



RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

|| مہمان ||

ریاضی ۳ بہ سبک روحانی

آموزش مہارت حل مسئلہ

آموزش مفہومی

صفر تا صد ہر مبحث

بررسی آزمون های نہایی

مولف : محمد صادق روحانی گلمجانی



مؤلف مؤلف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۷۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به " اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری " . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سؤالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .
دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

- ۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .
 - ۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.
 - ۳- بررسی نمونه سؤالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.
- خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.
- فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می‌افته . تسلط و مهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

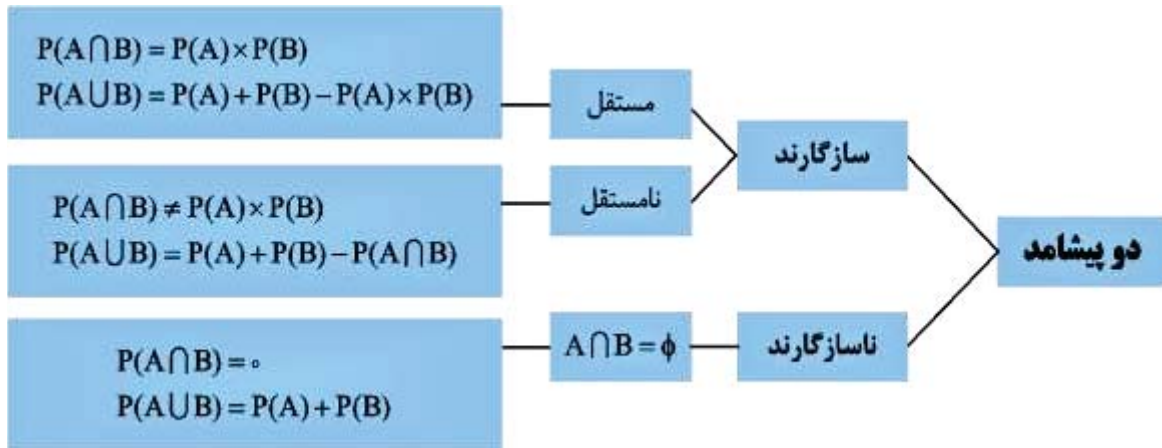
لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از ودقت نظر تشکر می‌کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

کرج فروردین ۱۴۰۲ : محمد صادق روحانی گلمجانی



یاد آوری



(۱) در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. ۳ لامپ به تصادف و هم زمان خارج می‌کنیم، احتمال آن که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید.

✓ پاسخ:

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120$$

$$n(A) = \binom{4}{3} \binom{6}{0} + \binom{6}{3} \binom{4}{0} = 4 + 20 = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

(۲) در کیسه‌ای که شامل ۵ مهره قرمز متمایز و ۳ مهره سفید متمایز و ۶ مهره آبی متمایز وجود دارد مطلوب است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم احتمال آن که یکی سفید و دیگری قرمز باشد چقدر است؟

✓ پاسخ:

پون گفته متوالی و بدون جایگذاری از روش ضرب تناسب‌ها میریم.

$$P(D) = \frac{3}{14} \times \frac{5}{13} + \frac{5}{14} \times \frac{3}{13}$$

اولی قرمز دومی سفید

(۳) احتمال قبولی کنکور نفر اول $\frac{2}{5}$ و احتمال قبولی نفر دوم $\frac{3}{7}$ است.

الف) احتمال اینکه فقط نفر دوم در کنکور قبول شود.

✓ پاسخ:

قبولی نفر اول ربطی به قبولی نفر دوم ندارد یعنی مستقل‌اند، هم چنین متمم این پیشامدها نیز مستقل‌اند

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A') \times P(B) = (1 - \frac{2}{5}) \times \frac{3}{7} = \frac{9}{35}$$

$$\text{ب) } P(A \cap B') = P(A') \times P(B') = (1 - \frac{2}{5})(1 - \frac{3}{7}) = \frac{12}{35}$$

(۴) در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند، اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آنها جهت آزمایش بر داشته شوند با کدام احتمال فقط یکی از موش‌ها ی مورد آزمایش سفید است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

✓ پاسخ:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

۵) احتمال آن که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۸/۰ و احتمال آن که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۶/۰ است. چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند.

☑ پاسخ:

بیماری شفص A ربطی به بیماری شفص B ندارد یعنی از هم مستقل اند. هر دوی آنها بعد از ۲۰ سال ناراحتی قلبی بگیرند یعنی اشتراک. ملاحظه کنید از آنها ناراحتی بگیرد یعنی اجتماع.

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{8}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{48}{100}$$

$$\text{ب) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{8}{10} + \frac{6}{10} - \left(\frac{8}{10} \times \frac{6}{10}\right) = \frac{92}{100}$$

۶) عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد:

الف) عقربه عددی اول را نشان دهد.

ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد.

ج) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.



☑ پاسخ:

$$\text{الف) } \begin{cases} n(S) = 8 \\ A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{8}$$

$$\text{ج) } C = \{3, 6\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۷) تاسی را سه بار می‌اندازیم احتمال‌های زیر را به دست آورید.

۱) بار آخر ۴ بیاید (۲) فقط بار آخر ۴ بیاید

۳) یکی در میان مضرب ۳ بیاید.

☑ پاسخ:

$$۱) \frac{6}{6} \times \frac{6}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$۲) \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

$$۳) \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

۸) چقدر احتمال دارد در یک تیم ۴ نفره المپیاد زیست شناسی:

۱) همه در ماه دی متولد شده باشند؟

۲) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند؟

☑ پاسخ:

$$۱) P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^4$$

$$۲) P(B) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12}$$

احتمال شرطی

اگر B, A دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(B) \neq 0$ آنگاه احتمال پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد به صورت

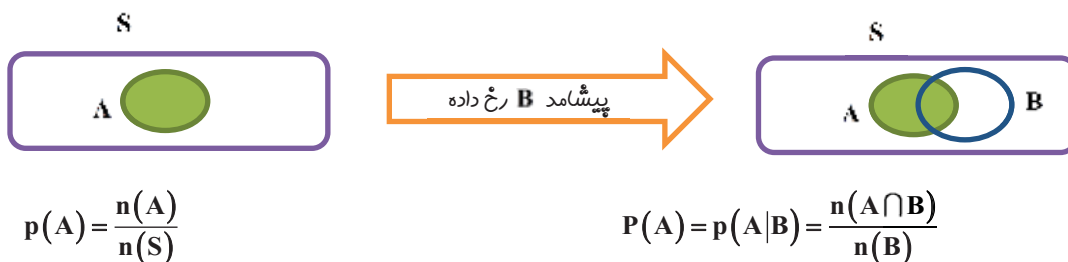
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

تعریف می شود. اگر $P(B) = 0$ آن گاه احتمال شرطی $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

در عمل برای مسائل شرطی به جای این که از رابطه ی بالا استفاده کنیم سعی می کنیم فضای نمونه ای پدید رو تشفیص بریم و از اون حالت های مورد نظر مون رو انتساب کنیم.

برای اینکه وقتی B رخ داده فضای نمونه ای دیگر S نیست بلکه فقط B است و پیشامد ما عملاً دیگر تمام A نیست به خاطر رخ دادن B فقط قسمتی از پیشامد A است که با B مشترک باشد (سازگار باشد) یعنی قسمت مطلوب می شود $A \cap B$ در نتیجه:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



یادمان باشد: در تست های احتمال شرطی پیشامدی که رخ داده B می نامیم و آن را به عنوان فضای نمونه ای در نظر می گیریم و عضوهای پیشامد مورد نظر سوال را A نامیده و از درون B انتخاب می کنیم. در نهایت احتمالی شرطی A به شرط وقوع B را از رابطه ی:

$$P(A|B) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

به دست می آوریم.

ایثاتی که گفتیم یعنی: در مسائلی که یک پیش فرض یا عبارت هایی مانند (اگر شمره باشد) (می دانیم است) (به فرض اینکه باشد) اومره باشد و فضای نمونه ای رو محدود کنه. در فضای محدود شده احتمال رو حساب می کنیم.

۹) مثلاً در یک خانواده ۳ فرزند اول دختره، احتمال این که دو فرزند دیگه ی این خانواده پسر باشه چی میشه؟

پاسخ:

$$S' = \{(pp), (pd), (dp), (dd)\}$$

میگیم فرزند اول که دختره پس می مونه فضای نمونه ای پدید دو فرزند:

$$P = \frac{n(A)}{n(S')} = \frac{1}{4}$$

پیشامد مطلوب یعنی (pp) به، پس داریم:

۱۰) اگر $P(A) = 0/7$ ، $P(B') = 0/8$ ، $P(A' \cup B) = 0/5$ آن گاه $P(B|A')$ را تعیین کنید.

پاسخ:

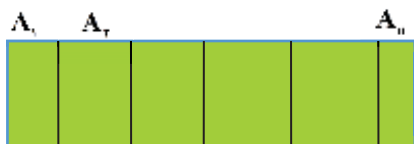
$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) + P(A') - P(B \cup A')}{1 - P(A)} = \frac{0/2 + 0/3 - 0/4}{0/3} = \frac{1}{3}$$

فرمول احتمال کل یا قانون جمع احتمال ها

فضای نمونه ای S به پیشامد های $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ افراز شده باشد. یعنی: پیشامد ها دو به دو اشتراک نداشته باشند و اجتماع آنها S شود. به زبان ریاضی:

$$A_i \cap A_j = \phi$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$



قانون جمع احتمال ها

در بعضی از مسایل احتمال، فضای نمونه ای به چند قسمت تقسیم می‌شوند. مثلاً مردان و زنان - شهری و روستایی و ظرف ها و کیسه ها و...

فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n پیشامد هائی از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$ و این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند یعنی اشتراک نداشته باشند. و اگر X یک پیشامد دلخواه از S باشد در این صورت داریم از قانون جمع احتمال استفاده می‌شود. البته هنگامی که پیشامدی مانند X با چندین پیشامد دیگر مانند A_1, A_2, \dots, A_n ((که فضای نمونه را افراز نموده اند)) اشتراک داشته باشد.

$$p(X) = p(X \cap A_1) + p(X \cap A_2) + \dots + p(X \cap A_n)$$

از طرفی می‌دونیم: $p(X \cap A_i) = p(A_i) \times p(X|A_i)$ در نتیجه

$$P(X) = p(A_1)p(x|A_1) + p(A_2)p(x|A_2) + \dots + p(A_n)p(x|A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(X|A_i)$$

در مسائل احتمال کل ابتدا پیشامد های A_1, A_2, \dots, A_n رخ داده اند و فضای نمونه ای را افراز نموده اند حال می‌خواهیم احتمال یک پیشامد مانند X را در فضای نمونه ای S به دست آوریم.



در کدام سوالات باید استفاده کنیم؟

اگر فضای نمونه ای چند قسمتی باشد، مثل زنان و مردان، ظرف ها و کیسه های مختلف، باسوار و بی سوار و کارخانه ها و دستگاه های مختلف و حالت های متفاوت و و احتمال ک پیشامد مثل X در این فضا را بخواهد از فرمول بالا استفاده می‌کنیم

✓ برای حل این مسایل می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم به طوری که اعداد موجود در هر شاخه از درخت را در هم ضرب نموده و اگر از شاخه‌ای به شاخه‌ی دیگر برویم اعداد آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

۱۱) ۶۰ درصد جمعیت کشوری را مردان که ۷۰ درصد آن‌ها با سوادند و بقیه جمعیت زنان، با ۶۰ درصد سواد می‌باشند، چند درصد این جمعیت باسواد هستند؟

پاسخ:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$P(B) = \frac{60}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{66}{100}$$

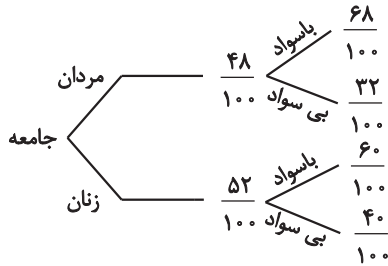
۱۲) طبق تحقیقات پزشکی احتمال تولد غیر طبیعی برای پسر $\frac{21}{100}$ و برای دختر $\frac{18}{100}$ است احتمال این که فرزند یک خانواده غیر طبیعی به دنیا بیاید چقدر است؟

✓ پاسخ: اگر A پیشامد غیر طبیعی به دنیا آمدن فرزند، A_1 پیشامد پسر بودن و A_2 پیشامد دختر بودن باشد، داریم:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{21}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{18}{100} = \frac{39}{200}$$

۱۳) ۵۲٪ جمعیت کشور را زنان و ۴۸٪ دیگر را مردان تشکیل می دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ از مردان با سواد باشند چند درصد از افراد جامعه باسوادند؟

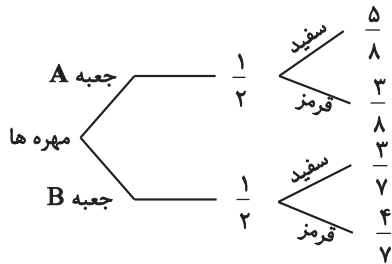
✓ پاسخ:



$$P = \frac{48}{100} \times \frac{68}{100} + \frac{52}{100} \times \frac{60}{100}$$

۱۴) در جعبه A، ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و از آن یک مهره خارج می کنیم چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

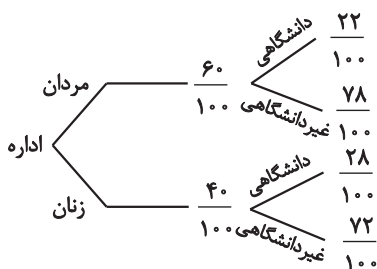
✓ پاسخ:



$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$$

۱۵) در اداره ای ۶۰٪ کارمندان مرد، و ۲۲٪ آن ها تحصیلات دانشگاهی دارند. ۲۸٪ زنان این اداره نیز تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر یک نفر از میان آن ها انتخاب شود چقدر احتمال دارد تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد؟

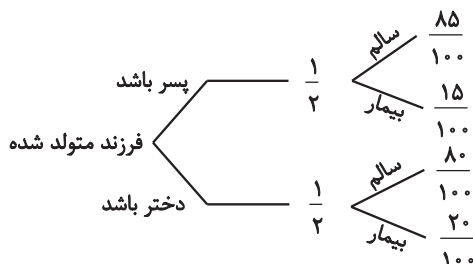
✓ پاسخ:



$$P = \frac{6}{10} \times \frac{78}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{72}{100}$$

۱۶) انتقال نوعی بیماری ارثی از پدر مادر به فرزند پسر ۱۵٪ و به فرزند دختر ۲۰٪ است. والدینی که حامل این نوع بیماری اند انتظار فرزند را دارند. احتمال آن که این فرزند سالم به دنیا بیاید را حساب کنید.

✓ پاسخ:



$$P(\text{فرزند سالم}) = \frac{1}{2} \times \frac{85}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{80}{100}$$

۱۷) در جعبه A، ۲ مهره سفید ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از این دو جعبه ۱ مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه دو مهره هم رنگ باشند کدام است؟

☑ پاسخ:

$$P(\text{هر دو سیاه}) + P(\text{هر دو مهره سفید}) = P(\text{هر دو مهره هم رنگ})$$

$$P(\text{هر دو مهره هم رنگ}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{18}{35}$$



هر وقت در انتخاب‌های متوالی یکی از انتخاب‌ها مورد پرسش قرار نگیره یعنی از نتیجه‌ی یک آزمایش چیزی نگویند ما باید خودمون حالت‌های ممکن برای اون رو در نظر بگیریم یا این‌که فکر کنیم اصلاً اون آزمایش رخ نداده و احتمال موارد گفته شده رو حساب کنیم.

۱۸) در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شود با تصادف سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

☑ پاسخ:

$$P_1 (\text{راه اول}) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}$$

$$P_2 (\text{راه دوم}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

پهن از رنگ موش دوم صرفی نزره یا حالت‌های ممکن برای اون رو حساب می‌کنیم مثل راه اول و یا مثل راه دوم انگار اتفاقی نیفتاده. احتمال‌های اول و سوم را حساب می‌کنیم و در هم ضرب می‌کنیم.

۱۹) در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید است؟

☑ پاسخ:

$$P(A) (\text{راه اول}) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{84}{15 \times 14} = \frac{2}{5}$$

$$P(A) (\text{راه دوم}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad \text{بدون در نظر گرفتن مهره اول فقط احتمال سفید بودن مهره دوم را حساب می‌کنیم. میبینی که جواب یکیه.}$$

۲۰) در کیسه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در کیسه دوم ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه داریم تاسی را می‌اندازیم اگر مضرب ۳ آمد از کیسه اول و در غیر این صورت از کیسه دوم دو مهره بر می‌داریم. با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نیستند؟

☑ پاسخ:

دومهره از کیسه اول هم رنگ نیستند

دو مهره از کیسه دوم هم رنگ نیستند

$$P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{4}{6} \times \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{4}{21} + \frac{10}{27} = \frac{106}{189}$$

مضرب ۳ بیاید

در مرحله اول هر دو آبی بیاید

۲۱) در کیسه ای ۶ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد اگر در سه اقدام به برداشتن مهره از کیسه کنیم به طوریکه در مرحله اول ۲ مهره در مرحله دوم ۳ مهره و در مرحله سوم ۵ مهره برداریم با کدام احتمال همه مهره های قرمز در مرحله سوم از کیسه خارج می شوند؟

پاسخ:

در مرحله دوم هر سه آبی بیار

$$P = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} \times \frac{\binom{4}{4} \binom{1}{1}}{\binom{5}{5}} = \frac{15}{45} \times \frac{4}{56} \times 1 = \frac{1}{42}$$

در مرحله اول هر دو آبی بیار

در مرحله سوم چهار تا قرمز و یک مهره آبی بیار

۲۲) دو جعبه داریم، درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

پاسخ:

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{96} = \frac{48}{192} + \frac{4}{192} = \frac{52}{192} = \frac{13}{48}$$

۲۳) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشد و شیوع یک بیماری خاص در اسن دسته ها به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود. با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلاست؟

پاسخ:

$$p(A) = \frac{20}{100}, \quad p(B) = \frac{50}{100}, \quad p(C) = \frac{30}{100}$$

$$P(D|A) = \frac{3}{100}, \quad P(D|B) = \frac{5}{100}, \quad P(D|C) = \frac{1}{100}$$

$$P(D) = p(A) \times P(D|A) + p(B) \times P(D|B) + p(C) \times P(D|C) = \frac{20}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{6 + 25 + 3}{1000} = \frac{34}{1000}$$

۲۴) یک سکه را پرتاب می کنیم اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

پاسخ:

$$S = \{ R, PPPP, PPPR, PPRP, PRPP, PRPR, PPRR, PRRP, PRRP \}$$

$$A = \{ R, PPRR, PPRP, PRPP \}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

۲۵) اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد. با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ: احتمال پسر بودن فرزند $p(B)$ و احتمال دختر بودن فرزند $p(G)$ و احتمال ابتلا به بیماری نوزاد $p(A)$

$$p(A) = P(B)p(A|B) + p(G)p(A|G)$$

$$p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

(۲۶) سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم 10 باشد برابر $\frac{1}{15}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{1}{5} \quad (۲) \quad \frac{15}{91} \quad (۳) \quad \frac{5}{51} \quad (۴)$$

پاسخ: گفته احتمال اینکه عدد سوم 10 باشد $\frac{1}{15}$ پس دوتای اول 10 نبودن در نتیجه:

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15 \Rightarrow p = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

(۲۷) در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{3}{4}$ برای نوع B، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

پاسخ:

$$P(kh|A) = \frac{4}{5}, \quad P(kh|B) = \frac{9}{10}, \quad P(kh|C) = \frac{1}{2}$$

$$P(kh) = p(A) \times P(kh|A) + p(B) \times P(kh|B) + p(C) \times P(kh|C)$$

$$P(kh) = \left(\frac{5}{22} \times \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{22} \times \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{15}{22} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{11} + \frac{9}{110} + \frac{15}{44} = \frac{133}{220}$$

(۲۸) مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند به احتمال $\frac{45}{100}$ و اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال $\frac{1}{10}$ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال $\frac{3}{10}$ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند $\frac{1}{10}$ ، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند $\frac{6}{10}$ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند $\frac{3}{10}$ باشد با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

پاسخ:

$$P(g) = p(R) \times P(g|R) + p(T) \times P(g|T) + p(E) \times P(g|E)$$

$$P(kh) = \left(\frac{1}{10} \times \frac{45}{100}\right) + \left(\frac{6}{10} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{30}{100}\right) = \frac{45 + 60 + 90}{1000} = \frac{195}{1000} = 19.5\%$$

(۲۹) اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر $\frac{8}{100}$ و نوزاد دختر $\frac{3}{100}$ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد. با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ: احتمال پسر بودن فرزند $p(B)$ و احتمال دختر بودن فرزند $p(G)$ و احتمال ابتلا به بیماری نوزاد $p(A)$

$$p(A) = p(B)p(A|B) + p(G)p(A|G) \Rightarrow p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

(۳۰) دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم با چه احتمالی این مهره سبز است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

احتمال سبز بودن مهره خارج شده از ظرف دوم: $p(G)$
احتمال سبز بودن مهره خارج شده از ظرف اول: $P(A)$
احتمال آبی بودن مهره خارج شده از ظرف اول: $p(B)$

$$p(G) = P(A)p(G|A) + p(B)p(G|B)$$

$$p(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$

۳۱) دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم با چه احتمالی این مهره سبز است؟ (دی ۱۴۰۱) پاسخ:

$P(A)$: احتمال سبز بودن مهر خارج شده از ظرف اول :

$p(G)$: احتمال سبز بودن مهره خارج شده از ظرف دوم :

$p(B)$: احتمال آبی بودن مهره خارج شده از ظرف اول :

$$p(G) = P(A)p(G|A) + p(B)p(G|B)$$

$$p(A) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{37}{88}$$

۳۲) سه ظرف یکسان داریم که هر کدام به ترتیب حاوی ۱۶، ۱۵، ۱۴ مهره هستند. تعداد مهره های قرمز سه ظرف به ترتیب ۴، ۶، ۵ مهره است. احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره های آن ظرف است. یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و مهره ای بیرون می کشیم. با کدام احتمال مهر انتخابی قرمز است (کنکور دی ۱۴۰۱)

$$\frac{7}{15} \quad (۴) \qquad \frac{1}{5} \quad (۳) \qquad \frac{131}{56} \quad (۲) \qquad \frac{1}{3} \quad (۱)$$

پاسخ:

$$p(A) = \frac{16}{45} \times \frac{4}{16} + \frac{15}{45} \times \frac{6}{15} + \frac{14}{45} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{3}$$

۳۳) احتمال اینکه یک کشتی گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{1}{5}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{1}{3}$ بوده و در صورتی که اصلی ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{1}{3}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی گیر قهرمان می شود. با رقیب اصلی خود را می برد؟ (کنکور دی ۱۴۰۱)

$$\frac{7}{15} \quad (۴) \qquad \frac{13}{30} \quad (۳) \qquad \frac{11}{30} \quad (۲) \qquad \frac{4}{15} \quad (۱)$$

پاسخ:

B : پیشامد قهرمان شدن یا همان کسب مدال طلا :

A : پیشامد پیروزی بر رقیب اصلی :

$$p(A) = \frac{1}{5}, \quad p(B) = \frac{1}{3}, \quad p(B|A) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad p(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{p(A)} \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{13}{30}$$

۳۴) یک تاس طوری ساخته شده که احتمال زوج آمدن ۴ برابر فرد آمدن است به چه احتمالی در پرتاب این تاس عدد بزرگتر از ۴ می آید؟ پاسخ:

$$p(۱) = p(۳) = p(۵) = x \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} p(۱) = p(۳) = p(۵) = x \\ p(۲) = p(۴) = p(۶) = 4x \end{cases}$$

$$x + x + x + 4x + 4x + 4x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{15}$$

$$p(\text{عدد بزرگتر از ۴}) = p(۵) + p(۶) = x + 4x = 5x = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(۳۵) در یک سکه احتمال خط آمدن ۳ برابر شیر آمدن است. به چه احتمالی در پرتاب ۲ بار این سکه هر دو بار شیر می آید؟
 پاسخ:

$$p(\text{ش}) = 3p(\text{خ}) \Rightarrow \begin{cases} p(\text{خ}) = 3x \\ p(\text{ش}) = x \end{cases} \quad 3x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

(۳۶) ۳۰ درصد مردم از پیام رسان A و ۴۰ درصد از پیام رسان B و هیچ فردی هر دو پیام رسان را استفاده نمی کند احتمال آنکه A خبری را پوشش دهد $\frac{2}{3}$ و احتمال این که B پوشش دهد $\frac{3}{4}$ است. احتمال این که فردی از این رویداد اطلاع نیابد کدام است.
 پاسخ:

$$p_1 = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{10}$$

با فرض اینکه شخص پیام رسان داشته باشد :

$$p_2 = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

اما اگر شخص اصلاً پیام رسان نداشته باشد آنگاه :

$$p = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

در مجموع احتمال این که فرد از این رویداد اطلاع نیابد برابر است با :

(۳۷) در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند با کدام احتمال یک فرانتخابی به تصادف از بین آن ها دفترچه سلامت دارد ؟
 پاسخ:

$$p = p(M)P(D|M) + P(D|Z) = \frac{54}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{46}{100} \times \frac{75}{100} = 0/669$$

(۳۸) ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف B و C ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه دارند به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب نموده و ۴ مهره از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره های خارج شده، سفید است ؟
 پاسخ:

چون می خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهره انتخابی سفید باشد، بنابراین باید ۲ مهره ی دیگر سیاه باشند. از طرفی احتمال هر یک از ۳ ظرف $\frac{1}{3}$ است. در هر ظرف احتمال آنکه ۲ مهره سیاه و ۲ مهره سفید خارج شود را محاسبه می کنیم.

$$p = \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{6}{2} \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{3} \left(\frac{60}{126} + \frac{45}{126} + \frac{45}{126} \right) = \frac{25}{63}$$

(۳۹) در یک مسابقه ی فرمول یک احتمال این که یک ماشین دچار نقص فنی نشود و به خط پایان برسد برابر $0/8$ است و احتمال این که ماشین دچار نقص فنی شود، برابر $0/1$ است. اگر بدانیم ماشین دچار نقص فنی نشده است با چه احتمالی به خط پایان نرسیده است ؟
 پاسخ:

A پیشامد به خط پایان برسد. B : دچار نقص فنی نشده باشد.

احتمال نقص فنی نشود و به خط پایان برسد $p(B \cap A) = 0/8$

دچار نقص فنی نشود $p(B) = 0/9$ \Rightarrow دچار نقص فنی شود $p(B') = 0/1$

$$p(A'|B) = \frac{p(B \cap A')}{p(B)} = \frac{p(B) - p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0/9 - 0/8}{0/9} = \frac{1}{9}$$

۴۰) سه کیسه همانند داریم در اولی ۳ مهره ی سفید و ۲ مهره قرمز در دومی ۱ مهره ی سفید و ۳ مهره قرمز و در سومی تعدادی مهره قرمز باشد، بدون نگاه کردن کیسه ای را انتخاب کرده و مهره ای از آن خارج می کنیم، احتمال این که این مهره قرمز باشد کدام است؟



$$\frac{19}{62} \text{ (۴)} \quad \frac{17}{56} \text{ (۳)} \quad \frac{18}{61} \text{ (۲)} \quad \frac{43}{60} \text{ (۱)}$$

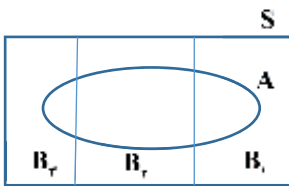
پاسخ:

$$P(g) = P(A_1 \cap g) + P(A_2 \cap g) + P(A_3 \cap g) =$$

$$P(g) = P(A_1)P(g|A_1) + P(A_2)P(g|A_2) + P(A_3)P(g|A_3)$$

$$P(g) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{n}{n} = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{43}{60}$$

۴۱) فرض کنیم فضای نمونه ای S، به پیشامدهای B_1 ، B_2 و B_3 افراز شده و A پیشامدی از این فضای نمونه ای باشد، اگر $P(B_1) = 0/2$ ، $P(B_2) = 0/3$ ، $P(B_3) = 0/5$ ، $P(A|B_1) = 0/01$ ، $P(A|B_2) = 0/02$ و $P(A|B_3) = 0/05$ باشد، آنگاه $P(B_2|A)$ کدام است؟



$$\frac{3}{4} \text{ (۴)} \quad \frac{2}{11} \text{ (۳)} \quad \frac{3}{11} \text{ (۲)} \quad \frac{2}{33} \text{ (۱)}$$

پاسخ:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_2) \times P(A|B_2)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)} =$$

$$\frac{0/3 \times 0/02}{0/2 \times 0/01 + 0/3 \times 0/02 + 0/5 \times 0/05} = \frac{0/006}{0/033} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$$

۴۲) در کلاسی که n دانشجوی پسر ($n > 5$) و 5 دانشجوی دختر دارد، به تصادف دو دانشجو را یکی پس از دیگری انتخاب می کنیم. اگر با

احتمال $\frac{10}{21}$ دانشجویان انتخابی هم جنس نباشند، تعداد دانشجویان پسر، کدام می تواند باشد؟

$$16 \text{ (۴)} \quad 11 \text{ (۳)} \quad 7 \text{ (۲)} \quad 10 \text{ (۱)}$$

پاسخ:

$$P = P(\text{اولی دختر، دومی پسر}) \times P(\text{اولی پسر، دومی دختر}) = \frac{10}{21} = \frac{n}{n+5} \times \frac{5}{n+4} + \frac{5}{n+5} \times \frac{n}{n+4} = \frac{10n}{n^2+9n+20}$$

$$n^2 + 9n + 20 = 21n \Rightarrow n^2 - 12n + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=10 \end{cases} \text{ قابل قبول}$$

۴۳) سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر «رو» بیاید تاسی را می ریزیم و اگر «پشت» بیاید سه سکه را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آن که فقط یک سکه به «رو» ظاهر شده باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{11}{6}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{9}{16}$

✓ پاسخ:

$P(\text{سکه اول پشت و از بین سه سکه دیگر فقط یکی رو}) = P(\text{سکه اول رو و تاس دلخواه}) \times P(\text{فقط یک سکه رو}) =$

$$P = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

۴۴) کیسه ای شامل ۶ مهره ی قرمز و ۸ مهره ی آبی می باشد، مهره ای را به تصادف از کیسه خارج می کنیم و پس از مشاهده ی رنگ آن، دو مهره از همان رنگ به کیسه بر میگردانیم، سپس مهره ای را از کیسه خارج می کنیم، احتمال آن که مهره ی خارج شده قرمز باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{3}{14}$ (۳) $\frac{5}{14}$ (۴) $\frac{3}{7}$

✓ پاسخ:

$P(\text{اولی قرمز دومی هم قرمز}) \times P(\text{اولی آبی دومی قرمز}) = P(\text{مهره قرمز بیاید}) =$

$$P = \frac{8}{14} \times \frac{6}{15} + \frac{6}{14} \times \frac{7}{15} = \frac{6 \times 15}{14 \times 15} = \frac{3}{7}$$

۴۵) امیر در ۳۰ درصد مواقع با دوچرخه و در ۷۰ درصد مواقع با اتومبیل خود سر کار می رود. اگر با دوچرخه برود، در ۵۰ درصد مواقع و چنان چه با اتومبیل خود برود، در ۱۵ درصد مواقع دیر می رسد. اگر روزی دیر سر کار رسیده باشد، با کدام احتمال با دوچرخه رفته است؟

- (۱) $\frac{10}{17}$ (۲) $\frac{31}{51}$ (۳) $\frac{15}{17}$ (۴) $\frac{23}{51}$

✓ پاسخ:

رفتن با دوچرخه : R و دیر رسیدن : D

$$P(R|D) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{P(R) \times P(D|R)}{P(D)} = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{50}{100}}{\frac{30}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{15}{100}} = \frac{30 \times 50}{30 \times 50 + 70 \times 15} = \frac{1500}{2550} = \frac{10}{17}$$

ریاضیات به سبک روحانی

