به نام خدا

آموزش جامع ریاضی نهم دبیرستان

مدارس تیزهوشان نمونه دولتی و مدارس خاص

امین ابراهیمی دبیر ریاضی تیزهوشان استان البرز

جامع ترین منبع آمادگی برای آزمون های ورودی دبیرستان های دوره دوم

فصل اول

مجموعه ها و احتمال

به دسته ای از اشیا کاملا مشخص مجموعه می گویند .

هر یک از اشیاء مربوط به مجموعه را عضو آن مجموعه می نامند

مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می دهیم و داخل علامت {آکولاد} قرار می دهیم.

مشخص بودن (بودن یا نبودن یک عضو در مجموعه حتمی باشد) و متمایز بودن (غیرتکراری بودن) شرط اصلی برای تعریف و صریح بودن یک مجموعه است .

برای مثال گروه ورزشکاران محبوب ایران،تیم های قدرتمند فوتبال ایران ، چهار دانشمند ایرانی ، سه عدد اول ، مجموعه نیستند !

زیرا اولی مشخص نیست که نام این ورزشکاران چیست و از نظر هر فردی این افراد متفاوت هستند دومی تیم های قدرتمند ممکن است تعدادشان و عضوهایش از نظر افراد مختلف متفاوت باشد وسومی :

چهارمی :

سوال : کدام توصف زیر تعریف یک مجموعه می باشد ؟

۱) سه مضرب متوالی عدد ۳

۲) سه عدد فرد متوالی

۳) زیباترین شهرهای ایران

۴) اعداد اول دو رقمی

پاسخ : گزینه ۴

توضیح : معین و یکتا بودن فقط در گزینه چهار وجود دارد .

مثال ۱) مجموعه مقسوم علیه های عدد ۱۲ را با مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ نمایش می دهیم در این صورت

$۱\in A$, $۲\in A$, و $۲۴ \notin A$, $۵ \notin A$ و $n(A)=۶$.

توجه : نماد $\in$ به معنای عضو بودن می باشد (*ELEMENT* به معنای عنصر و عضو می باشد) و نماد $\notin$ به معنای ....

n(A) : ....

نکته ۱ : تعداد مقسوم علیه های طبیعی یک عدد را به روش زیر محاسبه می کنیم :

گام اول : تجزیه به عامل های اول با توان طبیعی

گام دوم : حاصل ضرب یکی بیشتر توان ها

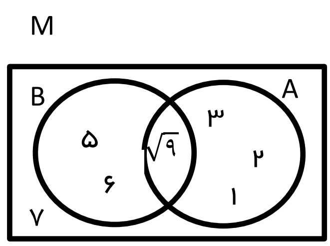
سوال : تعداد مقسوم علیه های صحیح عدد ۱۳۹۵ را بدست آورید .

گام اول : $۱۳۹۵ = ۳^{۲} \times ۵^{۱} \times ۳۱^{۱}$ گام دوم : $۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳ = (۱+۱)(۱+۱)(۲+۱)$

پس ۱۲ مقسوم علیه طبیعی دارد پس قرینه همین اعداد را هم در اعداد منفی داریم پس در مجموع $۲۴ = ۲ \times ۱۲$ مقسوم علیه صحیح دارد .

سوال : تعداد عضوهای مجموعه های زیر را مشخص کنید

الف : *n(A)=۳*



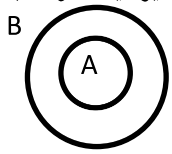
توجه تکرار عضو در مجموعه بی معنی است .

به کمک منحنی ها یا خط های شکسته می توانیم یک مجموعه را با عناصرش مشخص کنیم که به این شکل نمایش نمودار ون (*Venn diagram*) می گویند .

در مجموعه بالا اعضای مجموعه های A و B را مشخص می کنیم .

در مجموعه A عضوهایی را که اول هستند در مجموعه جدیدی به نام C بصورت $C = \{۲,۳\}$ می نویسیم به این مجموعه جدید که عضوهایش همگی از مجموعه A انتخاب شد یک زیرمجموعه A می گوییم .

<u>تعریف زیر مجموعه</u> : مجموعه ی A را زیرمجموعه ی B می نامیم اگر تمام عضوهای A در B نیز دیده شود و بصورت ریاضی به شکل $A \subseteq B$ نمایش می دهیم .



<u>معرفی نماد زیر مجموعه</u> : زیر مجموعه را با نماد $\subseteq$ نمایش می دهیم بنابراین در نمودار ون بالا داریم $c \subseteq A$.

خواص زیرمجموعه ها : هر مجموعه زیر مجموعه خودش است زیرا عناصر هر مجموعه در خودش می باشند .

در صورتی که بتوانیم عضوی پیدا کنیم که در مجموعه دیگر نباشد می توانیم بگوییم زیرمجموعه آن مجموعه نیست

در نمودار ون بالا مجموعه ی تک عضوی $\{۷\}$ زیرمجموعه ی A و B نیست .

سوال : در مجموعه اعداد طبیعی برای اعداد تک رقمی یک زیر مجموعه بنویسید ؟

سوال : کدام یک از مجموعه های زیر زیرمجموعه دیگری می باشد ؟

$$A = \{x | x < -۵\} , B = \{x | x < -۷\}$$

نکته : اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد ، آنگاه $A = B$ می باشد .

اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ در این صورت $A \subseteq C$ می باشد (خاصیت تعدی)

نکته تکمیلی : برای محاسبه تعداد زیرمجموعه های یک عضوی ، دو عضوی ، سه عضوی و...n عضوی از مفهوم فاکتوریل می توانیم استفاده کنیم یا از نتیجه بحث زیر به عنوان <u>فرمول</u> استفاده کنیم .

معرفی فاکتوریل : حاصل ضرب اعداد طبیعی در اعداد ماقبل عدد را فاکتوریل آن می گویند و با نماد ! نمایش می دهند مثال :

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

برای محاسبه زیرمجموعه های تک عضوی یک مجموعه n عضوی داریم :n زیرمجموعه

تعداد زیرمجموعه های دو عضوی (هر بار انتخاب دو عضو از بین n عضو)

$$\binom{n}{۲} = \frac{n!}{(n-۲)! \times ۲!} = \qquad = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

تعداد زیرمجموعه های سه عضوی :

$$\binom{n}{۳} = \frac{n!}{(n-۳)! \times ۳!} = \qquad = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

بنابراین از سه فرمول بالا استفاده می کنیم

سوال :همه ی زیر مجموعه های مجموعه ی $D = \{۱,۲,۳\}$ را بنویسید .

$\{۳\}$و$\{۲\}$و$\{۱\}$زیرمجموعه های تک عضوی از فرمول بالا :

زیرمجموعه های دو عضوی $\{۲,۳\}$,$\{۱,۳\}$,$\{۱,۲\}$ همچنین از فرمول بالا:

خود مجموعه $\{۱,۲,۳\}$ و تهی $\emptyset$

تعداد این زیرمجموعه ها برابر ۸ تا است چون هر عضو هر بار می تواند در زیرمجموعه موردنظر باشد یا نباشد داریم

$۸ = ۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲$ یعنی برای بودن یا نبودن هر عضو ۲ حالت و به طور کلی اگر مجموعه ای n عضو داشته باشد داریم :

تعداد زیرمجموعه ها $= ۲^n$

سوال :تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی m عضوی ،چند برابر تعداد زیرمجموعه های

یک مجموعه $(m\text{-}k)$ عضوی است ؟

سوال : مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ چند زیرمجموعه یک عضوی و دو عضوی دارد ؟

سوال : مجموعه ای دارای ۷ زیرمجموعه ی یک عضوی است . این مجموعه چند زیرمجموعه ی سه عضوی دارد ؟

سوال : تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی k+۴ عضوی ۱۲۰ واحد از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی k عضوی بیشتر است ، k کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سوال : تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ۲n-۵ عضوی شانزده برابر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی n-۲ عضوی است . مقدار n چقدر است ؟

سوال : تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ی n+۶ عضوی از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی n+۲ عضوی ۱۹۲۰ واحد بیشتر است . مقدار n را بدست آورید ؟

<u>زیرمجموعه های دلخواه شامل و یا فاقد اعضای مشخص</u> : در صورتی که زیرمجموعه هایی را بخواهیم که فاقد یا شامل عضوی خاص از یک مجموعه باشند ابتدا آن را که تکلیفش مشخص شده از مجموعه بر می داریم سپس برای هر عضو باقیمانده دو حالت داریم .

مثال : اگر مجموعه ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ باشد در این صورت :

الف : مجموعه بالا چند زیرمجموعه دارد که شامل ۱و۲ باشد ؟

ب : چند زیرمجموعه داریم که فاقد ۴ باشد ؟

پاسخ : ابتدا اعضای خاص ۱ و۲ که در زیرمجموعه ها هستند را بر می داریم حالا برای بودن یا نبودن اعضای ۳و۴ در کل ۲^۲ حالت داریم برای قسمت ب نیز ابتدا ۴ را حذف می کنیم سپس برای بودن یا نبودن ۳ عضو دیگر ۲^۳ حالت داریم یعنی ۸ زیرمجموعه داریم که فاقد ۴ هستند

زیر مجموعه های محض یک مجموعه : تمام زیرمجموعه ها بجز خود مجموعه را زیر مجموعه های محض آن می نامند .بنابراین تعداد آنها عبارت است $۲^n - ۱$.

توجه : مجموعه توان یک مجموعه : مجموعه تمام زیرمجموعه های یک مجموعه را مجموعه توانی آن می نامیم و برای مجموعه ای مانند A با نماد $p(A)$ نمایش می دهیم .

مثال : اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ باشد در این صورت $n(A) = ۳$ و $P(A) = ۲^۳ = ۸$

در مثال بالا حاصل $P(P(A))$ برابر است با ....

سوال : $n(p(p(\emptyset)))$ را بدست آورید ؟

سوال : اختلاف تعداد اعضای دو مجموعه ۴ و اختلاف تعداد زیرمجموعه های آنها ۱۲۰ می باشد . تفاضل تعداد اعضای دو مجموعه کدام است ؟

پاسخ : اگر اعضای مجموعه اول را a عضو در نظر بگیریم مجموعه دوم $a+۴$ عضو خواهد داشت بنابراین ....

سوال : سه مجموعه ی $n+۳$ عضوی و $n+۱$ عضوی و $n-۲$ عضوی روی هم ۱۶۴ زیر مجموعه دارند . مقدار n چه قدر است ؟

توجه :رابطه ی بین مجموعه های مرجع اعداد طبیعی ، حسابی ، صحیح ، گویا و اعداد حقیقی (اعداد گویا و گنگ) را به کمک نماد زیرمجموعه ها بنویسید .

توجه: تهی زیر مجموعه ی همه مجموعه ها است .

آموزش جامع ریاضی نهم دبیرستان– ابراهیمی دبیر ریاضی مدارس استان البرز – آموزش جامع ریاضی نهم دبیرستان– ابراهیمی دبیر ریاضی مدارس خاص استان البرز

مجموعه تهی (*Vacuous set*)

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را تهی می نامیم و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می دهیم .

مثال : مجموعه اعداد صحیح بین ۲و۳ یا مضارب ۲۰ کوچکتر از ۱۰

نکته ۱ : مجموعه ی $\{\emptyset\}$ مجموعه ی تهی نیست و دارای یک عضو می باشد

مثال :الف) در مجموعه ی $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{۱\}\}$ داریم :

۱) $\{\emptyset\} \in A$

۲) $\emptyset \in A$

۳) این مجموعه ۳ عضو دارد .

۴) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$, $\{\emptyset\} \subseteq A$ و $\{\{۱\}\} \subseteq A$ و $\{۱, \{۱\}\} \subseteq A$

ولی نمی توانیم بگوییم $\{۱\} \subseteq A$ در ضمن داریم $\{۱\} \in A$ و درست است بگوییم $\{\{۱\}\} \subseteq A$

بد نیست بدانیم $\{\{\emptyset\}\}$ یک .... از مجموعه A است .

ب) $C = \{x \in N | -۲ < x \leq ۳\}$ این مجموعه نیز *n(C)=*۳ .

پ) مجموعه اعداد طبیعی که باقیمانده ی آنها بر عدد چهار برابر ۱ است را به شکل یک مجموعه معرفی کنید ؟

پاسخ : $\{۴k + ۱ | k \in w\}$ یعنی مجموعه اعداد حاصل عبارت هستند از $\{۱,۵,۱۳, ...\}$ که مجموعه ای نامتناهی است .

ت) مجموعه مقسوم علیه های عدد ۲۰ را با علائم ریاضی مشخص کنید .

پاسخ : اعداد حاصل عبارتند از $\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰\}$ که با علائم ریاضی می توان بصورت $\left\{x \middle| x \in N , \frac{۲۰}{x} \in N\right\}$

ث) مجموعه ی $\{۱,۲,۴,۸, ...\}$ را با نمایش علائم ریاضی بنویسید .

پاسخ :...

در مثال های بالا مجموعه ها را با علائم ریاضی نمایش دادیم (شکل توصیفی)

سوال)هر یک از مجموعه های زیر را با عضوهایش مشخص کنید .

۱) $D = \{۵n - ۱ | n \in N\}$

۲) $W = \{K - ۱ | K \in N\}$

۳) $E = \left\{x \middle| x \in N, \frac{۱۲}{x} \in Z\right\}$

۴) $F = \left\{x \middle| x \in N, \frac{۱۳۹۶}{x} \in N\right\}$

در مجموعه F عدد اصلی (تعداد اعضا) را مشخص کنید ؟

۵) $G = \{x^۲ < ۲۰ | x \in N\}$

۶) $H = \{۲^x | x \in N\}$

۷) $J = \left\{\sqrt{x^۲} \middle| x \in Z, -۳ \leq x \leq ۲\right\}$

سوال) هر یک از مجموعه های زیر را با علائم ریاضی مشخص کنید .

۱) $A = \{۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \ldots\}$

پاسخ : نظم مربوط به اعداد نشان می دهد که هر عدد با عدد قبلی چهار واحد فاصله دارد پس می توانیم از مضارب ۴ به شکل $۴K$ استفاده کنیم در ضمن اولین عدد با قرار دادن $K=۱$ بدست می آید ۴ که یک واحد با ۳ فاصله دارد پس $۴K-۱$ جمله اول را نتیجه می دهد

$$A = \{۴k - ۱ | k \in N\}$$

توجه به مجموعه هایی که بتوان آنها را با شمردن به پایان رساند متناهی هستند در غیر این صورت نامتناهی می باشند مثال بالا مجموعه ای .... می باشد .

نکته : یک سری از اعداد که دارای نظم مشخصی باشند و به دنبال هم ظاهر شوند دنباله گفته می شود دو مورد از دنباله های معروف دنباله های حسابی و هندسی هستند

{۳,۷,۱۱,۱۵, ...} یک دنباله حسابی می باشد اولا اعداد آن با نظم مشخص با هم ۴ واحد اختلاف دارند

ثانیا می توانیم با داشتن جملات قبلی هر جمله دیگر آن را حدس بزنیم . به عدد ۴ قدرنسبت می گوییم در این دنباله جمله اول نیز اهمیت دارد

طریقه بدست آوردن فرمول کلی یک دنباله حسابی

گام اول : مشخص کردن جمله اول و قدرنسبت

گام دوم : استفاده از فرمول طلایی زیر :

جمله اول + (یک واحد کمتر از شماره جمله موردنظر)× قدر نسبت

در مثال بالا داریم :

....

سوال : پنجاهمین عدد در دنباله بالا چند است ؟

۲) $B = \left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \dots, \frac{۱}{۱۲۸}\right\}$

۳) $C = \left\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \dots\right\}$

پاسخ : در مورد اولی هر جمله با جمله قبلی به اندازه حاصل ضرب $\frac{۱}{۲}$ تفاوت دارد پس از آنجایی که همه توانهایی از $\frac{۱}{۲}$ می باشند از آن استفاده می کنیم یعنی

$$B = \left\{(\tfrac{۱}{۲})^n \middle| n \in N, n \leq ۷\right\}$$

نکته : دنباله مربوط به اعداد بالا یک دنباله هندسی می باشد که در آن اولین عدد جمله ی اول و حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی را قدرنسبت می نامیم و فرمول کلی (جمله عمومی) این دنباله از دو گام زیر بدست می آید .

گام اول : مشخص کردن جمله اول و قدرنسبت

گام دوم : استفاده از فرمول طلایی

جمله اول × قدرنسبت^یک واحد کمتر از جمله موردنظر

در مثال بالا داریم :

....

در مورد مثال ۳ مجموعه موردنظر عبارت است از : $۱ \times (\tfrac{۱}{۲})^{n-۱}$

و چون مجموعه نامتناهی است داریم $C = \left\{(\tfrac{۱}{۲})^{n-۱} \middle| n \in N\right\}$

سوال : عضو دهم از مجموعه بالا به شرط با ترتیب نوشتن مجموعه چند است ؟

۴) $D = \{۹,۹۹,۹۹۹,۹۹۹۹, \ldots\}$

۵) $F = \{۷,۷۷,۷۷۷,۷۷۷۷, \ldots\}$

پاسخ : همه عضوهای مجموعه D یک واحد از توان ۱۰ بعدی خود کمتر است بنابراین از $۱۰^n - ۱$ استفاده کنیم.

در مورد دومی بهتر است عبارت جبری قبل را در $\tfrac{۷}{۹}$ ضرب کنیم ؟ چرا ؟ ....

سوال تکمیلی در دنباله مربوط به ۳,۷,۱۱, ... ,۳۹ مجموع جمله ها چند است ؟

پاسخ : می توانیم از فرمول زیر که مجموع دنباله های حسابی را نتیجه می دهد استفاده کنیم :

گام اول : محاسبه تعداد جملات به کمک :

$$\text{تعداد جملات} = ۱ + \frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{\text{گام}}$$

گام دوم : استفاده از فرمول :

$$\text{تعداد جملات} \times \frac{\text{آخرین عدد} + \text{اولین عدد}}{۲}$$

بنابراین داریم :

گام اول :

$$\frac{۳۹-۳}{۴} + ۱ = \frac{۳۶}{۴} + ۱ = ۹ + ۱ = ۱۰$$

گام دوم :

$$\frac{۳+۳۹}{۲} \times ۱۰ = ۲۱۰$$

تمرین : مجموع هر یک از دنباله های زیر را بدست آورید ؟

الف) $\{۵,۷,۹,۱۱, \dots ,۴۵\}$

*ب) $\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}, \dots\right\} + \{۱,۲,۳, \dots\}$

دو مجموعه مساوی : دو مجموعه را مساوی نامیم در صورتی که تعداد اعضا برابر و عضوها نظیر به نظیر با هم برابر باشند .

مثال : دو مجموعه ی $A = \{۵, x - y\}$ و $B = \{۱۱, x + y\}$ با هم برابر می باشند در این صورت حاصل $x.y$ را بدست آورید .

اعمال روی مجموعه ها :

در مجموعه ها می توانیم اعمالی مانند متمم یک مجموعه ، اشتراک دو یا چند مجموعه ، اجتماع دو مجموعه ، تفاضل دو مجموعه و تفاضل متقارن در مجموعه ها را تعریف کنیم .

۱) **متمم یک مجموعه** : در صورتی که مجموعه ای مانند M داشته باشیم که شامل A باشد ، متمم A را با نماد A' نشان می دهیم و می خوانیم (آ –پریم) (A *-Complement*) و اعضای آن عبارت است از عناصری که در A نباشد ولی در M باشد .

مثال : اگر $M = \{۱,۲,۳, \dots ,۱۰\}$ و مجموعه A زیر مجموعه اعداد اول در M باشند در این صورت $A' = \{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰\}$ یعنی اعداد مرکب و یک .

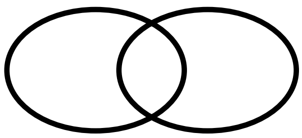
خواص : الف –اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ در این صورت $B' \subseteq A'$

ب – متمم متمم یک مجموعه ....

پ– متمم تهی برابر با ....

۲ – **اجتماع دو مجموعه** :

اجتماع دو مجموعه A و B را با نماد $A \cup B$ نشان می دهیم و اجتماع آنها مجموعه ای است که اعضای آن متعلق به A و یا متعلق به B باشند .



مثال : در صورتی که $A = \{۲x | x \in N, x \leq ۸\}$ و $B = \{۴x | x \in N , x \leq ۳\}$ مجموعه $A \cup B$ را مشخص می کنیم .

خواص :

الف) هر مجموعه زیر مجموعه ی اجتماع خود می باشد یعنی $A \subseteq A \cup B$

ب) اگر $A \subseteq B$ در این صورت $A \cup B \subseteq$

با یک مثال خاصیت ب را ثابت کنید ؟

پ) اجتماع هر مجموعه با خودش برابر ....یعنی $A \cup A =$

ت) اجتماع هر مجموعه با متمم خودش برابر .... یعنی $\acute{A} \cup \acute{A} =$

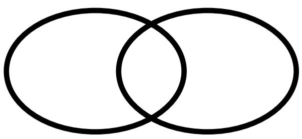
با یک مثال خاصیت ت را بررسی کنید .

سوال : طرف دیگر تساوی های زیر را کامل کنید

$(A \cap \emptyset) \cup (A \cup \acute{M}) =$

$(\emptyset' \cap B) \cup B' =$

۳) **اشتراک دو مجموعه** : اشتراک دو مجموعه A و B را با نماد $A \cap B$ نمایش می دهیم و آن مجموعه ای است که اعضای آن هم در A و هم در B وجود داشته باشد .



مثال : در صورتی که $A = \{۲x | x \in N, x \leq ۸\}$ و $B = \{۴x | x \in N , x \leq ۳\}$ مجموعه $A \cap B$ را مشخص می کنیم .

سوال : در صورتی که $A = \{a, m, i, n\}$ و $B = \{b, a, h, o, n, a, r\}$ باشد $A \cap B$ را بنویسید .

خواص :

الف) اشتراک هر دو مجموعه زیر مجموعه ی هر کدام از آنها است یعنی $A \cap B \subseteq$ و $A \cap B \subseteq$

ب) اگر $A \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq$. با شکل کامل کنید .

پ) اشتراک هر مجموعه با خودش ....

ت) اشتراک یک مجموعه با تهی و اشتراک هر مجموعه با متمم آن را با روابط ریاضی بررسی کنید .

دو مجموعه جدا از هم : دو مجموعه را که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند را جدا از هم می نامند یعنی اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند در این صورت $A \cap B = \emptyset$

سوال : اگر $M = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ باشد و $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۴,۵\}$ باشند بررسی کنید آیا متمم هایشان هم جدا از هم است ؟

سوال : اگر $A \cup B = \{a, s, d, f, g\}$ و $A \cap B = \{s, f\}$ باشد به کمک نمودار ون A و B را با اعضا مشخص کنید .

خاصیت های زیر را به عنوان خواص پخشی داریم :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) =$$

خاصیت های زیر را به عنوان قوانین دمورگان بررسی می کنیم .

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

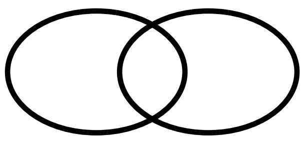
$$(A \cap B)' =$$

با نمودار ون بررسی کنید

سوال : درستی رابطه زیر را بررسی کنید .

$$(B \cup M') \cup (B' \cup A)' = B$$

۴) **تفاضل دو مجموعه** : تفاضل مجموعه A و B را با نماد A-B نشان می دهیم و آن مجموعه ای است که اعضای آن در A باشد ولی در B نباشد .



مثال : در صورتی که $A = \{a, m, i, n\}$ و $B = \{b, a, h, o, n, a, r\}$ باشد $A - B$ و $B - A$ را بنویسید .

سوال : آیا $A - B = B - A$ می باشد ؟

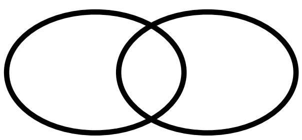
سوال : با یک مثال بررسی کنید آیا $A - B \subseteq A$

سوال : اگر $A \subseteq B$ در این صورت مجموعه $A - B$ چگونه است ؟

سوال: تفاضل مجموعه های مرجع مانند اعداد طبیعی و....را بررسی کنید .

سوال : نشان دهید $A - B = A \cap B'$(نمودار ون)

۵) **تفاضل متقارن دو مجموعه** A و B را با نماد $A \vartriangle B$ نمایش می دهیم و عبارت است از :



$$A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

آیا می توان گفت

$$A \vartriangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

مجموعه ها و احتمال :

پشت یا رو ، گل یا پوچ ، آمدن شش در تاس و ... راکه نتیجه آنها قابل پیش بینی نیست یک پدیده تصادفی می گوییم

به مجموعه ای که در آن سکه پشت یا رو بیاید ، تمام حالت های موجود در پرتاب یک تاس و... را که تمام نتایج ممکن را مشخص می کند فضای نمونه می گویند و با S نمایش می دهیم .

حالت مطلوب (موردنظر) ما پیشامد است .

احتمال عبارت است از نسبت اندازه حالت مطلوب به اندازه فضای نمونه.

یادمان باشد احتمال همیشه صفر تا یک است چرا ؟

سوال : فضای نمونه درهر یک از عبارت های زیر را بنویسید .

الف) پرتاب یک سکه

ب) پرتاب یک تاس

پ) پرتاب دو سکه

ت) پرتاب یک سکه و یک تاس

نکته : فضای نمونه پرتاب n تاس عبارت است از .... و فضای نمونه پرتاب m سکه ....

سوال : احتمال را در هر یک از عبارت های زیر بررسی کنید

الف) در پرتاب یک سکه رو بیاید .

ب) در پرتاب دو سکه فقط رو بیاید .

پ)در پرتاب یک سکه و تاس ، سکه رو و تاس عدد اول باشد .

سوال : دو تاس قرمز و زرد داریم ،احتمال اینکه در پرتاب این دو تاس قرمز زوج و زرد فرد بیاید چقدر است ؟

سوال : دو تاس همزمان پرتاب می شوند احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده ۷ شود چقدر است ؟

سوال : عددی بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ انتخاب می کنیم احتمال آنکه عدد موردنظر مضرب ۳ نباشد چقدر است ؟

سوال : عددی دو رقمی را انتخاب می کنیم احتمال آنکه عدد موردنظر مضرب ۲ باشد ولی مضرب ۳ نباشد چقدر است ؟

پاسخ: مضرب ۲ باشد یعنی $\left[\frac{100}{2}\right] = 50$ که چون دو رقمی است باید اعداد ۲ و۴و۶و۸ را حذف کنیم یعنی ۴۶ عدد و چون نباید مضرب ۳ باشد پس مضارب ۶ را حساب می کنیم $\left[\frac{100}{6}\right] = 16$ که چون دو رقمی ها را می خواهیم ۱۵ تا پس $46 - 15 = 31$ بنابراین $\frac{31}{90}$

فصل دوم

عددهای حقیقی

با هر یک از مجموعه های مرجع اعداد طبیعی ، حسابی ، صحیح و گویا در سال های قبل آشنا شده ایم از مهمترین این اعداد در این فصل اعداد گویا (rational numbers) را دوباره یادآوری و مورد استفاده قرار می دهیم سپس با انواع اعداد گویا از نظر مختوم یا متناوب بودن در نماد اعشاری آشنا می شویم و در انتها با اعداد گنگ(surd numbers) که نماد اعشاری نامختوم و نامتناوب دارند مانند عدد پی آشنا می شویم و به کمک این دو اعداد حقیقی real numbers را معرفی می کنیم

مجموعه اعداد گویا را با نماد Q نمایش می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, b \neq ۰\right\}$$

چند عدد گویا مثال بزنید و نتیجه بگیرید که اعداد طبیعی و صحیح زیرمجموعه ی اعداد گویا می باشند

سوال : تفاضل ، مجموع و حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی ، صحیح و گویا آیا در مجموعه های خودشان وجود دارد ؟ (بسته بودن مجموعه)

نتیجه۱ : (مجموع / تفاضل) هر دو عدد طبیعی عددی .... (مجموع / تفاضل) هر دو عدد صحیح عددی .... (مجموع / تفاضل) هر دو عدد گویا عددی ....می باشد .

نتیجه ۲ : (ضرب / تقسیم) هر دو عدد طبیعی عددی .... (ضرب / تقسیم) هر دو عدد صحیح عددی .... (ضرب / تقسیم) هر دو عدد گویا عددی ....می باشد .

نکته مهم : برای مقایسه دو کسر برای هر قسمت یک مثال می زنیم :

اگر دو کسر دارای صورت برابر باشند کسری بزرگتر است که مخرج کوچکتری دارد

اگر دو کسر دارای مخرج برابر باشند کسری بزرگتر است که

اگر دو کسر مانند $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ داشته باشیم که صورت و مخرج آنها برابر نباشند در این صورت کسر $\frac{a}{b}$ بزرگتر است اگر حاصل ضرب صورتش a در مخرج کسر دیگر d بزرگتر از حاصل ضرب طرفین دیگر یعنی bc باشد .

اگر طرفین وسطین دو کسر برابر بود با هم برابر خواهند بود .

مثال : دو کسر $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۳}{۴}$ را مقایسه کنید ؟

حاصل ضرب ها $۵ \times ۴ = ۲۰$ و $۳ \times ۶ = ۱۸$ چون حاصل ضرب اولی بیشتر شد کسر $\frac{۵}{۶}$ که ۵ صورت آن بود بزرگتر است .

سوال : هر یک از کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید و از کوچک به بزرگ بنویسید ؟

$\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱۱}{۱۵}$ و $\frac{۱۰}{۱۳}$ و $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$

پیدا کردن اعداد گویا بین دو عدد گویای دلخواه :

روش اول : اگر دو عدد را به واحدهای یکسان تبدیل کنیم (هم مخرج کنیم) می توانیم برای پیدا کردن هر تعداد عدد بین آنها صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از عدد مربوطه ضرب کنیم

یعنی برای پیدا کردن یک عدد بین آنها کافی است صورت و مخرج در عدد دو ضربش شود و برای دو عدد ....

مثال : دو کسر $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$ را داریم مطلوب است :

الف : کسری بین این دو کسر ؟

ب : دو کسر بین این دو کسر ؟

پ : ۵ کسر بین این دو کسر ؟

توجه: همین عملیات را این بار با برابر کردن صورت ها انجام می دهیم و مانند قبل در یک واحد بیشتر از تعداد موردنظر در صورت و مخرج ضرب می کنیم(یادمان باشد با صورت های مساوی کسری با مخرج بزرگتر ،کوچکتر خواهد بود)

روش دوم : می توانیم کسر میانگین این دو کسر را هر بار بدست آوریم

مثال : دو کسر $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$ را داریم مطلوب است :

الف : کسری بین این دو کسر ؟

ب : دو کسر بین این دو کسر ؟

روش سوم : مجموع صورت دو کسر بر روی مجموع مخرج آنها کسری خواهد بود که بین دو کسر قبلی واقع است :

مثال : دو کسر $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۵}$ را داریم مطلوب است :

الف : کسری بین این دو کسر ؟

ب : دو کسر بین این دو کسر ؟

پ : ۵ کسر بین این دو کسر ؟

سوال : آیا می توانیم کسرهایی با مخرج مشخص بین دو کسر بنویسیم ؟ بین دو کسر $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۳}{۵}$ چهار تا کسر با مخرج ۵۰ بنویسید ؟

پاسخ : ک.م.م سه عدد بالا عبارت است از :

$۲ \times ۵ \times ۵ = ۵۰$ و $۳ \times ۲ = ۶$ و $۵ = ۵$

در نتیجه $۱۵۰ = ۳ \times ۲ \times ۵ \times ۵$

$$\frac{۳}{۵} = \frac{۳ \times ۳۰}{۱۵۰} = \frac{۹۰}{۱۵۰}$$

و $\frac{۱۲۵}{۱۵۰} = \frac{۵}{۶}$ در نتیجه داریم $\frac{۱۲۵}{۱۵۰} > \frac{۱۲۳}{۱۵۰} > \frac{۱۲۰}{۱۵۰} > \frac{۹۳}{۱۵۰} > \frac{۹۰}{۱۵۰}$ و با تقسیم به **۳** صورت و مخرج داریم

$$\frac{۳۰}{۵۰} < \frac{۳۱}{۵۰} < \frac{۴۰}{۵۰} < \frac{۴۱}{۵۰} < \frac{۱۲۵}{۱۵۰}$$

نتیجه : از مثال های بالا می توان نتیجه گرفت که بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد .

کسر های مرکب (مسلسلی)یا چند طبقه

برای محاسبات با این کسرها کوچکترین خط کسری در هر مرحله را پیدا می کنیم و با آن کار می کنیم .

مثال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید ؟

$$۱ + \frac{۲ - \frac{۱ + \frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۴}}}{۲ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}}} =$$

سوال : مقدار قرینه معکوس کسر $\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}}}$ را بدست آورید ؟

سوال : اگر به صورت و مخرج کسری ، عددی طبیعی را اضافه کنیم ، مقدار کسر :

۱) زیاد می شود

۲) کم می شود

۳) تغییر نمی کند

۴) هر سه مورد می تواند اتفاق بیفتد .

سوال : اگر n عددی مثبت باشد $n + \frac{۱}{n}$ همیشه از کدام یک از اعداد زیر نمی تواند کوچک تر باشد ؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۱

۴) ۰

نکته : مجموع هر عدد مثبت و معکوسش از عدد ۲ بزرگتر و مجموع هر عدد منفی و معکوسش از عدد ۲- کوچکتر است .

سوال : (آزمون نمونه دولتی) اگر $۰ < \frac{a}{b} < ۱$ باشد ، کدام گزینه همواره بزرگ تر از ۱ خواهد بود ؟

۱) $\frac{a-b}{b-a}$

۲) $\frac{b}{a}$

۳) $\frac{a+۱}{b+۱}$

۴) $-\frac{b}{a}$

سوال : بیشترین مقدار $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ به شرط آنکه x و y از اعداد ۱و۲و۳و۵و۱۰ باشند ، کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۰/۱ ۴) ۱۲/۵ ۵) ۲۰

سوال) اگر $a+\frac{۱}{b+\frac{۱}{c}}=\frac{۵۳}{۴۰}$ در این صورت حاصل $\frac{a-c}{b}$ را بدست آورید

سوال) حاصل چند عبارت زیر عددی صحیح است ؟

$a\ )\ \big((۱ \div ۲) \div ۳\big) \div ۴$

$b\ )\ (۱ \div ۲) \div (۳ \div ۴)$

$c\ )\ ۱ \div ((۲ \div ۳) \div ۴$

$e\ )\ ۱ \div \big(۲ \div (۳ \div ۴)\big)$

سوال) به ازای کدام مقدار m عبارت $\frac{\sqrt{۲}+۵}{\sqrt{۸}+m}$ عددی گویا است ؟

سوال) اگر m عددی گویا بین $-\frac{۳}{۵}$ و $-\frac{۱}{۲}$ باشد و n عددی گویا بین $\frac{۵}{۲}$ و ۲- باشد m+n بین کدام دو عدد گویا می تواند باشد ؟

سوال)در کسر $\frac{۱....۱....۱}{۱....۱....۲}$ در هر جای خالی می توانیم علامت تفریق یا ضرب قرار دهیم ، اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین عدد گویای به دست آمده چقدر است ؟

سوال) حاصل عبارت B را بدست آورید ؟

$$B = ۳ + \cfrac{۴}{۳ + \cfrac{۴}{۳ + \cfrac{۴}{\cdots}}} =$$

پاسخ :عبارت بالا با عبارت $B = ۳ + \frac{۴}{B}$ برابر است (چرا ؟) برای بدست آوردن B داریم :

روش اول : حدس زدن : عدد ۴

روش دوم : ضرب عدد B در دو طرف معادله بالا و

کسر تلسکوپی : اگر مخرج کسری برابر با حاصل ضرب دو عدد و صورتش برابر اختلاف همان دو عدد باشد آن را بصورت کسری با صورت یک و مخرج آن دو عدد می نویسیم

یعنی : $\frac{a-b}{a\times b} = \frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}$

سوال : هر یک از کسرهای زیر را به شکل تلسکوپی تبدیل کنید

$$\frac{۱}{۴\times۵} = \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۲}{۵\times۷} =$$

سوال : حاصل عبارت $\frac{۱}{۳۰} + \cdots + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲}$ را بدست آورید

پاسخ : هر کدام از کسرهای بالا را تلسکوپی می کنیم اولی $\frac{۱}{۱\times۲}$ و آخری $\frac{۱}{۵\times۶}$ بنابراین

سوال : اگر $A = \frac{۱}{۱\times۲} + \frac{۱}{۲\times۳} + \cdots + \frac{۱}{۹\times۱۰}$ و $B = \frac{۱}{۱\times۳} + \frac{۱}{۳\times۴} + \cdots + \frac{۱}{۹\times۱۱}$ حاصل A+B و AB را بدست آورید ؟

توجه : در صورتی که بخواهیم عدد گویا را به صورت نماد اعشاری Desimal number بنویسیم کافی است صورت آن کسر را به مخرج آن تقسیم کنیم که در این صورت :

الف : اگر باقی مانده تقسیم صفر بود (یعنی تقسیم بعد از چند مرحله متوقف شود) عدد اعشاری بدست آمده مختوم یا تحقیقی می باشد .

مثال : بررسی کنید که هر کدام از کسرهای زیر یک کسر مولد عدد اعشاری مختوم می باشند .

$\cdot/۴ = \frac{۲}{۵}$ و $\quad = \frac{۵}{۸}$ و

سوال : در مخرج هر یک از کسرهای بالا فقط از کدام عامل های اول استفاده شد که کسر مورد نظر به عدد اعشاری مختوم تبدیل شد .

نکته : کسرهایی که پس از ساده شدن در مخرج آنها فقط عامل های ۲ و ۵ داریم دارای عدد اعشاری مختوم هستند .

سوال : کدام یک از کسرهای زیر نماد اعشاری مختوم دارد؟

$\frac{۴}{۲۶}$ و $\frac{۶}{۲۰۰}$ و $\frac{۱۲}{۳۰}$ و $\frac{۴}{۳۰}$

ب : اگر باقی مانده صفر نبود و خارج قسمت دارای اعدادی باشد که تکرار شوند (تقسیم در دور بیفتد) این کسر دارای نماد اعشاری متناوب خواهد بود که این اعداد تکرار شونده را .... می نامیم .

توجه : در صورتی که تمام ارقام خارج قسمت دارای دوره گردش باشند عدد را متناوب ساده و در غیر این صورت اگر ارقامی در خارج قسمت تکرار نشوند عدد را متناوب مرکب می نامیم .

مثال : کسر $\frac{۱}{۳}$ با تقسیم صورت به مخرج عبارت است از :

کسر $\frac{۳}{۷}$ با تقسیم صورت به مخرج عبارت است از:

سوال : نماد اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید و شرایط مربوط به متناوب ساده یا مرکب بودن یک کسر را نتیجه بگیرید

$\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۳}{۳۵}$ و $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۵}{۱۸}$ و $\frac{۵}{۹}$ و $\frac{۸}{۱۵}$ و $\frac{۱۰}{۱۱}$ و $\frac{۴}{۷}$

نتیجه : در کسرها پس از ساده کردن اگر در مخرج عامل های غیر از ...... و....... داشته باشیم کسر دارای نماد اعشاری متناوب ساده می باشد (همگی دوره گردش)

در کسرها پس از ساده کردن اگر در مخرج بجز عامل های ۲ یا ۵ عامل های دیگری هم داشته باشیم کسر دارای نماد اعشاری ....

سوال : در کسر کوچک تر از واحد $\frac{۳x}{۶۳۰}$ مطلوب است تعیین x به طوری که :

الف : کسر مورد نظر مختوم باشد

ب : کسر موردنظر متناوب ساده باشد

پ : کسر مورد نظر متناوب مرکب باشد .

سوال : در مورد هر یک از اعداد زیر آنها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید .

$۰/\overline{۲}$ و $۰/۲\overline{۳}$ و $۰/\overline{۲۲}$ و $۰/\overline{۳}$ و $۰/۳$ و $۰/۲$

سوال : کسر مولد عدد اعشاری $۰/\overline{۲}$ را بدست آورید .

پاسخ : فرض کنیم کسر موردنظر x باشد در این صورت :

$$x = ۰/\overline{۲}\ ,۱۰x = ۲/\overline{۲}$$

اگر عبارت های بالا را از هم کم کنیم:

$$۱۰x - x = ۲$$

پس $x = \frac{۲}{۹}$

سوال : کسر مولد عدد اعشاری $۰/\overline{۲۳}$را بدست آورید .

پاسخ : مانند عبارت بالا :

چند سوال : در مرحله اول چه مضربی از ۱۰ را در دو طرف ضرب کردیم ؟

در تفریق کدام قسمت از سمت راست حذف شد ؟

صورت و مخرج کسر موردنظر چه اعدادی می باشند و چه ارتباطی با اعداد صورت و مخرج کسر قبلی دارند ؟

سوال : کسر مولد عدد اعشاری $۰/۲\overline{۳}$ را بدست آورید

پاسخ :

$$x = ۰/۲\overline{۳}\ ,۱۰x = ۲/\overline{۳}\ ,۱۰۰x = ۲۳/\overline{۳}$$

$$۱۰۰x - ۱۰x =$$

سوال : کسر مولد عدد اعشاری $۳/۲\overline{۳}$ را بدست آورید .

نتیجه : برای محاسبه سریع می بینیم که صورت کسرهای مولد بصورت زیر محاسبه می شود :

تمام ارقام قبل و بعد ممیز – ارقام بدون دوره گردش

و مخرج کسرهای مولد بصورت زیر محاسبه می شود :

به تعداد ارقام دوره گردش بعد ممیز عدد ۹ و غیر دوره گردش بعد ممیز صفر

مثال : هر یک از نماد های اعشاری زیر را بصورت کسری بنویسید .

$۰/\overline{۲۳}$ و $۰/\overline{۲}$ و $۰/۲\overline{۳}$ و $۳/۲\overline{۳}$

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

$۰/\overline{۲} + ۰/\overline{۷} =$

$۳/۲\overline{۱} - ۱/\overline{۲۱} =$

سوال : درستی و نادرستی عبارت های زیر را بررسی کنید ؟

الف : $۰/۳۱\overline{۹} = ۰/۳۲$

ب : $۰/\overline{۴} = ۰/۴$

پ : $۱/\overline{۹} = ۲$

ت : $۰/۳\overline{۹} = ۰/۱\overline{۳} \times ۳$

ث : $۰/\overline{۱۳۰} = ۰/\overline{۱۳}$

ه : $۰/\overline{۳۳} = ۰/\overline{۳}$

سوال : رقم بیستم و سی دوم و صدم در هر یک از کسرهای زیر چند است ؟(راهنمایی : پس از تبدیل از تقسیم عدد مورد نظر به تعداد ارقام دوره گردش استفاده کنید)

$\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۳}{۱۸}$ و $\frac{۵}{۷}$

سوال : اگر $\frac{b}{۱۱} = ۰/\overline{۵a}$ حاصل $a+b$ را بدست آورید ؟

پاسخ :

$$\frac{۵a}{۹۹} = \frac{b}{۱۱} \rightarrow \frac{۵a}{۹} = \frac{b}{۱} \rightarrow ۵a = ۹b \rightarrow$$

A عددی است که یکی از مضارب ۹ که بین ۵۰ تا ۶۰ است را می سازد بنابراین :

عدد گنگ : عددی را که بعد از تقسیم تعداد ارقام اعشاری آن نامتناهی و بدون دوره تناوب باشد عدد گنگ می نامیم و با نماد Q'یاQ^C نمایش می دهیم

مانند : ... ۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱و π و ...

تذکر : اعداد رادیکالی که جذر کامل ندارند عدد گنگ می باشند

مثال :

سوال : هر یک از اعداد $۰/۱\overline{۲}$ و $\sqrt{۶۵}$ و $۰/۱۲۰۱۲۰۰۱۲$ و $\frac{۲}{\pi}$ را از نظر گویا یا گنگ بودن بررسی کنید

نکته : مجموعه اجتماع اعداد گویا و گنگ را مجموعه اعداد حقیقی می نامیم و داریم :

$Q \cup Q' = R$ و $Q \cap Q' = \emptyset$

توجه : داریم : $N \subseteq \qquad\qquad \subseteq R$

سوال ۱ : جمع یک عدد گویا با یک عدد گنگ عددی ....

سوال ۲ : جمع هر دو عدد گنگ مانند $۲+\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$ عددی ....

سوال ۳ : حاصل ضرب عددی گنگ در عدد گنگ دیگر می تواند گویا باشد مانند ....

سوال ۴ : حاصل ضرب عدد گویای غیر صفر در عددی گنگ عددی ....

سوال ۵ : قرینه و معکوس هر عدد گنگ عددی ....

سوال ۶ : سه عدد گنگ بین -۲ و $-\sqrt{۳}$ بنویسید ؟(راهنمایی : به عدد اعشاری تبدیل کنیم و چند دهم در این فاصله پیش برویم)

سوال ۷ : بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ چند عدد گنگ بنویسید .

سوال ۸ : هر یک از اعداد زیر را روی محور نمایش دهید و یک بار نیز بدون محور مشخص کنید هر عدد موردنظر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد .

$\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $-۲-\sqrt{۳}$

توجه : برای عدد متوالی بعد از هر عدد مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ می توانیم از انتهای کمان $\sqrt{2}$ روی محور نیز یک واحد عمود کنیم و مثلث جدید را به کمک آن روی محور و نه روی وتر مثلث قبلی بسازیم

روش دوم استفاده از خواص نامساوی ها :

$$1 < \sqrt{2} < \sqrt{4} \rightarrow -2 < -\sqrt{2} < -1 \rightarrow$$

سوال : (مارپیچ ارشمیدس) اگر بر روی وتر مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع یک واحد مثلث جدیدی با ضلع یک و وتر قبلی بسازیم وتر مثلث مرحله ۶ و مرحله n و همچنین محیط و مساحت آنها را بدست آورید ؟

نتیجه : الگوی هندسی مربوط به مارپیچ بالا بصورت :

وتر مرحله ی n برابر $\sqrt{n+۱}$

محیط مرحله ی n برابر $\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}+۱$

مساحت : $\frac{\sqrt{n}}{۲}$

سوال : میانگین اعداد $\sqrt{۲}-۱$ و $-۲+\sqrt{۳}$ را بدست آورید ؟

بازه ها :

فاصله بین هر دو عدد حقیقی را که بی شمار عدد در آن است را یک فاصله یا بازه می گوییم

انواع بازه ها : بازه ی بسته a تا b را با نماد $[a,b]$ نشان می دهیم و به صورت نمادی $\{x|x\in R\,,a\le x\le b\}$

می توانیم روی محور این مجموعه را بصورت مقابل نمایش دهیم

بازه ی نیم باز :

بازه نیم باز از راست :

بازه ی باز :

بازه ی نامحدود از چپ $[-\infty,a]$

بازه ی نامحدود از راست $[a,+\infty]$

سوال : بازه های مربوط به هر یک از عبارت های زیر را روی محور نشان دهید و مشخص کنید چند عدد صحیح در این بازه وجود دارد ؟ (راهنمایی : برای تعداد میتوانیم از مقدار تقریبی جذر استفاده کنیم)

الف : $[-۱,+۲] \cup [-\sqrt{۸},۳]$

ب : $[-۱,+۲] \cap [-\sqrt{۸},۳]$

سوال : اگر $A=\{x|x \in R, x^۲ < ۶\}$ و $B = \{x|x \in R, x^۲ > ۹\}$ را مشخص و بازه ی $A \cup B$ و $A \cap B$ را روی محور نمایش دهید .

سوال : بازه ی $A_n = \left(\frac{-۱}{n},\frac{۱}{n}\right)$ را در نظر می گیریم مطلوب است :

الف : $A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_{۱۳۹۵}$

ب : $A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_{۱۳۹۵}$

قدرمطلق :

فاصله ی هر عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدا را قدرمطلق آن عدد می نامیم برای مثال فاصله اعداد ۲ و ۲- ، ۳/۵ و $\sqrt{۲}+۱$ و $\pi+۱$ عبارت است از :

$|-۲| = ۲$ و $|۲| = ۲$

این فاصله ها را روی محور نمایش دهید :

همچنین می توانیم فاصله هر دو نقطه دلخواه را نیز بدست آوریم برای مثال فاصله ی عدد ۲ و ۲- عبارت است از

$$|-۲ - ۲| = |۲ - (-۲)| = ۴$$

توجه : فاصله ی هر دو نقطه مانند a و b را بصورت زیر نمایش می دهیم :

نکته ۱ : (خاصیت جابجایی در قدرمطلق) در محاسبه فاصله ی هر دو نقطه دلخواه مانند a و b دیدیم که :

$$|a - b| = |b - a|$$

نکته ۲ : در حالت کلی برای قدرمطلق هر عدد حقیقی مانند a داریم :

$$|a| = \begin{cases} a \ , a > ۰ \\ ۰ \quad a = ۰ \\ -a \quad a < ۰ \end{cases}$$

برای مثال داریم :

$|۲/۳| =$ $\qquad$ $|-۵/۷| =$ $\qquad$ $|۲ + \sqrt{۵}| =$ $\qquad$ $|-۲ + \sqrt{۵}| =$

سوال : اگر $a = ۱ + \sqrt{۲}$ و $b = -۱ - \sqrt{۲}$ در این صورت حاصل $|a| + |b|$ را بدست آورید .

سوال : اگر $a > ۱$ باشد در این صورت حاصل عبارت $|a - ۳| + |۲ - a|$ را بدست دآورید

سوال : اگر داشته باشیم $۱ < a < ۳$ باشد حاصل عبارت $|۵ - a| + |a - ۴|$ را بدست آورید .

سوال : حاصل $|۳ + ۲ \div ۵ \times ۲ - ۴| + |\sqrt{۶} - \sqrt{۵}|$ را بدست آورید

سوال: حاصل $\left||۲ - \sqrt{۵}| + \sqrt{۵} - ۲\right|$ را بدست آورید .

سوال : حاصل $|\pi + ۲| - |\pi - ۴|$ را بدست آورید .

توجه : اگر a عددی حقیقی باشد داریم :

$\sqrt{a^۲} = |a|$

$\sqrt{(-۳)^۲} =$

$\sqrt{(۱ - \sqrt{۲})^۲} =$

سوال : در مورد $|ab|$ یعنی قدر مطلق حاصل ضرب a و b چه می توان گفت در صورتی که داشته باشیم $|ab| = |a||b|$

پاسخ : حالت اول اگر $a > ۰$ و $b > ۰$

سوال : اگر $a = ۲ , b = -۳ , c = -۱\frac{۲}{۳}$ باشد ، حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید .

الف : $|a - b + |b - c| + ۱|$

ب : $\left|a - |bc|\right| + ۲|a| + |c|$

پ : $\frac{|ab|}{|a| \times |c|} - ۱$

سوال : نقطه ای مانند B روی محور داریم که مختصات آن $a + ۲$ می باشد و فاصله آن از مبدا ۳ واحد است a را مشخص کنید

پاسخ : تعریف قدرمطلق $|a + ۲| = ۳$ در صورتی که عبارت داخل قدرمطلق مثبت باشد داریم $a + ۲ = ۳$ و داریم.............

در صورتی که عبارت داخل قدرمطلق منفی باشد داریم

نتیجه : سوال بالا مثالی از حل یک معادله قدرمطلقی بود که در آن داخل قدرمطلق را با دو حالت مثبت و منفی حل کردیم

به طور کلی داریم : اگر

$$|a| = b$$

آنگاه داریم :

$$a = b \text{ یا } a = -b$$

سوال : هر یک از معادله های قدر مطلقی زیر را حل کنید.

الف : $|x+2| = 6$

ب : $\left|\frac{x+4}{2x+1}\right| = 1$

توجه : می دانیم حاصل جمع دو عدد مثبت هیچگاه صفر نمی شود بنابراین می توانیم بگوییم که معادله ای مانند معادله $|x| + 2 = 0$ هیچگاه جوابی ندارد

سوال : معادله ی $|x - 1| + 3 = 0$ چند ریشه (جواب) دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جوابی ندارد .

سوال : جواب های معادله ی $|x+۱|+|۲x-۱|+۳|x|=۰$ را بدست آورید .

پاسخ : چون مجموع چند عدد نامنفی صفر شده نشان می دهد هر کدام از آنها باید صفر باشند پس :

نامعادلات قدرمطلق :

وقتی داریم $|a| < ۲$ یعنی اینکه :

و وقتی می نویسیم $|a| > ۲$ یعنی اینکه :

نکته : در حالت کلی اگر $|a| \le b \ \to -b \le a \le b$ و اگر $|a| \ge b \to a \ge b \ or \ a \le -b$

نکته اول : برای هر عدد حقیقی داریم : $a+|a| \ge ۰$

چون اگر a عددی مثبت باشد طبق تعریف قدرمطلق $a+a=۲a \ge ۰$ و اگر منفی باشد

و در حالت صفر بودن

نکته دوم : مجموع قدرمطلق دو عدد همیشه بزرگتر از قدرمطلق مجموع آنها است

$$|a+b| \le |a|+|b|$$

برای مثال :

حالت تساوی چه زمانی اتفاق می افتد ؟

نکته سوم : آیا می توانیم بگوییم همواره $|x| \ge x$ در مورد حالت برعکس آن چطور ؟

سوال : اگر $|x| < ۳$ باشد ، حاصل $|x-۳| + |x+۳|$ را بدست آورید .

سوال : اگر $\frac{-ab^۲}{۳c} = \frac{|a||b^۲|}{۳|c|}$ باشد کدام یک از عبارات زیر درست خواهد بود ؟

الف : $abc > ۰$

ب : $b^۲a > ۰$

پ : $ac < ۰$

ت : $b^۲c > ۰$

سوال تکمیلی : جواب دستگاه $\begin{cases} y = |x-۲| \\ y = |x+۱| \end{cases}$ را بدست آورید .

انشای ریاضی این فصل :

امیدوارم به اندازه ی تمام اعداد حقیقی خدا ما رو دوست داشته باشه و تمام کارهامون گویای اون باشه که عضوی از مجموعه افرادی هستیم که تو راه راست حرکت می کنند دوست دارم قدرمطلقم هر لحظه با خودم نیاز به منفی نداشته باشه چون می خوام همیشه مثبت بمونم و قدرمطلق من با هیچ آدمی بیشتر از چند دهم نباشه و قدرمطلقمون با نقطه آغاز هر لحظه بیشتر و با خدا به کمترین حد ممکن برسه و تو بازه ی زندگی که اجتماع بازه های کوچکی مثل هر روز و هر ساعته، بتونیم یه بازه ی موفق داشته باشیم .

لطفا انشای ریاضی این فصل خودتون رو بنویسید .....

فصل سوم:

استدلال و اثبات در هندسه

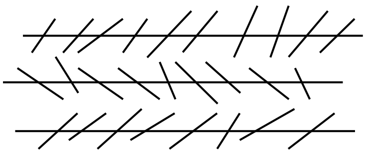
استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی ، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است .

مثال : کیک تولدی داریم که در قطعات آن دو قطعه به ابعاد ۶ و ۴ و ۲ و یک قطعه به ابعاد ۲ و ۸ و ۲ وجود دارد شما کدام یک از این کیک ها را انتخاب می کنید ؟

استدلال ما برای انتخاب بر کدام دانسته ی قبلی ما بیان شد ؟

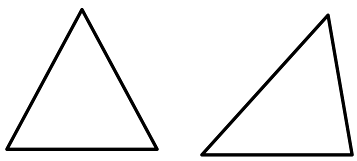
در هندسه استفاده از ترسیم و شکل ها معمول است اما نمی توان بر اساس این روش یعنی استدلال به کمک ترسیم به طور کامل اکتفا کنیم

مثال : با مشاهده تشخیص دهید آیا در شکل زیر خطوط رسم شده موازی می باشند ؟



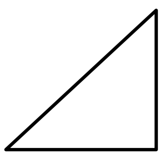
سوال : محل برخورد ارتفاع های مثلث در چه ناحیه ای از آن قرار دارد ؟

پاسخ : استفاده از رسم و دیدن :



استفاده از مثال های متعدد :

مثال نقض برای حالت های بالا : مثلث قائم الزاویه و مثلث با یک زاویه باز :



می دانیم دیدن ، استفاده از حواس و ارائه مثال های متعدد و توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کافی نیست .

آشنایی با اثبات در هندسه :

در روند استدلال از اطلاعات مسئله (فرض یا داده ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدنبه خواسته مسئله (حکم) استفاده می کنیم .

از حقایق و اصولی که درستی آنها را می دانیم می توان مطالب زیر را یادآوری کرد :

۱ – در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی برابر ....درجه است .

۲ – هر زاویه خارجی در مثلث برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور است .

۳ – مجموع زاویه های .... هر مثلث ۳۶۰ درجه است .

۴ – مثلث دارای اجزایی مانند ارتفاع ، میانه ، نیمساز و عمودمنصف است که

الف – ارتفاع : پاره خطی است که از رأس بر ضلع مقابل عمود می شود

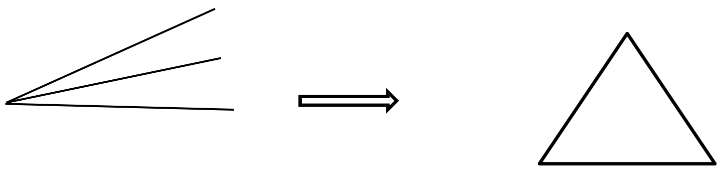
ب – میانه : پاره خطی است که از رأس بر وسط ضلع مقابل وصل می شود .

پ – نیمساز : خطی که از رأس مثلث می گذرد و زاویه ی آن را نصف می کند .

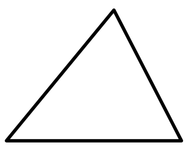
ت – عمودمنصف : خطی که بر وسط هر ضلع مثلث عمود باشد .

۵ – محل برخورد ارتفاع ها در مثلث با زاویه های تند در ....مثلث ، در مثلث با زاویه قائمه روی وتر و در مثلث با زاویه .... بیرون مثلث می باشد.

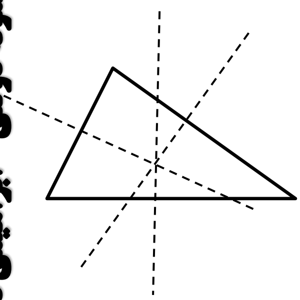
۶ – محل برخورد نیمسازها در مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله می باشد .



۷ – میانه های هر مثلث همرس هستند و محل برخورد آنها گرانیگاه یا نقطه تعادل مثلث است .



۸ – عمودمنصف های هر مثلث همرس اند و محل برخورد آنها از رأس های مثلث به یک فاصله اند



۹ – کوچک ترین زاویه خارجی هر مثلث ، مکمل بزرگ ترین زاویه ی داخلی آن می باشد .

۱۰ – در هر مثلث قائم الزاویه ، ضلع روبه رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است .

۱۱ – مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر است با اندازه ی ارتفاع مثلث .

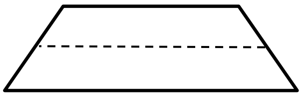
۱۲ – در هر مثلث متساوی الاضلاع با ضلع a ، طول ارتفاع برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$.

۱۳ – با توجه به نکته ۱۲ مساحت مثلث متساوی الاضلاع برابر است با :

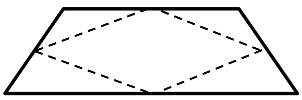
۱۴ - زاویه بین ارتفاع و میانه در مثلث قائم الزاویه برابر است با اندازه ی تفاضل دو زاویه دیگر

۱۵ – خواهیم دید که در هر مثلث قائم الزاویه اندازه ی ضلع مقابل به زاویه ۶۰ درجه با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر آن مثلث برابر است .

۱۶ – در هر ذوزنقه ، در صورتی که وسط دو ساق را به هم وصل کنیم ، پاره خطی بوجود می آید که اندازه ی آن با نصف مجموع دو قاعده و این پاره خط با دو قاعده موازی می باشد .

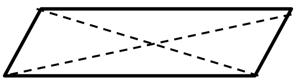


۱۷ – با وصل کردن وسط ضلع های یک ذوزنقه به یکدیگر یک لوزی بدست می آید که مساحت آن نصف مساحت ذوزنقه است .

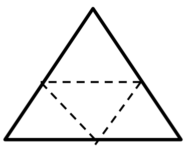


۱۸ – در هر مثلث نسبت ارتفاع رسم شده از ضلع اولی به دومی برابر است با نسبت اندازه ضلع دومی به اولی .

۱۹ – از برخورد قطرهای متوازی الاضلاع چهار مثلث با با مساحت های مساوی بدست می آید .



۲۰ – اگر وسط اضلاع هر مثلث را به هم وصل کنیم چهار مثلث بدست می آید که محیط هر کدام از آنها نصف محیط مثلث اولیه و مساحت هر کدام ربع $(\frac{۱}{۴})$ مساحت مثلث اولیه خواهد بود .



۲۱ – هرگاه در دو چند ضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده باشد یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد ، آن دو چند ضلعی را متشابه گوییم .بنابراین داریم :

الف – هر دو دایره ، مربع و مثلث متساوی الاضلاع با هم متشابه اند .

ب – نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط ها برابر است .

پ – اگر دو مثلث با نسبت k متشابه باشند مساحت آنها با نسبت $k^۲$ خواهد داشت .

ت – در دو مثلث متشابه نسبت مساحت ها برابر است با مجذور نسبت تشابه آنها

۲۲ – در هر مثلث متساوی الساقین عمودمنصف ، میانه ، نیمساز و ارتفاع بر هم منطبق می باشد ، یادمان هست که در مثلث متساوی الساقین دو زاویه پای ساق با هم برابر خواهند بود .

۲۳ – مثلث متساوی الاضلاع با زاویه های ۶۰ درجه خواص متساوی الساقین را نیز دارد .

۲۴ – در هر مثلث طول هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر و از مجموع آنها کوچکتر می باشد (خاصیت مثلثی)

۲۵ – حالت های هم نهشتی دو مثلث در حالت کلی را به یاد داریم : تساوی دو ضلع و زاویه بین ، تساوی دو زاویه و ضلع بین و تساوی سه ضلع .

۲۶ – تساوی دو مثلث قائم الزاویه را در دو حالت کلی تساوی وتر و یک ضلع و وتر و یک زاویه داریم .

۲۷– زاویه ای که بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد را کاو و زاویه کمتر از ۱۸۰ درجه را کوژ می نامیم و به چندضلعی که زاویه ای بیشتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد چندضلعی مقعر و به چندضلعی که زاویه هایش کمتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد محدب می گوییم .

۲۸ – در هر n ضلعی با توجه به اینکه از هر رأس به رأس های دیگر بجز رئوس کناری (دو رأس مجاور) می توانیم قطر رسم کنیم به تعداد $(n-۲)$مثلث می توان رسم کرد بنابراین مجموع زوایای داخلی این n ضلعی عبارت است از

$$(n-۲)\times ۱۸۰$$

۲۹– مجموع زوایای خارجی در هر مثلث را می توان در یک دایره قرار داد یعنی مجموع آنها ۳۶۰ درجه می باشد .

۳۰ – یک n ضلعی با ضلع ها و زاویه های مساوی را منتظم می نامیم و در هر n ضلعی منتظم با توجه به تساوی زوایا مجموع بین این n زاویه تقسیم می شود بنابراین اندازه هر زاویه داخلی برابر است با

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$$

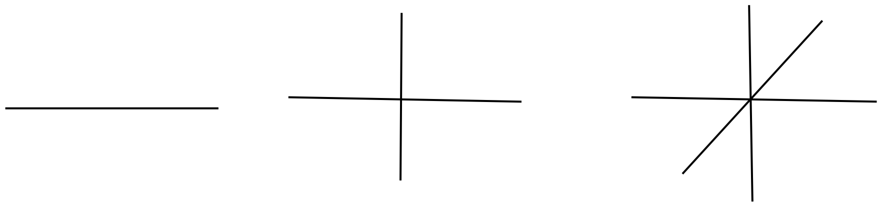
۳۱ – با توجه به نکته ۲۹ در هر n ضلعی منتظم اندازه هر زاویه خارجی یعنی ۳۶۰ بین n زاویه تقسیم می شود بنابراین اندازه هر زاویه خارجی برابر است با :

$$\frac{۳۶۰}{n}$$

۳۲ – تعداد قطرهای یک nضلعی برابر است با :

$$\frac{n(n-۳)}{۲}$$

۳۳ – در مورد یک نقطه می دانیم که بی شمار خط راست از آن عبور می کند و در مورد تعداد ناحیه ها در صورتی که n خط که از یک نقطه عبور کند رسم کنیم هر خط صفحه را به دو ناحیه تقسیم می کند بنابراین با n خط تعداد ناحیه ها برابر است با ۲n ناحیه.

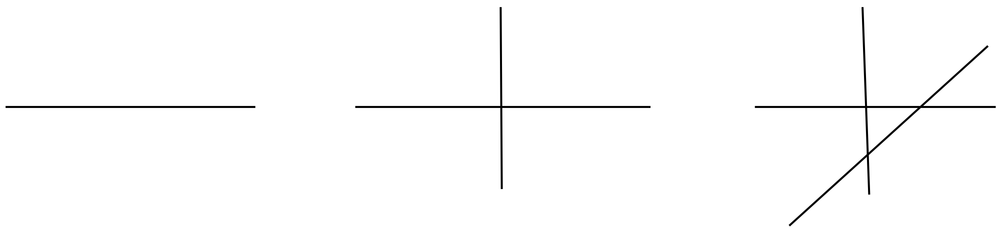


۳۴ – به کمک n نقطه می توانیم با انتخاب هر بار دو نقطه و وصل کردن آنها به یکدیگر حداکثر $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$ خط راست رسم کنیم

این مسئله برابر است با اینکه از n نقطه حداکثر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ خط راست عبور می کند .

۳۵ – اگر n خط راست در صفحه رسم کنیم و تمام خطوط همدیگر را قطع کنند حداکثر تعداد ناحیه های بوجود آمده برابر است با $\frac{n(n+۱)}{۲} + ۱$

برای مثال داریم :

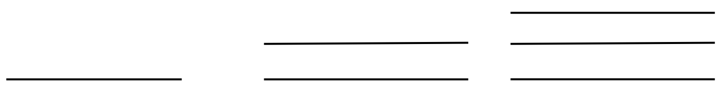


برای n=۱ داریم :

برای n=۲ داریم :

برای n=۳ داریم :

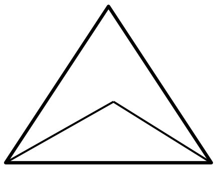
۳۶ – برای یک خط راست تعداد ناحیه ها برابر ۲ ناحیه و برای ۲ خط راست موازی تعداد ناحیه ها برابر ۳ عدد بنابراین برای n خط راست موازی تعداد ناحیه ها n+۱ خط خواهد بود .



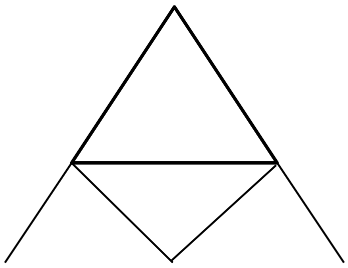
۳۷ – روی یک خط با n نقطه می توانیم به تعداد انتخاب ۲ نقطه هربار برای تشکیل یک پاره خط به تعداد $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$ پاره خط خواهیم داشت و برای هر نقطه از دو سر خط می توانیم دو نیم خط رسم کنیم بنابراین برای n نقطه ۲n نیم خط خواهیم داشت .

۳۸ – از هر نقطه می توانیم در صفحه به تعداد $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$ زاویه رسم کنیم (یک سر زاویه نقطه ثابت و سر دیگر زاویه انتخاب نقطه ای از صفحه) که از ۱۸۰ درجه کمتر باشد .

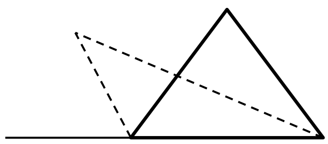
۳۹ – از برخورد دو نیمساز داخلی مثلث زاویه ای بدست می آید که اندازه آن برابر است با مجموع اندازه نیمساز زاویه سوم با زاویه ۹۰ درجه .



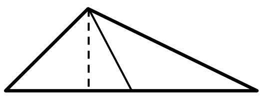
۴۰ – از برخورد دو نیمساز خارجی مثلث زاویه ای بدست می آید که اندازه آن برابر است با تفاضل اندازه نیمساز زاویه سوم با ۹۰ درجه .



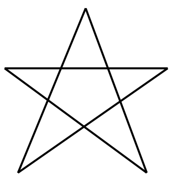
۴۱ – از برخورد نیمساز داخلی و نیمساز زاویه خارجی رأس مجاور زاویه ای بدست می آید که اندازه آن برابر است با است با نیمساز زاویه سوم .



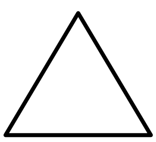
۴۲ – هر میانه مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند . یعنی مساحت های بدست آمده برابر خواهند بود . در شکل زیر میانه ها یکدیگر را با نسبت $\frac{1}{2}$ قطع می کنند



۴۳ – مجموع زاویه های داخلی یک ستاره پنج سر برابر ۱۸۰ درجه می باشد .



۴۴ – چندضلعی هایی که دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد مرکز تقارن نیز خواهد داشت بنابراین مثلث مرکز تقارن ندارد و در n ضلعی های منتظمی که n زوج باشد مرکز تقارن دارد و به تعداد n محور تقارن دارد .



۴۵

– در بحث هندسه قضیه تالس نیازمند دانستن خواص تناسب می باشد ، خواص تناسب را در زیر یادآوری می کنیم :

اگر کسرهای $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ داشته باشیم خواهیم داشت :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \mathrm{ad}=\mathrm{bc}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

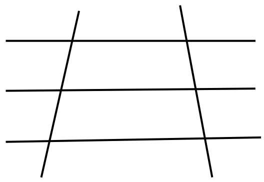
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

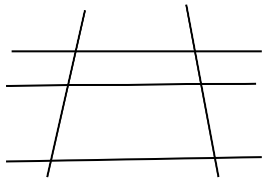
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+b}{c+d}$$

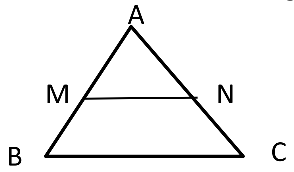
۴۶ – اگر چند خط موازی داشته باشیم که فاصله هایی یکسان داشته باشند روی خط موربی پاره خط های مساوی ایجاد کنند روی خطوط مورب دیگر نیز پاره خط های مساوی ایجاد می کنند . شکل زیر را کامل می کنیم



۴۷ – اگر خطوط موازی داشته باشیم که خطوط موربی را قطع کنند و روی یکی از آن ها پاره خط هایی مشخص جدا کنند روی بقیه خطوط با همان نسبت پاره خط هایی را ایجاد می کنند . شکل زیر را کامل می کنیم



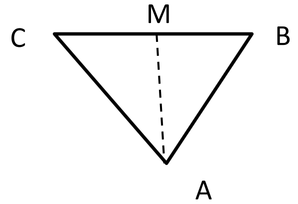
۴۸ – قضیه تالس : در مثلث اگر خطی موازی با قاعده مثلث رسم کنیم و دو ضلع دیگر را قطع کند روی آنها پاره خط هایی با نسبت یکسان جدا می کند .



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

بنا به خاصیت های تناسب همچنین داریم $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

۴۹ – در هر مثلث نسبت ضلع های مقابل به نیمسازها با نسبت دو ضلع دیگر برابر است یعنی در شکل زیر داریم



$$\frac{MB}{CM} = \frac{AB}{AC}$$

۵۰ – در صورتی که در چندضلعی زاویه های متناظر دوبه دو برابر باشند ، اضلاع متناظر دوبه دو متناسب باشند و تعداد ضلع های آنها مساوی باشد دو چند ضلعی متشابه خواهند بود .

نسبت هر دو ضلع متناظر را در شکل های متشابه نسبت تشابه می نامیم .

برای تشابه دو لوزی تساوی زاویه ها کافی است چون ضلع ها به یک نسبت بزرگ یا کوچک می شوند (با هم برابرند)

برای مستطیل می توانیم از نسبت طول به عرض و زاویه های بین دو قطر نیز استفاده کنیم .

برای دو شکل متشابه نسبت حجم دو شکل با عدد $k^{۳}$ برابر است (k نسبت تشابه)

برای دو مثلث یکی از شرایط زیر لازم است که عبارت است از :

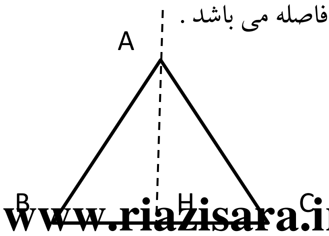
۱ – تناسب سه ضلع

۲ – تساوی دو زاویه

۳ – تناسب دو ضلع و تساوی زاویه ی بین دو ضلع .

همان طور که می دانیم اطلاعات مسئله را فرض ، اطلاعاتی که باید درستی آنها را نشان دهیم حکم و روش نشان دادن این ارتباط را استدلال می نامند و به هر مسئله ای که شامل این مطالب باشد را قضضیه می نامند در مثال های زیر نمونه هایی از این قضیه ها را داریم

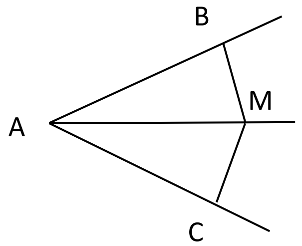
سوال ۱ – فاصله هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط تا دو سر آن پاره خط به یک فاصله می باشد .



فرض : با توجه به عمودمنصف بودن داریم: $BH = CH$ و $H_1 = H_2$

حکم : $AB = AC$

استدلال : از خاصیت همنهشتی دو مثلث کناری استفاده می کنیم (ض ز ض):

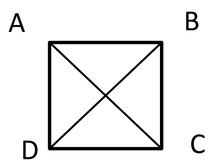


سوال ۲ – هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن فاصله ای یکسان دارد .

فرض : $A_1 = A_2$

حکم :

استدلال : می توانیم از خاصیت وتر و یک زاویه استفاده کنیم :

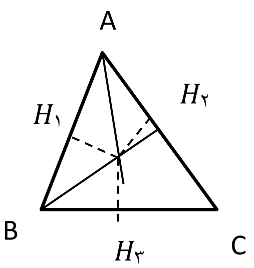


سوال ۳ – قطرهای مربع برابرند

فرض :

حکم : $DB = AC$

استدلال : از دو مثلث ABD و ABC و همنهشتی آنها استفاده کنیم :



سوال ۴ – نیمسازهای یک مثلث همرس اند .

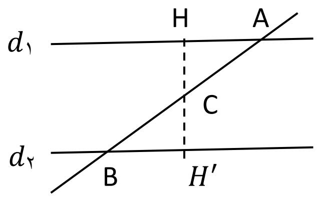
فرض : OA و BO نیمسازهای مثلث می باشند

حکم : CO نیمساز مثلث می باشد

استدلال : AO نیمساز بنابراین $OH_۱ = OH_۲$ و همچنین BO نیمساز بنابراین ....

از تساوی های بالا بدست می آید $OH_۲ = OH_۳$ پس CO نیمساز مثلث می باشد بنابراین این سه نیمساز مثلث می باشد و همرس

سوال ۵ – دو خط موازی با قطع کردن خط مورب زاویه های تند مساوی ایجاد می کنند .



فرض : $d_۱ \parallel d_۲$

حکم: $A_۱ = B_۱$

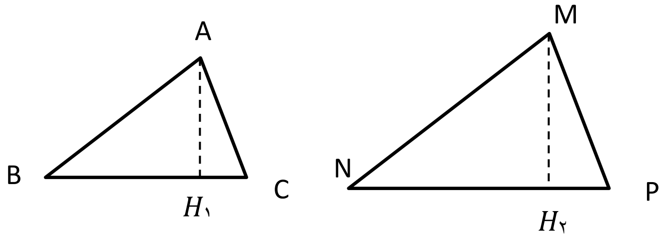
استدلال : از وسط AB بر خطوط موازی عمودی رسم می کنیم داریم دو قائم الزاویه بالا با هم همنهشت هستند بنابراین :

سوال ۶ – در دو مثلث متشابه ، نسبت مساحت دو مثلث با مجذور نسبت تشابه برابر است .

فرض : $ABC \sim MNP$ و $\frac{MN}{AB} = K$

حکم : $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = K^۲$

استدلال :



$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{MH_۲ \times NP}{۲}}{\frac{AH_۱ \times BC}{۲}} = \frac{MH_۲}{AH_۱} \times \frac{NP}{BC} = K \times K = K^۲$$

گام های حل مسئله :

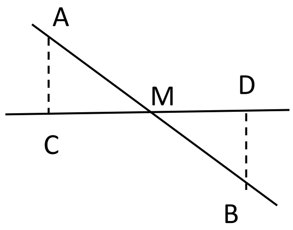
۱) خواندن صورت مسئله و مشخص کردن مفاهیم تشکیل دهنده آن

۲) یک شکل مناسب با توجه به صورت مسئله برای آن رسم کنیم .

۳) داده های مسأله (فرض) و خواسته های آن (حکم) را مشخص کنیم .

۴) برای رسیدن از فرض به حکم راه حل (استدلال) پیدا کنیم .

مثال : دو روستای A و B با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل هستند . در آن منطقه جاده آسفالته ی مستقیمی ساخته شده است که این دو روستا در دو طرف آن واقع شده اند و جاده آسفالته درست از وسط جاده خاکی عبور می کند راه سازی می خواهد از هر روستا یک جاده آسفالته با کوتاه ترین مسیر احداث کند . از روستای A یک جاده مستقیم به طول ۴ کیلومتر درست شده است برای جاده B این جاده به چه طولی احداث خواهد شد ؟



گام اول : مفاهیم به کار رفته : خط ، پاره خط و مفهوم کوتاه ترین مسیر

گام دوم :رسم شکل

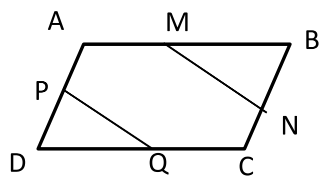
گام سوم : فرض : $AM = MB , \hat{C} = \widehat{D} = ۹۰$

حکم : $AC = DB$

گام سوم : یافتن استدلال لازم : از همنهشتی مثلث ها استفاده می کنیم

$AM = MB , M_۱ = M_۲$وتر و یک زاویه بنابراین دو مثلث هم نهشت و اجزای متناظر با هم برابر هستند .

سوال ۷ – در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و M ، N ، P وq وسط اضلاع متوازی الاضلاع می باشد ، ثابت کنید :
MN=PQ



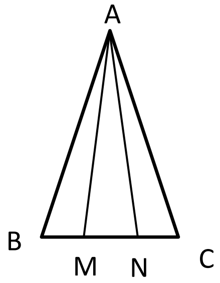
فرض : M وn وسط ضلع های AB و BC و P,Q وسط ضلع های AD و DC می باشد (ضلع های متوازی الاضلاع با هم برابرند)

حکم : MN=PQ

استدلال : از همنهشتی دو مثلث MBN و PDQ استفاده می کنیم که به حالت ض ز ض با هم همنهشت هستند بصورت :

سوال ۸ – در شکل مقابل ، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده ی BC طوری قرار گرفته که BM=NC .

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است .



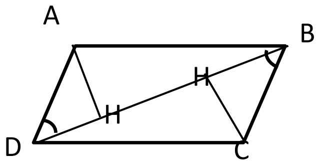
فرض :

حکم :

استدلال :

سوال ۹ – در شکل زیر ABCD متوازی الاضلاع و AH و CH' فاصله های نقاط A و C از قطر BD است نشان دهید

$AH = CH'$



فرض : AD=BC و $AB \parallel DC$ و DB مورب

حکم : $AH = CH'$

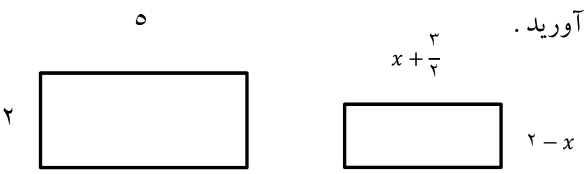
استدلال : همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه را نشان می دهیم

سوال ۱۰ – در یک نقشه با مقیاس ۱ به ۵۰۰۰ فاصله دو نقطه روی نقشه ۷ سانتی متر است . فاصله این دو نقطه در اندازه ی واقعی را بدست آورید ؟

$$\frac{۱}{۵۰۰۰} = \frac{۷}{x}$$

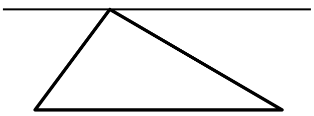
بنابراین ۳۵۰۰۰ = ۷ × ۵۰۰۰ سانتی متر که معادل .... متر و .... کیلومتر است .

سوال ۱۱ – در شکل زیر دو مستطیل با هم متشابه اند مقدار x را بدست آورید .



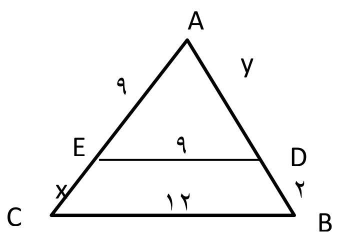
پاسخ : نسبت تشابه در طول ها و عرض ها باید با هم برابر باشد تا دو مستطیل متشابه باشند بنابراین :

تمرین : ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه می باشد



سوال ۱۲ – در صورتی که $\frac{a+۴}{۷} = \frac{b+۲}{۶}$ حاصل $\frac{a}{b}$ را بدست آورید .

سوال ۱۳ – در شکل زیر خط DE موازی با ضلع مثلث می باشد مقادیر x و y را محاسبه کنید .



پاسخ :

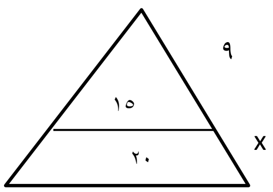
از قضیه تالس می دانیم که خطی موازی با یکی از اضلاع نسبت های متناسب روی دو ضلع دیگر ایجاد می کند و همچنین با توجه به جمع صورت در مخرج کسرها نتیجه زیر را می دهد بنابراین :

$$\frac{۹}{۹+x} = \frac{y}{y+۲} = \frac{۹}{۱۲}$$

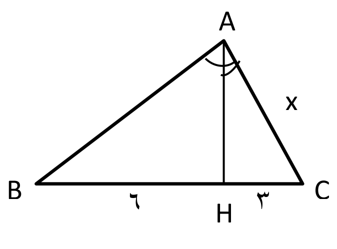
$$\frac{۹}{۹+x} = \frac{۹}{۱۲} \rightarrow$$

$$\frac{y}{y+۲} = \frac{۹}{۱۲} \rightarrow$$

تمرین :



سوال ۱۴ – با توجه به متشابه بودن دو مثلث ABH و ABC اندازه x را بدست آورید. (A قائمه است)



پاسخ :داریم در مثلث قائم الزاویه AHC

$$A_1 + C = 90$$

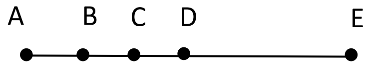
و در مثلث قائم الزاویه ABC داریم

$$B + C = 90$$

در نتیجه داریم: $A_1 = B$ و با توجه به تساوی $H = A = 90$ تناسب روبه رو به ضلع های مساوی را می نویسیم :

$$\frac{CH}{AC}=\frac{AC}{BC}\rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{x}{۹}\rightarrow x^{۲}=۲۷\rightarrow x=\sqrt{۲۷}$$

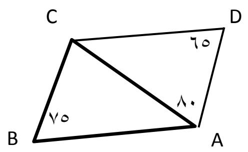
سوال ۱۵ – در شکل مقابل می دانیم AE=۲۰ ، اگر B وسط AC ، C وسط BD و D وسط BE می باشد ، طول DE چند سانتی متر است ؟(مسابقات ریاضی آمریکا)



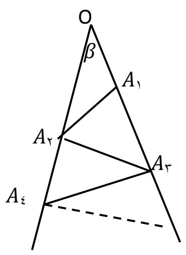
پاسخ :

داریم AB=BC=CD و DE=BD=۲AB و کل پاره خط AE که ۲۰ سانتی متر است را برحسب AB می نویسیم داریم :

سوال ۱۶ – در شکل داریم AB=AC و $\widehat{BAD}=۸۰$ و $\widehat{ABC}=۷۵$ و $\widehat{ADC}=۶۵$ اندازه ی $\widehat{BDC}$ کدام است ؟ (زاویه مورد نظر با رسم کردن قطر BD مشخص می شود) (کانگورو ۲۰۱۱) .



سوال ۱۷ – در این شکل $\beta=۷$ درجه و پاره خط های $OA_۱$ ، $A_۱A_۲$ ، $A_۲A_۳$ و ... با هم برابرند . بیشترین تعداد پاره خط هایی که می توان با همین روند به کمک این شکل رسم کرد ، چند است ؟ ($OA_۱$ اولین پاره خط است) (کانگورو ۲۰۱۰)



(راهنمایی : از مفهوم مثلث متساوی الساقین و زاویه خارجی کمک بگیرید)

سوال ۱۸ – اگر BC بزرگ ترین ضلع مثلث ABC باشد برای زاویه A کدام رابطه همواره صحیح است ؟

۱) از ۶۰ درجه بزرگتر است

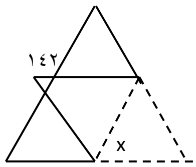
۲) تند است

۳) قائمه است

۴) باز است

پاسخ : می دانیم هر ضلع روبه رو به یک رأس قرار دارد بنابراین رأس روبه رو به ضلع BC باید از بقیه بزرگتر باشد بنابراین بزرگتر از ۶۰ است (اگر برابر بودند ۶۰ درجه بود)

سوال ۱۹ – مثلث متساوی الاضلاعی روبه رو را مطابق شکل تا کرده ایم ، اندازه ی $\hat{x}$ را به دست آورید(تیزهوشان)



سوال ۲۰ – روی پاره خط AB چند مثلث می توان رسم کرد که در دو سر AB شامل دو زاویه ی ۳۰ و ۶۰ باشند ؟(تیزهوشان)

(راهنمایی با دو زاویه ۳۰ و ۶۰ زاویه سوم قائمه است بنابراین تعداد مثلث های قائم الزاویه قابل رسم روی پاره خط با شرایط بالا موردنظر است)

سوال ۲۱ – مجموع دو زاویه خارجی مثلثی ۲۰۰ درجه است . اندازه ی یکی از زاویه های داخلی این مثلث چند درجه است ؟(نمونه دولتی)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

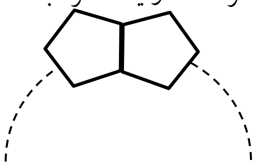
پاسخ : مجموع زوایای خارجی ۳۶۰ بنابراین زاویه خارجی سوم برابر است با ....

مجموع هر زاویه داخلی با خارجی ۱۸۰ بنابراین زاویه داخلی موردنظر برابر است با ....

سوال ۲۲ – خط $d_۱$ با خط $d_۲$ متقاطع و با خط $d_۳$ موازی است . این سه خط متمایز و در یک صفحه اند . تعداد نقاطی که از این ۳ خط به یک فاصله اند برابر است با :(مسابقات ریاضی آمریکا)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

سوال ۲۳ – پنج ضلعی منتظم هم اندازه مانند شکل مقابل ، از روی یک ضلع دور یک حلقه قرار گرفته اند و یک گردنبند ساخته اند چند تا از این چند ضلعی ها بدون فاصله دور هم قرار بگیرند تا گردنبند کامل شود ؟



پاسخ : اندازه هر زاویه داخلی ۵ ضلعی منتظم برابر است با : $۱۰۸ = \frac{(۵-۲)\times۱۸۰}{۵} = \frac{(n-۲)\times۱۸۰}{n}$

اندازه زاویه های داخلی دو پنج ضلعی بالا به همراه زاویه ۱۴۴ درجه جمعا ۳۶۰ درجه می باشد که این نشان می دهد زاویه داخلی چند ضلعی بدست آمده جدید به کمک پنج ضلعی ها برابر ۱۴۴ درجه است بنابراین می توانیم به کمک فرمول بالا n (تعداد ضلع ها) را بدست آوریم

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n} = ۱۴۴ \to ۱۴۴n = ۱۸۰n - ۳۶۰ \to ۱۸۰n - ۱۴۴n = ۳۶۰ \to ۳۶n = ۳۶۰ \to n = \frac{۳۶۰}{۳۶} = ۱۰$$

یعنی باید ۱۰ تا پنج ضلعی کنار هم قرار دهیم

توجه : برای سرعت بخشیدن به محاسبه در انتها می توانستیم زاویه خارجی پنج ضلعی را بدست آوریم $۱۸۰ - ۱۴۴ = ۳۶$ و ۳۶۰درجه که مجموع زوایای خارجی را بین ۳۶ زاویه تقسیم کنیم که $\frac{۳۶۰}{۳۶} = ۱۰$

فصل ۴

توان و ریشه :

این فصل از اهمیت بالایی در دروس آینده و سال های بالاتر دارد

با مفهوم توان و ریشه دوم (جذر یک عدد) آشنا هستیم و می دانیم که در صورتی که عدد مربع کامل باشد ریشه دوم عدد مقداری دقیق و در غیر این صورت تقریبی است مانند $\sqrt{۳۶} = ۶$ و $\sqrt{۳۲} \simeq ۵/۶$ اما خواهیم دید که می توانیم ریشه سوم و چهارم و... و n ام را هم بدست آوریم . همچنین با توان منفی آشنا خواهیم شد .

نماد علمی اعداد را برای نمایش اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک معرفی می کنیم و در انتها با جمع و تفریق در اعداد با نماد رادیکالی بحث خواهیم کرد .

توان صحیح :

با مفهوم های زیر آشنا هستیم

$$a^{۱} = a \rightarrow ۱۳۹۵^{۱} = ۱۳۹۵$$

$$a^{۰} = ۰ \rightarrow ۱۳۹۶^{۰} = ۰$$

$$۰^{a} = ۰ , ۱^{۱۳۹۷} = ۱$$

به توان زوج و به توان منفی و رابطه آن با علامت منفی دقت کنید ، اهمیت پرانتز فراموش نشود مثال های زیر را با هم مقایسه می کنیم

$$(-۲)^{۲} = +۴ , (-۲)^{۳} = -۸ , -۲^{۲} = -۴ , -۲^{۳} = -۸$$

سوال۱ : حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$-۱^{۲n} + (-۱)^{۲n} + ۱^{۲n} + ۱^{۱۳۹۶} =$$

سوال ۲ : مجموع مکعب عدد دو با مجذور عدد حاصل چقدر می شود ؟

توجه : توان های متوالی در اعداد بستگی به پرانتز در آنها دارد در صورتی که پرانتز بین آنها باشد توانها در هم ضرب می شوند در غیر این صورت هر بار دو عدد بالاتر را در نظر گرفته و حاصل عدد را به صورت توانی به دست می آوریم و این کار را تا پایین تر عدد ادامه می دهیم .

$(a^m)^n = a^{mn}$ و a^{m^n} دو عبارت متفاوت هستند

$$(((۲^{۳})^{۲})^{۴})^{۳} = ۲^{۳\times۲\times۴\times۳} = ۲^{۷۲}$$

$$-۲^{۲^{۳^{۲}}} = -۲^{۲^{۹}} = -۲^{۵۱۲}$$

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید

$$((۳^{۲})^{۴})^{۲^{۳}} = ۳^{۲\times۴\times۲^{۳}} =$$

نکته : با توجه به قانون توان ها داریم $a^n \times a^m = a^{m+n}$ و همین طور از عکس رابطه داریم

(قانون تبدیل جمع در توان به ضرب)

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

همین طور داریم : $a^m \div a^n = a^{m-n}$ و همین طور از عکس رابطه داریم

(قانون تبدیل تفریق در توان به تقسیم)

$$a^{m-n} = a^m \div a^n$$

قانون پخش توان داخل پرانتز :

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$(a \div b)^m = a^m \div b^m$$

$$(\frac{a}{b})^m = a^m \div b^m$$

$$((\frac{۳}{۴})^۳ \times ۰/۷۵^۲)^۲ = (\frac{۳}{۴})^۶ \times ۰/۷۵^۴ = (\frac{۳}{۴})^{۱۰}$$

$$(۳^{۱۰} \div (\frac{۱}{۲})^{۱۰})^۳ = ۳^{۳۰} \div (\frac{۱}{۲})^{۳۰} = (۳ \times \frac{۲}{۱})^{۳۰} = ۶^{۳۰}$$

تجزیه در عبارت های توان دار :

در عبارت های توان دار ابتدا می توانیم پایه ها را تجزیه کنیم و سپس از نکات بالا استفاده کنیم

مثال :

$$۱۲^۳ \times ۱۸^۴ = (۳ \times ۲^۲)^۳ \times (۲ \times ۳^۲)^۴ =$$

قانون توان منفی :

$$a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$$

$$۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$$

$$(\frac{۲}{۳})^{-۲} = \frac{۱}{(\frac{۲}{۳})^۲} = (\frac{۳}{۲})^۲$$

از عبارت بالا داریم به طور کلی :

$(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^{n}$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

$(-۳)^{-۳} \times (-۲)^{-۳} =$

$((\frac{۲}{۳})^{-۲})^{۲} =$

$(-(\frac{۲}{۳})^{-۲})^{۲} =$

$۲^{۲^{۳}} + (۲^{۲})^{۳} + ۲^{۰} =$

$۷^{۱۸} \times ۲۱^{۳} \times ۳^{۱۸} =$

$\frac{۳^{۱۳۹۵} + ۳^{۱۳۹۶} + ۳^{۱۳۹۷}}{۳^{۱۳۹۵}} =$

$۲۵^{-۶} \times ۱۶^{-۳} = (۵^{۲})^{-۶} \times (۲^{۴})^{-۳} =$

$(۰/۵)^{-۷} \times (۰/۲۵)^{۵} =$

سوال : اگر $A = ۳^{۲۵}$ و $B = ۹^{۲۰}$ باشد ، حاصل عبارت $۸۱B^{۲} \div ۹A^{۴}$ را به صورت عدد توان دار بنویسید .

سوال : اگر $a^{b} = c$ و $c^{d} = e$ و $e^{f} = g$ باشد حاصل a^{bdf} را بدست آورید .

سوال : اگر $x^{y} = z$ و $z^{v} = x$ باشد حاصل $(yv)^{۲}$ را بدست آورید .

سوال : ثلث عدد $۹^{۸۱}$ و ربع عدد $۸^{۴^{۲}}$ را بدست آورید

سوال : دو عدد $۱۶^{۲۵}$ و $۶۴^{۱۶}$ را باهم مقایسه می کنیم :

از تجزیه پایه ها استفاده می کنیم :

سوال : اعداد $۹^{-۹}$ و $۲۷^{-۵}$ چطور ؟ (راهنمایی : در انتها به مقایسه کسرهای کوچکتر از واحد دقت می کنیم!)

سوال : اعداد $۲^{۶۳}$ و $۳^{۴۳}$ چطور ؟

$$۲^{۶۳} = (۲^{۲۱})^{۳} \rightarrow ۸^{۲۱}$$

$$(۳^{۲})^{۲۱} \times ۳ = ۹^{۲۱} \times ۳$$

در نتیجه :

سوال : حاصل عبارت زیر را به صورت توان دار می نویسیم:

$$۳^{۱۰۰} + ۹^{۵۰} + ۵ \times ۸۱^{۲۵} = ۳^{۱۰۰} + (۳^{۲})^{۵۰} + ۵ \times (۳^{۴})^{۲۵} = ۳^{۱۰۰} + ۳^{۱۰۰} + ۵ \times ۳^{۱۰۰} = ۷ \times ۳^{۱۰۰}$$

سوال : اگر $۳^{a} = ۷$ و $۷^{b} = ۳$ باشد ، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید

الف : $۳^{۲ab}$

ب : ۲۱^{ab}

پ : $۴۹^{ab+۱}$

پاسخ : الف : $۳^{۲ab} = (۳^{a})^{۲b} = ۷^{۲b} = (۷^{b})^{۲} = ۳^{۲} = ۹$

$$(۳ \times ۷)^{ab} = ۳^{ab} \times ۷^{ab} = (۳^{a})^{b} \times (۷^{b})^{a} =$$

$$۴۹^{ab+۱} = ۴۹^{ab} \times ۴۹^{۱} = (۷^{۲})^{ab} \times ۴۹^{۱} = (۷^{b})^{۲a} \times ۴۹ =$$

سوال : نسبت مجذور عدد $۴^{x+۱}$ به جذر عدد $۱۶^{۲x}$ کدام است ؟

۱) $۴^{x+۲}$ ۲) $۲^{۴x}$ ۳) $۲^{۴}$ ۴) $۴^{۲x}$

سوال : خمس عدد $۵^{۵k-۱۰}$ را بدست آورید .

سوال : حاصل عبارت $(۲^۳)^۲ \times ۲^{-۳^۲} \times ۲^{-۲^۳}$ را بدست آورید

سوال : مساحت مربعی برابر با $۳^{۳۲}$ متر مربع می باشد محیط آن را بدست آورید

سوال : اگر روز اول یک ماه a تومان پول داشته باشیم و هر روز پول ما سه برابر شود مطلوب است محاسبه پول بعد از ۵ روز ، ۱۲ روز و ۳۰ روز .

پاسخ : داریم

روز اول a تومان

روز دوم : $۳ \times a$ تومان

روز سوم : $۳ \times (۳ \times a)$

روز چهارم : $۳ \times (۳ \times ۳ \times a)$

با الگوی موردنظر روز ۵ عبارت است از $۳^۴ a$ و روز ۱۲ و ۳۰ عبارت است از :

سوال : حاصل عبارت $(-۱)^۱ + (-۱)^۲ + (-۱)^۳ + \cdots + (-۱)^{۱۳۹۵}$ برابر است با :

۱) $+۱$ ۲) -۱۳۹۵ ۳) $+۱۳۹۵$ ۴) -۱

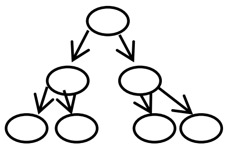
سوال : عدد $۲^۴$ را به چه توانی برسانیم تا حاصل آن $۴^{۱۰}$ شود .

سوال: نوعی باکتری داریم که در هر ۵ دقیقه به دو قسمت تقسیم می شوند . بعد از ۸ ساعت تعداد باکتری ها را به دست آورید ؟

پاسخ : اگر هر بار باکتری به دو قسمت تقسیم شوند یعنی هر مرحله دو برابر قبل می شوند یعنی در مرحله n تعداد آنها برابر ۲^n خواهد بود

در هر ۵ دقیقه دو برابر می شوند و بعد از یک ساعت $۱۲ = \frac{۶۰}{۵}$ بنابراین در یک ساعت ۱۲ مرحله تقسیم باکتری داریم یعنی

$۲^{۱۲}$ باکتری در یک ساعت



حالا بعد از ۸ ساعت $۹۶ = ۸ \times ۱۲$ مرحله تقسیم باکتری و تعداد آنها $۲^{۹۶}$ عدد ! خواهد بود .

سوال : بین $۲^۴$ و $-۲^۵$ چند عدد صحیح و طبیعی وجود دارد ؟

توجه : اگر $a^۲ < a$ باشد در مورد a داریم $۰ < a < ۱$

نکته : در صورتی که یکان عددی رقم های ۰ و ۱ و۵ و ۶ باشد به هر توانی آن را برسانیم یکان تغییر نخواهد کرد

$$۶^۲ = ۳۶ \quad , \quad ۱۶^۲ = ۲۵۶ \;, ۱۱^۲ = ۱۲۱ \quad , \qquad ۵^۳ = ۱۲۵ \;, ۱۰^۲ = ۱۰۰$$

سوال : داریم $A = ۱۱^{۱۰۰}$ و $B = ۶^{۲۰۰}$ و $C = ۱۵^{۱۳۹۶}$ مجموع یکان عددهای A و B و Cرا بدست آورید .

توجه : رقم یکان را اگر ۹ در نظر بگیریم حالت هایی را در نظر بگیریم که توان زوج یا فرد باشد

$$۹^{۲} = ۸۱$$

$$۹^{۱} = ۹$$

$$۹^{۳} = ۷۲۹$$

می بینیم توان فرد یکان ۹ و توان زوج یکان ۱ تولید می کند .

توجه ۲ : رقم یکان را اگر ۴ در نظر بگیریم حالت هایی را در نظر بگیریم که توان زوج یا فرد باشد

$$۴^{۱} = ۴$$

$$۴^{۲} = ۱۶$$

می بینیم توان فرد یکان ۴ و توان زوج یکان ۶ تولید می کند .

مثال : مجموع یکان در عبارت زیر را مشخص کنید

$$۱۳۹۶^{۳} + ۱۴۰۴^{۴} = \cdots ۶ + \cdots ۶ = \cdots ۱۲$$

نکته : برای مشخص کردن تعداد ارقام یک عدد توان دار می توانیم با تجزیه پایه ها به ۲ و ۵ پایه ای از ۱۰ بسازیم در سوالات می توانیم برای تقریب از $۱۰۰۰ \simeq ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ نیز استفاده کنیم به مثال زیر دقت کنیم:

مثال : عدد $۱۶^{۲۰} \times ۱۲۵^{۲۵}$ چند رقمی است ؟

$$۱۲۵^{۲۵} \times ۱۶^{۲۰} = (۵^{۳})^{۲۵} \times (۲^{۴})^{۲۰} = ۵^{۷۵} \times ۲^{۸۰}$$

در صورتی می توانیم پایه ۱۰ بسازیم که توان ها برابر باشند بنابراین $\ldots ۳۲ = ۳۲ \times ۱۰^{۷۵} = ۲^{۵} \times (۲^{۷۵} \times ۵^{۷۵})$ که عدد موردنظر ۳۲ با ۷۵ تا صفر جلوی آن خواهد بود بنابراین تعداد رقم ها برابر ۷۷ خواهد بود . در مورد مجموع ارقام این عدد می توانیم بگوییم مجموع ارقام برابر با $۵ = ۲ + ۳$ می باشد .

سوال : (تیزهوشان) عدد $۱۶^{۸} \times (۰/۲۵)^{۳} \times ۱۲۵^{۹}$ چند رقمی است ؟

سوال : (انرژی اتمی) عدد $۲^{۴۰}$ چند رقمی است ؟

پاسخ : از نکته استفاده کنیم $۱۰^{۱۲} = (۱۰^{۳})^{۴} = (۲^{۱۰})^{۴}$ که عدد موردنظر ۱۳ رقمی می تواند باشد

سوال : الگوی مربوط به عبارت های زیر را بدست آورید ؟

$$۱۰^{۲} - ۱۰^{۱} = ۱۰۰ - ۱۰ = ۹۰$$

$$۱۰^{۳} - ۱۰^{۱} = ۱۰۰۰ - ۱۰ = ۹۹۰$$

$$۱۰^{۳} - ۱۰^{۲} = ۱۰۰۰ - ۱۰۰ = ۹۰۰$$

$$۱۰^{n} - ۱۰^{m} = ۹۹ \dots ۹۹۰۰۰ \dots ۰۰۰$$

نکته : الگوی مربوط به عبارت توانی

$$۱۰^{n} - ۱۰^{m} = ۹۹ \dots ۹۹۰۰۰ \dots ۰۰۰$$

به صورت زیر می باشد :

تعداد رقم های ۹ برابر است با :

و تعداد رقم های صفر برابر است با :

سوال : با توجه به الگوی بالا مجموع ارقام در عبارت $۱۰^{۲۵} - ۱۰^{۱۹}$ را بدست آورید ؟

سوال : مجموع ارقام در عبارت $۱۰^{۸n} - ۱۰^{۳n}$ را بدست آورید ؟

$$۱۰^{۸n} - ۱۰^{۳n} = ۹۹۹ \dots ۹۹۹۰۰۰ \dots ۰۰۰$$

که تعداد ارقام ۹ برابر است با : تفاضل توان ها یعنی $۸n - ۳n = ۵n$ و تعداد صفرها برابر $۳n$ بنابراین مجموع ارقام عبارت است از $۹ \times ۵n = ۴۵n$

سوال : اگر $۴a + ۲۰ = ۲^{۱۶}$ باشد در این صورت عبارت $۲^{۳۰}$ را بر حسب a بنویسید .

پاسخ : $۲^{۳۰} = \frac{۲^{۳۲}}{۲^{۲}} = \frac{(۲^{۱۶})^{۲}}{۴} = (\frac{۴a+۲۰}{۴})^{۲} = (a+۵)^{۲}$

سوال : عبارات زیر را با توان مثبت بنویسید

$$\frac{۸^{-۵} \times ۳^{-۷}}{۳^{-۹} \times ۲^{-۱۸}} =$$

$$\frac{a^{-۴} \div b^{-۵}}{(a^{۴}b^{۵})^{-۱}} =$$

$$(\frac{a^{-۲} \times b^{-۲}}{b^{-۲} \div a^{-۲}})^{-۱} =$$

$$\frac{۳^{۷} - ۳^{-۳}}{۳^{۸} - ۳^{-۲}} = \frac{۳^{-۳}(۳^{۱۰} - ۱)}{۳^{-۲}(۳^{۱۰} - ۱)} =$$

$$۱۲ \times ۲^{-۳} - ۱۵ \times ۲^{-۳} + ۴ \times ۲^{-۳} = ۲^{-۳}(۱۲ - ۱۵ + ۴) =$$

$$\frac{۲^{۱۴} + ۲^{۱۶} + ۲^{۱۸} + ۲^{۲۰}}{۲^{-۸} + ۲^{-۱۰} + ۲^{-۱۲} + ۲^{-۱۴}} =$$

سوال :آیا تساوی $(-۳^{۲})^{۳} = (-۳^{۳})^{۲}$ می تواند درست باشد ؟

سوال : اگر $۹^{x} = ۱۰۰$ باشد ، مطلوب است عبارهای زیر :

$$۳^{۳x+۱}$$

$$(\frac{۱}{۲۹})^{۲-x}$$

$۸۱^{x-۱}$

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$$۳^۲ - ۲^۳(۲^۲ - ۲^۳(۳^۲ - ۱)^{-۱})^{-۱} =$$

پاسخ :

$$۹ - ۸(۴ - ۸(۹ - ۱)^{-۱})^{-۱} = ۹ - ۸(۴ - ۸(۸)^{-۱})^{-۱} = ۹ - ۸\left(۴ - ۸\left(\frac{۱}{۸}\right)\right)^{-۱} = ۹ - ۸(۳)^{-۱} = ۹ - \frac{۸}{۳}$$

سوال :

$$\frac{۵ \times ۳^{۵۰} + ۷ \times ۹^{۲۵} - ۲ \times ۳^{۵۰} - ۸ \times ۹^{۲۵}}{(\frac{۱}{۹})^{۲۰} \times (\frac{۱}{۳})^{۱۰}} =$$

$$\left[-\left(\frac{۱}{۸۱}\right)^{۳^{-۱}} - ۳^{-۳}\right]^{-۲} =$$

$$\frac{-۲^{۲^۳} \times (۳^۲)^۴}{۴^۳ \times (-۹^۲)} =$$

$$(a^{-۲}bc^{-۲})^{\frac{۱}{۴}} \times (a^{-۱}b^{-۳}c^{-۴})^{-\frac{۱}{۳}} =$$

$$\frac{(۰/۲۵)^{-۳} \times ۶۴^۲}{(۰/۱۲۵)^۳ \times ۲^{-۳}} =$$

سوال : اگر $a = ۳^{k-۱}$ و $b = ۳^k$ و $c = ۳^{k+۱}$ باشند بین این سه عدد روابط موجود را مشخص کنید ؟

$$\frac{a}{b} =$$

$$\frac{c}{b} =$$

سوال : قطر خورشید حدود ۱۴×۱۰^۸ متر و قطر اتم هیدروژن $۱۰^{-۱۰}$ متر است . قطر خورشید چند برابر قطر اتم هیدروژن است ؟

تمرین :

$$\left[(۲^{-۱} + ۴^{-۱})^{-۱} + (\frac{۱}{۲})^{-۱}\right]^{-۲} =$$

سوال : اگر $A = (x^{x^x})^{x^x}$ باشد ، A^x برابر است با : (علامه طباطبایی)

۱) $x^{x^{۲x}}$ ۲) $x^{x^{۲}}$ ۳) $x^{x^{۲x+۱}}$ ۴) $x^{x^{x+۲}}$

پاسخ : $A = (x)^{x^x \times x^x} = (x)^{x^{۲x}}$

$$A = (x)^{x^{۲x}} \to A^x = ((x)^{x^{۲x}})^x = (x)^{x^{۲x} \times x} = x^{x^{۲x+۱}}$$

سوال : اگر داشته باشیم $M = ۲^{۱} \times ۲^{۵} \times ۲^{۹} \times \dots \times ۲^{۸۵}$ و $N = ۲^{۲} \times ۲^{۶} \times ۲^{۱۰} \times \dots \times ۲^{۸۶}$ حاصل $\frac{M}{N}$ را بدست آورید .

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

$$A = ۲^{-۱} + ۲^{-۲} + ۲^{-۳} + ۲^{-۴} + \cdots$$

$$B = ۳^{-۱} + ۳^{-۲} + ۳^{-۳} + ۳^{-۴} + \cdots$$

$$C = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \frac{۱}{۲۵۶} + \cdots$$

پاسخ :

در فصل اول داشتیم مجموع دنباله های هندسی (هر جمله از ضرب عددی در جمله قبل باشد) از فرمول مشخصی بدست می آید اما در صورتی که اعداد کوچکتر و کوچکتر شوند از فرمول زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{\text{جمله اول}}{\text{قدرنسبت} - ۱}$$

بنابراین داریم

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

و طبق فرمول

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

اما چرا این فرمول را استفاده می کنیم :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \to 2A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \to 2A = 1 + A \to 2A - A = 1 \to A = 1$$

تمرین : کدام عدد بزرگتر است ؟ 2^{90} و 3^{75} و 4^{60} و 5^{45}

تمرین : حاصل $1 \times (-1)^1 + 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^3 + \cdots + 1396 \times (-1)^{1396}$ را بدست آورید .

$$1 \times (-1)^1 + 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^3 + \cdots + 1396 \times (-1)^{1396} = -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - 1395 + 1396 = 1 + 1 + \cdots + 1 = 698$$

سوال : حاصل عبارت $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1395}$ را بدست آورید

$$A + 2 = 2 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1395}) = 2 \times 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1395} = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1395} =$$

روش دوم : طبق فرمول نیز می توانیم به نتیجه برسیم :

$$\frac{۲(۱-۲^{۱۳۹۵})}{۱-۲}$$

تمرین : مطلوب است مقدار عددی $\frac{۳^۶-۳^۵-۳^۴-۳^۳}{۳^۳}$

تمرین :مطلوب است حاصل کسر توانی $A=\frac{۲^x+x^{x+۱}+۲^{x+۲}}{۲^{x+۳}-۲^x}$

سوال : مطلوب است : $۲^{۱۳۹۶}-۲^{۱۳۹۵}-۲^{۱۳۹۴}-\dots-۲^۱$

راهنمایی : $۲^{۱۳۹۶}-۲^{۱۳۹۵}=۲^{۱۳۹۵}(۲-۱)=۲^{۱۳۹۵}$

توجه : به یاد داریم که مجذور کامل ساختن به توان های زوج و مکعب کامل مضارب ۳ نیاز دارد .

مثال : کوچک ترین عدد طبیعی که اگر در عدد ۳۶۰ ضرب می شود حاصل مجذور کامل می شود کدام عدد است ؟

پاسخ : در تجزیه عدد ۳۶۰ با توان های زوج عامل ها عبارت اند از :

$$۳۶۰=۲^۲\times۳^۲\times۲\times۵$$

توان های غیر زوج عبارتند از ۲ و ۵ که باید زوج شوند بنابراین $۲^۲\times۳^۲\times۲\times۵\times۲\times۵=۲^۴\times۳^۲\times۵^۲$

که کوچکترین عدد ضرب شده برای مجذور کامل شدن ۱۰ می باشد

مثال : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مجذور کامل عبارت است از $۴^۲$ تا $۹^۲$ برابر با پنج عدد می باشد

تعداد همین اعداد مجذور کامل سه رقمی برابر است با : $۱۰^۲$ تا $۳۱^۲$ برابر با ۲۲ می باشد .

مثال : کوچک ترین عدد طبیعی که اگر در عدد ۳۶۰ ضرب می شود حاصل مکعب کامل می شود کدام عدد است ؟

پاسخ :

$$۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \to (۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵) \times ۳ \times ۵^۲$$

مثال : چند عدد مکعب کامل دو رقمی داریم : $۳^۳$ و $۴^۳$ و اعداد مکعب کامل ۳ رقمی از $۵^۳$ تا $۹^۳$ برابر ۵ عدد می باشد .

سوال : بین اعداد ۱۰۰۱ تا $۲^{۱۵} - ۱$ چند عدد مکعب داریم

$$۱۰۰۱ = ۱۰^۳ + ۱ \text{ و } ۱۱^۳ \text{ و } ... \text{ و } ۲^{۱۵} - ۱ = (۲^۵)^۳ = ۳۲^۳ - ۱ \to ۱۱^۳, ..., ۳۱^۳$$

معادلات توانی :

به هر معادله ای که مجهول در توان قرار گرفته باشد معادله توانی یا نمایی می گوییم

بریا حل این معادلات کافی است پایه ها را مساوی کنیم تا بتوانیم توان ها را نیز با هم مساوی کنیم

مثال :

$$۳^{۲x-۱۰} = ۱$$

$$۳^{۲x-۱۰} = ۳^۰ \to ۲x - ۱۰ = ۰ \to ۲x = ۱۰ \to x = ۵$$

مثال ۲ :

$$۳^{۲x-۵} = ۲۷$$

مثال ۳ : $۲^{۲x-۱} = ۵^{۴x-۲}$

$$۲^۰ = ۵^۰ = ۱ \to ۲x - ۱ = ۴x - ۲ = ۰$$

$$۲x - ۱ = ۰ \to x = \frac{۱}{۲}$$

$$۴x - ۲ = ۰ \to x = \frac{۱}{۲}$$

توجه : در حالتی که پایه ها بعد از تجزیه نیز یکی نشدند باید از ترفند مثال ۳ استفاده کنیم یعنی توان ها را صفر در نظر می گیریم

سوال : معادله های توانی زیر را حل کنید

$۱۶^{x+۱} = ۲۵۶$

$(۰/۲)^{x-۱۴} = ۱۲۵^{۲x}$

$۵^{x-۲} = ۷^{۳x+y+۱}$

(از نکته توان صفر استفاده کنید)

$(\frac{۱}{۱۶})^{۴-x} = ۸^{۲x+۲}$

$(۰/۰۰۸)^{x-۲} = ۲۵^{۳+x}$

$۳^{x} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۴} = ۸۱۹$

$۵^{x+۲} - ۵^{x-۱} = ۶۲۰$

$(\frac{۱}{۱۶})^{۳x} = ۲^{x+۱}$

سوال : تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $k+۳$ عضوی ۱۱۲ واحد از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی بیش تر است .عدد k را مشخص کنید .

سوال : در معادله ی $۲^{۲x} \times ۴ + ۲۴ = ۲۸۰$ مقدار x برابر است با :

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

سوال : جواب معادله ی $۲x^{۵} - ۶ = ۹۰ - x^{۵}$ کدام است ؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ±۲

سوال : در معادله ی توانی $۲^{۲^{۲^{n}}} = ۱۶^{۶۴}$ مقدار n کدام است ؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۶۴

پاسخ : ازتجزیه سمت راست شروع کنیم

$$۲^{۲^{۲^{n}}} = ۱۶^{۶۴} = (۲^{۴})^{۶۴} = ۲^{۲۵۶}$$

پایین ترین پایه ها را مرحله اول خط می زنیم در این صورت داریم :

$$۲^{۲^{n}} = ۲۵۶$$

و روند بالا را ادامه می دهیم :

تمرین : اگر داشته باشیم $3^{x^2} + 3^{x^2+1} + 3^{x^2+2} = 1053$ حاصل $x^4 + 65$ بر کدام عدد بخش پذیر است ؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

تمرین : اگر $4^x \times 6^y = 48^{12}$ مقدار $x + y$ کدام است ؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۴۸ ۴) ۳۶ ۵) ۳۲

تمرین : اگر $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 39$ باشد مقدار x کدام است ؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۳

تمرین : معادله ی $10^x = x^{10}$ چند جواب صحیح دارد ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

تمرین : مقدار x در معادله ی $2^{2x-3} + 8 = 40$

سوال : جواب معادله ی $5^{2+4+6+\cdots+2x} = (0/04)^{-28}$ کدام است

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۸ ۴) ۸-

سوال : اگر $۸^{y+۱} = ۲^x$ ، $۳^{x-۹} = ۹^y$ باشد مقدار $x + y$ برابر است با : (تیزهوشان)

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

سوال : در تساوی $۱۱۱^x \times ۱۰ = ۱۱۱۱۱۱۱ - ۱۱۱۱^۲$ مقدار x کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سوال : مقدار x در معادله ی $۰/۰۰۰۵ = ۲^{۲x} \times ۵^{۲x+۱}$ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

نماد علمی :

برای نمایش اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک در ریاضیات آنها را به صورت حاصل ضرب یک عدد اعشاری مثبت یک رقمی در توانهای ۱۰ نمایش می دهیم به این نمایش نماد علمی می گوییم

نمایش یک عدد اعشاری بصورت $a \times ۱۰^n$ است که $۱ \le a < ۱۰$ و n عددی صحیح است .

مثال :

$$۱۳۹۶۰۰۰۰۰۰۰ = ۱/۳۹۶ \times ۱۰^{۹}$$

$$۱۳۹۶ = ۱/۳۹۶ \times ۱۰^{۳}$$

$$۰/۰۰۰۳ = ۳ \times ۱۰^{-۴}$$

$$۱۲۳/۴ \times ۱۰^{۶} \times ۰/۰۰۱۲۳ = ۱/۲۳۴ \times ۱۰^{۸} \times ۱/۲۳ \times ۱۰^{-۳} = ۱/۵۱۷۸۲ \times ۱۰^{۵}$$

سوال : بصورت نماد علمی بنویسید

$$۰/۰۰۰۰۰۰۶ \times ۷۰۰۰۰۰۰۰ =$$

$$۳۴۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۲۰۰۰۰۰۰۰۰ =$$

$$۱/۱\bar{۶} \times ۱۰^{۵} - ۵/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} = ۱۱/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} - ۵/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} = ۱۱/\bar{۶} - ۵/\bar{۶} \times ۱۰^{۴} = ۶ \times ۱۰^{۴}$$

سوال : اگر جرم ذره ای ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۸ کیلوگرم باشد جرم آن را با نماد علمی بنویسید

سوال : نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید

$$۱۲/۱۳ \times ۱۰^{-۳} =$$

$$۳/۲۱ \times ۱۰^{۴} =$$

سوال : جرم زمین تقریبا ۶×۱۰^{۲۴} و جرم خورشید ۲×۱۰^{۳۰} کیلوگرم است جرم خورشید چند برابر جرم زمین است ؟

سوال : نماد علمی عدد A را بنویسید

$$A = \frac{۱/\bar{۵} \times (۰/۱)^{-۲}}{۲/\bar{۳} \times ۱۰^{۵}} =$$

پاسخ :

$$۱/\bar{۵} = \frac{۱۵-۱}{۹} = \frac{۱۴}{۹}, \quad (۰/۱)^{-۲} = (\frac{۱}{۱۰})^{-۲} = ۱۰^{۲}$$

$$۲/\bar{۳} = \frac{۲۳ - ۲}{۹} = \frac{۲۱}{۹}$$

$$A = \frac{۱/\bar{۵} \times (۰/۱)^{-۲}}{۲/\bar{۳} \times ۱۰^{۵}} = \frac{\frac{۱۴}{۹} \times ۱۰^{۲}}{\frac{۲۱}{۹} \times ۱۰^{۵}} = \frac{۱۴}{۲۱} \times ۱۰^{-۳} = \frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۳} = ۰/\bar{۶} \times ۱۰^{-۳}$$

ریشه گیری :

در صورتی که $a^n = b$ باشد ، آن گاه ریشه ی n ام b برابر a می باشد که آن را به صورت $\sqrt[n]{b}$ نشان می دهیم .

ریشه ی دوم b را به صورت $\sqrt[۲]{b}$ یا $\sqrt{b}$ نشان می دهیم

ریشه دوم را با عبارت جذر نیز مشخص می کنیم

$۵^۲ = ۲۵ \to \sqrt{۲۵} =$

$۲^۳ = ۸ \to \sqrt[۳]{۸} =$

$۴^۳ =$

$۲^۴ =$

توجه : داریم $۲۵ = ۵^۲$ و $۲۵ = (-۵)^۲$ در این صورت ریشه دوم ۲۵ هر کدام از این اعداد می باشد اما طبق قرارداد برای جذر عدد مثبت را به عنوان جواب قبول می کنیم .

ریشه ی دوم عدد a هر یک از اعداد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ می باشد

ریشه ی سوم ۲۷ و ریشه ی چهارم ۱۶ را مشخص کنید

سوال : حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$\sqrt{۱/۲۱} + \sqrt{۰/۱۶} + \sqrt{۰/۰۰۰۹} =$

مثال : در مورد دو عبارت زیر چه می توان گفت ؟

$\sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} =$

$\sqrt{۲۵ - ۹} = \sqrt{۲۵} - \sqrt{۹} =$

نتیجه :

سوال :

$$\sqrt{۲۵+۴\sqrt{۲۱+۳\sqrt{۷+۲\sqrt{۸۱}}}}=$$

توجه : در صورتی که $۰ < a < ۱$ در این صورت $\sqrt{a} > a$ و $a > a^۲$

توجه : داریم $\sqrt{x^۲} = |x|$ بنابراین داریم :

$$\sqrt{۴^۲} =$$

$$\sqrt{(-\frac{۲}{۳})^۲} = \left|-\frac{۲}{۳}\right| =$$

$$\sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} - \sqrt{z^۲} =$$

سوال را در حالت هایی حل می کنیم که x و y و z مثبت و منفی باشند

$$\sqrt{(۱-۲\sqrt{۲})^۲} =$$

$$\sqrt{۲^۴} =$$

$$\sqrt{۲^۴ \times ۶^۲} =$$

$$\sqrt{۵^۲ \times ۲^۶ \times ۳^۴} =$$

توجه: اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه ی سوم آن را با نماد $\sqrt[۳]{a}$ نمایش می دهیم .

$$(\sqrt[۳]{a})^۳ = a$$

$$\sqrt[۳]{۸} = \sqrt[۳]{۲^۳} = (\sqrt[۳]{۲})^۳ = ۲$$

$$\sqrt[۳]{-۸} = \sqrt[۳]{(-۲)^۳} = (\sqrt[۳]{(-۲)})^۳ = -۲$$

دیدیم که ریشه سوم هر عدد منحصر به فرد است و یک ریشه سوم داریم

سوال :

$$\sqrt[۳]{۶۴a^۳} + \sqrt[۳]{۰/۰۰۸} =$$

$\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}-\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}}+\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}}=$

$\sqrt{a^{۲}b^{۴}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^{۴}}}{\frac{۱}{۴}b^{۲}}}=$

$\frac{\sqrt{(a+b)^{۲}}}{\sqrt[۳]{(a+b)^{۳}}}, a>۰, b>۰$

$\sqrt[۳]{b\sqrt{\frac{۱}{b^{۲}}}}=$

$\sqrt{ab^{۳}\ \sqrt[۳]{a^{۶}b^{۳}}}=$

سوال :اگر $\sqrt[۳]{x}=\frac{۲۵}{۳۶}$ باشد مقدار $\sqrt{x}$ را به دست آورید .

پاسخ $(\sqrt[۳]{x})^{۳}=(\frac{۴}{۲۵})^{۳}=\frac{۲۵^{۳}}{۳۶^{۳}}=\frac{(۵^{۲})^{۳}}{(۶^{۲})^{۳}}=\frac{۵^{۶}}{۶^{۶}}=(\frac{۵}{۶})^{۶}\rightarrow x=(\frac{۵}{۶})^{۶}$

$\sqrt{x}=\sqrt{(\frac{۵}{۶})^{۶}}=(\frac{۵}{۶})^{۳}$

سوال : اگر $x=(\frac{\sqrt{۳}}{۹})^{-۲}$ در این صورت حاصل $x^{۲}-۳x+۱$ را بدست آورید

پاسخ :

$$x=(\frac{\sqrt{۳}}{۹})^{-۲}=(\frac{۹}{\sqrt{۳}})^{۲}=\frac{۸۱}{۳}=۲۷$$

$$x^{۲}-۳x+۱=۲۷^{۲}-۳(۲۷)+۱$$

سوال : اگر $۳^{A}=(\frac{۹^{\sqrt{۲۷}}}{۳^{\sqrt{۸۱}}})^{۳}$ مقدار A را به دست آورید .

$$۳^{A}=(\frac{۹^{\sqrt{۲۷}}}{۳^{\sqrt{۸۱}}})^{۳}$$

$$۹^{\sqrt{۲۷}}=(۳^{۲})^{۳\sqrt{۳}}$$

$$۳^{\sqrt{۸۱}}=$$

سوال : اگر $۳^{۲k+۱} = ۶a$ باشد مقدار $۲۷^{\frac{k}{۳}}$ را بر حسب a بدست آورید .

$$۳^{۲k+۱} = ۳^{۲k} \times ۳^{۱} = ۶a \to ۳^{۲k} = ۲a$$

$$۲۷^{\frac{k}{۳}} = (۳^{۳})^{\frac{k}{۳}} = ۳^{k} = \sqrt{۳^{۲k}} = \sqrt{۲a}$$

سوال : اعدادی را مشخص می کنیم که $\sqrt{x} < ۳$ باشد.

برای این کار می توانیم از تعریف توان استفاده کنیم دو طرف نامساوی را به توان دو می رسانیم :

توجه : برای دو عبارت یا چند عبارت رادیکالی داریم :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \times b \times c}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

سوال : ساده کنید

$$\sqrt[۳]{۱۸} \times \sqrt[۳]{۱۲} = \quad \sqrt[۳]{۱۸ \times ۱۲} =$$

$$\sqrt[۳]{x(a+b)^{۲}} \times \sqrt[۳]{-x(a+b)^{۱}} \times \sqrt[۳]{-۸x} =$$

$$\frac{\sqrt{۸x^{۳}y^{۲}z^{۵}}}{\sqrt{۲xz}} = \sqrt{\frac{۸x^{۳}y^{۲}z^{۵}}{۲xz}} =$$

سوال : حاصل عبارت $\sqrt{(-۲)^{۶}}$ برابر است با :

۱) $(-۲)^{۳}$ ۲) $-۲^{۳}$ ۳) $۲^{۳}$

پاسخ : از مفهوم قدرمطلق عبارت استفاده کنیم :

سوال : مقدار عبارت $\sqrt{(x-۳)^۲}$ در صورتی که $x > ۳$ باشد را به دست آورید

سوال : ساد ه شده ی عبارت $\sqrt{(۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲})^۲}$ را بدست آورید .

سوال : حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{۲} - ۱)^۲} + \sqrt{(\sqrt{۲} + ۱)^۲}$ را بدست آورید

پاسخ :

$$\sqrt{(۱ + \sqrt{۲})^۲} = |۱ + \sqrt{۲}| =$$

$$\sqrt{(۱ - \sqrt{۲})^۲} = |۱ - \sqrt{۲}| =$$

مثال : اگر عدد a مجذور کامل باشد ، دومین و سومین مجذور کامل بعد از a را بدست آورید

پاسخ : عدد a موردنظر بصورت $a = n^۲$ می باشد در این صورت $n = \sqrt{a}$ می باشد

مجذور کامل بعدی (دومین مجذور کامل) عدد $(n + ۱)^۲$ می باشد یعنی

$$(n + ۱)^۲ = (\sqrt{a} + ۱)(\sqrt{a} + ۱) =$$

سومین مجذور کامل بعدی برابر است :

$$(n + ۱)^۳ = (n + ۱)^۲(n + ۱) =$$

توجه : یادمان باشد اعدادی که یکان آنها ۲ و ۳ و ۷ و ۸ باشد مجذور کامل نیستند و تعداد صفرهای سمت راست در مجذور کامل همواره زوج است .

مثال : آیا عبارت زیر می تواند یک مجذور کامل می باشد

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times \ldots \times n + ۴$$

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times \ldots \times n + ۳$$

در مورد عددی که از حاصل ضرب بدست می آید می توان گفت یکان این عدد حتما صفر است چون عامل های ۲ و ۵ در عدد یکان را صفر می کند و اولین عدد یکانش ۴ می شود . طبق نکته بالا می دانیم در صورتی که یکان عددی ۴ باشد آن عدد می تواند مجذور کامل باشد ولی در مورد دومی نمی توان گفت مجذور کامل است

مثال : x در عبارت زیر کدام عدد باشد تا عدد موردنظر مجذور کامل باشد

$abc۰x۰۰$

با توجه به اینکه تعداد صفرهای سمت راست عدد مجذور کامل باید زوج باشد x عدد صفر است .

سوال : تعداد اعداد طبیعی که فاصله جذرشان از عدد ۹ از یک واحد کمتر باشد را بدست آورید

پاسخ :

$$۸ < \sqrt{n} < ۱۰ \to ۶۴ < n < ۱۰۰$$

تعداد این اعداد عبارت است از $(۱۰۰ - ۶۴) + ۱ = ۳۷$

سوال : کوچک ترین عدد صحیح بزرگتر از $-\sqrt{۴۷}$ کدام است ؟

سوال : برای آن که حاصل عبارت $(k + ۱) + (k + ۲) + \cdots + (K + ۹)$ یک عدد مربع کامل باشد ، کوچک ترین عدد دو رقمی k چه قدر است ؟

پاسخ :

$$(k + ۱) + (k + ۲) + \cdots + (K + ۹) = (k + k + \cdots + k) + (۱ + ۲ + \cdots + ۹) = ۹k + \frac{۹ \times ۱۰}{۲}$$
$$= ۹k + ۴۵ = ۹(k + ۵)$$

برای آنکه مجذور کامل باشد عدد ۹ و $k+۵$ باید مجذور کامل باشد بنابراین $k+۵$ باید مجذور کامل باشد و k می تواند ۱۱ باشد تا کوچکترین عدد مجذور کامل ۱۶ خواهد بود

مثال : جذر عدد ۱۳۹۶ را بصورت تقریبی بدست آورید

تمرین : جذر تقریبی عدد های ۱۳۶۸ ، ۷۶۷ و ۲۰۱۶ را بدست آورید

توجه : امتحان درستی جذر :

دو برابر جذر به اضافه ی یک بزرگ تر از باقی مانده باشد .

مجذور جذر به اضافه ی باقی مانده برابر عدد اولیه شود .

مثال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\sqrt{۱۸}+\sqrt{۱۲}+۳\sqrt{۸}-\sqrt{۳۲}=\sqrt{۲\times ۹}+\sqrt{۳\times ۴}+۳\sqrt{۲\times ۴}-\sqrt{۲\times ۱۶}=$$

$$\sqrt{۱۲}+۲\sqrt{۲۷}+۳\sqrt{۴۸}=\sqrt{۳\times ۴}+۲\sqrt{۳\times ۹}+۳\sqrt{۳\times ۱۶}=$$

$$\sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۱۶}=$$

$$\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲\times ۲۷}=\sqrt[۳]{۲\times ۳^۳}=۳\sqrt[۳]{۲}$$

$$\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۲\times ۸}=\sqrt[۳]{۲\times ۲^۳}=۲\sqrt[۳]{۲}$$

$$۲\sqrt{x}+۴\sqrt{xy}+\sqrt{x}-۲\sqrt{xy}=$$

توجه دیدیم که عبارتی مانند $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ جوابی مانند $\sqrt{۵}$ ندارد ! یعنی زیر رادیکال جمع نمی شود

$$۲\sqrt[۳]{۵۴}+\sqrt{۱۲}-۳\sqrt[۳]{۶۴}-۲\sqrt[۳]{۲}=$$

نتیجه ۱ : اگر فرجه ها یکسان باشد $a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x}=(a+b)\sqrt[n]{x}$

نکات تکمیلی :

ضرب و تقسیم رادیکال ها

الف : اگر فرجه ها یکسان باشد عدد های زیر رادیکال را در هم ضرب و ضرایب را نیز در هم ضرب می کنیم برای تقسیم نیز عملیات تقسیم را پیش می گیریم

مثال : ضرب و تقسیم های زیر را انجام می دهیم

$$۲\sqrt{۳} \times ۵\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۶}$$

$$\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$$

$$\frac{۳x^۲y\sqrt[۳]{x^۲y}}{۲x\sqrt[۳]{xy}} = \frac{۳}{۲}xy\sqrt[۳]{\frac{x^۲y}{xy}} = \frac{۳}{۲}xy\sqrt[۳]{x}$$

نتیجه ۲ :

$$\left(a\sqrt[n]{x}\right)\left(b\sqrt[n]{y}\right) = ab\sqrt[n]{xy}$$

$$\frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{y}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

ب : اگر فرجه ها یکسان نباشد دو مرحله زیر را پیش می گیریم :

۱ – ک.م.م فرجه ها را بدست می آوریم

۲ –فرجه اولیه را در هر عددی که ضرب کرده ایم تا به ک.م.م برسد زیر رادیکال را نیز به همان تاون می رسانیم

مثال :

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۲]{۳} =$$

مرحله اول : ک.م.م :

$$[۳,۲] = ۶$$

مرحله دوم :

$$\frac{۶}{۳} = ۲ \rightarrow \sqrt[۳\times۲]{۲^۲} \rightarrow \sqrt[۶]{۲^۲}$$

$$\frac{۶}{۲} = ۳ \rightarrow \sqrt[۲\times۳]{۳^۳} \rightarrow \sqrt[۶]{۳^۳}$$

$$\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۲]{۳} = \sqrt[۶]{۲^۲} \times \sqrt[۶]{۳^۳} = \sqrt[۶]{۲^۲ \times ۳^۳} = \sqrt[۶]{۱۰۸}$$

سوال

$\sqrt[5]{۳} \times \sqrt{۳} = :$

نتیجه ۳:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{n}}} \times \sqrt[k]{b^{\frac{k}{m}}} = \sqrt[k]{a^{\frac{k}{n}} \times b^{\frac{k}{m}}} \quad , \qquad k = [n, m]$$

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\begin{aligned}(۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲})^{۲} &= (۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲})(۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲}) \\ &= (۲\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}) - (۲\sqrt{۳})(۳\sqrt{۲}) - (۳\sqrt{۲})(۲\sqrt{۳}) + (۳\sqrt{۲})(۳\sqrt{۲}) \\ &= ۴\sqrt{۹} - ۶\sqrt{۶} - ۶\sqrt{۶} + ۹\sqrt{۴} = ۱۲ - ۱۲\sqrt{۶} + ۱۸ = ۳۰ - ۱۲\sqrt{۶}\end{aligned}$$

توجه : در فصل بعد این سوال را به کمک اتحاد مربع دو جمله ای نیز می توانیم حل کنیم

$(۲\sqrt{۵} - \sqrt{۲})(۳\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳})=$

نکته : ضریب رادیکال را می توانیم به زیر رادیکال برگردانیم به این ترتیب که آن عدد را به توان فرجه می رسانیم و زیر رادیکال می بریم

مثال :

$۲\sqrt{۳} = \sqrt{۲^{۲} \times ۳} = \sqrt{۱۲}$

$۳\sqrt[۳]{۲} =$

$-۴\sqrt{۲} =$

$$-۳\sqrt[۳]{۳} =$$

نتیجه ۴ : داریم :

$$x\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \times y}$$

می بینیم فرجه تغییری نمی کند .

تبدیل رادیکال مرکب به رادیکال ساده :

الف : اگر رادیکال مرکب به شکل زیر باشد

$$\sqrt[x]{a\sqrt[y]{b\sqrt[z]{c}}} = \sqrt[x]{a} \times \sqrt[x\times y]{b} \times \sqrt[x\times y\times z]{c} = \sqrt[x\times y\times z]{a^{y\times z} \times b^z \times c}$$

مثال :

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۲]{۳\sqrt[۳]{۴}}} = \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳\times۲]{۳} \times \sqrt[۳\times۲\times۳]{۴} = \sqrt[۳\times۲\times۳]{۲^{۲\times۳} \times ۳^۳ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۲^۶ \times ۳^۳ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۶۴ \times ۲۷ \times ۴}$$
$$= \sqrt[۱۸]{۶۹۱۲}$$

توجه : سوال بالا را به کمک نکته زیر نیز می توانیم حل کنیم :

$$\sqrt[۲]{۲} = \sqrt[۲]{۲^۱} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\sqrt[۲]{۳} =$$

$$\sqrt[۳]{۲} =$$

$$\sqrt[۶]{۳} =$$

$$\sqrt[۱۸]{۴} =$$

بنابراین :

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt[۲]{۳\sqrt[۳]{۴}}} = \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳\times۲]{۳} \times \sqrt[۳\times۲\times۳]{۴} = ۲^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۶}} \times ۴^{\frac{۱}{۱۸}} = ۲^{\frac{۶}{۱۸}} \times ۳^{\frac{۳}{۱۸}} \times ۴^{\frac{۱}{۱۸}} = \sqrt[۱۸]{۲^۶ \times ۳^۳ \times ۴^۱}$$
$$= \sqrt[۱۸]{۶۴ \times ۲۷ \times ۴} = \sqrt[۱۸]{۶۹۱۲}$$

نتیجه ۵ : به طور کلی از این نکته استفاده کردیم که : $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

یعنی همان عدد زیر رادیکال را به عنوان پایه و توان در صورت و فرجه در مخرج

مثال :

$$\sqrt[۴]{x^۸} = x^{\frac{۸}{۴}} = x^۲$$

تمرین :

$$\sqrt[۳]{۴\sqrt[۵]{۳}} =$$

$$\sqrt[۴]{x\sqrt[۲]{x^۲\sqrt[۳]{x}}} =$$

ب : رادیکال های مرکب نوع دوم به شکل $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ می باشند که این رادیکال ها در فصل بعد به کمک اتحادها حل می شوند .

گویا کردن مخرج کسر رادیکالی

برای محاسبات آسان تر لازم است مخرج کسرها از حالت رادیکالی خارج شود برای این کار به کمک روش های زیر مخرج کسر را از حالت رادیکالی خارج می کنیم به این کار گویا کردن کسر رادیکالی می گویند .

مثال :

$\frac{۵}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

$\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} \times$

$\frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}} =$

$\frac{۵}{\sqrt[۳]{۳x}} =$

$\frac{۲}{\sqrt{x+۱}} =$

$\frac{۲}{\sqrt{x+۱}} \times \frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}} = \frac{۲\sqrt{x+۱}}{(\sqrt{x+۱})^۲} = \frac{۲\sqrt{x+۱}}{x+۱}$

نتیجه :

هر گاه مخرج کسر شامل یک رادیکال به صورت $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$ باشد برای گویا کردن کسر را در $\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$ ضرب می کنیم .دقت داریم که این کسر ضرب شده برابر واحد است و در ضرب کسر اصلی را تغییر نمی دهد.

توجه : اگر مخرج کسر بیش از یک رادیکال بود آن را به کمک اتحاد مزدوج در فصل بعد گویا می کنیم

$\frac{۱}{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲-۳} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{-۱} = -\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$

نکته تکمیلی : برای گویا کردن کسر زیر از اتحاد چاق و لاغر استفاده شده است که در فصل بعد به طور کامل بررسی می کنیم .

$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}}$

$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}} \times \frac{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}} = \frac{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}{(\sqrt[۳]{a})^۳+(\sqrt[۳]{b})^۳} = \frac{\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}{a+b}$

توجه : اتحاد چاق و لاغر بصورت زیر می باشد

$(a+b)(a^۲-ab+b^۲) = a^۳+b^۳$

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a+b$$

تمرین تکمیلی : کسر اول را به کمک اتحاد مزدوج و دومی را با چاق و لاغر گویا کنید

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=$$

یادداشت فصل :

خدایا توان من کم است و چشم به توانی دارم که از سوی تو همیشه سایه بر سر ما داشته است ، ما می دانیم که دوستان خوب همچون پایه ای مساوی هستند که توان های ما را با هم جمع می کنند و تا توانسته ایم توان هایمان را از همدیگر کم نکرده ایم و نخواهیم کرد مگر آنکه پایه ی کاری باشیم منفی که در آن کار، خیر و برکتی نباشد و تو توان را از ما کم کنی

خدایا همچون جذر که فقط ریشه ی مثبت اعداد را می بیند با اعمال ما برخورد کن و از منفی هایش بگذر و تو چه خوب می دانی که اعداد منفی جذر ندارند خدایا هر جا که گره گنگی در کار ما دیدی تو گویایش کن و ساده اش کن و ما را از آن گنگی خارج کن که همه اعمال گویای آن باشد که به نیت تو است و کار گنگی نداشته باشیم

خدایا دستان ما را پر کن از فرجه های زوج تا که منفی ها در زیر دستمان ما جایی نداشته باشند و تا لحظه آخر عمر منتظر توان های زوج تو هستیم که تمام پرانتزهای ما را خالی از منفی کند و مثبت باشیم به امید توان تو، خدایا نگهدار ما باش – ابراهیمی

یادداشت شما

....

....

....

موفق و سلامت باشید پایان نوبت اول سال تحصیلی – ابراهیمی