.**

**ب) معادله صفحه عمود بر L در نقطه $P_۰$ را پیدا کنید.**

**ج) معادله خط گذرا از $P_۰$ و عمود بر T را نیز پیداکنید.**

الف) ابتدامعادله پارامتری خط رامی‌نویسیم:

$$L:\begin{cases} x=۲t-۱ \\ y=۳t-۳ \\ z=-t \end{cases}$$

معادله یک نقطه روی این خط به صورت (t- , ۳t-۳ , ۲t-۱) می‌باشد. مختصات این نقطه را در معادله صفحه T قرار می‌دهیم تا نقطه تقاطع خط L و صفحه T به دست آید:

$$۳(۲t-۱)-۲(۳t-۳)+۴(-t)=-۱ \Rightarrow ۶t-۶t-۴t+۴=۰ \Rightarrow -۴t=-۴ \Rightarrow t=۱$$

به ازای t=۱ نقطه $P_۰=(۱,۰,-۱)$، نقطه تقاطع خط L و صفحه T می‌باشد.

ب) بردار (۱- , ۳ , ۲) برداری موازی خط L است، صفحه‌ای که بر خط L عمود است، بر این بردار نیز عمود است پس معادله صفحه گذرا از نقطه $P_۰=(۱,۰,-۱)$ که بر بردار (۱- , ۳ , ۲) عمود است به صورت زیر است:

$$۲(x-۱)+۳(y-۰)-۱(z+۱)=۰ \Rightarrow ۲x+۳y-z=۳$$

ج) بردار (۴ , ۲- , ۳) برداری موازی صفحه T می‌باشد خطی که بر بردار T عمود باشد با این بردار موازی است پس معادله خط گذرا از نقطه $P_۰=(۱,۰,-۱)$ که موازی بردار (۴ , ۲- , ۳) می‌باشد به صورت زیر است:

$$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۰}{-۲}=\frac{z+۱}{۴} \Rightarrow \frac{x-۱}{۳}=\frac{y}{-۲}=\frac{z+۱}{۴}$$

معادله پارامتری خط: $\begin{cases} x=۳t+۱ \\ y=-۲t \\ z=۴t-۱ \end{cases}$

**۱۷ـ معادلهٔ صفحه عمود منصف پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $(0, 1, 3)$ و $(3, -1, 5)$ را پیدا کنید.**

صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط بر آن عمود است پس بردار زیر، بردار نرمال صفحه می‌باشد:

$$\vec{u}=(5-3, -1-1, 3-0)=(2, -2, 3)$$

نقطهٔ وسط پاره‌خط نیز یک نقطه روی صفحه است: $x_m=\frac{5+3}{2}, y_m=\frac{-1+1}{2}, z_m=\frac{3+0}{2}\Rightarrow m=(4, 0, \frac{3}{2})$

پس معادله صفحه مورد نظر به این صورت است: $2(x-4)-2(y-0)+3(z-\frac{3}{2})=0$

**۱۸ـ نقاط فصل مشترک روبه‌روی هر دسته از صفحه‌های زیر را پیدا کنید. آیا هر دسته از صفحه‌های زیر یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟**

**الف)** $x+z=3, y+z=2, x+y=1$

**ب)** $x-y-z=0, -x+2y-z=3, x+y-z=2$

الف) ابتدا دو به دو وضعیت صفحه‌های داده شده را نسبت به هم بررسی می‌کنیم سپس بررسی می‌کنیم آیا سه صفحه با هم نقطه مشترکی دارند یا خیر؟ اگر دو صفحه با هم نقطه مشترکی داشته باشند، فصل مشترک آنها یک خط است.

* بررسی وضعیت دوصفحه $\begin{cases}x+y=1\\ y+z=2\end{cases}$، نقطه $(0, 1, 1)$ روی هر دو صفحه واقع است.

بردار $n_1=(1, 1, 0)$ عمود بر صفحه $T_1: x+y=1$ می‌باشد.

بردار $n_2=(0, 1, 1)$ عمود بر صفحه $T_2: y+z=2$ می‌باشد.

بردار $u_1=n_1\times n_2$، برداری موازی فصل مشترک دو صفحه $T_1$ و $T_2$ می‌باشد:

$$u_1=n_1\times n_2=(1, 1, 0)\times(0, 1, 1)=(1, -1, 1)$$

خط گذرا از نقطه $(0, 1, 1)$ که موازی بردار $(1, -1, 1)$ است، دارای معادله زیر است:

$$L_1: \frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow L_1: x=-y+1=z-1$$

خط $L_1$ فصل مشترک دو صفحه $T_1$ و $T_2$ می‌باشد.

* بررسی وضعیت دو صفحه $\begin{cases}x+y=1\\ x+z=3\end{cases}$، نقطه $(0, 1, 3)$ روی هر دوصفحه واقع است.

بردار $n_1=(1, 1, 0)$ عمود بر صفحه $T_1: x+y=1$ می‌باشد.

بردار $n_3=(1, 0, 1)$ عمود بر صفحه $T_3: x+z=3$ می‌باشد.

بردار $u_2=n_1\times n_3$، برداری موازی فصل مشترک دو صفحه $T_1$ و $T_3$ می‌باشد:

$$u_2=n_1\times n_3=(1, 1, 0)\times(1, 0, 1)=(1, -1, -1)$$

خط گذرا از نقطه $(0, 1, 3)$ که موازی بردار $(1, -1, -1)$ است، دارای معادله زیر است:

$$L_2: \frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow L_2: x=-y+1=-z+3$$

خط $L_2$ فصل مشترک دو صفحه $T_1$ و $T_3$ می‌باشد.

* بررسی وضعیت دوصفحه $\begin{cases}y+z=2\\ x+z=3\end{cases}$، نقطه $(3, 2, 0)$ روی هر دو صفحه واقع است.

بردار $n_2=(0, 1, 1)$ عمود بر صفحه $T_2: x+y=1$ می‌باشد.

بردار $n_3=(1, 0, 1)$ عمود بر صفحه $T_3: x+z=3$ می‌باشد.

بردار $u_3=n_2\times n_3$، برداری موازی فصل مشترک دو صفحه $T_2$ و $T_3$ می‌باشد:

$$u_3=n_2\times n_3=(0, 1, 1)\times(1, 0, 1)=(1, 1, -1)$$

خط گذرا از نقطه $(3, 2, 0)$ که موازی بردار $(1, 1, -1)$ است، دارای معادله زیر است:

$$L_3: \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{-1}\Rightarrow L_3: x-3=y-2=-z$$

خط $L_3$ فصل مشترک دو صفحه $T_1$ و $T_3$ می‌باشد:

* حال برای بررسی وضعیت سه صفحه $T_1$، $T_2$ و $T_3$ کافی است وضعیت سه خط $L_1$، $L_2$ و $L_3$ را بررسی کنیم: نقطه $(1, 0, 2)$ روی هر سه خط $L_1$، $L_2$ و $L_3$ قرار دارد پس سه صفحه $x+y=1$ و $y+z=2$ و $x+z=3$ در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

پ) دوبه‌دو خطوط داده شده دراین مسئله را بررسی می‌کنیم سپس وضعیت هر سه رانسبت به هم بررسی می‌کنیم:

* بررسی وضعیت دو صفحه $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x+2y-z=3 \end{cases}$، نقطه $(0, 1, -1)$ روی هر دو صفحه واقع است.

بردار $n'_1=(1,1,-1)$ بر صفحه $T'_1: x+y-z=2$ عمود است.

بردار $n'_2=(-1,2,-1)$ بر صفحه $T'_2: -x+2y-z=3$ عمود است.

بردار $u'_1=n'_1\times n'_2$ موازی فصل مشترک دو صفحه $T'_1$ و $T'_2$ می‌باشد:

$$u'_1=n'_1\times n'_2=(1,1,-1)\times(-1,2,-1)=(1,0,3)$$

خط گذرا از نقطه $(0, 1, -1)$ که موازی بردار $(1, 0, 3)$ است، دارای معادله زیر است:

$$L'_1: \frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{3} \Rightarrow L'_1: x=\frac{z+1}{3}, y=1$$

خط $L'_1$ فصل مشترک دو صفحه $T'_1$ و $T'_2$ می‌باشد.

* بررسی وضعیت دوصفحه $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$، نقطه $(2, 1, 1)$ روی هر دو صفحه واقع است.

بردار $n'_1=(1,1,-1)$ بر صفحه $T'_1: x+y-z=2$ عمود است.

بردار $n'_3=(1,-1,-1)$ بر صفحه $T'_3: x-y-z=0$ عمود است.

بردار $u'_2=n'_1\times n'_3$ موازی فصل مشترک دو صفحه $T'_1$ و $T'_3$ می‌باشد:

$$u'_2=n'_1\times n'_3=(1,1,-1)\times(1,-1,-1)=(-2,0,-2)$$

خط گذرا از نقطه $(2, 1, 1)$ که موازی بردار $(-2, 0, -2)$ است، دارای معادله زیر است:

$$L'_2: \frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{-2} \Rightarrow L'_2: \frac{x-2}{-2}=\frac{z-1}{-2}, y=1$$

خط $L'_2$ فصل مشترک دو صفحه $T'_1$ و $T'_3$ می‌باشد:

بررسی وضعیت دوصفحه $\begin{cases} -x+2y-z=3 \\ x-y-z=0 \end{cases}$، نقطه $(0, 1, -1)$ روی هر دو صفحه واقع است.

بردار $n'_2=(-1,2,-1)$ بر صفحه $T'_2: -x+2y-z=3$ عمود است.

بردار $n'_3=(1,-1,-1)$ بر صفحه $T'_3: x-y-z=0$ عمود است.

بردار $u'_3=n'_2\times n'_3$ موازی فصل مشترک دو صفحه $T'_2$ و $T'_3$ می‌باشد:

$$u'_3=n'_2\times n'_3=(-1,2,-1)\times(1,-1,-1)=(-3,-2,-1)$$

خط گذرا از نقطه $(0, 1, -1)$ که موازی بردار $(-3, -2, -1)$ است، دارای معادله زیر است:

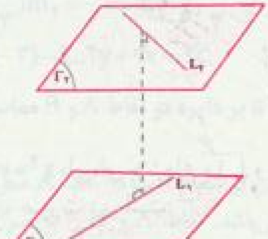
$$L'_3: \frac{x-0}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow L'_3: -\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=-z-1$$

خط $L'_3$ فصل مشترک دو صفحه $T'_2$ و $T'_3$ می‌باشد:

ـ حال برای بررسی وضعیت سه صفحه $T'_1$، $T'_2$ و $T'_3$ کافی است وضعیت سه خط $L'_1$، $L'_2$ و $L'_3$ را بررسی کنیم: نقطه $(0, 1, -1)$ روی هر سه خط $L'_1$، $L'_2$ و $L'_3$ واقع است بنابراین سه صفحه $x+y-z=2$ و $-x+2y-z=3$ و $x-y-z=0$ در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

**۱۹ـ برای دوخط متنافر $L_۱$ با معادلات $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z+۲}{۱}$ و $L_۲$ با معادلات $\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}$ کوتاه‌ترین فاصله بین دوخط (طول عمود مشترک) را پیدا کنید.**

**(راهنمایی: طول موردنظر، طول پاره‌خطی است که محصور بین دو خط داده شده است و بر هر دو عمود است. (به شکل ۶ نگاه کنید.) راستای این عمود مشترک در راستای $u_۱\times u_۲$ قرار دارد که $u_۱$ و $u_۲$ به ترتیب دو بردار موازی با $L_۱$ و $L_۲$ هستند. حال صفحه‌های $T_۱$ و $T_۲$ که راستای عمود بر هر دوی آن‌ها $u_۱\times u_۲$ است را در نظر می‌گیریم. فاصله این دو صفحه، فاصله مطلوب است)**





با توجه به راهنمایی کافی است فاصله دو صفحه $T_۱$ و $T_۲$ را به دست آوریم خط $L_۱$ در صفحه $T_۱$ واقع است و خط $L_۲$ در صفحه $T_۲$ می‌باشد بنابراین پس از به دست آوردن راستای عمود بر صفحات $T_۱$ و $T_۲$ فاصله‌ی یک نقطه از خط $L_۱$ را نسبت به صفحه $T_۲$ به دست می‌آوریم این فاصله همان فاصله بین دو صفحه $T_۱$ و $T_۲$ می‌باشد و طول عمود مشترک $L_۱$ و $L_۲$ نیز هست. بردار $u_۱=(۲,-۱,۱)$ موازی خط $L_۱$ می‌باشد.
بردار $u_۲=(۱,۲,۳)$ موازی خط $L_۲$ است. بردار $n=u_۱\times u_۲$ عمود دوصفحه $T_۱$ و $T_۲$ است.

$$n=u_۱\times u_۲=(۲,-۱,۱)\times(۱,۲,۳)=(-۵,-۵,۵)$$

نقطه $P_۰=(-۱,۰,-۲)$ را روی خط $L_۱:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z+۲}{۱}$ در نظر می‌گیریم.
فاصله‌ی این نقطه را تا صفحه‌ی $T_۲$ (صفحه‌ای که شامل $L_۲$ است) به دست می‌آوریم.
نقطه‌ی $P=(۰,۰,۰)$ یک نقطه دلخواه روی صفحه‌ی $T_۲$ است که روی خط $L_۲$ نیز واقع است.
فاصله‌ی نقطه‌ی $P_۰$ تا صفحه $T_۲$ از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$D=\frac{\left|n.\overline{(P_۰P)}\right|}{|n|}=\frac{\left|(-۵,-۵,۵).(۱,۰,۲)\right|}{\left|(-۵,-۵,۵)\right|}=\frac{\left|(-۵)(۱)+(-۵)(۰)+(۵)(۲)\right|}{\sqrt{(-۵)^۲+(-۵)^۲+۵^۲}}=\frac{۶}{۵\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۵}\sqrt{۳}$$

طول عمود مشترک بین دو خط $L_۱$ و $L_۲$ مقدار $D=\frac{۲}{۵}\sqrt{۳}$ می‌باشد.

## فصـــل ۳ مقاطع مخروطی

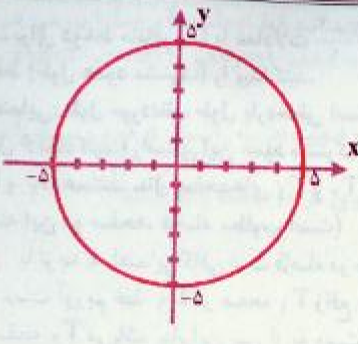
### تمرین (صفحه‌ی ۵۴)

**۱ـ نمودار هر یک از دایره‌های زیر را رسم کنید.**

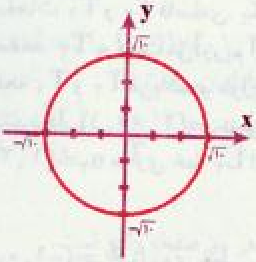
الف) $x^۲+y^۲=۹$ ب) $x^۲+y^۲=۲۵$
ج) $x^۲+y^۲=۱۰$ د) $x^۲+y^۲=۵$

الف) معادله دایره به شعاع r و مرکز (۰ و ۰) در حالت کلی به صورت $x^۲+y^۲=r^۲$ می‌باشد. بنابراین دایره $x^۲+y^۲=۹$، به مرکز (۰ و ۰) و شعاع ۳ است و شکل آن به صورت روبه‌رو است:

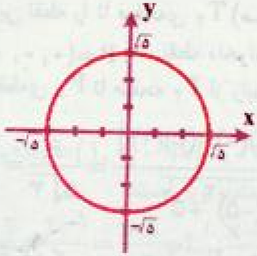
ب) $x^2+y^2=25$ دایره‌ای به مرکز (۰ و ۰) و شعاع ۵ می‌باشد. شکل آن به صورت زیر است:




ج) $x^2+y^2=10$ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{10}$ و به مرکز (۰ و ۰) می‌باشد، شکل آن به صورت زیر است:




د) دایره $x^2+y^2=5$ به شعاع $\sqrt{5}$ و به مرکز (۰ و ۰) می‌باشد. شکل آن به صورت زیر است:




**۲ـ معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که از نقطه (۲ و ۱ـ) بگذرد.**

نقطه $O=(0\ ,\ 0)$ مرکز دایره است و نقطه $A=(-1\ ,\ 2)$ روی دایره قرار دارد. با به دست آوردن اندازه پاره‌خط OA، اندازه شعاع دایره به‌دست می‌آید پس داریم:

$$r=|OA|=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$$

بنابراین معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt{5}$ به صورت روبه‌رو است: $x^2+y^2=\sqrt{5}$

**۳ـ معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط $4x+3y=10$ مماس باشد.**

فاصله مبدأ مختصات تا خط $4x+3y=10$ را به دست می‌آوریم. این فاصله شعاع دایره را مشخص می‌کند.

فاصله نقطه‌ی دلخواه $(x_0,y_0)$ تا خط $ax+by+c=0$ از رابطه $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می‌آوریم. پس

فاصله مبدأ مختصات تا خط $4x+3y=10$ از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید: $d=\dfrac{|-10|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

بنابراین دایره به مرکز مبدأ مختصات که بر خط $4x+3y=10$ مماس است دارای شعاع ۲ است پس معادله‌اش به صورت روبه‌رو است: $x^2+y^2=4$

**۴ـ معادله خطی را بنویسید که در نقطه (۴ و ۳) بر دایره $x^2+y^2=25$ مماس باشد.**

شعاع دایره از نقطه تماس بر خط مماس عمود است. خط گذرا از نقطه (۴ و ۳) و مبدأ مختصات بر خط مماس بر دایره عمود است، کافی است شیب آن را بیابیم آن‌گاه می‌توان شیب خط مماس را نیز به دست آورد و با دانستن شیب خط و یک نقطه از آن، معادله خط مماس بر دایره را می‌نویسیم:

شیب خط گذرا از نقطه (۰ و ۰) و (۴ و ۳) $m_1=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$

شیب خط مماس بر دایره از رابطه روبرو به دست می‌آید: $m_1.m_2=-1\Rightarrow(\frac{4}{3})m_2=-1\Rightarrow m_2=-\frac{3}{4}$

معادله خط مماس بر دایره $x^2+y^2=25$ در نقطه (۴ و ۳): $L:y-4=-\frac{3}{4}(x-3)\to L:4y+3x=25$

**۵ـ از نقطه (۰ و ۳) دو مماس بر دایره $x^2+y^2=3$ رسم می‌کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند. مختصات A و B را پیدا کنید.**

خط گذرا از نقطه (۰ و ۳) و نقطه A بر دایره مماس است پس بر شعاع دایره در نقطه A عمود است. شعاع دایره که از نقطه A می‌گذرد همان خط گذرا از A و $O=(0\ ,\ 0)$ می‌باشد. نقاط A و B را به صورت $A=(x\ ,\ y)$ و $B=(x',y')$ در نظر می‌گیریم چون هر دو روی دایره‌اند پس $x^2+y^2=3$ و $x'^2+y'^2=3$ شیب خط گذرا از (۰ و ۳) و A به صورت روبروست: $m=\frac{y-0}{x-3}=\frac{y}{x-3}$

شیب خط گذرا از (۰ و ۰) و A به صورت روبروست: $m'=\frac{y-0}{x-0}=\frac{y}{x}$

چون دو خط مذکور بر هم عمودند پس $m.m'=-1$ با جایگذاری مقادیر داریم:

$$\frac{y}{x-3}.\frac{y}{x}=-1\Rightarrow\frac{y^2}{x^2-3x}=-1$$

$$\Rightarrow y^2=-x^2+3x\Rightarrow y^2+x^2=3x\xrightarrow{y^2+x^2=3}3=3x\Rightarrow x=1$$

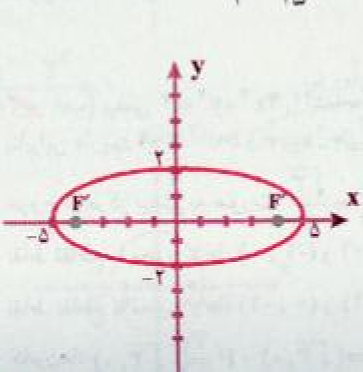
و از آن‌جا که $x^2+y^2=3$ پس $1+y^2=3$ و داریم $y=\pm\sqrt{2}$ دو نقطه A و B دارای x های یکسان‌اند اما y های آنها متقارن‌اند پس: $A=(1,-\sqrt{2})$ و $B=(1,\sqrt{2})$ می‌باشند.

## تمرین (صفحه‌ی ۶۴)

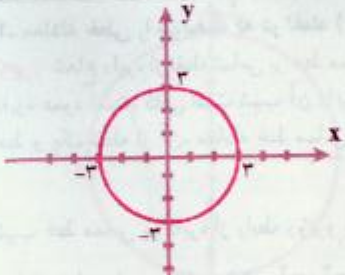
**۱ـ نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده، خروج ازمرکز آنها را نیز مشخص کنید.**

الف) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$  ب) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$  ج) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

الف) بیضی $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ دارای تقاطع با محور x ها در نقاط (۵و۰) و (۰ و ۵ـ) می‌باشد همچنین دارای تقاطع با محور y ها در نقاط (۲ و ۰) و (۲ـ و ۰) می‌باشد. کانون‌های آن نیز با استفاده از رابطه $C^2=25-4=21$ به دست می‌آید و آن‌ها نقاط $F=(\sqrt{21},0)$ و $F'=(-\sqrt{21},0)$ می‌باشند. خروج ازمرکز آن که با e نمایش می‌دهیم نسبت c به a می‌باشد، در اینجا $C=\sqrt{21}$ و $a=5$ می‌باشد داریم:

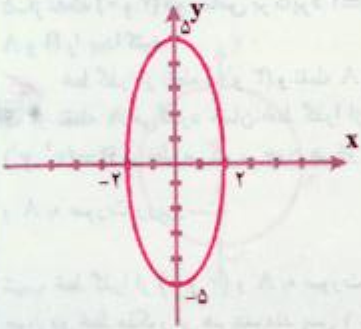



$$e=\frac{\sqrt{21}}{5}$$



ب) بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ دارای تقاطع با محور x ها در نقاط (۰و۳) و (۰ و ۳-) می‌باشد همچنین دارای تقاطع بامحور y ها در نقاط (۲ و ۰) و (۲- و ۰) می‌باشد. کانون‌های آن نیز با استفاده از رابطه $C^2=9-4=5$ به دست می‌آید و آن‌ها نقاط $F=(\sqrt{5},0)$ و $F'=(-\sqrt{5},0)$ می‌باشند. خروج ازمرکز آن که با e نمایش می‌دهیم نسبت c به a می‌باشد، در اینجا $C=\sqrt{5}$ و $a=3$ می‌باشد داریم:

$$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



ج) بیضی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ دارای تقاطع با محور x ها در نقاط (۰و۲) و (۰ و ۲-) می‌باشد همچنین دارای تقاطع با محور y ها در نقاط (۵ و ۰) و (۵- و ۰) می‌باشد. کانون‌های آن نیز با استفاده از رابطه $C^2=25-4=21$ به دست می‌آید و آن‌ها نقاط $F=(\sqrt{21},0)$ و $F'=(-\sqrt{21},0)$ می‌باشند. خروج از مرکز آن که با e نمایش می‌دهیم نسبت c به a می‌باشد، در اینجا $C=\sqrt{21}$ و $a=5$ می‌باشد داریم:

$$e=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

**۲ـ نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرده و خروج از مرکز آنها رامشخص کنید.**

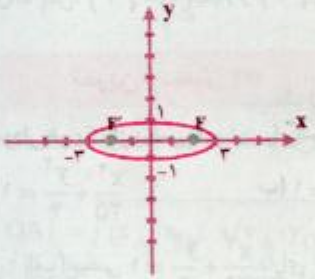
**الف)** $x^2+9y^2=9$  **ب)** $4x^2+y^2=4$  **ج)** $16x^2+25y^2=400$

الف) بیضی $x^2+9y^2=9$ را ابتدا به صورت استاندارد آن درمی‌آوریم:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$$

بنابراین داریم: $a=3$ ، $b=1$ و $C^2=a^2-b^2=9-1=8$ پس $C=\sqrt{8}$

خروج از مرکز بیضی به صورت: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{8}}{3}$ می‌باشد.



نقاط تقاطع با محور x ها: (۰ , ۳-) و (۰ , ۳)

نقاط تقاطع با محور y ها: (۱- , ۰) و (۱ , ۰)

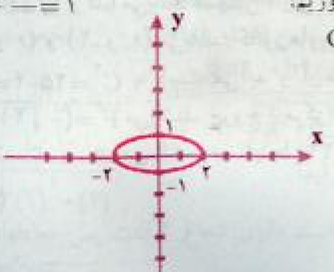
کانون‌ها:

ب) بیضی $4x^2+y^2=4$ را ابتدا به صورت استاندارد آن درمی‌آوریم:

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$$

بنابراین داریم: $a=2$ ، $b=1$ و $C^2=a^2-b^2=4-1=3$ پس $C=\sqrt{3}$

خروج از مرکز بیضی به صورت: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد.



نقاط تقاطع با محور x ها: (۰ , ۱-) و (۰ , ۱)

نقاط تقاطع با محور y ها: (۲- , ۰) و (۲ , ۰)

کانون‌ها: $F=(\sqrt{3},0)$ و $F'=(-\sqrt{3},0)$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

ج) بیضی $16x^2+25y^2=400$ را ابتدا به صورت استاندارد آن درمی‌آوریم:

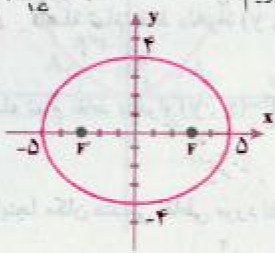
بنابراین داریم: $a=5$ ، $b=4$ و $C^2=a^2-b^2=25-16=9$ پس $C=3$

خروج از مرکز بیضی به صورت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ می‌باشد.

نقاط تقاطع با محور x ها: $(-5\ ,\ 0)$ و $(5\ ,\ 0)$

نقاط تقاطع با محور y ها: $(0\ ,\ -4)$ و $(0\ ,\ 4)$

کانون‌ها: $F'=(-3,0)$ و $F=(3,0)$




**۳ـ نمودار هر یک از بیضی‌های زیر را رسم کرد و خروج از مرکز آنها رامشخص کنید.**

**الف)** $3x^2+2y^2=24$ **ب)** $4x^2+7y^2=28$ **ج)** $2x^2+3y^2=24$

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$

الف) بیضی $3x^2+2y^2=24$ را ابتدا به صورت استاندارد آن درمی‌آوریم:

بنابراین داریم: $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ، $b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $C^2=a^2-b^2=12-8=4$ پس $C=2$

خروج از مرکز بیضی به صورت: $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌باشد.

نقاط تقاطع با محور x ها: $(-2\sqrt{2}\ ,\ 0)$ و $(2\sqrt{2}\ ,\ 0)$

نقاط تقاطع با محور y ها: $(0\ ,\ -2\sqrt{3})$ و $(0\ ,\ 2\sqrt{3})$

کانون‌ها:

$F'=(0,-2)$ و $F=(0,2)$


$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}=1$

ب) بیضی $4x^2+7y^2=28$ را ابتدا به صورت استاندارد آن درمی‌آوریم:

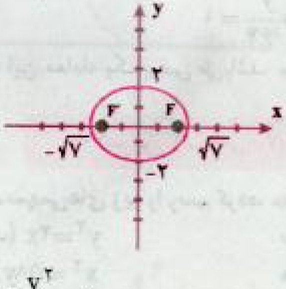
بنابراین داریم: $a=\sqrt{7}$ ، $b=2$ و $C^2=a^2-b^2=7-4=3$ پس $C=\sqrt{3}$

خروج از مرکز بیضی به صورت: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ می‌باشد.

نقاط تقاطع با محور x ها: $(-\sqrt{7}\ ,\ 0)$ و $(\sqrt{7}\ ,\ 0)$

نقاط تقاطع با محور y ها: $(0\ ,\ -2)$ و $(0\ ,\ 2)$

کانون‌ها: $F'=(-\sqrt{3},0)$ و $F=(\sqrt{3},0)$




$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

ج) بیضی $2x^2+3y^2=24$ را ابتدا به صورت استاندارد آن درمی‌آوریم:

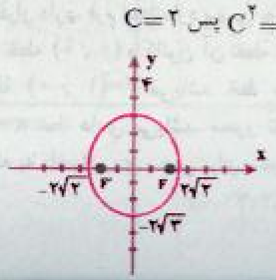
بنابراین داریم: $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ، $b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $C^2=a^2-b^2=12-8=4$ پس $C=2$

خروج از مرکز بیضی به صورت: $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{3}}$ می‌باشد.

نقاط تقاطع با محور x ها: $(-2\sqrt{3}\ ,\ 0)$ و $(2\sqrt{3}\ ,\ 0)$

نقاط تقاطع با محور y ها: $(0\ ,\ -2\sqrt{2})$ و $(0\ ,\ 2\sqrt{2})$

کانون‌ها: $F'=(-2,0)$ و $F=(2,0)$



**۴ـ مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه (۰ و ۲) برابر نصف آن‌ها از خط $x=8$ باشد.**

فاصله تمام نقاط دلخواه $P=(x, y)$ از نقطه $A=(2, 0)$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$|AP| = \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$

فاصله تمام نقاط دلخواه $P=(x, y)$ از خط $x=8$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$d=\frac{|x-8|}{\sqrt{1^2}}=|x-8|$$

در اینجا مکان هندسی نقاطی مورد نظر است که فاصله آن‌ها از نقطه (۰ و ۲) برابر نصف آنها از خط $x=8$ است، یعنی:

$$|AP| = \frac{1}{2}d \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{2}|x-8| \Rightarrow (x-2)^2+y^2=\frac{1}{4}(x-8)^2$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2=\frac{1}{4}x^2-4x+16 \Rightarrow 3x^2+4y^2=48 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

که این معادله، معادله یک بیضی می‌باشد، مکان هندسی موردنظر بیضی است.

**۵ـ مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصله‌ی آنها از نقطه $(0, 9)$ برابر $\frac{3}{4}$ فاصله‌ی آنها از خط $y=16$ باشد.**

فاصله نقاط دلخواه $P=(x, y)$ از نقطه $A=(0, 9)$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$|AP| = \sqrt{(x-0)^2+(y-9)^2}$$

فاصله تمام نقاط دلخواه $P=(x, y)$ از خط $y=16$ به صورت زیرقابل محاسبه است:

$$d=\frac{|y-16|}{\sqrt{1^2}}=|y-16|$$

در اینجا مکان هندسی نقاطی موردنظر است که فاصله آنها از نقطه $(0, 9)$ برابر $\frac{3}{4}$ فاصله آنها از خط $y=16$ باشد، یعنی:

$$|AP| = \frac{3}{4}d \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-9)^2}=\frac{3}{4}|y-16| \Rightarrow x^2+(y-9)^2=\frac{9}{16}(y-16)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-18y+81=\frac{9}{16}y^2-18y+144 \Rightarrow 16x^2+7y^2=1008 \Rightarrow \frac{x^2}{63}+\frac{y^2}{64}=1$$

که این معادله یک بیضی می‌باشد، مکان هندسی موردنظر بیضی است.

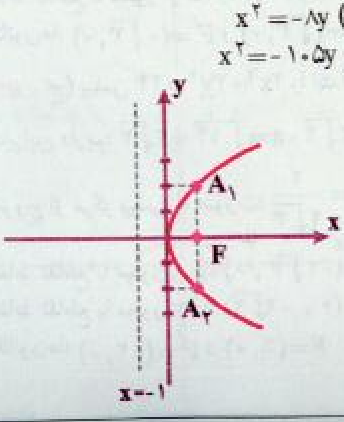
## تمرین (صفحه‌ی ۷۰)

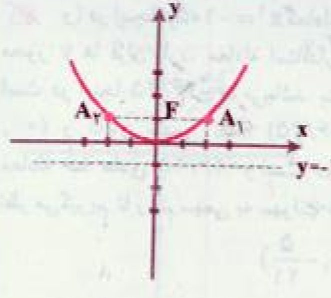
**۱ـ سهمی‌های زیر را رسم کرده، مختصات کانون ومعادله‌ی خط هادی آنها را نیز تعیین کنید.**

الف) $y^2=4x$ ب) $x^2=4y$ ج) $x^2=-8y$

د) $x^2=58y$ هـ) $y^2=-93x$ و) $x^2=-105y$

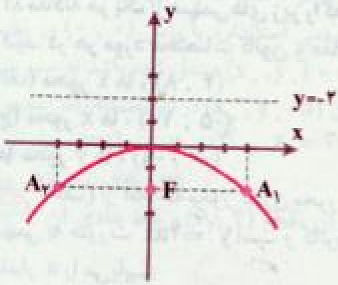
الف) در اینجا $y^2=4x$ معادله سهمی است پس کانون روی محور xها قرار دارد، فرم استاندارد سهمی به صورت $y^2=4ax$ می‌باشد که رأس آن نقطه $(0, 0)$ و کانون آن نقطه $F=(a, 0)$ می‌باشد در اینجا کانون نقطهٔ $F=(1, 0)$ می‌باشد خط هادی؛ $x=-a$ است که در اینجا $x=-1$ خط هادی می‌باشد. محور تقارن سهمی محور xها می‌باشد. دو نقطه به دلخواه روی سهمی برای سهولت در رسم سهمی انتخاب می‌کنیم:
$A_1=(1, 2)$ و $A_2=(1, -2)$





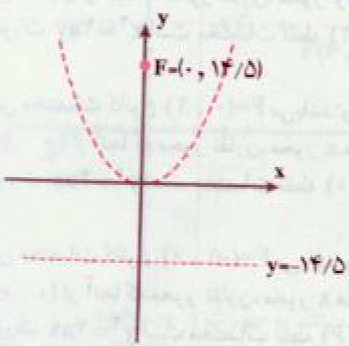

ب) در اینجا $x^2=۴y$ معادله سهمی است پس کانون روی محور y ها قرار دارد، فرم استاندارد سهمی به صورت $x^2=۴ay$ می‌باشد که رأس آن نقطه (۰ , ۰) و کانون آن نقطه $F=(۰ , a)$ است در اینجا کانون نقطهٔ $F=(۰ , ۱)$ می‌باشد خط هادی : $y=-a$ است که در اینجا $y=-۱$ خط هادی می‌باشد. محور تقارن سهمی محور y ها می‌باشد. دو نقطه به دلخواه روی سهمی برای سهولت در رسم سهمی انتخاب می‌کنیم:

$A_1=(۲, ۱)$ و $A_2=(-۲, ۱)$



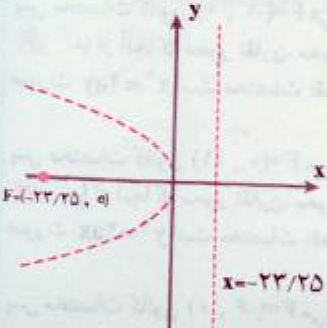

ج) در اینجا $x^2=-۸y$ معادله سهمی است پس کانون روی محور y ها قرار دارد، فرم استاندارد سهمی به صورت $x^2=۴ay$ می‌باشد که رأس آن نقطه (۰ , ۰) و کانون آن نقطه $F=(۰ , a)$ است در اینجا کانون نقطهٔ $F=(۰ , -۲)$ می‌باشد خط هادی : $y=-a$ است که در اینجا $y=۲$ خط هادی می‌باشد. محور تقارن سهمی محور y ها می‌باشد. دو نقطه به دلخواه روی سهمی برای سهولت در رسم سهمی انتخاب می‌کنیم:

$A_1=(۴, -۲)$ و $A_2=(-۴, -۲)$



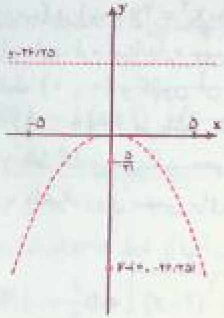

د) در اینجا $x^2=۵۸y$ معادله سهمی است پس کانون روی محور y ها قرار دارد، فرم استاندارد سهمی به صورت $x^2=۴ay$ است در اینجا $a=۱۴/۵$ می‌باشد، کانون سهمی $F=(۰ , ۱۴/۵)$ می‌باشد و خط هادی آن خط $y=-۱۴/۵$ می‌باشد. برای سهولت در رسم سهمی دو نقطه دلخواه روی سهمی را درنظر می‌گیریم:

$A_1=(۵۸, ۵۸)$ و $A_2=(-۵۸, ۵۸)$




هـ) در اینجا $y^2=-۹۳x$ معادله سهمی است پس کانون روی محور x ها قرار دارد، معادله استاندارد سهمی به صورت $y^2=۴ay$ است در اینجا $a=-۲۳/۲۵$ می‌باشد، رأس آن نقطه (۰ , ۰) و کانون سهمی نقطه $F=(-۲۳/۵ , ۰)$ است. خط هادی آن $x = ۲۳/۲۵$ است. برای سهولت در رسم سهمی دو نقطه دلخواه روی سهمی در نظر می‌گیریم:

$A_1=(-۹۳, ۹۳)$ و $A_2=(-۹۳, -۹۳)$




و) در اینجا $x^{۲}=-۱۰۵y$ معادله سهمی است بنابراین کانون روی محور y ها قرار دارد. معادله استاندارد سهمی به صورت $x^{۲}=۴ay$ است در اینجا $a=-۲۶/۲۵$ می‌باشد. بنابراین رأس سمی روی نقطه (۰ , ۰) و کانون سهمی نقطه $F=(۰ , -۲۶/۲۵)$ می‌باشد همچنین معادله خط هادی $y=۲۶/۲۵$ است. دو نقطه به دلخواه روی سهمی در نظر می‌گیریم تا رسم سهمی به سهولت صورت گیرد:

$$A_{۲}=(-۵,-\frac{۵}{۲۱}) \text{ و } A_{۱}=(۵,-\frac{۵}{۲۱})$$

**۲ـ معادله هر یک از سهمی‌های زیر را که محور تقارن آنها مشخص شده و یک نقطه از آنها نیز داده شده است، پیدا کنید. در هر مورد مختصات کانون و معادله خط هادی را نیز تعیین کنید.**

**الف) محور x ها ، (۸ , ۴)**      **ب) محور y ها ، (۲ , ۴)**

**ج) محور x ها ، (۱۰ , ۵-)**      **د) محور x ها ، (۶ , ۳-)**

**ه) محور y ها ، (۹- , ۶-)**      **ب) محور x ها ، (۱۲- , ۶-)**

الف) از آنجا که محور تقارن محور x هاست پس کانون روی محور x ها واقع است. معادله استاندارد یک چنین سهمی به صورت $y^{۲}=۴ax$ است و کانون آن $F=(a , ۰)$ است با قرار دادن مختصات نقطه (۸ , ۴) در این معادله مقدار a را می‌یابیم:

$$(۸)^{۲}=۴a(۴)\Rightarrow ۶۴=۱۶a\Rightarrow a=۴$$

پس مختصات کانون $F=(۴ , ۰)$ می‌باشد و معادله خط هادی $x=-۴$ است.

ب) از آنجا که محور تقارن، محور y هاست پس کانون نقطه‌ای روی محور y هاست و معادله استاندارد سهمی به صورت $x^{۲}=۴ay$ است مختصات نقطه (۲ , ۴) را در این معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید:

$$(۴)^{۲}=۴a(۲)\Rightarrow ۱۶=۸a\Rightarrow a=۲$$

پس مختصات کانون $F=(۰ , ۲)$ می‌باشد و معادله خط هادی $y=-۲$ است.

ج) از آنجا که محور تقارن، محور x هاست پس کانون نقطه‌ای روی محور x هاست و معادله استاندارد سهمی به صورت $y^{۲}=۴ax$ است مختصات نقطه (۱۰ , ۵ـ) را در این معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید:

$$(۱۰)^{۲}=۴a(-۵)\Rightarrow ۱۰۰=-۲۰a\Rightarrow a=-۵$$

پس مختصات کانون $F=(-۵ , ۰)$ می‌باشد و معادله خط هادی $x=۵$ است.

د) از آنجا که محور تقارن، محور x هاست پس کانون نقطه‌ای روی محور x هاست و معادله استاندارد سهمی به صورت $y^{۲}=۴ax$ است مختصات نقطه (۶ , ۳ـ) را در این معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید:

$$(۶)^{۲}=۴a(-۳)\Rightarrow ۳۶=-۱۲a\Rightarrow a=-۳$$

پس مختصات کانون $F=(-۳ , ۰)$ می‌باشد و معادله خط هادی $x=۳$ است.

ه) از آنجا که محور تقارن، محور y هاست پس کانون نقطه‌ای روی محور y هاست و معادله استاندارد سهمی به صورت $x^{۲}=۴ay$ است مختصات نقطه (۹- , ۶ـ) را در این معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید:

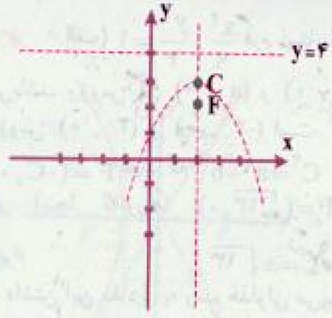
$$(-۶)^{۲}=۴a(-۹)\Rightarrow ۳۶=-۳۶a\Rightarrow a=-۱$$

پس مختصات کانون $F=(۰ , -۱)$ می‌باشد و معادله خط هادی $y=۱$ است.

و) از آنجا که محور تقارن، محور x هاست پس کانون نقطه‌ای روی محور x هاست و معادله استاندارد سهمی به صورت $y^{۲}=۴ax$ است مختصات نقطه (۱۲- , ۶ـ) را در این معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید:

$$(-۱۲)^{۲}=۴a(-۶)\Rightarrow ۱۴۴=-۲۴a\Rightarrow a=-۶$$

پس مختصات کانون $F=(-۶ , ۰)$ می‌باشد و معادله خط هادی $x=۶$ است.

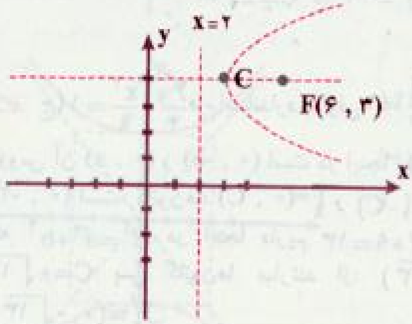



**۳ـ با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه (۲ , ۲) و خط هادی آن $y=4$ باشد.**

از آنجاکه مختصات کانون سهمی روی هیچ یک از محورهای x و y نیست پس رأس سهمی نقطه‌ای غیر از (۰,۰) است. به شکل روبه‌رو توجه کنید. محور تقارن سهمی، خطی است که از نقطه‌ی (۲ , ۲) می‌گذرد و بر خط $y=4$ عمود است.

نقطهٔ پای عمود محور تقارن و خط هادی، نقطه (۴ , ۲) می‌باشد. رأس سهمی روی خط واصل این نقطه و کانون سهمی واقع است و دقیقاً در وسط این پاره‌خط قرار دارد پس مختصات رأس سهمی به صورت (۳ , ۲) می‌باشد. هنگامی‌که رأس سهمی نقطه‌ای غیراز (۰ , ۰) باشد، می‌توان مرکز مختصات را به جای (۰ , ۰) نقطه $(x_0, y_0)$ که رأس سهمی است در نظر گرفت و سهمی را منتقل شده یک سهمی استاندارد با رأس (۰ , ۰) در نظر گرفت. انتقال سهمی با معادله متعارف $x^2=4ay$ وقتی رأس آن از (۰ , ۰) به $(x_0, y_0)$ منتقل شده باشد به صورت $(x-x_0)^2=4a(y-y_0)$ می‌باشد و خط هادی آن $y=y_0-a$ می‌باشد با کانون $(x_0, y_0+a)$ در این مسئله رأس سهمی $(x_0, y_0)=(2, 3)$ و کانون $(2, 2)=(x_0, y_0+a)$ بنابراین داریم: $x_0=2$ و $y_0=3$ و $a=-1$ بنابراین معادله سهمی به صورت روبه‌رو می‌باشد. $(x-2)^2=-4(y-3)$

**۴ـ با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه (۴ , ۶) و خط هادی آن $x=2$ باشد.**




در این جا مختصات کانون سهمی روی هیچ یک از محورهای x و y نمی‌باشد بنابراین رأس سهمی نیز نقطه‌ای غیر از (۰ , ۰) می‌باشد. به شکل زیر توجه کنید. محور تقارن سهمی، خطی است که از نقطه (۴ , ۶) می‌گذرد و بر خط $x=2$ عمود می‌باشد. نقطه پای عمود محور تقارن و خط هادی، نقطه (۴ , ۲) می‌باشد رأس سهمی روی خط واصل این نقطه و کانون سهمی واقع است و دقیقاً در وسط این پاره‌خط واقع است پس دارای مختصات (۴ , ۶) است. سهمی مورد نظر، منتقل شده یک سهمی با رأس (۰ , ۰) است که رأس آن به نقطهٔ (۴ , ۴) منتقل شده است. انتقال سهمی با معادله متعارف $y^2=4ax$ وقتی رأس آن از (۰ , ۰) به نقطهٔ $(x_0, y_0)$ منتقل شده باشد به صورت $(y-y_0)^2=4a(x-x_0)$ است و خط هادی آن $x=x_0-a$ می‌باشد با کانون $(x_0+a, y_0)$ در این مسئله رأس سهمی $(x_0, y_0)=(4, 4)$ و کانون $(6, 4)=(x_0+a, y_0)$ بنابراین داریم: $x_0=4$ و $y_0=4$ و $a=2$ بنابراین معادله سهمی به صورت:

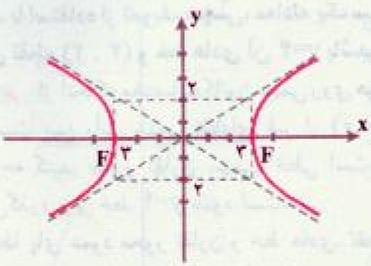
$(y-4)^2=8(x-4)$

## تمرین (صفحه‌ی ۷۶)

**۱ـ هر یک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید:**

الف) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ ب) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$

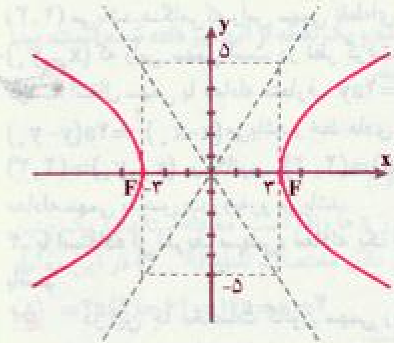
ج) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ د) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$




الف) $1=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$ فرم استاندارد هذلولی $1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ می‌باشد. رؤوس آن $(a\ ,\ 0)$ و $(-a\ ,\ 0)$ است پس در اینجا رؤوس $(3\ ,\ 0)$ و $(-3\ ,\ 0)$ است. کانون‌ها: $F=(C\ ,\ 0)$ و $F'=(-C, 0)$ است که $C^2=a^2+b^2$ در اینجا کانون‌ها $F=(\sqrt{13}, 0)$ و $F'=(-\sqrt{13}, 0)$

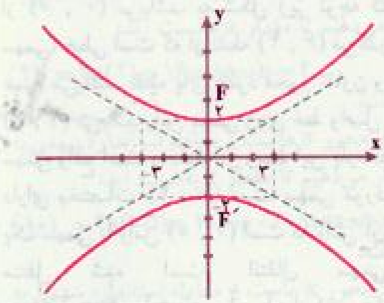
زیرا: $C^2=(3)^2+(2)^2=13 \Rightarrow C=\pm\sqrt{13}$

با داشتن این مقادیر به رسم هذلولی می‌پردازیم:




ب) $1=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}$ فرم استاندارد هذلولی $1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ می‌باشد. رؤوس آن $(a\ ,\ 0)$ و $(-a\ ,\ 0)$ است در اینجا رؤوس $(3\ ,\ 0)$ و $(-3\ ,\ 0)$ است. کانون‌ها: $F=(C\ ,\ 0)$ و $F'=(-C, 0)$ می‌باشد که $C^2=a^2+b^2$ بنابراین در اینجا داریم: کانون‌ها $F=(\sqrt{34}, 0)$ و $F'=(-\sqrt{34}, 0)$ زیرا: باداشتن این مقادیر به رسم هذلولی می‌پردازیم:

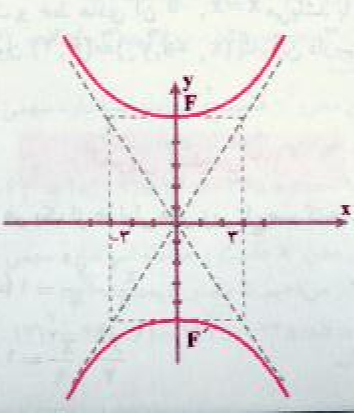
$$C^2=(3)^2+(5)^2=34 \Rightarrow C=\pm\sqrt{34}$$




ج) $1=\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}$ فرم استاندارد هذلولی $1=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$ می‌باشد.

رؤوس آن $(0\ ,\ a)$ و $(0\ ,\ -a)$ است در اینجا رؤوس $(0\ ,\ 2)$ و $(0\ ,\ -2)$ است. کانون‌ها: $F=(0\ ,\ C)$ و $F'=(0, -C)$ می‌باشد که $C^2=a^2+b^2$ در اینجا داریم $C^2=4+9=13$ بنابراین $C=\pm\sqrt{13}$ پس کانون‌ها عبارتند از: $F=(0, \sqrt{13})$ و $F'=(0, -\sqrt{13})$

با داشتن این مقادیر به رسم هذلولی می‌پردازیم:




د) $1=\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}$ فرم استاندارد هذلولی $1=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$ می‌باشد.

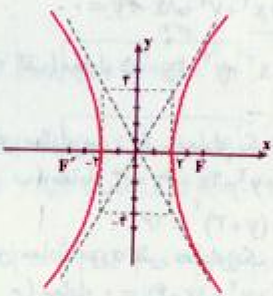
رؤوس آن $(0\ ,\ a)$ و $(0\ ,\ -a)$ می‌باشند. در اینجا رؤوس $(0\ ,\ 5)$ و $(0, -5)$ است. کانون‌ها: $F=(0\ ,\ C)$ و $F'=(0, -C)$ است که در آن $C^2=a^2+b^2$ در اینجا داریم $C^2=25+9=34$ بنابراین $C=\pm\sqrt{34}$ پس کانون‌ها عبارتند از: $F=(0, \sqrt{34})$ و $F'=(0, -\sqrt{34})$

با داشتن این مقادیر به رسم هذلولی می‌پردازیم:

**۲ـ هر یک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید:**

**الف)** $۴x^۲-y^۲=۱۶$ **ب)** $x^۲-۹y^۲=۹$

**ج)** $۹y^۲-۱۶x^۲=۱۴۴$ **د)** $۴y^۲-۲۵x^۲=۱۰۰$

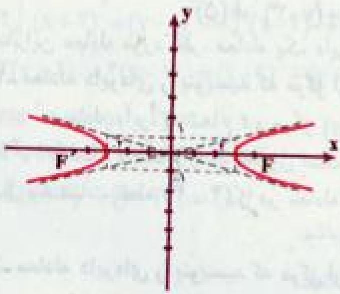



الف) $۴x^۲-y^۲=۱۶$ با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۱۶، هذلولی را به فرم استاندارد آن درمی‌آوریم: بنابراین معادله هذلولی به صورت $\frac{x^۲}{۴}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ درمی‌آید. رؤوس: $(۲ , ۰)$ و $(-۲ , ۰)$

کانون‌ها: $F=(\sqrt{۲۰}, ۰)$ و $F'=(-\sqrt{۲۰}, ۰)$ که

$C=\pm\sqrt{۲۰} \Leftarrow C^۲=۴+۱۶=۲۰$

حال از روی این مقادیر هذلولی را رسم می‌کنیم:



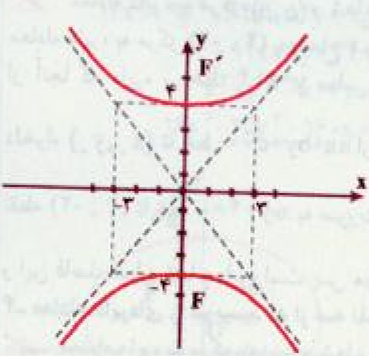

ب) $x^۲-۹y^۲=۹$ با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۹، هذلولی را به فرم استاندارد آن درمی‌آوریم: بنابراین معادله هذلولی به صورت $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱}=۱$ درمی‌آید.

رؤوس هذلولی: $(۳ , ۰)$ و $(-۳ , ۰)$

کانون‌ها: $F=(\sqrt{۱۰}, ۰)$ و $F'=(-\sqrt{۱۰}, ۰)$ که

$C=\pm\sqrt{۱۰} \Leftarrow C^۲=۹+۱=۱۰$

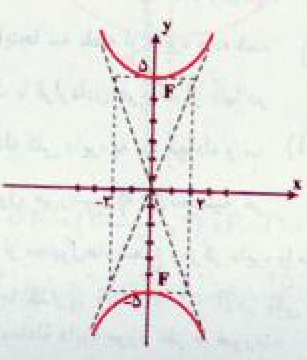
حال از روی این مقادیر هذلولی را رسم می‌کنیم:




ج) $۹y^۲-۱۶x^۲=۱۴۴$ با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۱۴۴ به فرم استاندارد آن درمی‌آوریم: $\frac{y^۲}{۱۶}-\frac{x^۲}{۹}=۱$ بنابراین داریم:

رؤوس: $(۴ , ۰)$ و $(-۴ , ۰)$ کانون‌ها: $F=(۰, ۵)$ و $F'=(۰, -۵)$ که $C^۲=۱۶+۹=۲۵ \Rightarrow C=\pm ۵$

حال از روی این مقادیر هذلولی را رسم می‌کنیم:




د) معادله هذلولی $۴y^۲-۲۵x^۲=۱۰۰$ را با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۱۰۰ به فرم استاندارد آن درمی‌آوریم: $\frac{y^۲}{۲۵}-\frac{x^۲}{۴}=۱$

بنابراین داریم: رؤوس: $(۵ , ۰)$ و $(-۵ , ۰)$

کانون‌ها: $F=(۰, \sqrt{۲۹})$ و $F=(۰, -\sqrt{۲۹})$ که

$C^۲=۲۵+۴=۲۹ \Rightarrow C=\pm\sqrt{۲۹}$

حال از روی این مقادیر هذلولی را رسم می‌کنیم:

## تمرین (صفحه‌ی ۸۲)

**۱ـ نشان دهید هر یک از معادلات زیر، معادلهٔ یک دایره است و شعاع و مرکز هر یک از آنها را به دست آورید.**

الف) $x^2+y^2-4y=5$    ب) $x^2+y^2-4x+6y=3$    ج) $x^2+y^2+8x-6y=0$

الف) معادله $x^2+y^2-4y=5$ را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$x^2+y^2-4y+4=9 \Rightarrow x^2+(y-2)^2=(3)^2$$

بنابراین معادله مورد نظر، معادله یک دایره است به شعاع ۳ و مرکز (۲ , ۰)

ب) معادله $x^2+y^2-4x+6y=3$ را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$x^2-4x+y^2-6y=3 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=3+4+9 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=16$$

بنابراین معادله مورد نظر، معادله یک دایره است به شعاع ۴ و مرکز (۳- , ۲)

ج) معادله $x^2+y^2+8x-6y=0$ را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$x^2+8x+y^2-6y=0 \Rightarrow x^2+8x+16+y^2-6y+9=25 \Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=(5)^2$$

بنابراین معادله مورد نظر، معادله یک دایره است به شعاع ۵ و مرکز (۳ , ۴-)

**۲ـ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن (۲- , ۱-) بوده و از نقطه (۳ , ۲) بگذرد.**

معادله دایره به شعاع r و مرکز $(\alpha,\beta)$ دارای معادله $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ است در این مسئله مرکز دایره (۲-,۱-) است و شعاع را که مجهول است همان r در نظر می‌گیریم: $(x+1)^2+(y+2)^2=r^2$

حال مختصات نقطه (۳ , ۲) را در معادله بالا قرار می‌دهیم تا مقدار r را بیابیم:

$$(2+1)^2+(3+2)^2=r^2 \Rightarrow 9+25=r^2 \Rightarrow 34=r^2 \Rightarrow r=\pm\sqrt{34}$$

**۳ـ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن (۲- , ۲) بوده و بر خط $y=x+4$ مماس باشد.**

معادله دایره به مرکز $(\alpha,\beta)$ و شعاع r به صورت روبروست: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

معادله دایره به مرکز (۲- , ۲) به شعاع r به صورت روبروست: $(x-2)^2+(y+2)^2=r^2$

از آنجا که دایره بر خط $y=x+4$ مماس است، شعاع دایره فاصلهٔ مرکز تا خط $y=x+4$ می‌باشد. فاصلهٔ نقطه دلخواه $(x_0,y_0)$ تا خط $ax+by+c=0$ از رابطه $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می‌آید: فاصلهٔ مرکز دایره یعنی نقطه (۲- , ۲) تا خط $x-y+4=0$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$d=\frac{|2+2+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

و این فاصله همان شعاع دایره است پس معادله دایره به صورت زیر به دست می‌آید: $(x-2)^2+(y+2)^2=32$

**۴ـ معادله دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ (۶ , ۴) , (۲- , ۲-) , (۱- , ۵) بگذرد.**

معادله دایره به مرکز $(\alpha,\beta)$ و شعاع r به صورت روبروست: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

در اینجا سه نقطه از دایره داده شده است با قراردادن هر یک از آنها در معادله کلی دایره به سه معادله و سه مجهول می‌رسیم که با محاسبه هر یک از مجهول‌ها، شعاع و مرکز دایره را می‌یابیم:

$$\begin{cases}(4-\alpha)^2+(6-\beta)^2=r^2\\(-2-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=r^2\\(5-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=r^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16-8\alpha+\alpha^2+36-12\beta+\beta^2=r^2 \quad (I)\\4+4\alpha+\alpha^2+4+4\beta+\beta^2=r^2 \quad (II)\\25-10\alpha+\alpha^2+1+2\beta+\beta^2=r^2 \quad (III)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}(I)-(II): \Rightarrow\\(III)-(I): \Rightarrow\end{matrix}\begin{cases}12\alpha+16\beta=44\\-2\alpha+14\beta=26\end{cases}\xrightarrow{\text{با حل دستگاه داریم}}\begin{matrix}\beta=2\\\alpha=1\end{matrix}$$

و با جایگذاری $\alpha=1$ و $\beta=2$ در یکی از معادلات (I) تا (III) داریم: $r=5$

پس معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر به صورت: $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

**۵ـ مکان هندسی نقاطی مانند (x , y) را پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطه (۱ , ۲-) نصف فاصله آنها از نقطه (۲- , ۴) باشد.**

فاصله نقاطی مانند P=(x , y) از نقطه A=(-۲ , ۱) به صورت زیر است:

$$|AP| = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

فاصله نقاطی مانند P=(x , y) از نقطه B=(۴ , ۲-) به صورت زیر است:

$$|BP| = \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$$

در اینجا نقاطی چون P=(x , y) موردنظرند که فاصلهٔ آنها از نقطه A=(-۲ , ۱) نصف فاصلهٔ آنها از نقطهٔ B=(۴ , ۲-) باشد یعنی در رابطه زیر صدق کنند:

$$|AP| = \frac{1}{2}|BP| \Rightarrow 2|AP| = |BP|$$

حال به جای |BP| و |AP| معادل آنها را قرار می‌دهیم:

$$2\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$$

$$4(x+2)^2+4(y-1)^2=(x-4)^2+(y+2)^2$$

$$\Rightarrow x^2+8x+y^2-4y=0$$

$$x^2+8x+16+y^2-4y+4=20$$

$$\Rightarrow (x+4)^2+(y-2)^2=20$$

مکان هندسی نقاط مورد نظر دایره‌ای به مرکز (۲ , ۴-) به شعاع $2\sqrt{5}$ می‌باشد.

**۶ـ نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده ونمودار آنها رارسم کنید.**

الف) $4x^2+9y^2-16x-36y+16=0$　　ب) $16x^2+9y^2+64x+54y+1=0$

ج) $x^2+8y+8y=0$　　د) $y^2+12x+4y-32=0$

هـ) $x^2+y^2+12x+10y+45=0$　　و) $x^2+y^2-8x-6y=0$

ز) $-9x^2+16y^2-72x-96y-144=0$　　ح) $16x^2-25y^2-160x=0$

الف)

$$4x^2+9y^2-16x-36y+16=0$$

$$4(x^2-4x+4)+9(y^2-6x+9-9)=0$$

$$4(x-2)^2+9((y-3)^2-9)=0$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=\frac{9}{4}$$

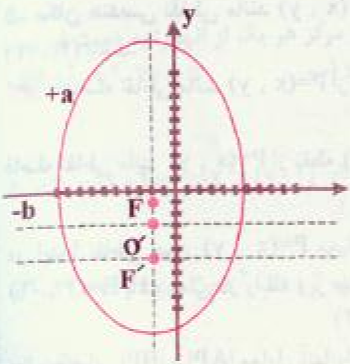
$$\frac{(x-2)^2}{(\frac{81}{4})}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$


معادلهٔ مورد نظر یک بیضی است به مرکز $O'=(2,3)$، کانون‌های $F=(2+\frac{\sqrt{45}}{2},3)$ و $F'=(2-\frac{\sqrt{45}}{2},3)$ که در آن:

$$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow C^2=\frac{81}{4}-9=\frac{45}{4} \Rightarrow C=\pm\frac{\sqrt{45}}{2}$$

و قطر بزرگ آن به طول ۱۵ و قطر کوچک به طول ۶ می‌باشد.

ب)

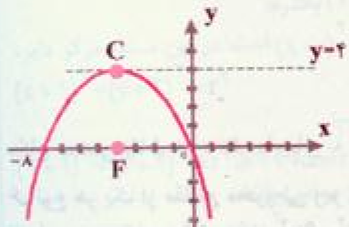



$$16x^2+9y^2+64x+54y+1=0$$
$$16(x^2+4x)+9(y^2+6)+1=0$$
$$16((x+2)^2-4)+9((y+3)^2-9)+1=0$$
$$16(x+2)^2-64+9(y+3)^2-81+1=0$$
$$16(x+2)^2+9(y+3)^2=144$$
$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

معادلهٔ مورد نظر یک بیضی است به مرکز $O'=(-2, -3)$، کانون‌های $F=(-2,-3+\sqrt{7})$ و $F'=(-2,-3-\sqrt{7})$ که در آن:

$$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=16-9=7 \Rightarrow c=\pm\sqrt{7}$$

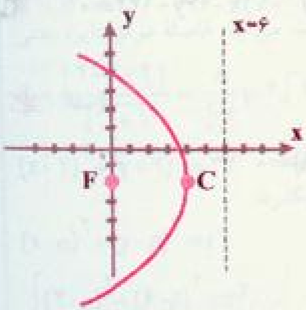
و قطر بزرگ آن به طول ۸ و قطر کوچک به طول ۶ می‌باشد.




ج)

$$x^2+8x+8y=0$$
$$(x+4)^2-16+8y=0$$
$$(x+4)^2=-8(y-2)$$

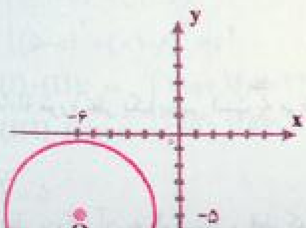
معادلهٔ مورد نظر یک سهمی است به رأس $C=(-4, 2)$ و خط هادی آن $y=4$ و کانون آن $F=(-4 , 0)$ می‌باشد.




د)

$$y^2+12x+4y-32=0$$
$$y^2+4y+12x-32=0$$
$$(y+2)^2-4+12x-32=0$$
$$(y+2)^2+12x-36=0$$
$$(y+2)^2=-12(x-3)$$

معادلهٔ مورد نظر یک سهمی است به رأس $C=(3 , -2)$ و کانون $(0 , -2)$ و خط هادی $x=6$.




ه)

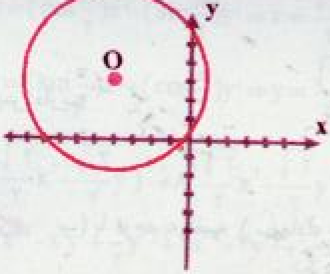
$$x^2+y^2+12x+10y+45=0$$
$$(x+6)^2-36+(y+5)^2-25+45=0$$
$$(x+6)^2+(y+5)^2=16$$

معادلهٔ مورد نظر یک دایره است به شعاع ۴ و رأس آن نقطه $(-6 , -5)$ می‌باشد.

و)

$$x^2+y^2-8x-6y=0$$
$$x^2-8x+16-16+y^2-6y+9-9=0$$
$$(x-4)^2+(y-3)^2-25=0$$
$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$

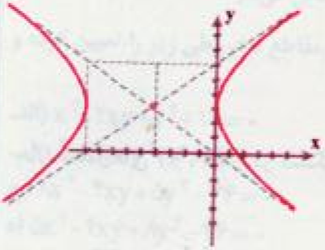
معادلهٔ مورد نظر یک دایره است به شعاع ۵ و مرکز آن $O=(4\ ,\ 3)$ می‌باشد.




ز)

$$-9x^2+16y^2-72x-96y-144=0$$
$$-9(x^2+8x+16)+16(y^2-6y)=0$$
$$-9(x+4)^2+16((y-3)^2-9)=0$$
$$\frac{(x+4)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

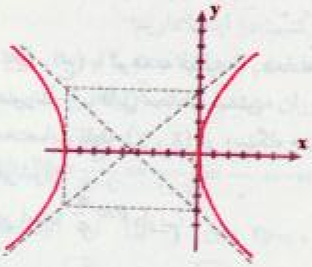
معادلهٔ مورد نظر یک هذلولی است به مرکز (۳ , ۴-) که در آن $a=4$ و $b=3$ می‌باشد.




ح)

$$16x^2-25y^2-160x=0$$
$$16(x^2-10x)-25y^2=0$$
$$16((x-5)^2-25)-25y^2=0$$
$$\frac{(x-5)^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

معادلهٔ مورد نظر یک هذلولی است به مرکز (۰ , ۵) که در آن $a=5$ و $b=4$ می‌باشد.




## تمرین (صفحهٔ ۹۱)

**۱ـ اگر محورهای مختصات را به اندازه زاویه $\theta$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم، هر یک از معادلات زیر را نسبت به دستگاه جدید بازنویسی کنید.**

الف) $x^2+y^2=49,\theta=\frac{\pi}{4}$

ب) $x^2+y^2=25,\theta=\frac{\pi}{3}$

ج) $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0\ ,\theta=\frac{\pi}{6}$

د) $x^2+8xy+y^2-75=0\ ,\theta=\frac{\pi}{4}$

الف) با توجه به قضیه ۱، معادله دایره $x^2+y^2=49$ پس از دوران $\theta=\frac{\pi}{4}$ به صورت زیر قابل محاسبه است: اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات $(x\ ,\ y)$ باشد، نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات $((\cos\theta)x'-(\sin\theta)y',(\sin\theta)x'+(\cos\theta)y')$ خواهد بود. در اینجا داریم:

$$x=(\cos\frac{\pi}{4})x'-(\sin\frac{\pi}{4})y'\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$x=(\sin\frac{\pi}{۴})x'+(\cos\frac{\pi}{۴})y'\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'$$

پس داریم:

$$x^۲+y^۲=۴۹\Rightarrow(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y')^۲+(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y')^۲=۴۹$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}x'^۲-x'y'+\frac{۱}{۲}y'^۲+\frac{۱}{۲}x'^۲+x'y'+\frac{۱}{۲}y'^۲=۴۹\Rightarrow x'^۲+y'^۲=۴۹$$

ب) با توجه به قضیه ۱، معادله دایره $x^۲+y^۲=۲۵$ پس از دوران $\theta=\frac{\pi}{۳}$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$x=(\cos\theta)x'-(\sin\theta)y'$$
$$y=(\sin\theta)x'+(\cos\theta)y'$$

در اینجا $\theta=\frac{\pi}{۳}$ بنابراین مختصات $(x\ ,\ y)$ در دستگاه جدید به صورت زیر است:

$$x=(\cos\frac{\pi}{۳})x'-(\sin\frac{\pi}{۳})y'\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}x'-\frac{\sqrt{۳}}{۲}y'$$

$$y=(\sin\frac{\pi}{۳})x'+(\cos\frac{\pi}{۳})y'\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'+\frac{۱}{۲}y'$$

حال معادل‌های $(x\ ,\ y)$ را در دستگاه جدید در معادله دایره قرار می‌دهیم:

$$x^۲+y^۲=۲۵\Rightarrow(\frac{۱}{۲}x'-\frac{\sqrt{۳}}{۲}y')^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'+\frac{۱}{۲}y')^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۴}x'^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'y'+\frac{۳}{۴}y'^۲+\frac{۳}{۴}x'^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'y'+\frac{۱}{۴}y'^۲=۲۵$$

$$x'^۲+y'^۲=۲۵$$

ج) با توجه به قضیه ۱، معادله $۲x^۲+\sqrt{۳}xy+y^۲-۱۰=۰$ پس از دوران $\theta=\frac{\pi}{۶}$ در دستگاه جدید، معادله به صورت زیر قابل محاسبه است:

مختصات نقطه $(x\ ,\ y)$ در دستگاه جدید به صورت $((\sin\theta)x'+(\cos\theta)y')$ و $((\cos\theta)x'-(\sin\theta)y')$ محاسبه می‌شود:

در اینجا $\theta=\frac{\pi}{۶}$ داریم:

$$x=(\cos\frac{\pi}{۶})x'-(\sin\frac{\pi}{۶})y'\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'-\frac{۱}{۲}y'$$

$$y=(\sin\frac{\pi}{۶})x'+(\cos\frac{\pi}{۶})y'\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}x'+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y'$$

با قرار دادن معادل $(x\ ,\ y)$ در معادلهٔ مورد نظر، معادله دوران یافته را در دستگاه جدید می‌یابیم:

$$۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'-\frac{۱}{۲}y')^۲+\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'-\frac{۱}{۲}y')(\frac{۱}{۲}x'+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y')+(\frac{۱}{۲}x'+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y')^۲-۱۰=۰$$

$$\frac{۹}{۲}x'^۲-\sqrt{۳}x'y'+\frac{۱}{۲}y'^۲+\frac{۳}{۴}x'^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'y'-\frac{۳}{۴}y'^۲+\frac{۱}{۴}x'^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۲}x'y'+\frac{۳}{۴}y'^۲-۱۰=۰$$

$$\frac{۱۱}{۲}x'^۲+\frac{۱}{۲}y'^۲-۱۰=۰$$

معادله $۲x^۲+\sqrt{۳}xy+y^۲-۱۰=۰$ پس از دوران $\theta=\frac{\pi}{۶}$ به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{۱۱}{۲۰}x'^۲+\frac{۱}{۲۰}y'^۲=۱$$

د) برای دوران معادله $x^۲+۸xy+y^۲-۷۵=۰$ به زاویه $\theta=\frac{\pi}{۴}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$(x\ ,\ y)$ در مختصات در دستگاه قدیم به $((\sin\theta)x'+(\cos\theta)y')$ و $((\cos\theta)x'-(\sin\theta)y')$ تبدیل می‌شود و در

حا:

$$x=(\cos\frac{\pi}{4})x'-(\sin\frac{\pi}{4})y' \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

$$y=(\sin\frac{\pi}{4})x'+(\cos\frac{\pi}{4})y' \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$$

با قرار دادن معادل $(x\ ,\ y)$ در معادلهٔ مورد نظر خواهیم داشت:

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2+8(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')+(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2-75=0$$

$$\frac{1}{2}x'^2-x'y'+\frac{1}{2}y'^2+4x'^2-4y'^2+\frac{1}{2}x'^2+x'y'+\frac{1}{2}y'^2-75=0$$

$$5x'^2-3y'^2=75 \Rightarrow \frac{x'^2}{15}-\frac{y'^2}{25}=1$$

پس از دوران $\frac{\pi}{4}$، معادلهٔ $x^2+8xy+y^2-75=0$ به معادلهٔ $\frac{x'^2}{15}-\frac{y'^2}{25}=1$ تبدیل می‌شود.

**۲ـ با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه‌ی مناسب، نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و آنها را رسم کنید.**

الف) $x^2-4xy+y^2-12=0$

ب) $x^2+xy+y^2-6=0$

ج) $8x^2-4xy+5y^2-36=0$

د) $5x^2-4xy+8y^2-36=0$

هـ) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-16\sqrt{3}x-16y=0$

و) $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+8\sqrt{3}x-8y=0$

الف) می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $x^2-4xy+y^2-12=0$ را تعیین کنیم. در اینجا داریم:

$$a=1\ ,b=-4\ ,c=1\ ,d=0\ ,e=0\ ,f=-12$$

محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات درجهت مثلثاتی به اندازه زاویه $\theta$ دوران می‌دهیم که در آن $\theta$ از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-4}{1-1}=\frac{-4}{0}=-\infty$$

با توجه به اتحاد $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2 2\theta}$ به دست می‌آوریم $\cos 2\theta=0$ و لذا از اتحادهای $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$ و $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ نتیجه می‌شود:

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اکنون معادله داده شده (در قسمت الف) نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

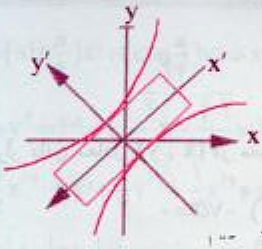
به صورت زیر است:

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2-4(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y')(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')+(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y')^2-12=0$$

$$\frac{1}{2}x'^2-x'y'+\frac{1}{2}y'^2-2x'^2-2x'y'+2x'y'+2y'^2+\frac{1}{2}x'^2+x'y'+\frac{1}{2}y'^2-12=0$$

$$-x'^2+3y'^2-12=0 \Rightarrow \frac{y'^2}{4}-\frac{x'^2}{12}=1$$

معادله اخیر نشان می‌دهد که مقطع مخروطی مورد نظر یک هذلولی است.




رؤوس هذلولی: (۲ , ۰) و (۲- , ۰)

کانون‌ها: (۴ , ۰) و (۴- , ۰) که:

$$C^{۲}=۴+۱۲=۱۶\Rightarrow C=\pm ۴$$

با داشتن این مقادیر هذلولی را رسم می‌کنیم:

ب) می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $x^{۲}+xy+y^{۲}-۶=۰$ را تعیین می‌کنیم.

$a=۱, b=۱, c=۱, d=e=۰, f=-۱۲$

محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه $\theta$ دوران می‌دهیم که در آن $\theta$ از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\tan ۲\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{۱}{۱-۱}=\frac{۱}{۰}=\infty\Rightarrow ۱+\tan^{۲} ۲\theta=\frac{۱}{\cos^{۲} ۲\theta}\Rightarrow \cos ۲\theta=۰$$

و لذا از اتحادهای $\cos^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)$ و $\sin^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)$ نتیجه می‌شود که $\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اکنون معادله داده شده (در قسمت ب) نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$

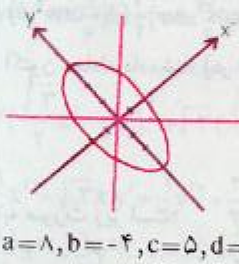
به صورت زیر است:

$$(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y')^{۲}+(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y')(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y')^{۲}+(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y')^{۲}-۶=۰$$

$$\frac{۱}{۲}x'^{۲}-x'y'+\frac{۱}{۲}y'^{۲}+\frac{۱}{۲}x'^{۲}-\frac{۱}{۲}y'^{۲}+\frac{۱}{۲}x'^{۲}+x'y'+\frac{۱}{۲}y'^{۲}-۶=۰$$

$$\frac{۳}{۲}x'^{۲}+\frac{۱}{۲}y'^{۲}-۶=۰\Rightarrow\frac{x'^{۲}}{۴}+\frac{y'^{۲}}{۱۲}=۱$$

معادله مورد نظر یک بیضی است که به شکل زیر آن را رسم می‌کنیم:




در اینجا $a=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$ و $b=۲$ می‌باشد، $c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۸$ پس $c=\pm ۲\sqrt{۲}$

کانون‌ها: $F'=(۰,-۲\sqrt{۲}), F=(۰,۲\sqrt{۲})$

نقاط تقاطع با محور x ها: $(-۲,۰),(۲,۰)$

نقاط تقاطع با محور y ها: $(۰,-۲\sqrt{۳}),(۰,۲\sqrt{۳})$

ج) می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $۸x^{۲}-۴xy+۵y^{۲}-۳۶=۰$ را تعیین کنیم، داریم:

$a=۸, b=-۴, c=۵, d=e=۰, f=-۳۶$

محورهای مختصات راحول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه زاویه $\theta$ دوران می‌دهیم که در آن $\theta$ از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\tan ۲\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-۴}{۸-۵}=\frac{-۴}{۳}\Rightarrow ۱+\tan^{۲} ۲\theta=\frac{۱}{\cos^{۲} ۲\theta}\Rightarrow \cos ۲\theta=-\frac{۳}{۵}$$

و لذا از اتحادهای $\cos^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(۱+۲\cos ۲\theta)$ و $\sin^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)$ نتیجه می‌شود که $\cos\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ و

$$\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

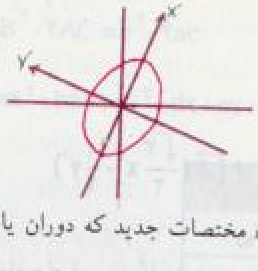
اکنون معادله داده شده در قسمت (ج) نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}}{5}x'-\frac{2\sqrt{5}}{5}y' \\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x'+\frac{\sqrt{5}}{5}y' \end{cases}$$

$$8(\frac{\sqrt{5}}{5}x'-\frac{2\sqrt{5}}{5}y')^2-4(\frac{\sqrt{5}}{5}x'-\frac{2\sqrt{5}}{5}y')(\frac{2\sqrt{5}}{5}x'+\frac{\sqrt{5}}{5}y')+5(\frac{2\sqrt{5}}{5}x'+\frac{\sqrt{5}}{5}y')^2-36=0$$

$$4x'^2+9y'^2=36 \Rightarrow \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$$

شکل حاصل بیضی است.



نقاط تقاطع بیضی مورد نظر با محور x ها عبارت است از: $(0\ ,\ -3)$ و $(3\ ,\ 0)$

همچنین نقاط تقاطع بیضی مورد نظر با محور y ها عبارت است از: $(2\ ,\ 0)$ و $(-2\ ,\ 0)$

کانون‌ها بیضی مورد نظر: $F=(\sqrt{5},0), F'=(-\sqrt{5},0)$

برای به دست آوردن شکل مقطع اولیه، بیضی به دست آمده را نسبت به دستگاه مختصات جدید که دوران یافته محورهای مختصات است رسم می‌کنیم:

د) می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $5x^2-4xy+8y^2-36=0$ را مشخص کنیم. داریم: $a=5, b=-4, c=8$

پس $\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-4}{-3}$ و از اینجا به محاسبه $\cos\theta$ و $\sin\theta$ می‌پردازیم که $\theta$ زاویهٔ مطلوب برای دوران محورهای مختصات است تا معادلهٔ جدید در دستگاه جدید به دست آید:

$$\tan 2\theta=\frac{4}{3} \Rightarrow 1+\tan^2 2\theta=\frac{1}{\cos^2 2\theta} \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{3}{5}$$

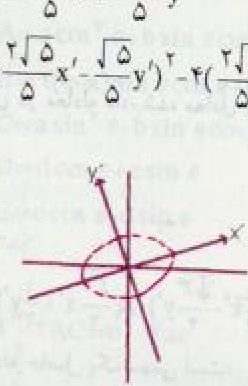
$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{5})=\frac{4}{5}$$

و داریم: $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ و $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ پس در معادله داده شده قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{5}}{5}x'-\frac{\sqrt{5}}{5}y' \\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}x'+\frac{2\sqrt{5}}{5}y' \end{cases}$$

$$5(\frac{2\sqrt{5}}{5}x'-\frac{\sqrt{5}}{5}y')^2-4(\frac{2\sqrt{5}}{5}x'-\frac{\sqrt{5}}{5}y')(\frac{\sqrt{5}}{5}x'+\frac{2\sqrt{5}}{5}y')+8(\frac{\sqrt{5}}{5}x'+\frac{2\sqrt{5}}{5}y')^2-36=0$$

معادله حاصل یک بیضی است. $4x'^2+9y'^2=36 \Rightarrow \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$



این بیضی را پس از دوران مورد نظر نسبت به دستگاه جدید رسم می‌کنیم.

یعنی ابتدا آن را روی محورهای مختصات رسم می‌کنیم سپس محورها را $\theta$ درجه همراه با بیضی دوران می‌دهیم.

ه) می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $x^۲ - ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^۲ - ۱۶\sqrt{۳}x - ۱۶y = ۰$ را معین کنیم. با دوران مناسب محورهای مختصات به نتیجه مطلوب می‌رسیم. $\theta$ مناسب از رابطه $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ بدست می‌آید در اینجا $c = ۳$ و $a = ۱$ ، $b = -۲\sqrt{۳}$ می‌باشند، پس $\tan ۲\theta = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۱-۳} = \sqrt{۳}$ و با توجه به اتحاد $۱ + \tan^۲ ۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta}$ بدست می‌آوریم $\cos ۲\theta = \frac{۱}{۲}$ و لذا از اتحادهای زیر مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آید:

$$\cos^۲\theta = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin^۲\theta = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲\theta) \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲}$$

حال در معادله مقطع مخروطی معادل x و y را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y' \\ y = \frac{۱}{۲}x' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}y' \end{cases}$$

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y')^۲ - ۲\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y')(\frac{۱}{۲}x' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}y') + ۳(\frac{۱}{۲}x' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}y')^۲ - ۱۶\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y')$$
$$-۱۶(\frac{۱}{۲}x' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}y') = ۰$$

معادله حاصل سهمی است.

$$۴y'^۲ - ۳۲x' = ۰ \Rightarrow y'^۲ = ۸x'$$

رأس آن $(۰ , ۰)$ ، کانون آن $F = (۲ , ۰)$ ، خط هادی آن $x = -۲$ و محور تقارن محور x هاست. این سهمی را رسم می‌کنیم سپس همراه با محور مختصات به اندازهٔ $\theta$ که در اینجا $۳۰^\circ$ است دوران می‌دهیم.

و) می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $x^۲ + ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^۲ + ۸\sqrt{۳}x - ۸y = ۰$ را معین کنیم. به اندازهٔ $\theta$ دوران مناسب می‌دهیم که $\theta$ را از رابطه $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ به دست می‌آوریم:

$$a = ۱, b = ۲\sqrt{۳}, c = ۳$$

$$\tan ۲\theta = \frac{۲\sqrt{۳}}{۱-۳} = -\sqrt{۳}, ۱ + \tan^۲ ۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} \Rightarrow \cos ۲\theta = -\frac{۱}{۲}$$

و از اتحادهای زیر داریم:

$$\cos^۲\theta = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲}$$

$$\sin^۲\theta = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲\theta) \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حال در معادله داده شده معادل x و y را پس از دوران قرار می‌دهیم:

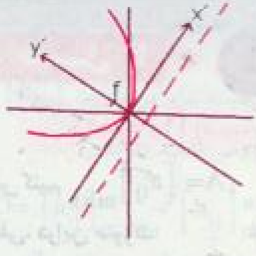
$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y' \\ y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y' \end{cases}$$

$$(\frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y')^۲ + ۲\sqrt{۳}(\frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y')(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y') + ۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y')^۲ + ۸\sqrt{۳}(\frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y') - ۸(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y') = ۰$$

معادله حاصل یک سهمی است:

$$۴x'^۲ - ۱۶y' = ۰ \Rightarrow x'^۲ = ۴y'$$

رأس آن : (۰ , ۰) ، کانون آن (۱ , ۰)=F و خط هادی آن ۱-=y می‌باشد محور تقارن محور yها می‌باشد. این سهمی را رسم می‌کنیم سپس محورهای مختصات را ۶۰ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم.




**۳ـ فرض کنید معادلهٔ $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ داده شده است. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه‌ی دلخواه دوران می‌دهیم. اگر معادله بالا نسبت به دستگاه جدید دوران یافته به صورت $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$ بازنویسی شود، ثابت کنید:**

$$B^2-4AC=b^2-4ac$$

**از این‌جا نتیجه‌گیری کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله:**

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

**صدق می‌کنند به صورت زیر رده‌بندی می‌شوند:**

| نوع مکان هندسی | $b^2-4ac$ |
|---|---|
| تهی، نقطه، دایره، بیضی | منفی |
| تهی، یک خط، دو خط موازی، کل صفحه، سهمی | صفر |
| دو خط متقاطع، هذلولی | مثبت |

در معادلهٔ $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ، معادل x و y را در دستگاه مختصات جدید که دوران یافته به اندازه $\theta$ درجه می‌باشد را جایگذاری می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} x=\cos\theta x'-\sin\theta y' \\ y=\sin\theta x'+\cos\theta y' \end{cases}$$

معادله زیر حاصل می‌شود:

$$a(\cos\theta x'-\sin\theta y')^2+b(\cos\theta x'-\sin\theta y')(\sin\theta x'+\cos\theta y')+c(\sin\theta x'+\cos\theta y')^2$$
$$+d(\cos\theta x'-\sin\theta y')+e(\sin\theta x'+\cos\theta y')+f=0$$
$$(a\cos^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta)x'^2+(2(c-a)\sin\theta\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta))x'y'+$$
$$(a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta)y'^2+(d\cos\theta+e\sin\theta)x'+(e\cos\theta-d\sin\theta)y'+f=0$$

یعنی در معادله جدید $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$ داریم:

$$A=a\cos^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\sin^2\theta$$
$$B=2(c-a)\sin\theta\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$C=a\sin^2\theta-b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$$
$$D=d\cos\theta+e\sin\theta$$
$$E=e\cos\theta-d\sin\theta$$
$$F=f$$

کافی است مقادیر A و B و C را در رابطهٔ $B^2-4AC$ قرار دهیم به سادگی دیده می‌شود که:

$$B^2-4AC=b^2-4ac$$

# فصل ۴ ماتریس و دترمینان

## قضیه (۱) (صفحه‌ی ۹۹)

**فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ و $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ سه ماتریس هم‌مرتبه باشند و r و s دو عدد حقیقی. دراین صورت:**

۱) $A+B=B+A$ **(خاصیت جابه‌جایی جمع)**،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ **(خاصیت شرکت‌پذیری جمع)**،

۳) $A+O=O+A=A$،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=O$،

۵) $r(A+B)=rA+rB$،

۶) $(r+s)A=rA+sA$،

۷) $(rs)A=r(sA)$،

۸) $1A=A$.

**اثبات:** ۱) داریم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ به‌طوری که دو ماتریس A و B هم‌مرتبه‌اند بنابراین برای مجموع آنها داریم:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d_{ij}\right]_{m\times n}\Rightarrow\forall i,j\qquad d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\qquad(I)$$

$$B+A=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}+\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d'_{ij}\right]_{m\times n}\Rightarrow\forall i,j\qquad d'_{ij}=b_{ij}+a_{ij}\qquad(II)$$

از آن‌جاکه مقادیر $a_{ij}$ و $b_{ij}$ اعدادی حقیقی هستند پس داریم: $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ پس روابط (I) و (II) یکی هستند و به ازای هر i و j داریم: $d_{ij}=d'_{ij}$ بنابراین: $\left[d_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d'_{ij}\right]_{m\times n}$ پس $A+B=B+A$.

۲) داریم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ و $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ و هر سه ماتریس هم‌مرتبه هستند. قرار می‌دهیم:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d_{ij}\right]_{m\times n}=D$$

و همچنین قرار می‌دهیم:

$$B+C=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}+\left[c_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d'_{ij}\right]_{m\times n}=D'$$

حال مجموع‌های زیر را حساب می‌کنیم:

$$A+(B+C)=A+D'=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[d'_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+d'_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right]_{m\times n}\qquad(I)$$

$$(A+B)+C=D+c=\left[d_{ij}\right]_{m\times n}+\left[c_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d_{ij}+c_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right]_{m\times n}\qquad(II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) داریم:

$$\left[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$\left[a_{ij}+d'_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d_{ij}+c_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[d'_{ij}\right]_{m\times n}=\left[d_{ij}\right]_{m\times n}+\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$A+D'=D+C\qquad\qquad A+(B+C)=(A+B)+C$$

* توجه داشته باشید که مقادیر $a_{ij}$، $b_{ij}$، $c_{ij}$، $d_{ij}$ و $d'_{ij}$ همگی حقیقی‌اند و تمام خصوصیات اعداد حقیقی همچون شرکت‌پذیری و جابه‌جایی در مورد آنها صادق است.

۳) ماتریس $m\times n$، O که ماتریس صفر است، تمام درایه‌هایش صفر می‌باشند بنابراین داریم: $O=\left[h_{ij}\right]$ به‌طوری‌که به ازای هر j و i داریم: $h_{ij}=0$، ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نیز مفروض است. داریم:

$$A+O=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[h_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+h_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+0\right]=\left[a_{ij}\right]=A \qquad (I)$$

$$\left[a_{ij}+0\right]=\left[0+a_{ij}\right]=\left[h_{ij}+a_{ij}\right]=\left[h_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=O+A \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{از روابط (I) و (II) داریم:}} A+O=O+A=A$$

۴) داریم ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، قرینهٔ A که ماتریس (A-) می‌باشد به صورت $(-A)=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$ می‌باشد. پس:

$$A+(-A)=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+(-a_{ij})\right]_{m\times n}=\left[0\right]_{m\times n}=0 \qquad (I)$$

$$(-A)+A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[(-a_{ij})+a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[0\right]_{m\times n}=0 \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{از روابط (I) و (II) داریم:}} A+(-A)=O=(-A)+A$$

۵) r یک عدد حقیقی است داریم: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$، در مورد ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس روابط زیر را داریم:

$$rA=r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n} \text{ و } rB=r\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[rb_{ij}\right]_{m\times n}$$

همچنین برای جمع دوماتریس A و B داریم:

$$A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[(a_{ij}+b_{ij})\right]_{m\times n}$$

پس می‌توان با جایگذاری مقادیر بالا به نتایج زیر رسید:

$$r(A+B)=r\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[r(a_{ij}+b_{ij})\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}+rb_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}+\left[rb_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$=rA+rB\Rightarrow r(A+B)=rA+rB$$

۶ـ داریم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و r و s اعدادی حقیقی‌اند به سادگی از تعریف ضرب عدد حقیقی در ماتریس استفاده می‌کنیم:

$$(r+s)A=(r+s)\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[(r+s)a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}+sa_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}+\left[sa_{ij}\right]_{m\times n}=r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+s\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=rA+sA$$

۷) داریم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، r و s اعدادی حقیقی‌اند با توجه به ضرب عدد حقیقی در ماتریس داریم:

$$(rs)A=(rs)\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[(rs)a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[r(sa_{ij})\right]_{m\times n}=r\left[sa_{ij}\right]_{m\times n}=r(s\left[a_{ij}\right]_{m\times n})$$

$$=r(sA)\Rightarrow(rs)A=r(sA)$$

۸) داریم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ طبق تعریف ضرب عدد حقیقی در یک ماتریس داریم:

$$1A=1\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[(1)(a_{ij})\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=A\Rightarrow 1A=A$$

## تمرین (صفحه‌ی ۱۱۰)

**۱ـ ماتریس‌های زیر را به صورت آرایهٔ مستطیلی بنویسید.**

الف) $\left[i+j^{2}\right]_{2\times 2}$ ب) $\left[ij\right]_{3\times 3}$

ج) $\left[i^{2}+j^{2}\right]_{2\times 2}$ د) $\left[2i+3j\right]_{3\times 3}$

الف) در اینجا ماتریس ۲×۲ است بنابراین ۲ , ۱=i و ۲ , ۱=j به ترتیب درایه‌های ماتریس را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{11}=1+(1)^{2}=2$$

$$\begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{12}=1+(2)^{2}=5$$

$$\begin{cases} i=2 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{21}=2+(1)^{2}=3$$

$$\begin{cases} i=2 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{22}=2+(2)^{2}=6$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ب) در اینجا ماتریس ۳×۳ می‌باشد پس داریم: ۳ , ۲ , ۱=i و ۳ , ۲ , ۱=j به این ترتیب می‌توان درایه‌های ماتریس مورد نظر را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{11}=(1)(1)=1 \quad , \quad \begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{12}=(1)(2)=2$$

$$\begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{13}=(1)(3)=3 \quad , \quad \begin{cases} i=2 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{21}=(2)(1)=2$$

$$\begin{cases} i=2 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{22}=(2)(2)=4 \quad , \quad \begin{cases} i=2 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{23}=(2)(3)=6$$

$$\begin{cases} i=3 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{31}=(3)(1)=3 \quad , \quad \begin{cases} i=3 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{32}=(3)(2)=6$$

$$\begin{cases} i=3 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{33}=(3)(3)=9$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ج) در اینجا ماتریس ۳×۲ می‌باشد پس داریم ۲ , ۱=i و ۳ , ۲ , ۱=j به این ترتیب می‌توان درایه‌های ماتریس مورد نظر را محاسبه کرد:

$$\begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{11}=(1)^2+(1)^2=2 \quad , \quad \begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{12}=(1)^2+(2)^2=5$$

$$\begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{13}=(1)^2+(3)^2=10 \quad , \quad \begin{cases} i=2 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{21}=(2)^2+(1)^2=5$$

$$\begin{cases} i=2 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{22}=(2)^2+(2)^2=8 \quad , \quad \begin{cases} i=2 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{23}=(2)^2+(3)^2=13$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

د) در اینجا ماتریس ۳×۳ پس برای i و j داریم: ۳ , ۲ , ۱=i و ۳ , ۲ , ۱=j بنابراین می‌توان درایه‌های ماتریس مورد نظر را به مدت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{11}=2(1)+3(1)=5 \quad \begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{12}=2(1)+3(2)=8$$

$$\begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{13}=2(1)+3(3)=11 \quad \begin{cases} i=2 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{21}=2(2)+3(1)=7$$

$$\begin{cases} i=2 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{22}=2(2)+3(2)=10 \quad \begin{cases} i=2 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{23}=2(2)+3(3)=13$$

$$\begin{cases} i=3 \\ j=1 \end{cases} \Rightarrow a_{31}=2(3)+3(1)=9 \quad \begin{cases} i=3 \\ j=2 \end{cases} \Rightarrow a_{32}=2(3)+3(2)=12$$

$$\begin{cases} i=3 \\ j=3 \end{cases} \Rightarrow a_{33}=2(3)+3(3)=15$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

**۲ـ عبارات زیر را محاسبه کنید.**

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

الف)

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۸ \\ ۵ & -۳ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۶ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۱-۰ & ۳+۴-۱ & ۱+۸-۶ \\ ۰+۵-۵ & ۱-۳-۶ & ۵+۴-۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۳ \\ ۰ & -۸ & ۲ \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۲ & ۰ \\ -۲ & ۱۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۶ & -۱۲ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۳+۱۲-۶ & ۹+۰+۱۲ \\ ۱-۲-۳ & -۲+۱۰-۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۲۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

ج)

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۹ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+۹ & ۳+۰ & ۶+۳ \\ ۴+۰ & ۲-۱ & ۷+۳ \\ ۰+۴ & ۳+۹ & ۵+۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۳ & ۹ \\ ۴ & ۱ & ۱۰ \\ ۴ & ۱۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

**۳ـ فرض کنید** $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ **یک ماتریس ۲×۳ مانند C را طوری پیدا کنید که** $A+B-C=O_{۳\times۲}$

ماتریس‌های $O_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$ ، $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} \\ C_{۲۱} & C_{۲۲} \\ C_{۳۱} & C_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times۲}$ را در رابطه $A+B-C=O_{۳\times۲}$ جایگذاری می‌کنیم تا مقادیر مجهول $C_{ij}$ ها را بیابیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} \\ C_{۲۱} & C_{۲۲} \\ C_{۳۱} & C_{۳۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱-۳-C_{۱۱} & ۲-۲-C_{۱۲} \\ ۳+۱-C_{۲۱} & ۴-۵-C_{۲۲} \\ ۵+۴-C_{۳۱} & ۶+۳-C_{۳۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲-C_{۱۱} & -C_{۱۲} \\ ۴-C_{۲۱} & -۱-C_{۲۲} \\ ۹-C_{۳۱} & ۹-C_{۳۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب ماتریس C به دست می‌آید:

$$-۲-C_{۱۱}=۰ \Rightarrow C_{۱۱}=-۲$$
$$-C_{۱۲}=۰ \Rightarrow C_{۱۲}=۰$$
$$۴-C_{۲۱}=۰ \Rightarrow C_{۲۱}=۴$$
$$-۱-C_{۲۲}=۰ \Rightarrow C_{۲۲}=-۱$$
$$۹-C_{۳۱}=۰ \Rightarrow C_{۳۱}=۹$$
$$۹-C_{۳۲}=۰ \Rightarrow C_{۳۲}=۹$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \\ ۹ & ۹ \end{bmatrix}$$

**۴ـ قضیه ۱ را ثابت کنید.** اثبات این قضیه در صفحه (۵۶) آمده است.

**۵ـ حاصلضرب‌های زیر را به دست آورید.**

**الف)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **ب)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

با استفاده از تعریف ضرب ماتریس‌ها به سادگی حاصلضرب‌های داده شده را حساب می‌کنیم:

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}=\begin{bmatrix} (2)(1)+(3)(2)+(4)(3) \\ (1)(1)+(5)(2)+(6)(3) \end{bmatrix}_{2\times 1}=\begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}_{2\times 1}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix} (1)(3)+(2)(1)+(1)(-1) & (1)(-4)+(2)(5)+(1)(2) \\ (4)(3)+(0)(1)+(2)(-1) & (4)(-4)+(0)(5)+(2)(2) \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$=\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

**۶ـ اگر** $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **نشـــان دهید:** $AB=BA=O$ و $AC=A$ و $CA=C$.

$AB=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} 2(-1)-3(1)-5(-1) & 2(3)-3(-3)-5(3) & 2(5)-3(-5)-5(5) \\ -1(-1)+4(1)+5(-1) & -1(3)+4(-3)+5(3) & -1(5)+4(-5)+5(5) \\ 1(-1)-3(1)-4(-1) & 1(3)-3(-3)-4(3) & 1(5)-3(-5)-4(-1) \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=O$

$BA=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix} -1(2)+3(-1)+5(-3) & -1(-3)+3(4)+5(-3) & -1(-5)+3(5)+5(-4) \\ 1(2)-3(-1)-5(-3) & 1(-3)-3(4)-5(-3) & 1(-5)-3(5)-5(-4) \\ -1(2)+3(-1)+5(-3) & -1(-3)+3(4)+5(-3) & -1(-5)+3(5)+5(-4) \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=O$

$\Rightarrow AB=BA=O$

$$AC=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (2)(2)+(-3)(1)+(-5)(1) & (2)(-2)+(-3)(3)+(-5)(-2) & (2)(-4)+(-3)(4)+(-5)(3) \\ (-1)(2)+(4)(-1)+(5)(1) & (-1)(-2)+(4)(3)+(5)(-2) & (-1)(-4)+(4)(4)+(5)(3) \\ (1)(2)+(-3)(-1)+(-4)(1) & (1)(-2)+(-3)(3)+(-4)(-2) & (1)(-4)+(-3)(4)+(-4)(3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}=A$$

$$CA=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (2)(2)+(-2)(-1)+(-4)(1) & (2)(-3)+(-2)(4)+(-4)(-3) & (2)(-5)+(-2)(5)+(-4)(4) \\ (-1)(2)+(3)(-1)+(4)(1) & (-1)(-3)+(3)(4)+(4)(-3) & (-1)(-5)+(3)(5)+(4)(4) \\ (1)(2)+(-2)(-1)+(3)(1) & (1)(-3)+(-2)(4)+(3)(-3) & (1)(-5)+(-2)(5)+(3)(4) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}=C$$

**۷ـ فرض کنید a ، b ، c و d چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است.**

$$A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

**بنابراین، یک واحد از a ، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس درنظر بگیرید و شرح دهیدکه چرا $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$ . آیا می‌توانید بدون محاسبه مستقیم $A^2$ را پیدا کنید.**

با توجه به آنچه در زیر می‌آید، می‌بینیم که $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$ :

به عنوان مثال ستون اول رادر نظر می‌گیریم. هر یک از درایه‌های روی ان را که در مؤلفه $a_{11}$ ضرب کنیم حاصل همان مولفه خواهد شد. یعنی: $a_{i1}a_{11}=a_{i1}$

در مورد سطر اول نیز همین‌گونه است: هر یک از درایه‌های روی آن را که در مولفه $a_{11}$ ضرب کنیم خود آن مولفه را می‌دهد یعنی: $a_{11}a_{1j}=a_{1j}$

در مورد کلیه ستون‌ها و سطرها این اتفاق می‌افتد. ماتریس موردنظر شبیه جدول ضرب است مثلاً از قطع ستون سوم و سطر دوم درایهٔ $a_{23}$ به دست می‌آید. که حاصلضرب $\frac{1}{3}\times 6$ است. یعنی: $a_{21}a_{13}=a_{23}$

از آنجایی که $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$ برای محاسبه درایه سطر iام و ستون jام ماتریس $A^2$ که آن‌را $b_{ij}$ می‌نامیم، روابط زیر را داریم:

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{4}a_{ij}=4a_{ij}\Rightarrow A^2=4A$$

بنابراین به سادگی درایه‌های ماتریس $A^2$ از رابطهٔ $b_{ij}=4a_{ij}$ به دست می‌آیند و داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}4(1) & 4(3) & 4(6) & 4(24)\\ 4(\frac{1}{3}) & 4(1) & 4(2) & 4(8)\\ 4(\frac{1}{6}) & 4(\frac{1}{2}) & 4(1) & 4(4)\\ 4(\frac{1}{24}) & 4(\frac{1}{8}) & 4(\frac{1}{4}) & 4(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 12 & 24 & 96\\ \frac{4}{3} & 4 & 8 & 32\\ \frac{2}{3} & 2 & 4 & 16\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\end{bmatrix}$$

**۸ـ کارخانه‌ای سه محصول a، b و c را به دو بازار m و n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس:**

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}a & b & c\end{array}\\ \begin{array}{c}m\\ n\end{array} & \begin{bmatrix}5000 & 2000 & 1500\\ 2000 & 2000 & 1000\end{bmatrix}\end{array}$$

**داده شده است. ماتریس‌های** $B=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}1/8\\3/5\\2/5\end{bmatrix}$ **به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از a، b و c را نشان می‌دهند. درایه‌های هر یک از ماتریس‌های AB، AC و AB-AC را تعبیر کنید.**

درایه‌های ماتریس AB، قیمت فروش کل محصولات را در یک سال به دو بازار m و n نشان می‌دهد.

بازار m به میزان $3\times1500+4\times2000+2\times5000$ به کارخانه بابت خرید سه محصول a، b و c به قیمت‌های ۲، ۴ و ۳ پرداخت کرده است و این مقدار، درایهٔ سطر دوم، ستون اول ماتریس AB می‌باشد:

$$AB=\begin{bmatrix}5000 & 2000 & 1500\\ 2000 & 2000 & 1000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5000\times2+2000\times4+1500\times3\\ 2000\times2+2000\times4+1000\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22500\\15000\end{bmatrix}$$

درایه‌های ماتریس AC قیمت تمام شده محصولات فوخته شده، به دو بازار n و m را برای کارخانه نمایش می‌دهد. قیمت تمام شده محصولات فروخته شده به بازار m برای کارخانه، میزان $2/5\times1500+3/5\times2000+1/8\times5000$ می‌باشد و این عدد، درایهٔ سطر اول، ستون اول ماتریس AC را نشان می‌دهد. قیمت تمام شده محصولات فروخته شده به بازار n نیز $2/5\times1000+2/5\times2000+1/8\times2000$ می‌باشد و این درایهٔ سطر دوم، ستون اول ماتریس AC است:

$$AC=\begin{bmatrix}5000 & 2000 & 1500\\ 2000 & 2000 & 1000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/8\\3/5\\2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5000\times1/8+2000\times3/5+1500\times2/5\\ 2000\times1/8+2000\times3/5+1000\times2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19750\\13100\end{bmatrix}$$

برای محاسبه سود حاصل از فروش این محصولات به دو بازار m و n قیمت کل تمام شده از قیمت کل فروش کم می‌کنیم. بنابراین:

سود حاصل از فروش محصول به بازار m برای کارخانه به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$24000-19750=4250$$

و سود حاصل از فروش محصول به بازار n برای کارخانه به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$15000-12100=1900$$

و این اعداد همان درایه‌های ماتریس AB-AC می‌باشند:

$$AB-AC=\begin{bmatrix}24000\\15000\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}19750\\13100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4250\\1900\end{bmatrix}$$

**۹ـ اگر** $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ **نشان دهید** $A^2-4I-5I_2=O$

ماتریس‌های $A^2$، $4A$ و $I_3$ را محاسبه می‌کنیم و با جایگذای در رابطه مذکور به صحت آن پی می‌بریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

$$4A=4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}$$

$$5I_3=5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$A^2-4A-5I_3=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-4-5&8-8-0&8-8-0\\8-8-0&9-4-5&8-8-0\\8-8-0&8-8-0&9-4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O$$

**۱۰ـ اگر** $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ **مطلوب است محاسبه** $A^{10}$

برای محاسبه $A^{10}$ باید ده بار ماتریس A را در خود ضرب کنیم اما این راه حل بسیار طولانی است بنابراین به کشف رابطه‌ای در حین ضرب‌های متوالی A در خودش می‌پردازیم تا با استفاده از آن محاسبه $A^{10}$ را ساده‌تر کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌نمایید $A^2=I_2$ بنابراین به سادگی داریم:

$$A^{10}=(A^2)^5=(I_2)^5=I_2$$

پس:

$$A^{10}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

**۱۱ـ اگر** $A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}$ **، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n،** $A^n=\begin{bmatrix}n+1&-n\\n&-n+1\end{bmatrix}$

از روش استقرا استفاده می‌کنیم:

برای $n=1$ رابطه برقرار است:

$$A^1=A=\begin{bmatrix}1+1&-1\\1&-1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

از آنجایی که ما احتیاج به محاسبه $A^n$ ها به ازای هر عدد طبیعی n داریم، یکبار هم برای k=۲ صحت رابطه را می‌سنجیم پس برای n=2 داریم:

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2+1 & -2\\ 2 & -2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

بنابراین رابطه برای k=۲ نیز برقرار است فرض می‌کنیم برای n=k نیز برقرار باشد پس داریم:

$$A^k=\begin{bmatrix}k+1 & -k\\ k & -k+1\end{bmatrix}$$

حال ثابت می‌کنیم برای n=k+۱ نیز رابطه برقرار می‌باشد:

$$A^{k+1}=A^k.A=\begin{bmatrix}k+1 & -k\\ k & -k+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(k+1)+1 & -(k+1)\\ k+1 & -(k+1)+1\end{bmatrix}$$

بنابراین، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$A^n=\begin{bmatrix}n+1 & -n\\ n & -n+1\end{bmatrix}$$

**۱۲ـ اگر** $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$**، به‌کمک محاسبه توان‌های مختلف A، نشان دهید عدد طبیعی n موجود است که** $A^n=O$

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

به ازای n=۳ داریم: $A^n=O$

**توجه:** ماتریس‌هایی با این خصوصیت که به ازای یک عدد طبیعی n، $A^n=O$ را ماتریس پوچ توان گوییم.

**۱۳ـ اگر** $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$**، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n،** $A^n=(2^n-1)A-2(2^{n-1}-1)I_2$

با جایگذاری ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ و $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ در رابطه: $A^n=(2^n-1)A-2(2^{n-1}-1)I_2$

$$A^n=(2^n-1)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}-(2^n-2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n-1 & 0\\ 2^n-1 & 2^{n+1}-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2^n-2 & 0\\ 2^n-2 & 2^{n+2}-4\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2^n-1 & 2^n\end{bmatrix}$$

حال با استفاده از روش استقراء داریم:

برای n=۲ رابطه برقرار است:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2^2-1 & 2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

فرض کنیم برای n=k نیز رابطه برقرار باشد پس داریم:

$$A^k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2^k-1 & 2^k\end{bmatrix}$$

حال ثابت می‌کنیم برای n=k+۱ نیز رابطه برقرار است:

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2^k-1 & 2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2^k-1+2^k & 2^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2^{k+1}-1 & 2^{k+1}\end{bmatrix}$$

بنابراین برای هر عدد طبیعی n داریم:
$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n \end{bmatrix}$$

**۱۴ـ ویژگی‌های ۱ ، ۲ و ۴ از قضیه ۵ را ثابت کنید.**

اثبات ویژگی ۱:
$$(A+B)^t=A^t+B^t$$
$$\begin{cases} A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \\ A^t=\left[a_{ji}\right]_{n\times n} \end{cases},\begin{cases} B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n} \\ B^t=\left[b_{ji}\right]_{n\times n} \end{cases}$$
$$(A+B)=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}+\left[b_{ij}\right]_{n\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{n\times n}=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$(A+B)^t=\left[c'_{ij}\right]_{n\times n}$$
به‌طوری‌که به ازای هر i و j خواهیم داشت $c_{ij}=c_{ji}$ به سادگی دیده می‌شود:
$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$
$$c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$$
$$\Rightarrow(A+B)^t=\left[c_{ji}\right]_{n\times n}=\left[a_{ji}+b_{ji}\right]_{n\times n}=\left[a_{ji}\right]_{n\times n}+\left[b_{ji}\right]_{n\times n}=A^t+B^t$$

اثبات ویژگی ۲: $(rA)^t=rA^t$

از آنجا که r یک عدد حقیقی است ماتریس rA راجذب عدد حقیقی r در تک‌تک درایه‌های ماتریس A حاصل می‌شود پس داریم.

**قضیه ۵:** فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشند و r یک عدد حقیقی در این صورت:

۱) $(A+B)^t=A^t+B^t$

۲) $(rA)^t=rA^t$

۳) $(AB)^t=B^t A^t$

۴) $(A^t)^t=A$

اثبات ویژگی ۳ در کتاب درسی آمده است ما به اثبات ویژگی‌های ۱، ۲ و ۴ می‌پردازیم:

۱) $(A+B)^t=A^t+B^t$

**اثبات:**
$$\begin{matrix} A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \\ A^t=\left[a'_{ij}\right]_{n\times n} \end{matrix}\Rightarrow a'_{ij}=a_{ji},\begin{matrix} B=\left[b_{ij}\right]_{n\times n} \\ B^t=\left[b'_{ij}\right]_{n\times n} \end{matrix}\Rightarrow b'_{ij}=b_{ji}$$
$$(A+B)=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}+\left[b_{ij}\right]_{n\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{n\times n}=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$(A+B)^t=\left[c'_{ij}\right]_{n\times n}$$
$$c'_{ij}=c_{ji},c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}\Rightarrow c'_{ij}=a_{ji}+b_{ji}$$
$$\Rightarrow(A+B)^t=\left[c'_{ij}\right]_{n\times n}=\left[a_{ji}+b_{ji}\right]_{n\times n}=\left[a_{ji}\right]_{n\times n}+\left[b_{ji}\right]_{n\times n}=A^t+B^t$$

۲) $(rA)^t=rA^t$

**اثبات:** از آنجاکه r یک عدد حقیقی است ماتریس rA از ضرب عددحقیقی، در تک‌تک درایه‌های ماتریس A حاصل می‌شود پس داریم:

$rA=r\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{n\times n}$

$(rA)^t=(\left[ra_{ij}\right]_{n\times n})^t=\left[ra_{ji}\right]_{n\times n}=r\left[a_{ji}\right]_{n\times n}=rA^t$

۴) $(A^t)^t=A$

**اثبات:** ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ و $A^t=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$ اگر ماتریس $(A^t)^t=\left[d_{ij}\right]_{n\times n}$ باشد می‌خواهیم ثابت کنیم به ازای هر i و j، $d_{ij}=a_{ij}$

از آنجاکه به ازای هر i و j داریم $c_{ij}=a_{ji}$ پس می‌توان $(A^t)^t$ را به این صورت محاسبه کرد:

$A^t=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}\Rightarrow(A^t)^t=\left[c_{ji}\right]_{n\times n},c_{ji}=a_{ij}$

$\Rightarrow d_{ij}=c_{ji}=a_{ij}\Rightarrow(A^t)^t=A$

**۱۵ـ اگر $AB=BA$ که A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ یا ۳ هستند و هر دو متقارن یا هر دو پادمتقارن، ثابت کنید AB متقارن است.**

از قضیه ۵ ویژگی ۳ داریم:

(I) $(AB)^t=B^tA^t$

اگر A و B هر دو متقارن باشند داریم: $A^t=A$ و $B^t=B$، این روابط را در (I) جایگذاری می‌کنیم پس:

$(AB)^t=BA$

طبق فرض داریم $AB=BA$ بنابراین: $(AB)^t=BA$ و این ویژگی نشان می‌دهد AB متقارن است. اگر A و B هردو پادمتقارن باشند داریم: $A^t=-A$ و $B^t=-B$، این روابط را در (I) جایگذاری می‌کنیم پس:

$(AB)^t=(-B)(-A)=BA$

طبق فرض $AB=BA$ بنابراین $(AB)^t=AB$ و این نشان می‌دهد که AB متقارن است.

**۱۶ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۱&۳\\۴&۱&۲\end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسید.**

هر ماتریس مربعی از مرتبه n را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشت. در مورد ماتریس A که مربعی از مرتبه ۳ است. داریم:

$$(I)\ \frac{۱}{۲}(A+A^t)=\frac{۱}{۲}\left[\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۱&۳\\۴&۱&۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۲&۴\\۱&۱&۱\\۱&۳&۲\end{bmatrix}\right]=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲&۳&۵\\۳&۲&۴\\۵&۴&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&\frac{۳}{۲}&\frac{۵}{۲}\\\frac{۳}{۲}&۱&۲\\\frac{۵}{۲}&۲&۲\end{bmatrix}$$

یک ماتریس متقارن است و همچنین:

$$(II)\ \frac{۱}{۲}(A-A^t)=\frac{۱}{۲}\left[\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۱&۳\\۴&۱&۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۲&۴\\۱&۱&۱\\۱&۳&۲\end{bmatrix}\right]=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۰&-۱&-۳\\۱&۰&۲\\۳&-۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-\frac{۱}{۲}&-\frac{۳}{۲}\\\frac{۱}{۲}&۰&۱\\\frac{۳}{۲}&-۱&۰\end{bmatrix}$$

یک ماتریس پادمتقارن است. حال داریم:

$A=\frac{۱}{۲}(A+A^t)+\frac{۱}{۲}(A-A^t)$

پس توانستیم A را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۲} & \frac{۵}{۲} \\ \frac{۳}{۲} & ۱ & ۲ \\ \frac{۵}{۲} & ۲ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & ۰ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

**۱۷ـ فرض کنید F محیط و درون دایرهٔ $(x-۱)^۲+y^۲=۴$ باشد:**

$$F=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in R^۲/(x-۱)^۲+y^۲\le ۴\right\}$$

**ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ در اثر روی F ، F را به چه شکل هندسی تبدیل می‌کند؟**

عضو دلخواهی از F چون $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم از اثر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ روی آن داریم:

$$AX=X'\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۲x \\ ۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

اعضای F در رابطه $(x-۱)^۲+y^۲\le ۴$ صدق می‌کنند از اثر A روی F به دست آورده‌ایم که:

$$x'=۲x,y'=۴y\Rightarrow x=\frac{x'}{۲},y=\frac{y'}{۴}$$

حال این نقاط باید در وسط $(x-۱)^۲+y^۲\le ۴$ صدق کنند پس داریم:

$$(\frac{x'}{۲}-۱)^۲+(\frac{y'}{۴})^۲\le ۴\Rightarrow(x'-۲)^۲+(\frac{y'}{۲})^۲\le ۱۶$$

ماتریس A ، F را به بیضی تبدیل می‌کند.

**۱۸ـ برای زاویه ثابت داده شده $\theta$ و عدد طبیعی n ، ثابت کنید $R_\theta^n=R_{n\theta}$ ، یعنی:**

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

به استقراء ثابت می‌کنیم:

به ازای n=۲ قاعده زیر برقرار است:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos^۲\theta-\sin^۲\theta & -۲\sin\theta\cos\theta \\ ۲\sin\theta\cos\theta & \cos^۲\theta-\sin^۲\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos ۲\theta & -\sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & \cos ۲\theta \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم به ازای n=k قاعده زیر برقرار باشد پس داریم:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

حال ثابت می‌کنیم به ازای n=k+۱ نیز قاعده بالابرقرار است:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+۱}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+۱}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos (k+۱)\theta & -\sin (k+۱)\theta \\ \sin (k+۱)\theta & \cos (k+۱)\theta \end{bmatrix}$$

ثابت شد.

**۱۹ـ به کمک تمرین قبل** $\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\ ۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}^{۶۰۰}$ **را محاسبه کنید.**

می‌دانیم: $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲},\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ماتریس $\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\ ۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}$ را می‌توان به صورت $۲\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$ بازنویسی کرد یعنی:

$$\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\ ۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\ ۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}^{۶۰۰}=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}^{۶۰۰}$$

$$=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{۲} & -\sin\frac{\pi}{۶}\\ \sin\frac{\pi}{۶} & \cos\frac{\pi}{۶}\end{bmatrix}^{۶۰۰}=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}\cos(۶۰۰\times\frac{\pi}{۶}) & -\sin(۶۰۰\times\frac{\pi}{۶})\\ \sin(۶۰۰\times\frac{\pi}{۶}) & \cos(۶۰۰\times\frac{\pi}{۶})\end{bmatrix}$$

$$=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}\cos(۱۰۰\pi) & -\sin(۱۰۰\pi)\\ \sin(۱۰۰\pi) & \cos(۱۰۰\pi)\end{bmatrix}=۲^{۶۰۰}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲^{۶۰۰} & ۰\\ ۰ & ۲^{۶۰۰}\end{bmatrix}$$

## قضیه (صفحه‌ی ۱۱۷)

**فرض کنیم** $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ **و** $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۳}$ **دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت** $|AB|=|A|\,|B|$

**اثبات:** دوماتریس A و B را با درایه‌هایشان نمایش می‌دهیم و سپس مقادیر $|A|$ و $|B|$ و $|AB|$ را حساب می‌کنیم:

$$a=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳}\\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+a_{۱۳}b_{۳۱} & a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲}+a_{۱۳}b_{۳۲} & a_{۱۱}b_{۱۳}+a_{۱۲}b_{۲۳}+a_{۱۳}b_{۳۳}\\ a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱}+a_{۲۳}b_{۳۱} & a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۲}b_{۲۲}+a_{۲۳}b_{۳۲} & a_{۲۱}b_{۱۳}+a_{۲۲}b_{۲۳}+a_{۲۳}b_{۳۳}\\ a_{۳۱}b_{۱۱}+a_{۳۲}b_{۲۱}+a_{۳۳}b_{۳۱} & a_{۳۱}b_{۱۲}+a_{۳۲}b_{۲۲}+a_{۳۳}b_{۳۲} & a_{۳۱}b_{۱۳}+a_{۳۲}b_{۲۳}+a_{۳۳}b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

$|A|=a_{۱۱}(a_{۲۲}a_{۳۳}-a_{۲۳}a_{۳۲})-a_{۱۲}(a_{۲۱}a_{۳۳}-a_{۲۳}a_{۳۱})+a_{۱۳}(a_{۲۱}a_{۳۲}-a_{۲۲}a_{۳۱})$

$|B|=b_{۱۱}(b_{۲۲}b_{۳۳}-b_{۲۳}b_{۳۲})-b_{۱۲}(b_{۲۱}b_{۳۳}-b_{۲۳}b_{۳۱})+b_{۱۳}(b_{۲۱}b_{۳۲}-b_{۲۲}b_{۳۱})$

$|AB|=(a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+a_{۱۳}b_{۳۱})[(a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۲}b_{۲۲}+a_{۲۳}b_{۳۲})(a_{۳۱}b_{۱۳}+a_{۳۲}b_{۲۳}+a_{۳۳}b_{۳۳})$
$-(a_{۲۱}b_{۱۳}+a_{۲۲}b_{۲۳}+a_{۲۳}b_{۳۳})(a_{۳۱}b_{۱۲}+a_{۳۲}b_{۲۲}+a_{۳۳}b_{۳۲})]-(a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲}+a_{۱۳}b_{۳۲})$
$\left[(a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱}+a_{۲۳}b_{۳۱})(a_{۳۱}b_{۱۳}+a_{۳۲}b_{۲۳}+a_{۳۳}b_{۳۳})\right]+(a_{۱۱}b_{۱۳}+a_{۱۲}b_{۲۳}+a_{۱۳}b_{۳۳})$
$[(a_{۲۱}b_{۱۱}+a_{۲۲}b_{۲۱}+a_{۲۳}b_{۳۱})(a_{۳۱}b_{۱۲}+a_{۳۲}b_{۲۲}+a_{۳۳}b_{۳۲})$
$-(a_{۲۱}b_{۱۲}+a_{۲۲}b_{۲۲}+a_{۲۳}b_{۳۲})(a_{۳۱}b_{۱۱}+a_{۳۲}b_{۲۱}+a_{۳۳}b_{۳۱})]$

پس از محاسبه $|A||B|$ ومقایسه آن با $|AB|$ خواهیم داشت: $|AB|=|A||B|$

## تمرین (صفحه‌ی ۱۲۶)

**۱ـ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هر یک از سطرها و ستون‌ها پیدا کنید.**

**همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.**

$|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر اول به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(1)((-1)(-2)-(3)(5))+(-5)((2)(-2)-(3)(4))+(7)((2)(5)-(-1)(4))=165$$

$|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر دوم به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)((5)(-2)-(7)(5))+(-1)((1)(-2)-(7)(4))+(-3)((1)(5)-(5)(4))=165$$

$|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر سوم به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} =(4)((5)(3)-(-1)(7))+(-5)((1)(3)-(7)(2))+(-2)((1)(-1)-(5)(2))=165$$

$|A|$ را با بسط دادن نسبت به ستون اول به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} =(1)((-1)(-2)-(3)(5))+(-2)((5)(-2)-(7)(5))+(4)((5)(3)-(7)(-1))=165$$

$|A|$ را با بسط دادن نسبت به ستون دوم به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)((2)(-2)-(3)(4))+(-1)((1)(-2)-(7)(4))+(-5)((1)(3)-(7)(2))=165$$

$|A|$ را با بسط دادن نسبت به ستون سوم به دست می‌آوریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} =(7)((2)(5)-(-1)(4))+(-3)((1)(5)-(5)(4))+(-2)((1)(-1)-(5)(2))=165$$

$|A|$ را با روش ساروس به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{matrix}\Big| \Rightarrow$$

$$|A|=((1)(-1)(-2)+(5)(3)(4)+(7)(2)(5))-((7)(-1)(4)+(5)(2)(-2)+(1)(3)(5))=165$$

**توجه:** $|A|$ را به هر روشی که حساب کنیم مقداری یکسان به دست می‌آید.

**۲ـ به کمک بسط دادن یا روش ساروس مقدار دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.**

الف) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ب) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ج) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

الف) دترمینان قسمت (الف) را با استفاده از روش ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$=((-1)(1)(6)+(1)(4)(1)+(0)(2)(5))-((0)(1)(1)+(1)(2)(6)+(-1)(4)(5))=6$$

ب) دترمینان قسمت (ب) را با استفاده از بسط دادن روی سطر اول حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =(5)((0)(4)-(3)(1))-(-2)((6)(4)-(3)(-2))+(1)((6)(1)-(0)(-2))=51$$

ج) دترمینان قسمت (ج) را با بسط دادن روی ستون دوم ماسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=(0)((1)(-1)-(-1)(3))+(2)((-2)(-1)-(0)(3))+(0)((-2)(-1)-(0)(1))=4$$

**۳ـ قضیه ۲ را ثابت کنید.**

اثبات این قضیه در صفحه آمده است.

**۴ـ بدون بسط دادن و روش ساروس و تنها به کمک ویژگی‌های دترمینان، مقدار هر یک از دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.**

**الف)** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **ب)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **ج)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

**د)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ **ه)** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ **و)** $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

سطرها را با $R_i$ و ستون‌ها را $C_i$ نمایش می‌دهیم: الف)

الف)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2+3R_1 \longrightarrow R_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_1 \longrightarrow R_3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتورگیری کرد.}]{\text{می‌توان از سطر سوم عدد ۱۰ را}} 10 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

حال با بسط روی سطر سوم مقدار دترمینان به سادگی محاسبه‌می‌شود:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} =(10)(1)(1)(-1)=-10$$

ب)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2 \longrightarrow C_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1-C_3 \longrightarrow C_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_۲+۲C_۱ \to C_۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{vmatrix} \xrightarrow{C_۳-۶C_۲ \to C_۳} \begin{vmatrix} ۲ & ۵ & -۲۹ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{در ستون سوم از } (-۲۹)} (-۲۹) \begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۱-۲R_۲ \Rightarrow R_۱} (-۲۹) \begin{vmatrix} ۰ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{R_۱-۵R_۳ \Rightarrow R_۱} \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} (-۲۹)=(-۲۹)(۱)=-۲۹$$

حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ & ۶ \end{vmatrix}$ برابر ۲۹ـ می‌باشد.

ج)

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{R_۱-R_۳ \Rightarrow R_۱} \begin{vmatrix} ۰ & -۵ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۵ \\ ۱ & ۴ & ۰ \end{vmatrix} \xrightarrow{C_۲-۴C_۱ \Rightarrow C_۲}$$

$$\begin{vmatrix} ۰ & -۵ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سوم داریم}]{\text{به سادگی با بسط روی سطر}} (-۲۵+۶)=-۲۱$$

د)

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۴ & ۶ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{۳ فاکتور می‌گیریم}]{\text{در ستون سوم از}} ۳ \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۴ & ۶ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{C_۲+C_۱ \to C_۲}$$

$$۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱۰ & ۰ \\ ۵ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{C_۲-۴C_۳ \to C_۲} ۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱۰ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{در ستون سوم از عامل ۱۰ فاکتور}}$$

$$۳۰ \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{C_۱-۴C_۲ \to C_۱} ۳۰ \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{C_۱-۵C_۳ \to C_۱}$$

$$(۳۰) \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} =۳۰$$

حاصل دترمینان ۳۰ می‌باشد.

هـ)

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & ۰ \\ b & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{ستون اول و دوم را با هم}} - \begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix} =-(abc)$$

و)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{با هم جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{ستون اول و سوم را}} -\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ 0 & d & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{جابه‌جا می‌کنیم}]{\text{سطر اول و سوم را با هم}}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & c \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{را حساب کرد}]{\text{به سادگی می‌توان دترمینان}} = a(da-bc)$$

۵ـ به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها ثابت کنید:

الف)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

ب)

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

ج)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

د)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$$

هـ)

$$\begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

و)

$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

**توجه:** ستون $i$ ام را با $C_i$ و سطر $i$ ام را با $R_i$ نشان می‌دهیم.

الف)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3-C_1\Rightarrow C_3]{C_2-C_1\Rightarrow C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون سوم فاکتور می‌گیریم.}]{\text{از عامل } (y-x) \text{ در ستون دوم و عامل } (z-x) \text{ در}}$$

$$(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3-C_2\Rightarrow C_3} (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & y+x & z-y \end{vmatrix}$$

ب)

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2 \Rightarrow C_1} \begin{vmatrix} 1+x+y & y & z \\ x+1+y & 1+y & z \\ x+y & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_3 \Rightarrow C_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 1+x+y+z & 1+y & z \\ 1+x+y+z & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از عامل } 1+x+y+z \text{ در ستون اول}} (1+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & 1+y & z \\ 1 & y & 1+z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-R_1 \Rightarrow R_2]{R_3-R_1 \Rightarrow R_3} (1+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بنابراین}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = (1+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

ج)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \times z^2 \Rightarrow R_3]{R_1 \times 4x^2 \Rightarrow R_1,\ R_2 \times y^2 \Rightarrow R_2} \xrightarrow{\frac{1}{4x^2y^2z^2}} \begin{vmatrix} 4x^2 & 8x^3 & 4x^2yz \\ y^2 & y^3 & 2xzy^2 \\ z^2 & z^3 & 2xyz^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{در ستون سوم از عامل } 2xyz \text{ فاکتور}} \begin{vmatrix} 4x^2 & 8x^3 & 2x \\ y^2 & y^3 & y \\ z^2 & z^3 & z \end{vmatrix} \times \frac{2xyz}{4x^2y^2z^2} \xrightarrow[\text{از } z \text{ در سطر سوم فاکتور می‌گیریم}]{\text{از } 2x \text{ در سطر اول، از } y \text{ در سطر دوم و}}$$

$$\frac{4x^2y^2z^2}{4x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 2x & 4x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{می‌رسیم}]{\text{پس از جابه‌جایی ستون‌ها به نتیجه موردنظر}} \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

د)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2-R_3 \Rightarrow R_2]{R_1-R_2 \Rightarrow R_1} \begin{vmatrix} 0 & x-y & (x-y)(xy+zx+zy) \\ 0 & y-z & (y-z)(xy+zx+zy) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتورمی‌گیریم.} (y-z)]{\text{در سطراول از فاکتور } (x-y) \text{ در سطر سوم از فاکتور}} (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & xy+zx+zy \\ 0 & 1 & xy+zx+zy \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix}$$

حاصل دترمینان به دست آمده، صفر می‌باشد زیرا دارای دو سطر یکسان است. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$$

ه)
$$\begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2\times y\Rightarrow C_2 \\ C_3\times z\Rightarrow C_3}]{C_1\times x\Rightarrow C_1} \begin{vmatrix} xyz & yx^2 & zx^2 \\ xy^2 & xyz & zy^2 \\ xz^2 & yz^2 & xyz \end{vmatrix} \times \frac{1}{xyz}$$

تساوی مورد نظر به دست آمده:
$$\xrightarrow[\text{در سطر سوم فاکتور می‌گیریم}]{\text{از x در سطر اول، از y در سطر دوم و از z}} \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} yz & yx & zx \\ xy & xz & zy \\ xz & yz & xy \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y_2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

و)
$$\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2+R_3\Rightarrow R_1} \begin{vmatrix} 2x+2y+2z & x & y \\ 2x+2y+2z & 2x+y+z & y \\ 2x+2y+2z & x & x+2y+z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{مشترک فاکتور می‌گیریم}]{\text{در ستون اول از عامل}} 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 2x+y+z & y \\ 1 & x & x+2y+z \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1\Rightarrow R_3]{R_2-R_1\Rightarrow R_2}$$

$$2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x+y+z & 0 \\ 0 & 0 & x+y+z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

**۶ـ با درنظر گرفتن** $A=\begin{bmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{bmatrix}$ **و محاسبهٔ $AA^t$، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید.**

$$\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

به سادگی دیده می‌شود که ماتریس داده شده همان حاصلضرب دو ماتریس $A$ و $A^t$ است یعنی:

$$AA^t = \begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+y^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

طبق قضیه ۲ می‌دانیم $\left|AA^t\right| = |A|\,.\left|A^t\right|$ بنابراین:

$$|A| = \begin{vmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = y(-xz)-z(xy) = -2xyz$$

$$\left|A^t\right| = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = y(xz)-x(zy) = -2xyz$$

$$\left|AA^t\right| = |A|.\left|A^t\right| = (-2xyz).(-2xyz) = 4x^2y^2z^2$$

**۷ـ فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳×۳ مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس ۲×۳ در یک ماتریس ۳×۲ نوشت. ثابت کنید $|A|=0$**

**۸ـ فرض کنید λ و μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها، مقدار دترمینان ماتریس $A=\left[\lambda_i+\mu_j\right]_{3\times3}$ را محاسبه کنید.**

ماتریس A به صورت مقابل است که با استفاده از ویژگی‌های دترمینان به تعیین مقدار دترمینان آن می‌پردازیم:

$$A=\begin{vmatrix} \lambda_1+\mu_1 & \lambda_1+\mu_2 & \lambda_1+\mu_3 \\ \lambda_2+\mu_1 & \lambda_2+\mu_2 & \lambda_2+\mu_3 \\ \lambda_3+\mu_1 & \lambda_3+\mu_2 & \lambda_3+\mu_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{به جای ستون دوم، حاصل تفریق ستون سوم از ستون دوم را می‌گذاریم}]{\text{به جای ستون اول، حاصل تفریق ستون دوم از ستون اول را می‌گذاریم}} \begin{vmatrix} \mu_1-\mu_2 & \mu_2-\mu_3 & \lambda_1+\mu_3 \\ \mu_1-\mu_2 & \mu_2-\mu_3 & \lambda_2+\mu_3 \\ \mu_1-\mu_2 & \mu_2-\mu_3 & \lambda_3+\mu_3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{دوم فاکتور می‌گیریم}]{\text{از عامل }(\mu_1-\mu_2)\text{ در ستون اول و از عامل }(\mu_2-\mu_3)\text{ در ستون}} (\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda_1+\mu_3 \\ 1 & 1 & \lambda_2+\mu_3 \\ 1 & 1 & \lambda_3+\mu_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم حاصل تفریق سطر اول از سطر سوم را قرار می‌دهیم}]{\text{به جای سطر دوم حاصل تفریق سطر سوم از سطر دوم و به جای}} (\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda_1+\mu_3 \\ 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_1 \end{vmatrix} \Rightarrow = 0$$

دترمینان حاصل صفر می‌باشد.

**۹ـ فرض کنید $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ و $c=(c_1,c_2,c_3)$ بردارهایی از $R^3$ باشند. ثابت کنید:**

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**و به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها نتیجه بگیرید که $a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$ با توجه به این تمرین چه ارتباطی بین هندسه، هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی در جلد کتاب مشاهده می‌کنید.**

برای اثبات $a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ دو طرف را جداگانه محاسبه می‌کنیم تا به تساوی برسیم.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (I)$$

$$b\times c=(b_1,b_2,b_3)\times(c_1,c_2,c_3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=i\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow b\times c=\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$a.(b\times c)=(a_1,a_2,a_3).\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (II)$$

با مقایسه (I) و (II) داریم:

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$$
$$b.(c\times a)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$$

طبق آن‌چه در این مسئله ثابت شد داریم:

$$b.(c\times a)=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$b.(a\times b)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بنابر ویژگی‌های دترمینان به سادگی دیده می‌شود که دترمینان‌های بالا یکی هستند.
می‌دانیم وقتی در یک ماتریس جای دو سطر را عوض کنیم حاصل دترمینان قرینه می‌شود، در دترمینان‌های بالا دو بار جای سطرها با هم عوض شدند بنابراین در حاصل دترمینان، تغییری به وجود نیامده است.

**۱۰ـ اگر $A=(a_1,a_2)$ ، $B=(b_1,b_2)$ و $C=(c_1,c_2)$ رؤوس یک مثلث از صفحهٔ $R^2$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق مقدار زیر:**

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

با توجه به مختصات رئوس مثلث ABC می‌توان مساحت آن را به صورت $S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|.h$ محاسبه می‌شود که h ارتفاع وارد بر ضلع AB از نقطه C می‌باشد.

برای محاسبه ارتفاع h، فاصله نقطه $C=(c_1,c_2)$ از خط گذرا از نقطه‌های $A=(a_1,a_2)$ و $B=(b_1,b_2)$ را به دست می‌آوریم معادله خط گذرا از نقاط $A=(a_1,a_2)$ و $B=(b_1,b_2)$ به صورت:

$$\frac{y-a_2}{x-a_1}=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}\Rightarrow(y-a_2)(b_1-a_1)=(x-a_1)(b_2-a_1)$$

$$h=\frac{\left|(c_2-a_2)(b_1-a_1)-(c_1-a_1)(b_2-a_1)\right|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}=\frac{\left|a_1(a_2-b_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)\right|}{\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

همچنین داریم: $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ پس مساحت مثلث به صورت:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(a_1(a_2-b_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2))$$

است که این حاصل همان دترمینان داده شده در صورت مسئله می‌باشد.

**۱۱ـ نشان دهید** $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0$ **معادلهٔ خطی است که از نقاط (a , b) و (c , d) در $R^2$ می‌گذرد.**

دترمینان داده شده را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$x(b-d)-y(a-c)+1(ad-bc)=0$$
$$x(b-d)-y(a-c)+ad-bc=0$$

معادله خط گذرا از دو نقطه (a , b) و (c , d) به صورت زیر است:

$$\frac{y-b}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}\Rightarrow(y-b)(c-a)=(x-a)(d-b)$$
$$cy-ay-bc+ab=xd-bx-ad+ab$$
$$-y(a-c)-bc=-x(b-d)-ad\Rightarrow x(b-d)-y(a-c)+ad-bc=0$$

که این معادله همان حاصل دترمینان می‌باشد.

**۱۲ـ فرض کنید A و B دو ماتریس ۳×۳ باشندکه A متقارن است. ثابت کنید** $|A+B|=|A+B^t|$

ماتریس A متقارن است بنابراین داریم: $A^t=A$

می‌خواهیم ثابت کنیم: $|A+B|=|A+B^t|$

از آن‌جا که $A=A^t$ پس $A+B^t=A^t+B^t$ بنابراین: $|A+B^t|=|A^t+B^t|$

و چون $(A+B)^t=A^t+B^t$، پس: $|A+B^t|=|A^t+B^t|=|(A+B)^t|$

و طبق ویژگی ۸ دترمینان می‌دانیم، برای هر ماتریس ۲×۳ مانند A داریم $|A|=|A^t|$ از آن‌جا که A و B هر دو ماتریس‌های ۲×۳ هستند، حاصل‌جمع آنها نیز ماتریس ۳×۳ است پس داریم: $|A+B|=|A+B^t|$

بنابراین: $|A+B|=|A^t+B^t|=|A+B^t|\Rightarrow|A+B|=|A+B^t|$

**۱۳ـ فرض کنید A یک ماتریس پادمتقارن ۲×۳ باشد. ثابت کنید** $|A|=0$

اگر A یک ماتریس پادمتقارن باشد داریم: $A=-A^t$ و می‌دانیم: $|A|=|A^t|$

اما داریم: $|-A^t|=(-1)^3|A^t|=-|A^t|$

بنابراین: $|A|=|-A^t|=-|A^t|=-|A|\Rightarrow|A|=0$

**۱۴ـ مربع واحد، مربعی است با رووس به مختصات $\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} \circ \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ \circ \end{bmatrix}$. شکل هندسی F رامربع واحد در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که دترمینانی مخالف صفر دارد. روی F اثر کند چه شکلی در صفحه پدید می‌آورد؟ مساحت شکل جدید را محاسبه کنید.**

وقتی ماتریس A روی مربع واحد، رووس مشخص شده اثرمی‌کند، هر نقطه را به صورت زیر منتقل می‌کند:

تصویر نقطه $\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$ تحت اثر ماتریس A ، نقطه $\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$ می‌باشد. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$

تصویر نقطه $\begin{bmatrix} \circ \\ 1 \end{bmatrix}$ تحت اثر ماتریس A ، نقطه $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ می‌باشد. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \circ \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ تحت اثر ماتریس A ، نقطه $\begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}$ می‌باشد. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}$

تصویر نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ \circ \end{bmatrix}$ تحت اثر ماتریس A ، نقطه $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ می‌باشد. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$

شکل حاصل یک متوازی‌الاضلاع به رئوس $O=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix}$ در صفحه $R^2$ می‌باشد.

مساحت متوازی‌الاضلاع به قاعده، OA و ارتفاع h به صورت $S=\frac{1}{2}h.|OA|$ می‌باشد.

اما طول قاعده OA به صورت مقابل است: $|OA|=\sqrt{(\circ-a)^2+(\circ-c)^2}=\sqrt{a^2+c^2}$

ارتفاع h ، فاصلهٔ نقطه B از خط OA است پس لازم است معادلهٔ خط OA را بدانیم:

$$OA:(y-\circ)(a-\circ)=(x-\circ)(c-\circ) \Rightarrow ay=cx$$

پس ارتفاع h به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$h=\frac{|ad-cd|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

و از اینجا مساحت متوازی‌الاضلاع به صورت:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{|ad-cb|}{\sqrt{a^2+c^2}}\right).\sqrt{a^2+c^2}=\frac{1}{2}(|ad-cb|)$$

راه حل دیگر: طبق فرمول‌های بدست آمده در بخش ۱۰۳ مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل از بردارهای OA و OB به صورت: $S=\frac{1}{2}|OA\times OB|$ می‌باشد.

در اینجا داریم: $OA=(a,c,\circ)$ و $OB=(b,d,\circ)$ پس $S=\frac{1}{2}(ad-cb)$

# فصل ۵ دستگاه معادلات خطی

## تمرین‌ها (صفحه‌ی ۱۳۶)

**۱ـ وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.**

الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \circ \\ 1 & 1 & 1 \\ \circ & 2 & 1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & \circ \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

الف) وارون هر ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ به صورت $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ می‌باشد.

اما شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن هر ماتریس A این است که $|A|\neq 0$ در این قسمت وارون $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ موجود نمی‌باشد زیرا $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -12+12=0$

ب) وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1-8}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix}$$

ج) ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است، طی مراحل زیر وارون A قابل محاسبه است:

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

حال برای محاسبه $A^*$ به محاسبهٔ $A_{ij}$ ها می‌پردازیم:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

در این قسمت داریم:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow A^*=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱(-۱)-۱(۱)+۰(۲)=-۲$$

بنابراین:

$$A^{-۱}=\frac{-۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

د) با همان روش گفته شد در قسمت (ج) به محاسبه وارون ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ می‌پردازیم:

$$B^*=\begin{bmatrix} B_{۱۱} & B_{۲۱} & B_{۳۱} \\ B_{۱۲} & B_{۲۲} & B_{۳۲} \\ B_{۱۳} & B_{۲۳} & B_{۳۳} \end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{|B|}B^*$$

حال به محاسبه $B_{ij}$ ها می‌پردازیم:

$$B_{ij}=(-۱)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

$$B_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱ \qquad B_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۳$$

$$B_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۲ \qquad B_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۰$$

$$B_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-۱ \qquad B_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱$$

$$B_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}=-۲ \qquad B_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \end{vmatrix}=-۶$$

$$B_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}=-۵\Rightarrow B^*=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۳ & -۱ & -۶ \\ ۲ & ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۱(۱)-۲(۳)+۲(۲)=-۱$$

بنابراین:

$$B^{-۱}=\frac{۱}{|B|}B^*=-۱\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۳ & -۱ & -۶ \\ ۲ & ۱ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۶ \\ -۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

**۲- برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، ابتدا اعداد m ، n و r را طوری پیدا کنید که داشته باشیم ، $mA^۲+nA+rI=O$ سپس به کمک این رابطه $A^{-۱}$ را محاسبه کنید.**

ابتدا $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31&18\\12&7\end{bmatrix}$$

حال m ، n و r را طوری می‌یابیم که:

$$m\begin{bmatrix}31&18\\12&7\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}31m+5n+r&18m+3n\\12m+2n&7m+n+r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

پس از حل دستگاه زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases}31m+5n+r=0\\18m+3n=0\\12m+2n=0\\7m+n+r=0\end{cases}\Rightarrow r=r, m=-r, n=6r$$

یعنی به ازای هر r دلخواه $m=-r$ و $n=6r$ می‌باشند و در رابطه صدق می‌کنند پس:

$$-rA^2+6rA+rI=0$$

و از آن‌جا که r یک عدد حقیقی است با فرض $r\neq 0$ داریم:

$$-A^2+6A+I=0$$

$$-A^2+6A=-I\Rightarrow A^2-6A=I$$

حال با استفاده از این رابطه می‌توان به محاسبه $A^{-1}$ پرداخت:

حال طرفین رابطه را در $A^{-1}$ ضرب می‌کنیم پس:

$$A^{-1}.A^2-6A^{-1}A=A^{-1}$$

$$A-6I=A^{-1}$$

**۳ـ فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی وارون‌پذیر باشند و $\lambda$ یک عدد حقیقی غیرصفر، ثابت کنید:**

**الف)** $AB$ **وارون‌پذیر است و** $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

**ب)** $A^t$ **وارون‌پذیر است و** $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

**ج)** $\lambda A$ **وارون‌پذیر است و** $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

الف) از آن‌جا که B و A وارون‌پذیر هستند پس $|A|\neq 0$ و $|B|\neq 0$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم AB وارون‌پذیر است کافی است ثابت کنیم $|AB|\neq 0$ | می‌دانیم:

$$|AB|=|A|\,|B|\xrightarrow[|B|\neq 0 \text{ که}]{\text{از آنجا } |A|\neq 0}|AB|\neq 0$$

پس AB وارون‌پذیر است اگر وراون آن $(AB)^{-1}$ باشد پس داریم:

$$(AB)^{-1}(AB)=I$$

از سمت راست دو طرف رابطه را در $B^{-1}$ ضرب می‌کنیم پس:

$$(AB)^{-1}A=B^{-1}$$

حال از سمت راست دو طرف رابطه را در $A^{-1}$ ضرب می‌کنیم بنابراین:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

ب) برای آن‌که ثابت کنیم $A^t$ وارون‌پذیر است کافی است ثابت کنیم $|A^t|\neq 0$ می‌دانیم: $|A^t|=|A|$

از آن‌جا A وارون‌پذیر است پس $|A|\neq 0$ بنابراین $|A^t|\neq 0$ پس $A^t$ وارونپذیر است.

وارون $A^t$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$(A^t)^{-1}=\frac{1}{|A^t|}(A^t)^*\ \text{و}\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

$$\begin{matrix}|A^t|=|A|\\(A^t)^*=(A^*)^t\end{matrix}\longrightarrow(A^t)^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^*)^t=(\frac{1}{|A|}A^*)^t=(A^{-1})^t$$

ج) برای آنکه ثابت کنیم $\lambda A$ وارون‌پذیر است کافی است ثابت کنیم $|\lambda A| \neq 0$

از آن‌جا که $A$ وارون‌پذیر است پس $|A| \neq 0$ هم‌چنین اگر $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد: $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

$|\lambda A| = \lambda^n |A| \neq 0$

به سادگی دیده می‌شود که

$(\lambda A)^{-1}(\lambda A) = I$

وارون $\lambda A$ از روابط زیر بدست می‌آید:

از طرف راست طرفین رابطه بالا را در $A^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$(\lambda A)^{-1}.\lambda.A.A^{-1} = I.A^{-1} \to (\lambda A)^{-1}.\lambda = A^{-1} \to (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

**۴ـ فرض کنید $A$ یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد. ثابت کنید** $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

می‌دانیم هر گاه $A$ یک ماتریس مربعی وارونپذیر باشد داریم: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

طبق خواص دترمینان روابط زیر را داریم:

$$\left|AA^{-1}\right| = |I| \Rightarrow |A|\left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

**۵ـ اگر برای ماتریس مربعی $A$، ماتریس مربعی $B$ موجود باشد که $AB=I$ ، ثابت کنید $A$ وارون‌پذیر است و $B=A^{-1}$.**

ازآن‌جا که $AB=I$ بنابراین $|AB|=|I|$ پس $|AB|=1$ همچنین می‌دانیم $|AB|=|A|.|B|$ پس $|A|.|B|=1$

از آن‌جا که ضرب دو عدد حقیقی غیرصفر است پس هیچ یک از این اعداد صفر نمی‌باشند پس: $|A| \neq 0$

شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن $A$ ، این است که دترمینانی مخالف صفر داشته باشد پس در این‌جا $A$ وارون‌پذیر است.

حال فرض می‌کنیم وارون $A$ ماتریسی چون $C$ باشد پس داریم: $AC=CA=I$

یعنی $C=A^{-1}$

به کمک ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C \Rightarrow B=C=A^{-1} \Rightarrow B=A^{-1}$$

**۶ـ الف) اگر $A$ و $P$ ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند و $P$ وارون‌پذیر فرض می‌شود، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$، $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$**

**ب) ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ داده شده است. ابتدا ماتریس وارون‌پذیر $P$ را طوری پیدا کنید که $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ سپس برای عدد طبیعی $n$، $A^n$ را محاسبه کنید.**

الف) برای اثبات از روش استقرار استفاده می‌کنیم:

برای $n=1$ به سادگی دیده می‌شود: $(P^{-1}AP)^1 = P^{-1}AP$

**توجه:** برای $n=2$ را نیز بررسی می‌کنیم: $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}AP.P^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$

**فرض:** فرض می‌کنیم برای $n=k$ نیز رابطه برقرار باشد پس داریم: $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$

**حکم:** حال ثابت می‌کنیم برای $n=k+1$ نیز این رابطه برقرار است: $(P^{-1}AP)^{k+1} = (P^{-1}AP)^k(P^{-1}AP)$

طبق فرض داریم $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ پس:

$$(P^{-1}AP)^{k+1} = P^{-1}A^kP.P^{-1}AP = P^{-1}A^kIAP = P^{-1}A^{k+1}P$$

پس به ازای هر عدد طبیعی $n$ رابطه $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ برقرار است.

ب) ماتریس وارون‌پذیر P را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: $P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

به طوری که اعداد d ، c ، b و a حقیقی‌اند و $P^{-1}$ به صورت زیر است:

$$P^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

می‌توان از چپ دو طرف معادله را در ماتریس P ضرب کرد پس داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3a & -b \\ 3c & -d \end{bmatrix}$$

کافی است معادلات زیر را حل کنیم تا مجهولات d ، c ، b و a را بیابیم:

$$\begin{cases} a+2c=3a \\ b+2d=-b \\ 2a+c=3c \\ 2b+d=-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+2c=0 \\ 2b+2d=0 \\ 2a-2c=0 \\ 2b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=-d \end{cases}$$

کلیه‌ی ماتریس هایی که به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ a & -b \end{bmatrix}$ باشند که در آنها a و b اعداد دلخواه حقیقی‌اند.

به عنوان ماتریس وارون‌پذیر P در رابطه $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ صدق می‌کند ماتریس دلخواه.

$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم، برای محاسبهٔ $A^n$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(*)\ (P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP \Rightarrow P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=A^n$$

با جایگذاری ماتریس‌های داده شده و $P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ در رابطه (*) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}=A^n \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}=A^n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\times(-1)^n & \frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1} \\ \frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1} & \frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\times(-1)^{n+2} \end{bmatrix}=A^n$$

**۷ـ فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که $A=A^2$. اگر $\lambda\neq 1$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $I-\lambda A$ وارون‌پذیر است و داریم:**

$$(I-\lambda A)^{-1}=I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A$$

$$(I-\lambda A)(I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A)=I^2+\frac{\lambda}{1-\lambda}IA-\lambda IA-\frac{\lambda^2}{1-\lambda}A^2$$

از آن‌جا که $A^2=A$ پس:

$$(I-\lambda A)(I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A)=I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A-\lambda A-\frac{\lambda^2}{1-\lambda}A$$

$$=I+\frac{\lambda}{1-\lambda}-\lambda-\frac{\lambda^2}{1-\lambda}A=I$$

طبق تمرین ۵ از آن‌جاکه برای ماتریس مربعی $(I-\lambda A)$ توانستیم ماتریسی مربعی چون $I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A$ بیابیم که $(I-\lambda A)(I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A)=I$ پس $(I-\lambda A)$ وارون‌پذیر است و داریم:

$$(I-\lambda A)^{-1}=I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A$$

**۸ـ فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد و عدد طبیعی n موجود باشد که $A^n=O$ ثابت کنید I-A وارون‌پذیر است. وارون I-A چیست؟**

از آن‌جاکه عدد طبیعی n چون k موجود است که $A^k=O$ بنابراین سادگی دیده می‌شود که $A^k=O$ - ولی توان دو طرف تساوی را با یک ماتریس I جمع کرد پس داریم: $I-A^k=I$ و می‌توان دید که:

$$I-A^k=(I-A)(I+A+A^2+...+A^{k-1})\Rightarrow(I-A)(I+A+A^2+...+A^{k-1})=I$$

از آن‌جا که A ماتریسی مربعی است (I-A) نیز مربعی است و $I+A+A^2+...+A^{n-1}$ نیز یک ماتریس مربعی است طبق تمرین ۵ از آن‌جاکه برای ماتریس مربعی (I-A) توانستیم ماتریسی مربعی بیابیم که حاصلضربشان ماتریس همانی است پس I-A وارون‌پذیر است و وارون I-A به صورت زیر است:

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+...+A^{k-1}$$

به طوری که $A^k=0$ اما برای $n<k$، $A^n\neq 0$ می‌باشد.

**۹ـ در قضیه ۴ ثابت کنید $\left|A^*\right|=|A|^2$**

طبق (۱) در قضیه ۴ داریم:

$$AA^*=A^*A=|A|I$$

همچنین می‌دانیم: $\left|AA^*\right|=|A|\left|A^*\right|$ و داریم: $||A|I|=|A|^3|I|=|A|^3$

زیرا I ماتریس همانی ۳×۳ است و |A| یک عدد حقیقی است.

حال داریم:

$$\left|AA^*\right|=||A|I|\Rightarrow|A|\left|A^*\right|=|A|^3\Rightarrow\left|A^*\right|=|A|^2$$

**۱۰ـ اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند به قسمی که A+B=AB ثابت کنید با فرض وارون‌پذیری A، B نیز وارون‌پذیر است و داریم: $A^{-1}+B^{-1}=I$**

با فرض اینکه A وارون‌پذیر است می‌توان طرفین رابطه A+B=AB را در $A^{-1}$ ضرب کرد:

$$A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}AB\Rightarrow I+A^{-1}B=B\Rightarrow I=B-A^{-1}B\Rightarrow I=B(I-A^{-1})$$

بنابراین ماتریسی چون $I-A^{-1}$ یافتیم که حاصلضرب آن در B ماتریس همانی است، پس B وارون‌پذیر است. از آن‌جاکه A+B=AB و A و B وارون‌پذیرند می‌توان $A^{-1}$ و $B^{-1}$ را در طرفین رابطه ضرب کنیم:

$$A+B=AB\Rightarrow A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}AB\Rightarrow I+A^{-1}B=B$$

$$\Rightarrow I.B^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=BB^{-1}\Rightarrow B^{-1}+A^{-1}=I$$

**۱۱ـ برای زاویهٔ ثابت داده شدهٔ $\theta$، ثابت کنید ماتریس دوران $R_\theta$ وارون‌پذیر است و $R_{-\theta} = (R_\theta)^{-۱}$**

ماتریس دوران $R_\theta$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

و دترمینان آن $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ که مخالف صفر است پس ماتریس دوران $R_\theta$ وارون‌پذیر است و وارون آن به صورت زیر قابل محاسبه است. با استفاده ازمحاسبه ماتریس وارون برای ماتریس‌های ۲×۲ داریم:

$$(R_\theta^{-۱}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

زیرا داریم: $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ و $\cos(-\theta) = \cos\theta$ پس $R_\theta^{-۱} = R_{-\theta}$

## تمرین‌ها (صفحه‌ی ۱۴۹)

**۱ـ دستگاه‌های زیر را با پیدا کردن وارون ماتریس ضرایب دستگاه (در صورت وجود) حل کنید.**

الف) $\begin{cases} ۲x_۱ - ۵x_۲ + ۲x_۳ = ۷ \\ x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ = ۳ \\ ۳x_۱ - ۴x_۲ - ۶x_۳ = ۵ \end{cases}$　　ب) $\begin{cases} ۲x_۳ + ۳ = x_۲ + ۳x_۱ \\ x_۱ - ۳x_۳ = ۲x_۲ + ۱ \\ ۳x_۲ + x_۳ = ۲ - ۲x_۱ \end{cases}$

ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} ۲x_۱ - ۵x_۲ + ۲x_۳ = ۷ \\ x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ = ۳ \\ ۳x_۱ - ۴x_۲ - ۶x_۳ = ۵ \end{cases}$ به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۴ \\ ۳ & -۴ & -۶ \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

کافی است ماتریس $x$را از رابطهٔ $Ax=B$ بیابیم. از آن‌جاکه:

$$|A| = ۲(-۱۲-۱۶) + ۵(-۶+۱۲) + ۲(-۴-۶) = -۴۶ \neq ۰$$

$$x = A^{-۱}B$$

بنابراین $A$ وارون‌پذیر است، اگر ماتریس وارون آن $A^{-۱}$ باشد. داریم:
پس با استفاده از وارون ماتریس ضرایب می‌توانیم دستگاه را حل کنیم. ماتریس وارون به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} A^*, A^* = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix}, A_{ij} = (-۱)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} ۲ & -۴ \\ -۴ & -۶ \end{vmatrix} = -۲۸ \quad , \quad A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲} \begin{vmatrix} ۱ & -۴ \\ ۳ & -۶ \end{vmatrix} = -۶$$

$$A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ \end{vmatrix} = -۱۰ \quad , \quad A_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱} \begin{vmatrix} -۵ & ۲ \\ -۴ & -۶ \end{vmatrix} = -۳۸$$

$$A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & -۶ \end{vmatrix} = -۱۸ \quad , \quad A_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳} \begin{vmatrix} ۲ & -۵ \\ ۳ & -۴ \end{vmatrix} = -۷$$

$$A_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱} \begin{vmatrix} -۵ & ۲ \\ ۲ & -۴ \end{vmatrix} = ۱۶ \quad , \quad A_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲} \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & -۴ \end{vmatrix} = ۱۰$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=9 \Rightarrow A^{*}=\begin{bmatrix} -28 & -38 & +16 \\ -6 & -18 & 10 \\ -10 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{14}{23} & \frac{19}{23} & \frac{-8}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{9}{23} & \frac{-5}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{7}{46} & \frac{-9}{46} \end{bmatrix}$$

$$x=A^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{14}{23} & \frac{19}{23} & \frac{-8}{23} \\ \frac{3}{23} & \frac{9}{23} & \frac{-5}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{7}{46} & \frac{-9}{46} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب دستگاه مورد نظر به دست آمد: $x_1=5, x_2=1, x_3=1$

ب) ماتریس ضرایب 
$$\begin{cases} 2x_3+3=x_2+3x_1 \\ x_1-3x_3=2x_2+1 \\ 3x_2+x_3=2-2x_1 \end{cases}$$
به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

از آن‌جاکه $|A|=0$ بنابراین ماتریس ضرایب وارون‌پذیر نمی‌باشد، پس وارون ماتریس ضرایب موجود نمی‌باشد.

**۲ـ دستگاه‌های زیر را به کمک دستورکرامر، روش حذفی گاوس و گاوس ـ جردن حل کنید.**

الف) $\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3=18 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=24 \\ 2x_1+7x_2+12x_3=40 \end{cases}$　ب) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=7 \\ 4x_1-x_2+5x_3=4 \\ 6x_1+x_2+x_3=18 \end{cases}$　ج) $\begin{cases} -2x_1+x_2+6x_3=18 \\ 5x_1+8x_3=-16 \\ 3x_1+2x_2-10x_3=-3 \end{cases}$

الف) ماتریس ضرایب در این دستگاه به صورت مقابل است: 
$$A=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{vmatrix}$$
در اینجا $|A|=0$ و دستگاه جواب ندارد.

ب) به کمک دستور کرامر دستگاه را حل می‌کنیم، ماتریس ضرایب دستگاه به صورت زیر است:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|=1((-1)(1)-(5)(1))-1((4)(1)-(5)(6))-1((4)(1)-(-1)(6)) \Rightarrow |A|=10$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 18 & 1 & 1 \end{vmatrix}=7((-1)(1)-(5)(1))-1((4)(1)-(5)(18))-1((4)(1)-(-1)(18))=22$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 18 & 1 \end{vmatrix} = 1((4)(1)-(5)(18))-7((4)(1)-(5)(6))-1((4)(18)-(4)(6))=48$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & 18 \end{vmatrix} = 1((-1)(18)-(4)(1))-1((4)(18)-(4)(6))+7((4)(1)-(-1)(6))=0$$

آن‌گاه داریم:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{22}{10}=2/2$$

$$x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{48}{10}=4/8$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{0}{10}=0$$

ج) از روش گاوس - جردن استفاده می‌کنیم و دستگاه را حل می‌کنیم:

مراحل زیر را به ترتیب دنبال می‌کنیم:

ماتریس افزوده ضرایب : $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 & 18 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 3 & 2 & -10 & -3 \end{bmatrix}$

در مرحله اول، عنصر سطراول و ستون اول ماتریس ضرایب دستگاه را به ۱ تبدیل می‌کنیم و بقیه سطرها ثابت‌اند:

$$\begin{array}{c} \frac{R_1}{-2} \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -3 & -9 \\ 5 & 0 & 8 & -16 \\ 3 & 2 & -10 & -3 \end{bmatrix}$$

در مرحله دوم، عنصر سطراول و ستون اول ماتریس ضرایب دستگاه را محور گرفته و عناصر ستون اول در سطر دوم و سوم را صفر می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2-5R_1 \\ R_3-3R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -3 & -9 \\ 0 & \frac{5}{2} & 23 & 29 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & 24 \end{bmatrix}$$

در این مرحله عنصر سطر دوم و ستون دوم ماتریس ضرایب دستگاه را به ۱ تبدیل می‌کنیم و بقیه سطرها ثابت‌اند:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \frac{2}{5}R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -3 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{46}{5} & \frac{58}{5} \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & 24 \end{bmatrix}$$

در مرحله چهارم عنصر سطر دوم و ستون دوم ماتریس ضرایب دستگاه را محور قرار می‌دهیم و عناصر ستون دوم در سطر اول و سوم را صفر می‌کنیم:

$$\begin{array}{r}R_1+\frac{1}{2}R_2\\ R_2\\ R_3-\frac{7}{2}R_2\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{-16}{5}\\ 0 & 1 & \frac{46}{5} & \frac{58}{5}\\ 0 & 0 & \frac{-166}{5} & \frac{-83}{5}\end{bmatrix}$$

در مرحله پنجم عنصر سطر سوم و ستون سوم را به ۱ تبدیل می‌کنیم و بقیه سطرها را ثابت نگه می‌داریم:

$$\begin{array}{r}R_1\\ R_2\\ -\frac{5}{166}R_3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{-16}{5}\\ 0 & 1 & \frac{46}{5} & \frac{58}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{166}\end{bmatrix}$$

در مرحلهٔ آخر عنصر سطر سوم و ستون سوم را محور گرفته و عناصر ستون سوم در سطراول و دوم را به صفر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r}R_1-\frac{8}{5}R_3\\ R_2-\frac{46}{5}R_3\\ R_3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & \frac{83}{166}\end{bmatrix}$$

حال به سادگی دیده می‌شود که: $x_1=-4$ , $x_2=7$ و $x_3=\frac{1}{2}$ می‌باشند.

**۳ـ دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.**

$$\begin{cases}x_2+x_3=0\\ x_1+x_3=2\\ x_1+x_2=0\end{cases}$$

ماتریس ضرایب دستگاه با افزودن یک ستون اضافی که از مقادیر ثابت تشکیل شده است به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

در مرحله اول عنصر سطر دوم و ستون اول را محور قرار می‌دهیم و عنصر سطر سوم ستون اول را صفر می‌کنیم:

$$\begin{array}{r}R_1\\ R_2\\ R_3-R_1\end{array}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

در مرحله دوم عنصر سطر اول، ستون دوم را محور گرفته و عنصر سطر سوم، ستون دوم را صفر می‌کنیم:

$$\begin{array}{r}R_1\\ R_2\\ R_3-R_1\end{array}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

در مرحله سوم عنصر سطر سوم، ستون سوم را محور گرفته و عناصر ستون سوم در سطر اول و سطر دوم را صفر می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} R_1+\frac{1}{2}R_3 \\ R_2+\frac{1}{2}R_3 \\ R_3 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

حال به سادگی داریم: $x_1=1$ ، $x_2=-1$ و $x_3=1$

**۴ـ به کمک قضیه ۲، اثبات دیگری برای تمرین ۷ از بخش قبل ارائه کنید. یعنی ثابت کنید اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که $A=A^2$ و $\lambda+1$ یک عدد حقیقی، آن‌گاه $I-\lambda A$ وارون‌پذیر است. $(I-\lambda A)^{-1}$ را نیز محاسبه کنید.**

معادله $(I-\lambda A)X=O$ را که $X$ ماتریس مجهولات می‌باشد را در نظر بگیرید. از آنجا که ماتریس $A$ مخالف صفر است می‌توان آن را در طرفین معادله بالا ضرب کرد: $A(I-\lambda A)X=O \rightarrow (A-\lambda A^2)X=O$

از آنجا که $A=A^2$ پس داریم $(A-\lambda A)X=O$ و با فاکتورگیری از $A$ داریم $(1-\lambda)AX=O$ همچنین طبق فرض مسئله $\lambda \neq 1$ پس $1-\lambda \neq 0$ در نتیجه حاصل معادله بالا توسط $1-\lambda$ صفر نمی‌شود.

**۵ـ فرض کنید $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی باشند، طوری که $I-AB$ وارون‌پذیر است. ثابت کنید $I-BA$ نیز وارون‌پذیر است (راهنمایی: از قضیه ۲ استفاده کنید). $(I-BA)^{-1}$ را نیز محاسبه کنید.**

از آنجا که $I-AB$ وارون‌پذیر است می‌توان ماتریسی مربعی چون $C$ را در نظر گرفت که وارون آن باشد. پس داریم: $(I-AB)C=I$ حال روابط زیر را دنبال می‌کنیم تا به وارون $I-BA$ برسیم:

$$C-ABC=I \xrightarrow[\text{در } B \text{ ضرب می‌کنیم}]{\text{از راست طرفین را}} BC-BABC=B \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم } A]{\text{از چپ طرفین را در}}$$

$$BCA-BABCA=BA \xrightarrow[\text{یک طرف می‌افزاییم}]{\text{عبارت } I+I- \text{ را به}} BCA-BABCA=BA+I-I$$

$$\xrightarrow[BCA \text{ فاکتور می‌گیریم}]{\text{در طرف اول از عبارت}} (I-BA)BCA=(BA-I)+I \longrightarrow$$

$$(I-BA)+(I-BA)BCA=I \longrightarrow (I-BA)(I+BCA)=I$$

از آنجا که $I$ و $A$ و $B$ و $C$ همگی ماتریس‌های مربعی هم مرتبه هستند پس $I+BCA$ نیز ماتریسی مربعی از همان مرتبه است. برای $I-BA$ وارون یافتیم. بنابراین $(I-BA)X=O$ تنها یک جواب منحصر به فرد دارد زیرا: $|I-BA| \neq 0$

$I-BA$ وارون‌پذیر و وارون آن $I+BCA$ می‌باشد که ماتریس $C$ همان وارون $I-AB$ است.

**۶ـ دستگاه سه معادله دو مجهولی زیر سه خط $L_1$ ، $L_2$ و $L_3$ را در صفحه مشخص می‌کند.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2=b_3 \end{cases}$$

**شکل‌های زیر حالات مختلف این سه خط را نسبت به هم نشان می‌دهد.**

**مجموعه جواب دستگاه داده شده را در هر یک از این حالات توصیف کنید.**

(۱)  $L_1=L_2=L_3$

(۱) در این حالت سه خط $L_1$ و $L_2$ و $L_3$ منطبق بر هم‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

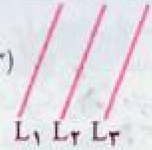
(۲) 

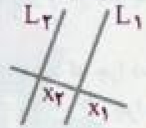
$L_1=L_2$

(۲) خط $L_1$ و $L_2$ بر هم منطبق‌اند و با خط $L_3$ تنها در یک نقطه متقاطعند بنابراین دستگاه در این حالت تنها یک جواب دارد.

(۳) سه خط $L_1$ و $L_2$ و $L_3$ موازیند و هیچ نقطهٔ تقاطعی ندارند بنابراین دستگاه جواب ندارد.

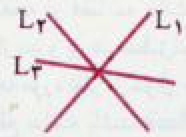
(۳)



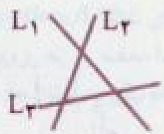

(۴)

(۴) خط $L_1$ و $L_2$ موازیند و هیچ نقطهٔ تقاطعی ندارند. خط $L_3$ این دو خط را در نقاط $x_1$ و $x_2$ قطع کرده و $x_1 \neq x_2$ بنابراین دستگاه هیچ جوابی ندارد.




(۵)

(۵) در این حالت $L_1$ و $L_2$ و $L_3$ هر سه در یک نقطه متقاصعند و دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.




(۶)

(۶) خطوط $L_1$ و $L_2$ و $L_3$ دو به دو متقاصعند اما نقطهٔ تقاطع مشترکی ندارند که هر سه خط از آن بگذرند پس دستگاه جواب ندارد.

**۷- به کمک روش هندسی بررسی کنید که تحت چه شرایطی روی a ، b و c دستگاه**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = b \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

**الف) دارای جواب منحصر به فرد است،**
**ب) جواب ندارد،**
**ج) بی‌شمار جواب دارد.**

هر یک از معادلات داخل دستگاه، نمایش یک صفحه در فضای سه بعدی $R^3$ می‌باشند. حال با بررسی وضعیت صفحات نسبت به هم بیان می‌کنیم دارای چه جواب‌هایی می‌تواند باشد.

ابتدا توجه کنید وضعیت دو صفحه به هم را ابتدا نسبت به شناخت بردارهای عمود بر صفحات می‌توان بررسی کرد. بردار عمود بر صفحه $2x_1 - x_2 + 3x_3 = a$ را $u_1 = (2, -1, 3)$ می‌نامیم همچنین بردار $u_2 = (1, 2, 1)$ بر صفحه $x_1 + 2x_2 + x_3 = b$ عمود می‌باشد و بردار عمود بر صفحه $7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = c$ نیز $u_3 = (7, 4, 9)$ می‌باشد. با بررسی وضعیت این بردارها می‌بینیم که صفحات بر هم عمود نیستند و موازی هم نمی‌باشند.

الف) همانطور که در شکل می‌بینید در این حالت دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است.

سه صفحهٔ متقاطع در یک نقطه، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ب) هنگامی که سه صفحه موردنظر دو به دو با هم موازی باشند و هیچ نقطهٔ تقاطعی نداشته باشند دستگاه جواب ندارد. اما این مطلب بستگی به $b_3$ و $b_2$ و $b_1$ ندارد زیرا بردارهای عمود بر صفحات هیچ کدام با دیگری موازی نیستند. حالت دیگری رخ می‌دهد و آن اینکه صفحات دو به دو یکدیگر را قطع می‌کنند و فصل مشترک آنها دو به دو موازی باشند و یکدیگر را قطع نکنند.

دستگاه بدون جواب است.

ج) در حالتی که سه صفحه بر هم منطبق باشند یا سه صفحه دارای یک فصل مشترک باشند. دستگاه بی‌شمار جواب دارد. زیرا در حالت تطابق هر سه صفحه با هم تمام نقاط روی صفحات جواب دستگاه است. و در حالتی که یک فصل مشترک (یک خط) داشته باشند نیز تمام نقاط روی فصل مشترک جواب دستگاه است. وقتی $b_1=b_2=b_3=0$ هر سه صفحه از نقطه (۰ و ۰ و ۰) می‌گذرند و هر سه یکدیگر را قطع می‌کنند و بی‌شمار جواب دارد.

**۸- دستگاه زیر را در نظر بگیرید.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \end{cases}$$

**الف) توضیح دهید که چرا دستگاه بالا یا جواب ندارد، یا بی‌شمار جواب دارد.**

**ب) اگر $b_1=b_2=0$ ، چرا دستگاه بالا باید بی‌شمار جواب داشته باشد؟**

دو معادله مورد نظر، هر یک صفحه‌ای را در فضا نمایش می‌دهند.

الف) دو صفحه در فضا سه حالت دارند: ۱) یکدیگر را قطع می‌کنند. ۲) با یکدیگر موازیند و تقاطعی ندارند. ۳) با یکدیگر موازیند و بر هم منطبق‌اند.

اگر دو صفحه مورد نظر در سؤال حالت ۱ یا ۳ را داشته باشند. دستگاه بی‌شمار جواب دارد و اگر دو صفحه موازی باشند و نقطهٔ تقاطع نداشته باشند، دستگاه جواب ندارد.

ب) اگر $b_1=b_2=0$ باشد. $x_1=x_2=x_3=0$ یکی از جواب‌های دستگاه است و این نشان می‌دهد که نقطه (۰ و ۰ و ۰) روی هر دو صفحه است پس دو صفحه یکدیگر را قطع می‌کنند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد. زیرا هیچ‌گاه دو صفحه در فضا تنها در یک نقطه نمی‌توانند متقاطع باشند.