



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

تابع: تابع مثل یک ماشین با دانه های دانه شده با آن رفتار می کند

فردا $x \text{ (دانه)} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \text{ یا } y$

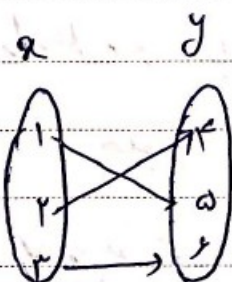
در $y = f(x)$ ، x متغیر مستقل و y وابسته است

برای نشان دادن تابع سه روش داریم.

① جدولی: $f(x) = x^2 - 2$ و $y = x^2 + 2x + 3$ مثلا

② مؤلفه ای: $\{(1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 1), (5, 0)\}$

که در $(1, 2)$ ، $x = 1$ و $y = 2$ است.



③ نموداری:

نکته: وقت کشیدن تابع، هرگاه مؤلفه های اول (x) با هم برابر شوند
 حتماً باید مؤلفه های دوم (y) با هم برابر شوند.

نکته: هرگاه ضابطه‌ای به شما دارند گفتند که این ضابطه تابع است یا نه

می‌کنند با دادن یک مقدار x به تابع و مقدار y پیدا کنند یا ثابت کنند

تابع نیست یعنی حودقت یک x دارد و مقدار y تحولی گرفته و بیشتر تابع نیست

توی سوالی که به شما می‌دهند معمولاً قدر مطلق یا توان زوج برای y قابل حلونه

مثال: کدام یک از روابط زیر تابع است؟

(۱) $x^2 + y^2 = 1$ (۲) $x = \sqrt{y} + 1$

(۳) $x = |y| + 1$ (۴) $x = y^2 + 1$

را حل می‌کنیم. باید مثال نقض برای گزینه‌های غلط پیدا کنیم. می‌کنیم به x عددی بدهیم تا جوابی y ها، روابط زیر را نتواند برآورد.

تابع نیست $\left\{ \begin{array}{l} y = +1 \\ y = -1 \end{array} \right. \xrightarrow{y^2=1} \xrightarrow{\text{پس}} \boxed{x=0} \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (۱)$

$y = 1 \rightarrow |y| = 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow x = |y| + 1 \quad (۳)$
 $y = -1 \rightarrow$
 تابع نیست

$y = 1 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow x = y^2 + 1 \quad (۴)$
 $y = -1 \rightarrow$
 تابع نیست

مثال

$P = \{(a, 3), (a, a+b), (2, a-b), (2, -1), (2a-b, ab)\}$ کتبیج است

حاصل $-\frac{b}{a}$ کدام است؟

در نکته بالا گفته شد زوج، وقتی مرتبه‌های اول برابر باشند، مرتبه‌های دوم صفاً برابرند.

$(a, 3) \text{ و } (a, a+b) \rightarrow \boxed{a+b=3}$

$(2, a-b) \text{ و } (2, -1) \rightarrow \boxed{a-b=-1}$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{جمع}} + \left\{ \begin{array}{l} a+b=3 \\ a-b=-1 \end{array} \right. \\ \hline 2a=2 \rightarrow \boxed{a=1} \end{array}$$

$$1+b=3 \rightarrow \boxed{b=2}$$

حاصل $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = (-2)$ برابر است با (-2)

مثال سلبین و قوی

اگر رابطه‌ی $f = \{(b, a^2), (b, 2a-1), (a^2b+1), (a^2b+1), (2, a-b)\}$ یک تابع باشد مقدار $a-b$ کدام است.

۴ (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

باز هم طبق نکته بالا: $(b, a^2) = (b, 2a-1) \Rightarrow a^2 = 2a-1$
 $\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a-1)^2 = 0 \rightarrow \boxed{a=1}$

~~(b, a^2)~~ $(a^2b+1), (a^2b+1)$ چون $a=1$ $(1, b^2-2), (1, 2b+1)$

(۳)

پس : $b^2 - 2 = 2b + 1 \rightarrow b^2 - 2b - 3 = 0 \rightarrow (b-3)(b+1) = 0$
 $\rightarrow b = \begin{cases} b=3 \\ b=-1 \end{cases}$

حالا $a-b$ را حساب کنید.
 $a=1 \quad b=3 \rightarrow a-b = -2$ در جواب مثبت

$a=1 \quad b=-1 \rightarrow a-b = 2$ در جواب مثبت.

مقدار تابع در نقطه

وقتی می‌گوییم $y=f(x)$ و حالا $f(x)$ را حساب کنید.

$y=f(x) = x^2 + 2x + 3$ معنی چه؟

حالا $f(x) = ?$

این به این معنی است وقتی x را ورودی بگیریم، خروجی $x^2 + 2x + 3$ می‌شود

اما حالا جای x ، می‌خواهد 2 را ورودی قرار دهیم جای x ، قرار

دهیم : $\rightarrow f(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 3 \rightarrow 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 11$

سؤال: اگر $f(x) = x^2 - 3$ باشد، $f(1+\sqrt{2})$ کدام است؟

$$\frac{1}{f(1-\sqrt{2})} \quad (1) \quad f(1-\sqrt{2}) \quad (2) \quad \frac{1}{f(1-\sqrt{2})} \quad (3) \quad -f(1-\sqrt{2}) \quad (4)$$

پاسخ:

$$f(x) = x^2 - 3 \rightarrow f(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 - 3 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} - 3$$

اتحاد در جمع

$$= 1 + 2 + 2\sqrt{2} - 3 = 2\sqrt{2}$$

اما نگاه به گزینه ها کنید، در هر کدام $f(1-\sqrt{2})$ هست، پس اول

حساب کنید $f(1-\sqrt{2})$

$$f(x) = x^2 - 3 \rightarrow f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 - 3 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2} - 3$$

$$= 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 3 = -2\sqrt{2}$$

در نتیجه

$$f(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{پس}} f(1+\sqrt{2}) = -f(1-\sqrt{2})$$

$$f(1-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

سؤال: اگر $f(x) = ax^2 + bx + 1$ باشد، $f(1) = -1$ و $f(-1) = 5$ باشد، $f(2)$ چقدر است؟

-3 (4)

3 (3)

-1 (2)

1 (1)

$$f(1) = -1 \rightarrow a(1)^2 + b(1) + 1 = -1 \rightarrow \boxed{a + b = -2}$$

$$f(-1) = 5 \rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 5 \rightarrow \boxed{a - b = 4}$$

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

$$2a = 2 \rightarrow \boxed{a = 1} \quad 1 - b = 4 \rightarrow \boxed{b = -3}$$

$$f(x) = 1x^2 - 3x + 1 \rightarrow f(2) = 1 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$$

$$f(2-3) \quad f(x) = \sqrt{-2x^2 + 18x + 5}$$

سؤال: مقدار $f(2-3)$ چقدر است؟

کدام است؟

6 (4)

3 (3)

2 (2)

1 (1)

اول وقت کسره جانداري عبارت $(2-\sqrt{3})$ از جمع f بسا را

رسوا و وقت کسره خواهد بود

عبارت داخل را در کمال را عبارت مربع کمال رسيان وردي

① اول از ضرب x^2 فاکتور بگيريد $-2(x^2-4x-\frac{1}{2}) \rightarrow -2x^2+8x+1$

② ضرب x را نصف کسره، به توان ۲ برسانيد، حالا اين عدد به توان ۲ رسيده

را اول عدد $-4x$ بنويسيد، سپس همان را کم کسره

$(-4x) \xrightarrow{\text{تقسيم ۲ در توان ۲}} -4 \div 2 = -2 \rightarrow (-2)^2 = 4$

$\Rightarrow -2(x^2-4x+4-4-\frac{1}{2}) = -2(x^2-4x+4-\frac{1}{2})$

③ حالا عدد باقي که درست زانست مشاهده مي کسره ميون از پراشر بنويسيد

حواستون به ضرب ۲ - شيت پراشر باشد

$-2(x^2-4x+4)+15$

④ عبارت داخل پراشر قطعا حاصل ايجاد است، ايجاد مربع دو جمله اي

$\Rightarrow -2(x+2)^2+15$

⑤ حالا ميون $\sqrt{-2x^2+8x+1}$ بنويسيد

$f(2-\sqrt{3})$ را راحت حساب کسره

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\rightarrow f(x-13) = \sqrt{-2(x-13-2)^2 + 15} = \sqrt{-2(-15)^2 + 15} = \sqrt{-2 \times 225 + 15} \\ = \sqrt{-450 + 15} = \sqrt{-435}$$

سؤال تشریحی خارج ۹۱

اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ باشد، نسبت $\frac{1+f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

~~۵ (۴)~~

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

سؤال بسیار ساده است کافیست $f(-2)$ و $g(2)$ را حساب کنید.

$$f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1$$

$$g(2) = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{5}$$

نسبت $\rightarrow \frac{1+1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = \frac{5 \times 2}{1 \times 2} = 5$

سؤال جدید و مهم:

تابع $f(x-1) = x^2 - 3x$ مفروض است. $f(-2)$ کدام است؟

$$16 \quad (4) \quad -2 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

تابع گسسته وقتی $x-1 \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x^2 - 3x$

اتفاق می افتد یعنی $x-1$ تابع به چه $x^2 - 3x$

تکامل مشاهده دار حالا ورودی -2 است؛ پس جای $x-1$

-2 قرار گرفته است.

$$x-1 = -2 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

یعنی اگر جای $\boxed{x = -1}$ قرار دهیم $f(-2)$ تولید می شود پس

$$f(-2) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

سوال کنده خارج ۸۸

اگر $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ و $f(x+2) - f(x)$ کدام است ؟

$$(1) -2x+2 \quad (2) 2x-2 \quad (3) 2x \quad (4) 2$$

راه حل تشریحی ضمیمه اولانی خواهد شد، راه حل تستی را آگوش می دهیم .

* راه حل تستی : جای x در $f(x+2) - f(x)$ عدد نگاه بگیریم

مثلاً $x=2$ و بعد حاصل $f(4) - f(2)$ را حساب کنیم .

حاصل را بدست آوریم، سپس هر x را که جایگزینی کرده ایم

در گزینه ها جایگزینی کنیم تا جواب پیدا شود

$$x=2 \rightarrow f(4) - f(2) = \left(-\frac{1}{2}(4)^2 + 2(4)\right) - \left(-\frac{1}{2}(2)^2 + 2(2)\right)$$

$$= (-8 + 8) - (-2 + 4) = 0 - 2 = -2$$

حالا $x=2$ را در گزینه ها جایگزینی کنیم .

$$(1) -2 \times 2 + 2 = -2 \quad (2) 2 \times 2 - 2 = 2$$

$$(3) 2 \times 2 = 4 \quad (4) 2$$

به همین راحتی !

نوشتن تابع صورت زوج مرتب

در ابتدای خردۀ عرض کردم که $y = f(x)$ و $x = a$ و $y = b$ پس فقط طرز نوشتاری فرق کرده.

مثال: سراسری ۸۶

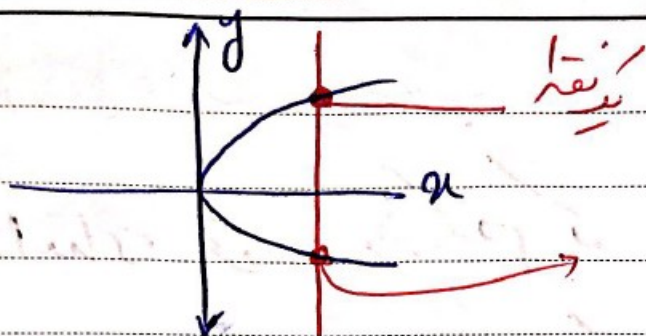
رتبه‌بج $f(1), f(2), f(3), f(4)$ مقدار $f(2) - f(4)$ کدام است

 $V(K$ $K=13$ 312 21

$$\begin{aligned} f(2) = 3 &\rightarrow 2f(2) = 2 \times 3 = 6 \\ f(4) = 2 &\rightarrow \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 2f(2) - f(4) \\ = 6 - 2 = 4 \end{aligned} \right.$$

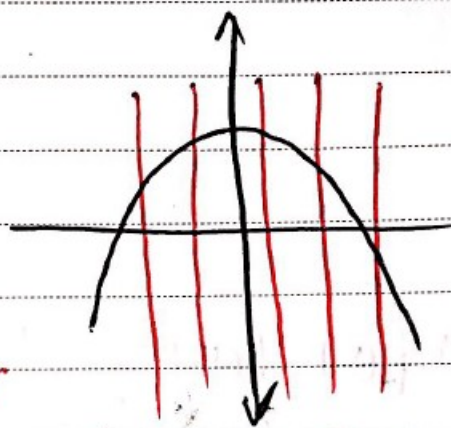
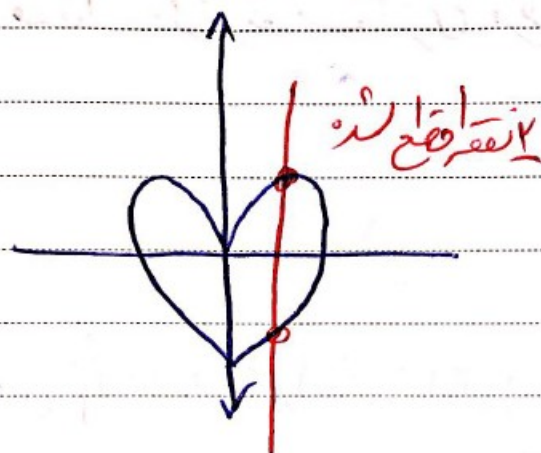
تکمیل تابع بودن از روی نمودار

شکل تابع است که وقتی خطی عمودی محور y ها را رسم کنید در هیچ‌کدام از نقاط عمودی، خط رسم شده با دو نقطه یا بیشتر با نمودار تقاطع نداشته باشد.



مثال:

سینه بچ نیست.



خط مماس می کشیم و خط مماس را رسم می کنیم
فقط یک نقطه با نمودار قطع می شود
سینه بچ است.

کتاب محکم دامنہ و برر

- دامنہ : همان x های درونی تابع است ، (مولفه اول در زوج های مرتب)

- برر : همان y های خارجی تابع است . (مولفه دوم در زوج های مرتب)

نکات حائز اهمیت برای حل سوالات دامنہ :

① دامنہ توابع چند جمله ای $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + z$ و R است

② دامنہ توابع کسری : دامنہ توابع کسری برابر است با $\{ \text{مخرج مشترک} \}$ $D = R - \{ \text{مخرج} \}$

مثال $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ بسند

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

مخرج مشترک

پس $D_f = R - \{0, 1, -1\}$

③ دامنہ توابع رادیکالی با غرض غذر : دامنہ تابع زیر رادیکال را حساب کنید

همان جواب است .

مثال : همان دامنہ $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ است

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}} \rightarrow D_f = ?$$

رادیکال را بنویسید و در تابع باقی مانده را بنویسید .

PAPCO

$$D = R - \{0, 1, -1\}$$

۱۳

(۴) دامنه توابع رادیکالی فرض زوج:

هر چه زیر رادیکال فرض زوج است (تایم داخل رادیکال) را باید بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم. به عبارت دیگر چون این که در بیج قرار دادیم، نباید فقط داخل رادیکال متقی شود.

$$\sqrt[2]{\frac{x^2-2}{x^3-x}} \rightarrow \frac{x^2-2}{x^3-x} \geq 0$$

اگر می‌بینیم که در بالا صفری کمتر خود دامنه قرار می‌گیرد.

اما راجل تستی ما با راجل کتابا متفاوت است.

روش دوم را هم رعایت کنید ① دامنه مثل عددی که خارج را صفر کننده شود

② زیر رادیکال فرض زوج نباید متقی شود

مثلاً $\sqrt{x^2-4}$

تست: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3-2}}$ کدام است.

① $x > \frac{2}{3}$ ② $x \geq \frac{2}{3}$ ③ $x \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right) \cup (2, \infty)$ ④ $x \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right) \cup (2, \infty)$

از گزینش با استغناء می‌کنیم.

گزینه ۱: $x > \frac{2}{3}$ ، خود $\frac{2}{3}$ را مثل می‌شود که خارج را صفر می‌کند پس نباید
گزینه ۲: $x \geq \frac{2}{3}$ (صفر دامنه نباید باشد)، پس گزینه ۲ رد می‌شود.

P4PCO

(۱۴)

گزینه ۱: هم لقمه هم اعداد حقیقی، که $\frac{2}{3}$ را اصل می‌شوند پس ضریب شود

بین گزینه ۱ و ۳ می‌بینیم.

گزینه ۱: لقمه اعداد بزرگتر از $\frac{2}{3}$

گزینه ۳: هم اعداد جز $\frac{2}{3}$

باید گزینه ۳ را انجام دهیم $x = -1$ را ملا جاندار می‌کنیم در درست

بود و می‌توانست درامنه باشد، چون $x = -1$ در گروه راقه

گزینه ۱ غلط، گزینه ۳ صحیح می‌شود و گزینه ۲ را رد

$$x = 1 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{-1-1}{3(-1)-2}} = \sqrt[3]{\frac{-2}{-5}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$$

استفادی بیش نیامد! پس $x = -1$ می‌تواند در دامنه تابع باشد

پس ۳ درست بود

دانه تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{2x+4}}$ کدام است.

۱) $x > 2$ ۲) $x \geq 2$ ۳) $x \leq -2$ ۴) $x > -2$

گزینه ۳ و ۴ را اول می‌خوانیم که خارج از صفر می‌کند.

ندیم. $f(-2) = \frac{(-2)^2 - 3(-2)}{\sqrt{-4+4}} = \frac{4+6}{0}$

گزینه ۱ و ۲) تنها فرقش این است که گزینه ۲ $x=2$ را شامل می‌شود.

$x=2$ را جایگزین کنیم اگر مشکلی نبود گزینه ۲ جوابه.

مشکلی نیست پس گزینه ۲ جوابه. $f(2) = \frac{2^2 - 3(2)}{\sqrt{2 \times 2 + 4}} = \frac{4-6}{\sqrt{8}} = \frac{-2}{\sqrt{8}}$

دانه تابع $f(x) = \sqrt{|x-1|-4}$ کدام است.

۱) $x \leq -4$ ۲) $-1 \leq x \leq 3$

۳) $x > 1$ ۴) $x \geq 5$ ۵) $x \leq -4$ ۶) $x > 5$

گزینه ۱) $x \leq -4$ مثلاً $x = -5$ را جایگزین کنیم.

مشکلی نیست می‌توانیم جواب صحیح بدهیم. $\sqrt{|-5-1|-4} = \sqrt{|-6|-4} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$

وقت نشی نوشته شده می‌تواند نه قه‌ء حباب است (بقیه نشیها
باید یک شود)

گ (۲) $3 \leq x \leq 4$ - $x=3$ را جایگذاری کنید

فرض بر این است پس زیرا در کمال $\times$ $\sqrt{3-1}-4 = \sqrt{2-4} = \sqrt{2}$
منفی نباشد

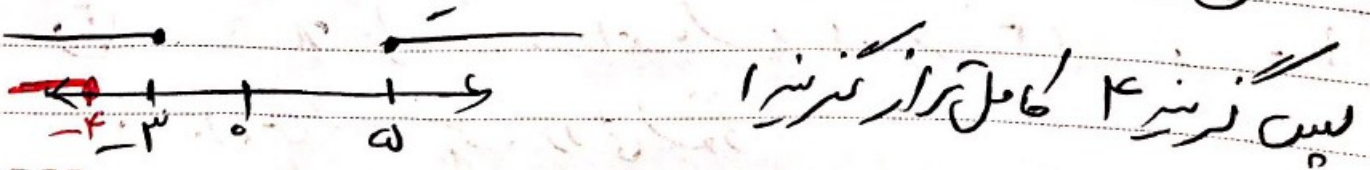
گ (۳) $x > 4$ و $x \leq 3$ ، $x=3$ هم برای این نشی را رد می‌کند.

گ (۴) $x > 5$ و $x \leq -3$

در جمع $x=5$ را جایگذاری کنید
مشکی نداده
 $\sqrt{5-1}-4 = \sqrt{4-4} = \sqrt{0}$

$x=-3$ را هم جایگذاری کنید
درست است
 $\sqrt{-3-1}-4 = \sqrt{4-4} = \sqrt{0}$

حالا بین ۳ و ۴ می‌بینیم . وقت نشی گ (۲) جواب از
اصل است اگر روی غدار شان رسم .



سوال به نظر رسیدن

مجموع جواب نه محاله $\frac{(x^2+4)(|x|+2)}{(x^2-4)(x^2-x+1)} < 0$ / نام است = ؟

(1) $(2, +\infty)$ $\checkmark$ $(-2, 2)$

(3) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (4) $(-\infty, -2)$

(2) صلا $x=3$ در بازه $x > 2$ قرار دارد

پس $x=3$ در دامنه نیست
 پس $x=3$ را رد کرد

$$\frac{(3^2+4)(|3|+2)}{(3^2-4)(3^2-3+1)} = \frac{13 \times 5}{5 \times 7} > 0$$

(3) بازه $x=2$ در می شود

(2) $x=0$ را جانمایی کرد

پس صلا $x=0$ باید در دامنه باشد

$$\frac{(0^2+4)(|0|+2)}{(0^2-4)(0^2-0+1)} = \frac{4 \times 2}{-4 \times 1} < 0$$

(4) $x=0$ قرار شد در دامنه باشد اما نه $x=0$ است
 مثل می شود پس رد می شود

تابع خطی (رابطه)

معادله $y = ax + b$ یا $f(x) = ax + b$ نوشته می شود

که شیب a و عرض از مبدأ b است.

b = عرض از مبدأ = جایی که نمودار تابع در محور y ها

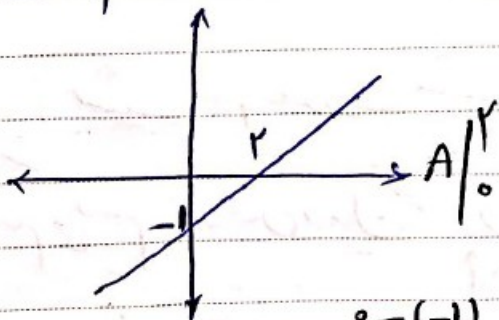
برخورد دارد

برای پیدا کردن a : اگر دو نقطه داشته باشیم

$$a \text{ (شیب)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

رابطه پیدا کردیم

مثال اگر نمودار $f(x)$ معادله $f(x) = ax + b$ را داشته باشد



پایه: دو نقطه روی نمودار داریم

پس شیب خط را پیدا کردیم:

$$a = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

از طرفی مقدار محور y ها $\rightarrow$
 را ارتفاع a - قطع کرده
 پس $b = -1$ خواهد شد

حالا $f(-1)$ را خوانده است.

$$f(-1) = \frac{1}{2}(-1) - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

البتاه دومی هم وجود داشت:

گفته شد بالا منتهی $b = -1$ است و می‌باشد مقدار داده شده
 تابع خطی است پس قضا صبر است $f(x) = ax + b$ است.

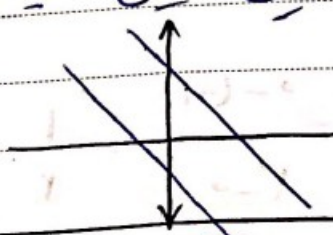
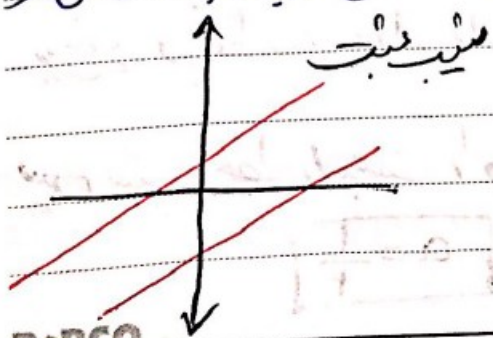
و $b = -1$ پس:

$$f(x) = ax - 1$$

حالا طبقاً $(2, 0)$ باید بران صدق کند.

$$0 = a(2) - 1 \Rightarrow 0 = 2a - 1 \Rightarrow 1 = 2a \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

نکته: شیب هم صبر است مثبت و هم منفی است شکل شیب مثبت و منفی را
 رسم می‌کنیم تا به محض دیدن تشخیص دهیم!



(2, 0)