



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

آکادمی
ریاضی
مهندس روحانی

مقدماتی هندسه

ریاضی ۳ به سبک روحانی

آموزش مهارت حل مسئله

آموزش مفهومی

صفر تا صد هر مبحث

بررسی آزمون های نهایی

مؤلف: محمد صادق روحانی گلمجانی



مؤلف مؤلف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۷۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات کتاب درسی و امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به " اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری " . سازو کارتدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۸ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و " توضیح دار " آوردم تا شما سؤالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

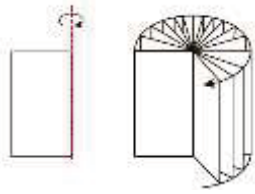
برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .
دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

- ۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و همچنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .
 - ۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل به سوال رو یادگیری.
 - ۳- بررسی نمونه سؤالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.
- خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.
- فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره، بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می‌افته . تسلط و مهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

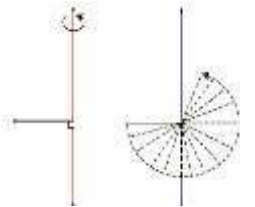
لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشود از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

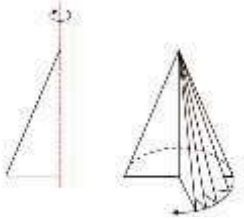
کرج فروردین ۱۴۰۲ : محمد صادق روحانی گلمجانی



شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن : یک استوانه خواهد بود .



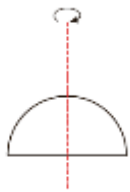
شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است :
دایره ای تو پر خواهد بود .



شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه: مخروطی قائم
و تو خالی خواهد بود .

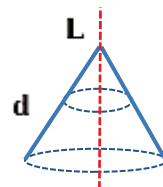
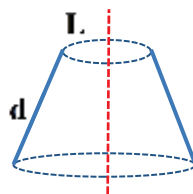
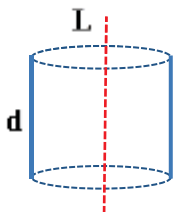


شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطر های خود : کره ای تو خالی خواهد بود



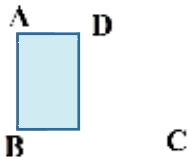
شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن : یک نیم کره تو خالی
خواهد بود .

- (۱) اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .
- (۲) اگر پاره خطی حول محور ، مایل دوران کند سطح مخروطی ناقص حاصل می شود .
- (۳) اگر پاره خطی حول محور ، مایل دوران کند و یک سر آن روی محور باشد سطح مخروطی حاصل می شود .

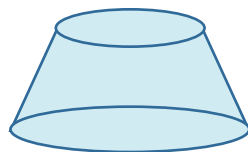


- اگر کره را با یک صفحه قطع دهیم همواره سطح مقطع دایره خواهد بود .
 اگر یک استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم ممکن است مستطیل ، بیضی ، دایره ایجاد شود .
 اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .
 اگر یک مستطیل حول یکی از اضلاعش دوران کند استوانه ساخته می شود .
 اگر یک مربع یا لوزی حول یک قطر خود دوران کند دو مخروط حاصل می شود .

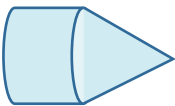
۱) شکل مقابل یک ذوزنقه قائم الزاویه است. شکل حاصل از دوران آن حول ضلع AB و BC به ترتیب کدامند ؟



پاسخ:

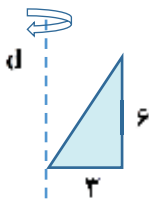


حول AB یک مخروط ناقص خواهد بود .



حول BC یک استوانه و یک مخروط خواهد بود

۲) اگر مثلث قائم الزاویه شکل روبرو را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .



پاسخ:

با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه از مخروط خواهد بود.

$$V = V_o - V_m = \pi(3)^2(6) - \frac{1}{3}\pi(3)^2(6) = 36\pi$$

مهم مورد نظر

مهم مخروط

مهم استوانه

۳) در شکل مقابل حجم حاصل از دوران شکل ، حول خط Δ هنگامی که قطر نیم دایره ۴ باشد را به دست آورید.

پاسخ:



با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه ای با شعاع ۴ و ارتفاع ۷ و یک کره با شعاع ۲ خواهد بود .

$$V = V_o - V_k = \pi(4)^2(7) - \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \pi\left(\frac{304}{3}\right)$$

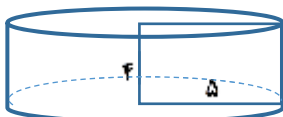
مهم مورد نظر

مهم استوانه

مهم کره

۴) اگر مستطیلی به طول ۵ و عرض ۴ را حول عرضش دوران دهیم ، حجم جسم حاصل چقدر است ؟

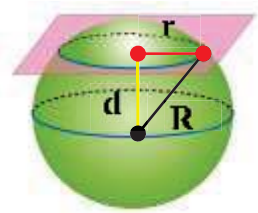
پاسخ :



$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi(5)^2(4) = 100\pi$$

۵) کره ای به شعاع ۸ واحد، با صفحه ای که از مرکز کره ۴ واحد فاصله دارد برش می دهیم سطح مقطع حاصل چه قدر است ؟

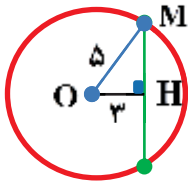
پاسخ ✓



$$R^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$S = \pi r^2 = 48\pi$$

۶) در استوانه ای که شعاع قاعده و ارتفاع آن به ترتیب ۵ و ۱۰ است صفحه ای موازی محور و به فاصله ۳ از محور آن را قطع می کند مساحت سطح مقطع چقدر است ؟

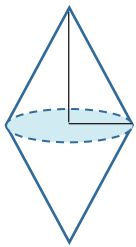


پاسخ: ✓

$$HM = \frac{L}{r} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad S = L \times h = 8 \times 10 = 80$$

۷) یک لوزی با قطرهای ۶ و ۸ را یک بار حول قطر بزرگ و بار دیگر حول قطر کوچکش دوران می دهیم. تفاضل حجم دو جسم ایجاد شده چقدر است ؟

پاسخ: ✓

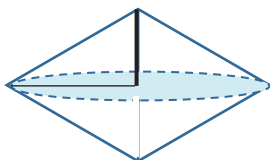


حجم مخروط از رابطه: $V = \frac{\pi}{3}(r)^2 h$ به دست می آید.

وقتی لوزی را حول قطر بزرگ آن دوران می دهیم دو مخروط با شعاع ۳ و ارتفاع ۴ خواهد بود

$$V_1 = 2\left(\frac{\pi}{3}(3)^2(4)\right) = 24\pi$$

که از قاعده به هم چسبیده اند و حجمشان می شود:



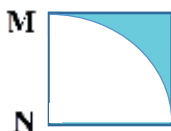
حال اگر لوزی را حول قطر کوچک آن دوران می دهیم دو مخروط با شعاع ۴ و ارتفاع ۳ خواهد بود

$$V_2 = 2\left(\frac{\pi}{3}(4)^2(3)\right) = 32\pi$$

که از قاعده به هم چسبیده اند و حجمشان می شود:

$$V_2 - V_1 = 32\pi - 24\pi = 8\pi$$

۸) مربع مقابل با ضلع ۴ را حول ضلع MN دوران می دهیم حجم حاصل از دوران ناحیه رنگ زده را محاسبه کنید.



پاسخ: ✓

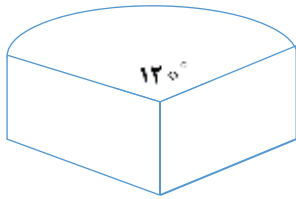
مربع را که دوران دهیم استوانه ای به حجم $V_0 = \pi(r)^2 h = \pi(4)^2(4) = 64\pi$ حاصل می شود حال

حجم حاصل از دوران ربع دایره را محاسبه می کنیم که یک نیمکره می شود. $V_k = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2\pi}{3}(4)^3 = \frac{2}{3}(64)\pi$

$$V = V_0 - V_k = \frac{64\pi}{3}$$

۹) مستطیلی با ابعاد ۳ و ۶ را حول ضلع کوچک آن ۱۲۰ درجه دوران می دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید.

پاسخ:



شکل حاصل از دوران ۳۶۰ درجه کامل یک استوانه به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۳ خواهد بود.

حال اگر دوران ۱۲۰ درجه انجام شود حجم حاصل $\frac{1}{3} = \frac{120}{360}$ حجم آن استوانه خواهد بود.

$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2 h) = \frac{1}{3}(\pi(6^2)3) = 36\pi$$

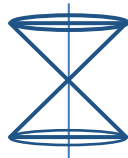
۱۰) جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف- شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک است.



پاسخ: الف) نیمکره

ب - شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه است.



پاسخ: ب) مخروط

۱۱) قاعده یک هرم منتظم مربعی به ضلع $\sqrt{2}$ است و یال های جانبی آن به طول $\sqrt{10}$ هستند. بیش ترین سطح مقطع گذرنده از راس و عمود بر قاعده این هرم را محاسبه کنید.

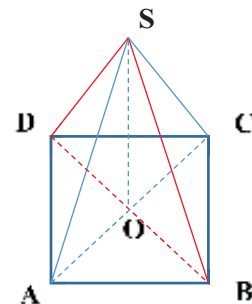
پاسخ:

از بین تمام صفحات گذرا از راس و عمود بر قاعده بشتترین سطح مقطع زمانی حاصل می شود که این صفحه شامل یکی از قطر های مربع باشد

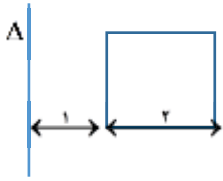
$$BD = \sqrt{2}BC \Rightarrow BD = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \Rightarrow BO = \frac{BD}{2} = 1$$

$$BS^2 = BO^2 + SO^2 \Rightarrow 10 = 1 + SO^2 \Rightarrow SO = 3$$

$$S_{(SBD)} = \frac{1}{2}BD \times SO = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$



(۱۲) با توجه به شکل، مربع را حول خط Δ دوران می دهیم سطح کل شکل حاصل از دوران را محاسبه کنید.



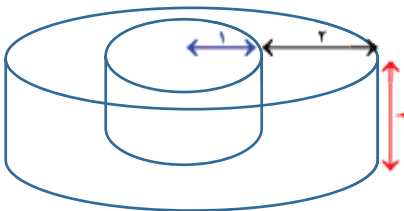
پاسخ: سطح جانبی یک استوانه با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر $2\pi rh$ است

سطح جانبی بیرونی این شکل برابر مساحت جانبی استوانه ای به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲: $2\pi rh = 2\pi(3)(2) = 12\pi$

سطح جانبی درونی این شکل برابر مساحت جانبی استوانه ای به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۲: $2\pi rh = 2\pi(1)(2) = 4\pi$

رویه بالا و رویه پایین دایره ای به شعاع ۳ واحد است که دایره ای به شعاع یک از آن جدا شده است:

$$2\pi(3)^2 - 2\pi(1)^2 = 16\pi$$



در کل داریم: $S_k = 12\pi + 4\pi + 16\pi = 32\pi$

رویه مخروطی



اگر خط d را حول محور L (که با آن متقاطع است) دوران دهیم، دو تا مخروط ایجاد می شود که در راس به هم متصل شده اند. حال اگر رویه مخروطی را با صفحه p قطع دهیم، موارد زیر رخ می دهد.

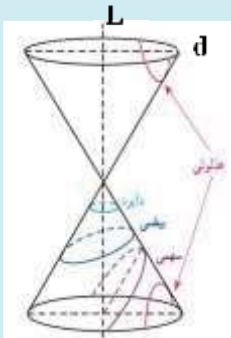
الف) صفحه p بر محور L عمود باشد. دایره حاصل می شود.

ب) صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود.

ج) صفحه p موازی محور L مخروط باشد. هذلولی حاصل می شود.

د) صفحه p موازی مولد d باشد. سهمی حاصل می شود.

ه) صفحه p از راس دو مخروط بگذرد. نقطه حاصل می شود.



(۱۳) جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱- شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک است.

۲- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه است.

۳- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن است.

۴- اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل است.

پاسخ:

(۴) دو مخروط هم قاعده به حجم 8π

(۳) دو مخروط هم قاعده

(۲) مخروط

(۱) نیمکره

(۱۴) در کدام یک از حالت های زیر حاصل بر خورد صفحه p و یک سطح مخروطی، می تواند بیضی باشد؟

(۱) p بر محور سطح مخروطی عمود باشد.

(۲) p بر محور سطح مخروطی موازی باشد.

(۳) p بر مولد سطح مخروطی موازی باشد.

(۴) p بر مولد سطح مخروطی عمود باشد.

پاسخ:

صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود. گزینه ۴ درست است چون در این حالت

وقتی p عمود بر مولد است شرایط فوق را دارد.



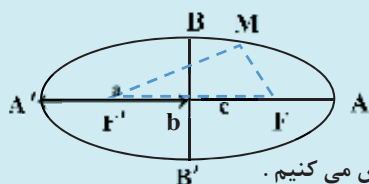
بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت (کانون‌ها F' و F) مقدار ثابت $2a$ است که $2a$ طول قطر بزرگ یا کانونی بیضی نامیده می‌شود.

$$AA' = 2a, \quad BB' = 2b, \quad FF' = 2c, \quad MF + MF' = 2a$$

قطر کانونی

قطر نا کانونی

فاصله کانونی



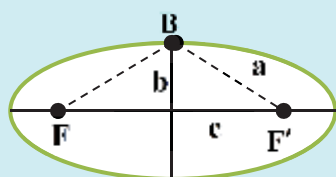
در شکل مقابل

(۱) نقاط F' و F را کانون‌های بیضی می‌گوییم.

(۲) فاصله بین دو کانون را که مقدار ثابتی است فاصله کانونی بیضی می‌گوییم و آن را برابر $F'F = 2c$ فرض می‌کنیم.

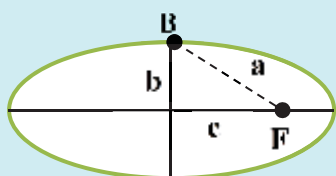
(۳) پاره خط $A'A$ را قطر بزرگ و محور کانونی و پاره خط $B'B$ را قطر کوچک و محور نا کانونی می‌گوییم.

در بیضی فاصله هر راس ناکانونی از کانون برابر a است.



با توجه به شکل $BF = BF' = a$ و از طرفی B نقطه‌ای روی بیضی است بنابراین: $BF + BF' = 2a$

در نتیجه: $BF = BF' = a$



در شکل مقابل در مثلث قائم الزاویه BOF داریم: $a^2 = b^2 + c^2$ و در هر بیضی $a > b$, $a > c$

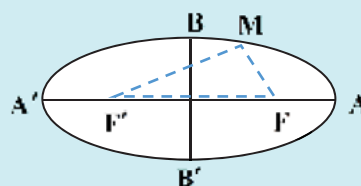
مختصات نقاط مهم در بیضی افقی



$$O = \frac{A+A'}{2} = \frac{B+B'}{2} = \frac{F+F'}{2}$$

وسط هر سه پاره خط AA' , BB' , FF' مرکز بیضی است

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_B + x_{B'}}{2} = \frac{x_F + x_{F'}}{2} \\ \beta = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_B + y_{B'}}{2} = \frac{y_F + y_{F'}}{2} \end{cases}$$



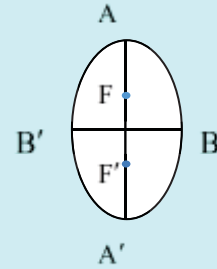
$$O \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix} \quad F \begin{vmatrix} \alpha + c \\ \beta \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} \alpha - c \\ \beta \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + b \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - b \end{vmatrix}$$

مختصات نقاط مهم در بیضی قائم



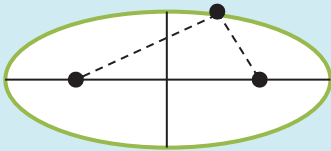
$$O = \frac{A+A'}{2} = \frac{B+B'}{2} = \frac{F+F'}{2}$$

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_{A'}}{2} = \frac{x_B + x_{B'}}{2} = \frac{x_F + x_{F'}}{2} \\ \beta = \frac{y_A + y_{A'}}{2} = \frac{y_B + y_{B'}}{2} = \frac{y_F + y_{F'}}{2} \end{cases}$$



$$O \begin{cases} \alpha & A \begin{cases} \alpha \\ \beta+a \end{cases} & A' \begin{cases} \alpha \\ \beta-a \end{cases} & F \begin{cases} \alpha \\ \beta+c \end{cases} & F' \begin{cases} \alpha \\ \beta-c \end{cases} & B \begin{cases} \alpha+b \\ \beta \end{cases} & B' \begin{cases} \alpha-b \\ \beta \end{cases} \end{cases}$$

خروج از مرکز : خروج از مرکز : در هر بیضی نسبت $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می گویند .



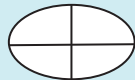
$$\circ < FF' < MF + MF' \Rightarrow \circ < 2c < 2a \Rightarrow \circ < \frac{c}{a} = e < 1$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

اگر a و b را داشته باشیم چون $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ خروج از مرکز از این رابطه نیز بدست می آید :

if $e \rightarrow 1$ 

خروج از مرکز چاقی و لاغر بیضی را نشان می دهد هرچه کمتر تپل تر

if $e \rightarrow 0$ 

(۱۵) اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد ، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .

پاسخ:

$$2b = 24 \Rightarrow b = 12, \quad OF = 5 \Rightarrow c = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$$

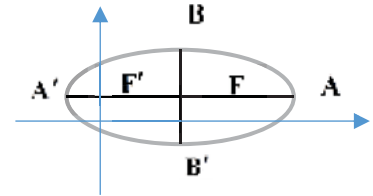
۱۶) کانون های یک بیضی $F(14, 2)$ ، $F'(2, 2)$ هستند و خروج از مرکز آن $\frac{3}{5}$ است. A, A', B, B' را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید. ☑ پاسخ:

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{2+14}{2} = 8 \\ \beta = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}, \quad 2c = |FF'| = \sqrt{(14-2)^2 + (2-2)^2} = 12 \Rightarrow c = 6$$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 10$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 8+10 \\ 2 \end{vmatrix} = 18 \quad A' \begin{vmatrix} 8-10 \\ 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$B \begin{vmatrix} 8 \\ 2+8=10 \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} 8 \\ 2-8=-6 \end{vmatrix}$$



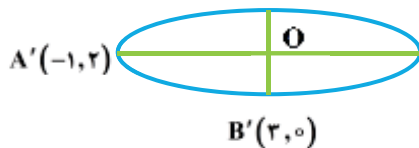
۱۷) اگر در یک بیضی داشته باشیم $F(5, 2), B(1, 4), F'(-3, 2)$ آنگاه خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. ☑ پاسخ:

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{-3+5}{2} = 1 \\ \beta = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2c = |FF'| = 5 - (-3) = 8 \Rightarrow c = 4 \\ B(\alpha, \beta + b) = (1, 4) \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

۱۸) خروج از مرکز بیضی که $A' \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ راس کانونی و $B' \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ راس غیر کانونی آن باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

☑ پاسخ: گزینه ۴



با توجه به شکل مرکز و طول قطر های بیضی تعیین می شود.

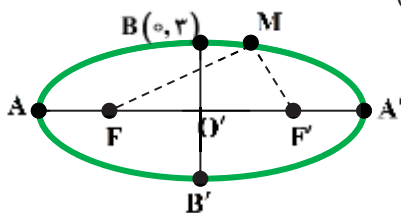
$$x_O = x_B, \quad y_O = y_{A'} \Rightarrow O(3, 2) \Rightarrow OB' = b = 2, \quad OA' = a = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۹) اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(4, 0)$ و مختصات راس $B(0, 3)$ باشد: (دی ۱۴۰۱)

الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث MFF' را تعیین کنید.

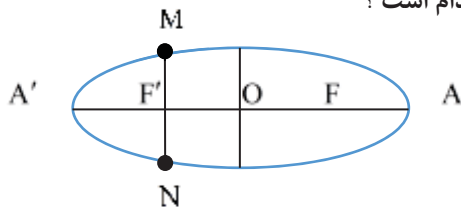


☑ پاسخ:

با توجه به شکل داریم $O'(0, 0)$ و $c = 4, b = 3$ در نتیجه $a = 5 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 25$

$$\text{محیط مثلث } MFF' = p = |MF| + |MF'| + |FF'| = 2a + 2c = 18$$

۲۰) در بیضی مقابل مبداء مختصات مرکز بیضی و فاصله کانون F از مرکز و راس A ۳ واحد است خطی که در کانون F' بر خط محور اصلی بیضی عمود است بیضی را در نقاط N, M قطع می کند فاصله نقطه N از A کدام است؟



- (۱) $\frac{9}{4}\sqrt{5}$
 (۲) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$
 (۳) $\frac{9}{2}\sqrt{5}$
 (۴) $\frac{9}{4}\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم $NF + NF' = 2a$ و چون گفته $OF = FA = 3$ خواهیم داشت $a = 6 \Leftrightarrow 2a = 12$ و همچنین $F(-3, 0)$, $F(3, 0)$ و مختصات N هم $N\left(-3, \frac{-9}{h}\right)$ می شود در نتیجه:

$$NF' + NF = 2a \Rightarrow h + \left(\sqrt{(3+3)^2 + (0-h)^2} \right) = h + \sqrt{36+h^2} = 12 \Rightarrow \sqrt{36+h^2} = 12-h \Rightarrow 36+h^2 = 144-24h+h^2$$

$$h = \frac{9}{2} \Rightarrow N\left(-3, \frac{-9}{2}\right), A(6, 0) \Rightarrow NA = \sqrt{(6+3)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{5}$$

۲۱) در یک بیضی فاصله ی کانونی دو برابر طول قطر کوچک تر است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
 (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 (۳) $\frac{4}{5}$
 (۴) $\frac{2}{5}$

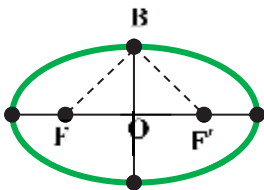
پاسخ:

$$c = 2b \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{5c^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۲۲) در یک بیضی مثلث $BF'F$ متساوی الاضلاع است خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

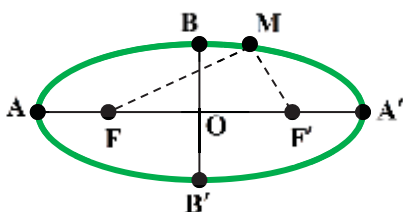
پاسخ:



$$BF = BF' = FF' = 2c, \quad BF + BF' = 2a = 4c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۳) در یک بیضی $a = 5$ است و نقطه M روی بیضی چنان واقع است که: $MF - MF' = 6$. مقدار MF' را به دست آورید.

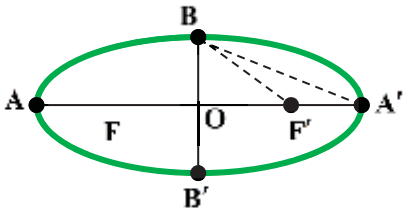
پاسخ:



$$\begin{cases} MF + MF' = 2a = 10 \\ MF - MF' = 6 \end{cases} \Rightarrow 2MF = 16 \Rightarrow MF = 8 \Rightarrow MF' = 2$$

(۲۴) در شکل مقابل اندازه قطر کوچک بیضی $\sqrt{128}$ و خروج از مرکز آن $\frac{1}{3}$ است مساحت مثلث $BA'F'$ را به دست آورید.

پاسخ:



$$2b = \sqrt{128} \Rightarrow b = 4\sqrt{2}, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$a = 3c, F'A' = a - c = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 32 + \frac{a^2}{9} \Rightarrow \frac{8a^2}{9} = 32 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c = 2$$

$$S_{BA'F'} = \frac{1}{2}(b)(a-c) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})4 = 8\sqrt{2}$$

(۲۵) F, F' کانون های یک بیضی با خروج از مرکز e هستند. دایره ای به قطر FF' این بیضی را در چهار نقطه قطع می کند کدام گزینه همواره درست است؟

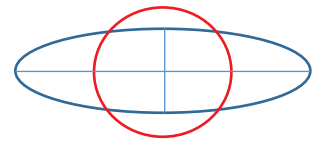
(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$ (۲) $0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2} < e < 1$ (۴) $0 < e < \frac{1}{2}$

پاسخ:

چون دایره به قطر FF' بیضی را در چهار نقطه قطع می کند باید $b < c$ باشد. در نتیجه داریم:

$$b < c \Rightarrow \sqrt{a^2 - c^2} < c \Rightarrow a^2 - c^2 < c^2 \Rightarrow 2c^2 > a^2$$

$$\frac{c^2}{a^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow e^2 > \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < e < 1} \frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$$



فاصله ی نزدیک ترین نقطه ی محیط بیضی تا مرکز آن برابر b . و فاصله ی دورترین نقطه ی محیط بیضی تا مرکز آن برابر a .. است

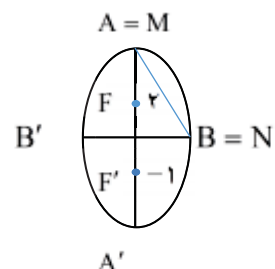
(۲۶) دو نقطه با عرض های -1 و 2 واقع بر محور y ، کانون های یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{6}{10}$ هستند. اگر M و N به ترتیب دورترین و نزدیکترین نقاط این بیضی نسبت به مرکز آن باشند، طول پاره خط MN کدام است؟

$$e = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

پاسخ: با توجه به شکل $FF' = 2 - (-1) = 3$ و داریم:

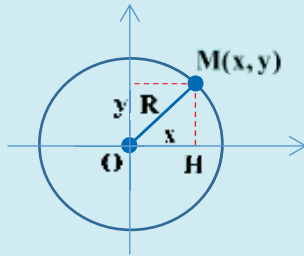
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2$$

$$MN = AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 4} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$





دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله این نقاط از یک نقطه ثابت (مرکز)، همواره مقدار ثابتی است. (شعاع)



حالا دقت کن: $|OM| = R$ و مرکز دایره O و نقطه شناور روی محیط دایره است. در مثلث قائم الزاویه OHM داریم: $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow OH^2 + HM^2 = OM^2$ این معادله دایره ای به مرکز مبدا مختصات به شعاع R می باشد.

معادله استاندارد دایره: معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R به صورت: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.

معادله فرم گسترده دایره: اگر معادله فرم استاندارد دایره را بسط دهیم و مرتب بنویسیم فرم گسترده معادله دایره را خواهیم داشت.
 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در این حالت داریم:

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - R^2 \end{cases} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{-a}{2} \\ \beta = \frac{-b}{2} \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

(۱) در فرم گسترده باید ضرائب x^2 و y^2 برابر باشند و همواره باید: $a^2 + b^2 - 4c > 0$

(۲) برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره الزامی است مگر آنکه در مسئله اطلاعاتی بدهند که بتوان آنها را محاسبه کرد.

(۳) در نوشتن و حل مسائل دایره از رسم کردن غافل نشوید به خصوص هنگامی که ایده خاصی ندارید و چیزی به ذهنتان نمی رسد پیاده کردن داده های مسئله روی شکل راه حل را به ذهن ما القاء می کند.

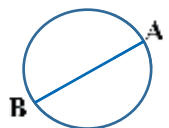
(۴) در بعضی از سوالات میگه مرکز دایره روی خط $y = mx + n$ قرار داره ویا میگه $y = mx + n$ معادله یک قطر دایره است. در این سوالات مرکز را به صورت $O \begin{cases} \alpha \\ \beta = m\alpha + n \end{cases}$ نشان دهید.

(۲۷) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(3, 2)$ و $M(1, 1)$ نقطه ای روی آن باشد. پاسخ:

$$R = |OM| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

(۲۸) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(2, 4)$ و $B(-2, 2)$ دو سر یک قطر آن باشند. پاسخ:

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O \begin{cases} \alpha = \frac{-2+2}{2} = 0 \\ \beta = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} \sqrt{(2+2)^2 + (4-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$$



$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 5$$

۲۹) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید (دی ۱۴۰۱)

$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ -\frac{b}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 32} = \sqrt{10} \\ R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - (-8)} = \sqrt{10} \end{cases}$$

پاسخ:

۳۰) در حالت های زیر معادله دایره را بنویسید.

الف) دایره ای که از مبداء مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

ب) دایره ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه ای روی آن باشد.

ج) دایره ای که از نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سر یکی از قطر های آن باشند.

پاسخ:

$$OC = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5} = R \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$CA = \sqrt{(2+3)^2 + (3+9)^2} = 13 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 169$$

$$C = \left(\frac{0+(-4)}{2} = -2, \frac{-1+3}{2} = 1 \right), \quad 2R = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

۳۱) مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ را تعیین کنید.

پاسخ:

راه اول: از راه مربع کامل نمودن و تبدیل به معادله استاندارد

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{-a}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \beta = \frac{-b}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 28} = \frac{2}{2} = 1$$

راه دوم: استفاده از فرمول:

۳۲) به ازای کدام مقادیر m معادله $2x^2 + (m^2 - 7)y^2 + 4y + m = 0$ یک دایره است؟

پاسخ:

$$m^2 - 7 = 2 \Rightarrow m = \pm 3$$

برای دایره بودن باید ضرایب x^2 و y^2 برابر باشند. پس:

حالا باید چک کنیم کدامیک درست است چون باید در دایره داشته باشیم: $A^2 + B^2 - 4C > 0$

$$m = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

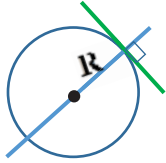
$$m = -3 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$$

بنابراین $m = -3$ قابل قبول است.

۳) معادله ی دایره ای که یک خط بر آن مماس :

یادآوری : خطی که از مرکز دایره می گذرد بر دایره عمود است دایره تنها منحنی است که قائم های بر آن همواره از مرکز می گذرند.

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است

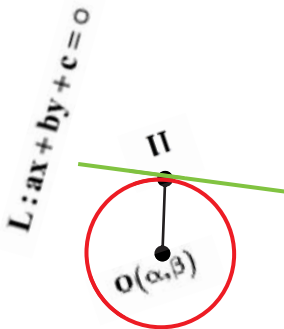


$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$$

اول فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب می کنیم .

حالا معادله استاندارد دایره به راحتی نوشته میشه چون شعاع و مرکز رو داری

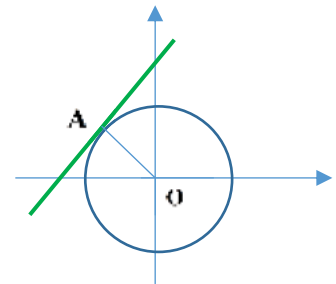
$$C(O, R): (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$



۳۳) اگر بدانیم خط L در نقطه $(-3, 4)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است . معادله خط مماس را بنویسید .

پاسخ:

$$M_{OA} = \frac{4}{-3} \Rightarrow M' = \frac{3}{4} \Rightarrow L_A: y - 4 = \frac{3}{4}(x + 3)$$



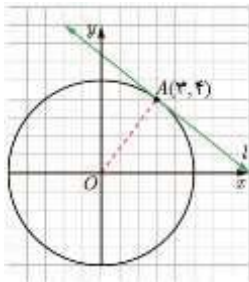
۳۴) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد .

پاسخ:

$$d = \frac{|3(0) - 4(3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3 = R \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

۳۵) اگر بدانیم خط L در نقطه $(3, 4)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است معادله خط مماس چیست ؟

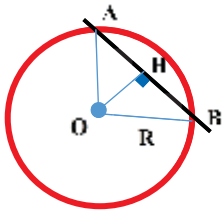
پاسخ:



$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = R \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \Rightarrow m' = \frac{-3}{4}, \quad A \left| \frac{3}{4} \Rightarrow y - 4 = \frac{-3}{4}(x - 3)$$

معادله دایره ای که خط $L: ax + by + c = 0$ روی آن وتر با طول d می سازد.



یادت باشه خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند. بنابراین: $|HB| = \frac{d}{2}$

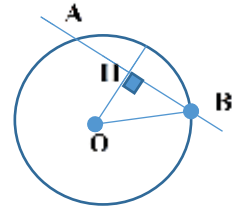
و از طرفی $|OH| = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $OH^2 + HB^2 = R^2$ بنابراین شعاع دایره را هم داریم:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

(۳۶) دایره ای به مرکز $O(1, -1)$ خط $\frac{3}{2}x - 2y + 4 = 0$ را در دو نقطه قطع می کند و طول وتر ایجاد شده ۸ است معادله این دایره را بنویسید.

پاسخ: خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.

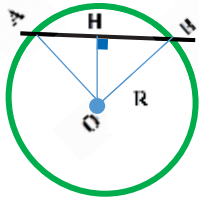
$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{2} + 2 + 4|}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{7/2}{\sqrt{\frac{25}{4}}} \Rightarrow OH = \frac{15}{5} = 3$$



$$R^2 = OH^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

(۳۷) خط $5x + 12y = 14$ دایره $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ را در نقاط A, B قطع می کند فاصله A از B را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا فاصله مرکز دایره را تا خط پیدا می کنیم سپس به کمک فیثاغورس HB را تعیین می کنیم.



$$O(1, 4), R = \sqrt{1 + 16 + 8} = 5 \Rightarrow OH = \frac{|5 + 48 - 14|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{19}{13} = 3$$

$$HB = \sqrt{R^2 - OH^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$$

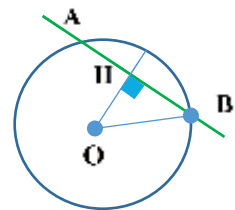
(۳۸) دایره ای به مرکز $O(1, -1)$ خط $\frac{3}{2}x - 2y + 4 = 0$ را در دو نقطه قطع می کند و طول وتر ایجاد شده ۸ است این دایره از کدام نقطه می گذرد؟

- (۴, ۳) (۱) (۳, ۴) (۲) (۲, ۵) (۳) (۶, ۱) (۴)

پاسخ: گزینه ۱

خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{2} + 2 + 4|}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{7/2}{\sqrt{\frac{25}{4}}} \Rightarrow OH = \frac{15}{5} = 3$$



$$R^2 = OH^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

مختصات (۴, ۳) در آن صدق می کند؟

وضعیت دو دایره



۱- مختصات مراکز دو دایره و همچنین شعاع هریک را به تعیین کنید.

۲- فاصله دو مرکز دایره یعنی $d = |O_1O_2|$ را حساب کنید.

۳- $|R_1 - R_2|$ ، $R_1 + R_2$ را محاسبه کنید.

۴- d را با $|R_1 - R_2|$ ، $R_1 + R_2$ مقایسه کنید.

$d > R_1 + R_2$	متخارج	
$d = R_1 + R_2$	مماس خارج	
$ R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	متقاطع	
$d = R_1 - R_2 $	مماس داخل	
$d < R_2 - R_1 $	متداخل	
$d = 0$	هم مرکز	

۳۹) دو دایره به معادلات: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$ نسبت به هم چگونه اند؟

پاسخ:

۱) $O_1(2, -4)$ ، $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 - 76} = 1$

۲) $O_2(2, -2)$ ، $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = 3$ ، $\begin{cases} R_1 + R_2 = 4 \\ |R_1 - R_2| = 2 \end{cases} \Rightarrow d = |R_1 - R_2| = 2$ مماس داخل اند

۳) $d = |O_1O_2| = \sqrt{(2-2)^2 + (-2+4)^2} = 2$

۴۰) وضعیت دو دایره $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ، $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ نسبت به هم را تعیین کنید.

پاسخ:

$O_1(1, 1)$ ، $R_1 = 2$ ، $O_2(4, 1)$ ، $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 - 52} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$

$d = |O_1O_2| = |4-1| = 3$ ، $R_1 + R_2 = 2+2 = 4$ ، $|R_1 - R_2| = 0$ ، $|R_1 - R_2| < 0, O_2 = d < R_1 + R_2$

دو دایره متقاطع اند.

(۴۱) دو دایره :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases}$$
 نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

(۴) متقاطع اند

(۳) متخارجند

(۲) مماس داخلند

(۱) مماس خارج اند

پاسخ:

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{-a}{2} \\ \beta = \frac{-b}{2} \end{cases} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$O_1 \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2, \quad O_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{36 - 20} = 2, \quad O_1 O_2 = d = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

چون $d > R_1 + R_2$ متخارجند.

(۴۲) مشخص کنید در حالت های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$, $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$, $x^2 + (y-5)^2 = 5$

پاسخ:

(الف)

$$O \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = 3, \quad O' \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{14}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R - R' < OO' < R + R'$$

(ب)

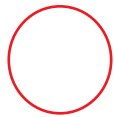
$$O \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \end{vmatrix} \quad R = \sqrt{7}, \quad O' \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix} \quad R' = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = 2\sqrt{17} \Rightarrow OO' > R + R'$$

تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره

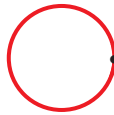


۱- در معادله فرم گسترده دایره مختصات نقطه داده شده را جای گذاری می کنیم آنگاه :

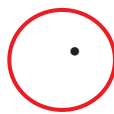


$M(x_M, y_M)$

۲- اگر $p(x_m, y_m) > 0$ نقطه خارج دایره قرار دارد .



۳- اگر $p(x_m, y_m) = 0$ نقطه روی دایره قرار دارد .



۴- اگر $p(x_m, y_m) < 0$ نقطه بیرون دایره قرار دارد .

۴۳) وضعیت نقاط $(1, 0)$ ، $(0, -1)$ ، $(-1, -2)$ ، $(0, 0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید .

پاسخ:

$$p(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$p(1, 0) = 1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0$$

روی دایره

$$p(0, 0) = 1 > 0$$

خارج دایره

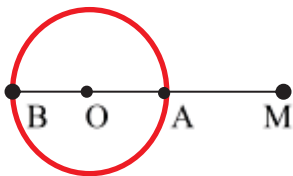
$$p(-1, -2) = 1 + 4 + 2 - 4 + 1 = 0$$

روی دایره

$$p(2, 3) = 4 + 9 - 6 + 2 + 1 = 10 > 0$$

خارج دایره

بیشترین و کمترین فاصله نقطه تا محیط دایره



اول فاصله نقطه را از مرکز دایره حساب می کنیم سپس شعاع دایره را تعیین می کنیم آنگاه خواهیم داشت .

$$\text{فاصله نقطه تا مرکز} = |OM| = d$$

$$\text{بیشترین فاصله} = |BM| = d + R$$

$$\text{کمترین فاصله} = |AM| = d - R$$

تکمین وضعیت یک خط و یک دایره نسبت به هم 

دایره به معادله ی $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ و خط به معادله ی $L: ax + by + c = 0$

$$O \begin{cases} \alpha = \frac{-A}{2} \\ \beta = \frac{-B}{2} \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$$

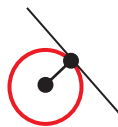
اول مرکز دایره و شعاع دایره را تعیین می کنیم. اینطوری :

$$h = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

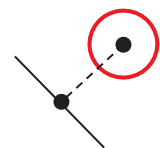
فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب می کنیم. اینطوری :



$h < R$



$h = R$



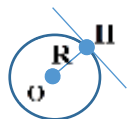
$h > R$

۴۴) وضعیت خط به معادله $3x + 4y + 7 = 0$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ چگونه است.

پاسخ:

$$O \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 12} = 2, \quad OH = \frac{|3 + 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow OH = R$$

خط و دایره بر هم مماس اند



۴۵) وضع خط های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$, $6x + 4y = 0$

ب) $x^2 + y^2 = 2$, $y = -x - 2$

پاسخ:

$$O \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}, \quad R = \sqrt{2}$$

$$O \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 28} = 1$$

$$x + y + 2 = 0 \Rightarrow d = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{|6(2) + 4(2)|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$d = R = \sqrt{2}$ خط بر دایره مماس است

$d = \frac{10\sqrt{13}}{13} > R = 1$ خط و دایره غیر متقاطع

۴۶) در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را با کمک رسم دایره بررسی کنید.

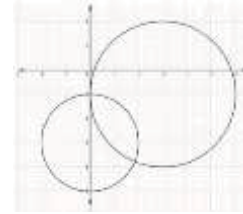
☑ پاسخ:

$$O \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 4^2} = 2.5$$

(الف)

$$O \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \end{vmatrix}, \quad R = 2$$

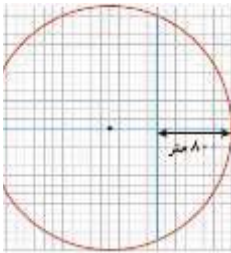
(ب)



$$x = 0 \Rightarrow (y+3)^2 = 4 \Rightarrow y = -1, y = -5$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 9 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -5$$

۴۷) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره (۱۳، ۱۳) و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:



(الف) معادله این دایره چیست ؟

(ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

(پ) دو مسیر در چه نقطه ای با یکدیگر متقاطع اند ؟ (ت) طول مسیر عمودی چقدر است ؟

☑ پاسخ:

$$(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$$

$$x=18 \Rightarrow 25 + (y-13)^2 = 169 \Rightarrow (y-13)^2 = 144 \Rightarrow \begin{cases} y-13=12 \Rightarrow y=25 \\ y-13=-12 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$A(18,1), \quad B(18,25)$$

$$AB = 25 - 1 = 24 \Rightarrow 2400 \text{ متر}$$

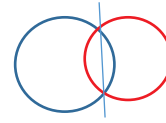
۴۸) معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

☑ پاسخ:

$$O \begin{vmatrix} \alpha = \frac{-A}{2} = -1 \\ \beta = \frac{-B}{2} = -1 \end{vmatrix}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{4+4+32} = \sqrt{10}, \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$$

اگر دو دایره برهند $\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ و وتر مشترک آنها را بفیوهند کافی است معادلات آنها را از هم کم کنیم.

$$L: (a-a')x + (b-b')y + (c-c') = 0$$



۴۹) معادله وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 + mx + y - 3 = 0$ ، $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0$ خط $y = 6x$ است مقدار m را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + mx + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (m-4)x - y = 0 \Rightarrow y = (m-4)x \Rightarrow m-4=6 \Rightarrow m=10$$

۵۰) دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4a = 0$ بر محور x ها در نقطه M مماس است اگر این دایره محور y ها را در نقاط P, Q قطع کند مساحت مثلث MPQ کدام است ؟

۳√۵ (۴) ۲√۵ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

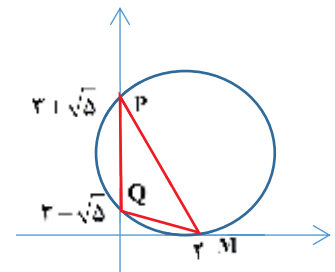
پاسخ: چون گفته بر محور x ها مماس است.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4a = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 - 4x + 4a = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 16a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 - 6y + 4 = 0 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$S = \frac{(3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5})(2)}{2} = 2\sqrt{5}$$



۵۱) مرکز دایره گذرا بر سه نقطه $(1, 3)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 2)$ کدام است؟

$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ (۳) $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ (۲) $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی (۳) صحیح است.

معادله کلی دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. مختصات هر سه نقطه در آن صدق می‌کند.

$$\begin{cases} a+3b+c=-10 \\ -2a+4b+c=-20 \\ 2b+c=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b+3c=-40 \\ 6b+3c=-12 \end{cases} \Rightarrow b=-7, c=10, a=1$$

مرکز دایره به مختصات $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ است.

۵۲) طول وتری که دایره $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 4y - 2 = 0$ از محور y ها جدا می کند چند برابر طول وتری است که از محور x ها جدا می کند ؟

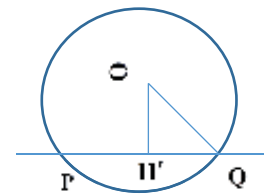
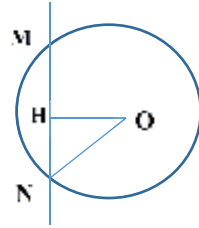
پاسخ:

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow O'(\sqrt{2}, -2), R = \frac{1}{2}\sqrt{8+16+8} = 2\sqrt{2}$$

$$MN = 2\sqrt{(ON)^2 - (OH)^2} = 2\sqrt{8-2} = 2\sqrt{6}$$

$$PQ = 2\sqrt{(OQ)^2 - (OH')^2} = 2\sqrt{8-4} = 4$$

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



۵۳) وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 + 4x + 6y = -10$ و $x^2 + y^2 + 8x + 2y = 82$ ، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می کند. مختصات نقطه وسط پاره خط AB کدام است؟

$$\left(\frac{23}{2}, -\frac{23}{2}\right) \quad (1) \quad \left(\frac{-23}{2}, \frac{23}{2}\right) \quad (2) \quad \left(\frac{-13}{2}, -\frac{13}{2}\right) \quad (3) \quad \left(\frac{33}{2}, -\frac{33}{2}\right) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه (۱) صحیح است.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 4y - 92 = 0$$

معادله ی وتر مشترک دو دایره را به دست می آوریم:

معادله ی وتر مشترک $y = x - 23$: اکنون توجه کنید که وتر مشترک محورهای مختصات را در نقاط $A(0, -23)$ و $B(23, 0)$ قطع می کند که وسط این نقاط، نقطه ی $\left(\frac{23}{2}, -\frac{23}{2}\right)$ می باشد.

۵۴) دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 8$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۱) متقاطع (۲) متداخل (۳) برون هم (۴) مماس درونی

پاسخ: گزینه (۱) صحیح است.

$$(x-1)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(1, 0), R_1 = 3$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 \Rightarrow O'(-2, 3), R_2 = \sqrt{13}$$

معادلات استاندارد هر دو دایره را می نویسیم

فاصله مرکزهای دو دایره $OO' = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ چون $OO' = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} < R_2 + R_1$ پس دو دایره متقاطع هستند.

ریاضیات به سبک روحانی

