فصل پنجم

کاربرد مشتق

این فصل را با ما بخوان

تا از ما شوی ...

درس اول

آزمون یکنوایی تابع

آ) در یک بازه از دامنهٔ تابع f ، اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه تابع f روی آن بازه اکیداً صعودی است.

$(f' \geq 0)$

ب) در یک بازه از دامنهٔ تابع f ، اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه تابع f روی آن بازه اکیداً نزولی است.

$(f' \leq 0)$

پ) در یک بازه از دامنهٔ تابع f ، اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه تابع f در آن بازه تابعی ثابت است.

$(f' = 0)$

نکته مهم

برای تشخیص یکنوایی توابع پیوسته مراحل زیر را انجام می دهیم:

آ) از تابع مشتق می گیریم.

ب) تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم.

پ) با توجه به جدول تعیین علامت تابع مشتق، نوع یکنوایی آن را به صورت زیر مشخص می کنیم:

1) اگر مشتق مثبت باشد، آن گاه تابع اکیداً صعودی است.

2) اگر مشتق منفی باشد، آن گاه تابع اکیداً نزولی است.

مثال

وضعیت یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

آ) $f(x) = x^2 - 4x$ ب) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$

پ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

مثال

بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^2 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

مثال

با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

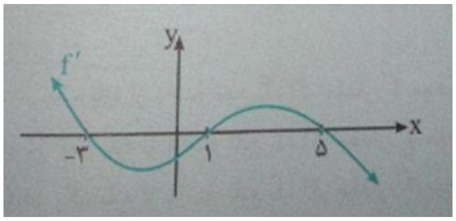
تست

تابع با ضابطهٔ $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1$ در بازهٔ [a,b] اکیداً صعودی است. بیش ترین مقدار b – a کدام است؟

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1

تست

نمودار f' به صورت مقابل است. کدام گزینه نادرست است؟



1) f در بازهٔ $(-\infty, -3)$ اکیداً صعودی است.

2) f در بازهٔ $(0,1)$ اکیداً صعودی است.

3) f در بازهٔ $(1,5)$ اکیداً صعودی است.

4) f در بازهٔ $(5,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

تست

تابع با ضابطهٔ $f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}ax^4 - 3x^3 + 2$ همواره نزولی است. حدود a کدام است؟

1) $a \geq 6$ **یا** $a < -6$

2) $|a| \leq 6$

3) $-2 \leq a \leq 4$

4) $a \geq 4$ **یا** $a \leq -2$

نقطه بحرانی

نقطه به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا موجود نباشد.

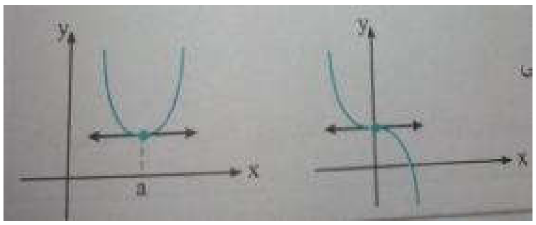
نکته مهم

اگر تابع f در بازهٔ [a,b] تعریف شده باشد، آنگاه ابتدا و انتهای بازه جزء نقاط بحرانی تابع نمی باشد.

نکته

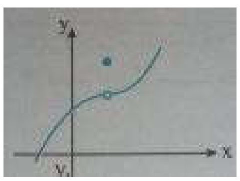
از نظر هندسی نقاط بحرانی به دو دستهٔ کلی تقسیم می شوند:

آ) نقاطی که مشتق در آن نقاط برابر صفر است. تابع در این نقاط، خط مماس افقی (موازی محور x ها) دارد:

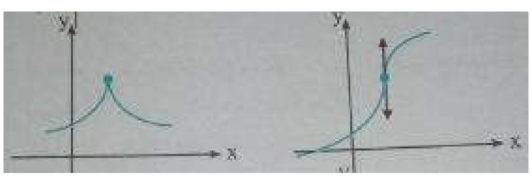


ب) نقاط مشتق ناپذیر: نقاط مشتق ناپذیر یک تابع به یکی از سه صورت زیر هستند:

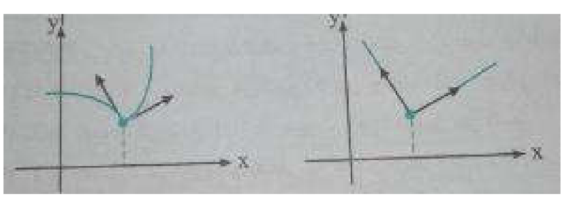
1) نقاط ناپیوسته:



2) نقاطی که مقدار مشتق در این نقاط $+\infty$ یا $-\infty$ است. (مماس قائم وجود دارد) یا مقدار مشتق های چپ و راست نامتناهی ولی متفاوت هستند.



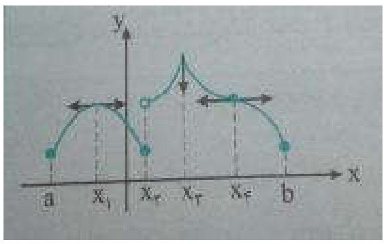
3) نقاط با نیم مماس های چپ و راست متمایز:



تست

شکل مقابل نمودار تابع f است. تابع f چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6



مثال

طول نقاط بحرانی را در صورت وجود به دست آورید.

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 60$

مثال

نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ب) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

نکته

اگر f تابعی مشتق پذیر باشد، آن گاه طول نقاط بحرانی تابع $y = |f(x)|$ (در صورت وجود) از حل معادلات $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ به دست می آیند.

تست

نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

1) 2 2) $\frac{3}{2}$ 3) 1 4) $\frac{1}{2}$

نکته

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، آن گاه طول نقاط بحرانی تابع $y = g(x)|f(x)|$ (در صورت وجود) از حل معادلات $f(x) = 0$ و $\left(g(x)f(x)\right)' = 0$ به دست می آیند.

به عنوان مثال برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی تابع $y = x^2|x + 1|$ داریم:

$$f(x) = x + 1 \quad , \quad g(x) = x^2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\left(g(x)\left(f(x)\right)\right)' = \left(x^2(x + 1)\right)' = (x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \ , \ x = -\frac{2}{3}$$

بنابراین $x = 0$ ، $x = -\frac{2}{3}$ و $x = -1$ طول نقاط بحرانی تابع هستند.

نکته

هر نقطه از تابع ثابت $f(x) = b$ یک نقطهٔ بحرانی تابع است، زیرا به ازای هر $x \in R$ ، $f'(x) = 0$ می باشد.

مثال

نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f ، یک نقطهٔ بحرانی f باشد.

مسئله چند جواب دارد؟

تعریف

گوییم تابع f در نقطه ای به طول $c \in D_f$ ماکزیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم:

$f(c) \geq f(x)$

در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می شود.

نکته

ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیمم و مینیمم نسبی باشد.

تعریف

اگر تابع f در x = c دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد، آن گاه می گوییم تابع f در x = c اکسترمم نسبی دارد.

نکته

ابتدا و انتهای بازه طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمی باشند.

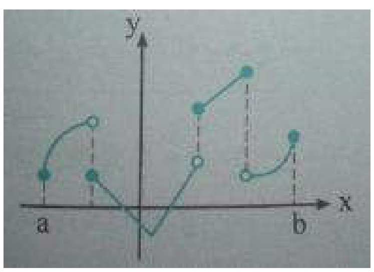
نکته

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ تابع ثابت باشد ($y=k\ ,x\in[a,b]$) آن گاه هر $x\in(a,b)$ هم طول ماکزیمم نسبی و هم طول مینیمم نسبی می باشد.

تست

شکل مقابل نمودار تابع f در بازهٔ $[a,b]$ است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4



قضیهٔ فرما

اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن گاه $f'(c)=0$ به عبارت دیگر هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

آزمون مشتق اول برای تشخیص ماکزیمم نسبی از مینیمم نسبی

فرض کنیم c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته و هم چنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد.

1) اگر علامت f' در x = c از مثبت به منفی تغییر کند، آن گاه x = c طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است، به جدول مقابل توجه کنید:

x		c	
f'	+	◦	−
f	↗		↘
		max	

2) اگر علامت f' در x = c از منفی به مثبت تغییر کند، آن گاه x = c طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است. به جدول مقابل توجه کنید:

x		c	
f'	−	◦	+
f	↘		↗
		min	

3) اگر علامت f' در x = c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در یک همسایگی محذوف x = c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن گاه f در c اکسترمم نسبی ندارد.

مثال

در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ب) $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

پ) $h(x) = -x^2 - 3x + 2$

نکته

اگر تابع f در بازهٔ $[a, b]$ اکیداً یکنوا باشد، آن گاه تابع در بازهٔ $[a, b]$ نه ماکزیمم و نه مینیمم نسبی دارد.

نکته

اگر f تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه تمام ریشه های ساده و مکرر فرد معادلهٔ $f'(x) = 0$ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f می باشند و برای تشخیص نوع آن می توان از تعیین علامت f' استفاده کرد.

تست

تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^5 - 4x^3$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

1) 3　　　2) 2　　　3) 1　　　4) صفر

تعیین پارامتر در مسائل اکسترمم نسبی

اگر $A(a, b)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر f باشد، آن گاه دو شرط زیر توأماً برقرار هستند:

1) $f'(a) = 0$ (طول نقطهٔ اکسترمم نسبی، ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ است.)

2) $f(a) = b$ (مختصات نقطهٔ اکسترمم نسبی در معادلهٔ تابع صدق می کند.)

مثال

ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ در $(2,3)$ یک اکسترمم نسبی داشته باشد.

مثال

اگر نقطهٔ $(2,1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع

تعریف: نقطه به طول c از دامنهٔ تابع f یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع نامیده می شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$ در این حالت، عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می نامیم.

تعریف: نقطه به طول c از دامنهٔ تابع f یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع نامیده می شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$ در این حالت، عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می نامیم.

اکسترمم مطلق

اگر $f(c)$ ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع f باشد، آنگاه $f(c)$ را اکسترمم مطلق تابع f می گوییم.

نکته

اکسترمم مطلق تابع می تواند در نقاط ابتدایی یا انتهایی دامنه باشد.

قضیه

فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

روش تعیین ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته روی بازهٔ $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازهٔ (a,b) به دست می آوریم و مقادیر تابع f را به ازای این نقاط بحرانی محاسبه می کنیم، سپس $f(a)$ و $f(b)$ (مقدار تابع به ازای ابتدا و انتهای بازه) را محاسبه می کنیم، در این مقدارها، کوچکترین آن ها مینیمم مطلق تابع و بزرگترین آن ها ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود.

مثال

مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1,2]$

ب) $g(x) = x^3 + 2x - 5 \quad ; \quad x \in [-1,2]$

تست

کم ترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 1$ در فاصلهٔ $[-1,5]$ کدام است؟

1) -18 2) -26 3) -34 4) -33

مثال

تابع $y = x + \frac{1}{x}$ در کدام بازه اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

مثال

تابع $y = x - 2\sqrt{x}$ در چه بازه ای اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است؟

مثال

تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در نظر بگیرید.

آ) نقاط بحرانی تابع f را بیابید.

ب) نقاط اکسترمم نسبی f را مشخص کنید.

مثال

در هر یک از توابع زیر ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

آ) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

ب) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

مثال

نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 - 3x$ را بیابید.

مثال

اگر نقطهٔ (-1,2) نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

مثال

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = 3x^4 - 8x^3$ را در بازهٔ [1,3] بیابید.

مثال

اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ را در بازهٔ [-2,1] مشخص کنید.

مثال

نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را در بازهٔ $[-\frac{3}{2}, 3]$ به دست آورید.

مثال

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را روی بازهٔ [-1,2] در صورت وجود تعیین کنید.

مثال

نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را در بازهٔ [-3,-1] تعیین کنید.

تست

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ در کدام بازهٔ زیر اکیداً نزولی است؟

1) $(0,4)$ 2) $(-1,3)$ 3) $(-2,0)$ 4) $(2,5)$

تست

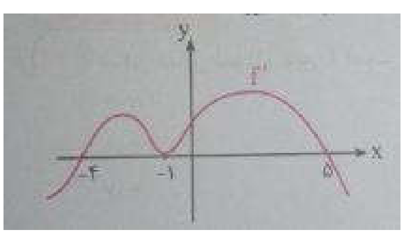
تابع $f(x)=x^3-3x^2$ در کدام فاصله اکیداً صعودی است؟

1) $-1<x<1$ 2) $x>1$ 3) $1<x<2$ 4) $x<-1$

تست

نمودار تابع f' به صورت مقابل است. تابع f در کدام بازهٔ زیر، اکیداً نزولی است.

1) $(-4,-1)$ 2) $(-7,-4)$ 3) $(-1,5)$ 4) $(0,+\infty)$



تست

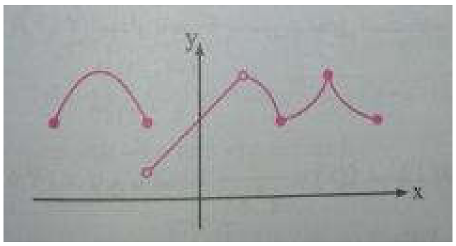
تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3+ax^2+x$ همواره صعودی است. تغییرات a کدام است؟

1) $0\le a<2$ 2) $-\sqrt{3}\le a<2$ 3) $|a|\le\sqrt{3}$ 4) $|a|\le 2$

تست

شکل مقابل نمودار تابع f است. تابع f چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

1) 2　　　2) 3　　　3) 4　　　4) 5



تست

تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 - 7$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

1) 3　　　2) 2　　　3) 1　　　4) صفر

تست

مجموعهٔ طول های نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ به صورت {-1,2} است. مقدار f(1) کدام است؟

1) -12　　　2) -8　　　3) 6　　　4) 12

تست

نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث اند. نوع مثلث کدام است؟

1) متساوی الاضلاع　　　2) فقط متساوی الساقین

3) فقط قائم الزاویه　　　4) قائم الزاویه و متساوی الساقین

تست

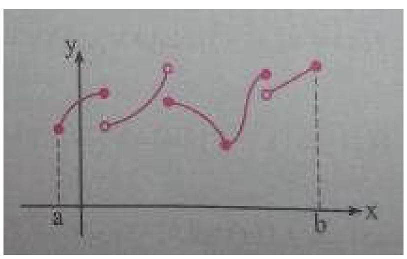
نقاط بحرانی بر روی نمودار $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

1) 4 2) 4/5 3) 6 4) 8

تست

شکل مقابل نمودار تابع f در بازهٔ [a,b] است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی f کدام است؟

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1



تست

طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-5x^2+8x-1$ کدام است؟

1) $\frac{4}{3}$ 2) 2 3) 3 4) 4

تست

مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

1) اول 2) دوم 3) سوم 4) چهارم

تست

معادلهٔ خطی که نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را به هم وصل می کند، محور طول ها را با کدام طول قطع می کند؟

1) $\frac{3}{2}$　　2) 1　　3) $\frac{1}{2}$　　4) $\frac{1}{4}$

تست

تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

1) مینیمم نسبی　　2) ماکزیمم نسبی　　3) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی　　4) فاقد اکسترمم نسبی

تست

دو نقطه به طول های 2- و 2 نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ می باشند. عرض ماکزیمم نسبی تابع کدام است؟

1) 5　　2) 4　　3) 1　　4) 2

تست

طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ ، 1- و 3 می باشند. مقدار مینیمم تابع کدام است؟

1) 25-　　2) 22-　　3) 12-　　4) 15-

تست

کمترین مقدار تابع $y=\frac{1}{4}x^4-x^3-2x^2$ کدام است؟

1) -36 2) -32 3) -24 4) -18

تست

بیشترین مقدار تابع $y=x^3-3x^2-9x+5$ در بازهٔ [-2,2] کدام است؟

1) 10 2) 9 3) 12 4) 17

تست

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ در بازهٔ [-4,3] کدام است؟

1) -18 و 24 2) -45 و 27 3) -36 و 27 4) -27 و 36

تست

اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^3-3x^2-9x+1$ باشند، کمترین مقدار تابع gof در بازهٔ [-1,3] کدام است؟

1) -17 2) -46 3) -53 4) -26

درس دوم

بهینه سازی

در بسیاری از مواقع لازم است مقدار یک تابع را که در یک فاصله دارای بیشترین یا کمترین مقدار ممکن باشد، بیابیم. به عنوان مثال، یک شرکت تولیدی همواره به دنبال کم کردن هزینه و بیشتر کردن سود است. به چنین مسئله هایی بهینه سازی می گوییم. در این موارد از قواعدی که برای به دست آوردن اکسترمم مطلق بیان شده است، استفاده می کنیم. برای حل چنین مسائلی، نکات زیر را در نظر می گیریم:

1- در صورت امکان، شکل مناسبی برای آن رسم می کنیم و سپس روی شکل، متغیرهای مربوطه را تعریف می-کنیم.

2- در این گونه مسائل، به طور معمول دو متغیر یا بیش تر وجود دارد که یا در صورت مسئله رابطه ای بین متغیرها هست و یا در شکلی که رسم نموده ایم رابطه ای بین متغیرها به وجود می آید. به این رابطه معادلهٔ کمکی می گوییم.

3- کمیتی که خواسته شده ماکزیمم یا مینیمم گردد را به صورت معادلهٔ ثابتی از متغیر مجهول می نویسیم. به این معادله، معادلهٔ هدف می گوییم.

4- چنان چه معادلهٔ هدف شامل بیش از یک متغیر باشد، با استفاده از معادلهٔ کمکی، آن را به صورت تابعی فقط بر حسب یک متغیر تبدیل می کنیم.

5- از معادلهٔ به دست آمده (معادلهٔ با یک متغیر) مشتق گرفته و نقطهٔ بحرانی را به دست آورده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را به دست می آوریم.

تست

مجموع دو عدد مثبت 110 می باشد. بیشترین مقدار برای حاصلضرب این دو عدد کدام است؟

1) 3025 2) 3000 3) 2800 4) 2400

نکته

اگر مجموع چند متغیر مثبت عددی ثابت باشد، آنگاه حاصلضرب آن ها وقتی ماکزیمم است که آن متغیرها با هم برابر باشند، یعنی اگر $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ ، آن گاه به ازای $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \frac{n}{k}$ حاصلضرب $x_1 \ldots x_k$ ماکزیمم می شود.

تست

کمترین محیط مستطیل که مساحت آن 25 واحد مربع باشد، کدام است؟

1) 5 2) 10 3) 15 4) 20

تست

نقطهٔ A روی منحنی $y = \sqrt{x}$ با کمترین فاصله از نقطهٔ $(4,0)$ قرار دارد. طول نقطهٔ A کدام است؟

1) $\frac{9}{2}$ 2) 4 3) $\frac{7}{2}$ 4) 3

تست

یک قطعه ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع 12 سانتی متر داده شده است. اگر از گوشه های این ورق مربع های کوچکی بریده و با تا کردن صفحه در راستای خطوط یک قوطی در باز ساخته شود، حداکثر حجم قوطی کدام است؟

1) 108 2) 64 3) 72 4) 128

تست

حجم یک قوطی استوانه ای شکل 250π واحد مکعب است. اگر هزینهٔ فلز به کار رفته در تولید این قوطی کمترین مقدار ممکن باشد، ارتفاع قوطی چند واحد است؟

1) 20 2) 15 3) 10 4) 5

مثال

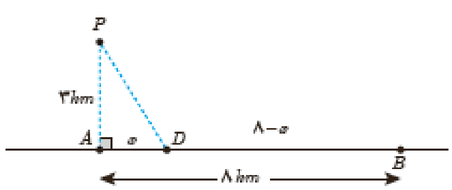
می خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $10m^3$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع 100 هزار تومان و این قیمت برای دیواره ها در هر متر مربع 60 هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

مثال

غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{3t}{t^3+27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

مثال

آرمان درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل 3 کیلومتر است. او می خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در 8 کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق 2km/h و سرعت پیاده روی آرمان در ساحل 4km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟



مثال

کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت 10000 متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی 2 میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی 8 میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

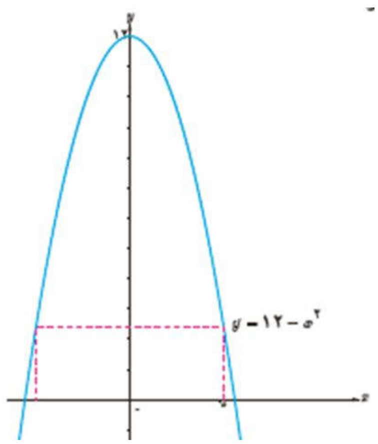
ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

مثال

الف) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؛ ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

مثال

ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.

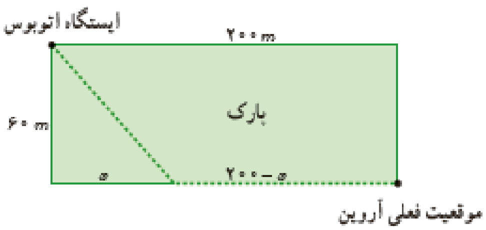


مثال

هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایینی هر صفحه 2cm و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

مثال

آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



تست

اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و $2x + y = 16$ باشد، بیشترین مقدار xy کدام است؟

1) 24　　2) 28　　3) 32　　4) 42

تست

دو برابر عددی از عدد دیگر، 6 واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آن ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

1) $-\frac{3}{2}$　　2) $-\frac{1}{2}$　　3) $\frac{1}{2}$　　4) $\frac{3}{2}$

تست

بیشترین مساحت از بین مثلث های قائم الزاویه ای که مجموع یک ضلع قائمه و وتر آن برابر 6 باشد، کدام است؛

1) 3 2) $2\sqrt{3}$ 3) $\sqrt{4}$ 4) $3\sqrt{2}$

تست

بیشترین مساحت از بین مثلث های قائم الزاویه ای که طول وتر آن برابر 6 است، کدام است؛

1) 9 2) 12 3) 18 4) 24

تست

کوتاه ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؛

1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) 2

تست

کوتاه ترین فاصلهٔ نقطهٔ A(8,0) از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = x\sqrt{x}$ کدام است؛

1) $2\sqrt{11}$ 2) $3\sqrt{5}$ 3) $4\sqrt{3}$ 4) $5\sqrt{2}$

تست

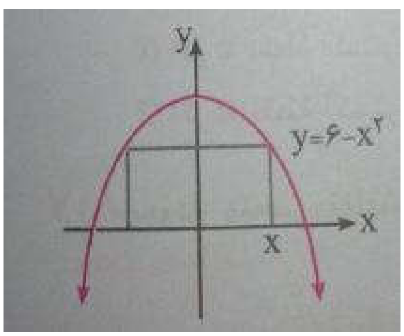
اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار 3x+4y کدام است؟

1) $25\sqrt{2}$ 2) $28\sqrt{2}$ 3) 36 4) 40

تست

ماکزیمم محیط از مستطیل هایی که یک ضلع آن منطبق بر محور x ها و دو رأس آن بر روی منحنی تابع $y = 6 - x^2$ قرار دارند، کدام است؟

1) 11 2) 12 3) 13 4) 14



تست

بیشترین مساحت از زمینی را که می توان توسط یک طناب به طول 88 متر و به شکل مستطیل که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود، چند متر مربع است؟

1) 958 2) 968 3) 978 4) 988

تست

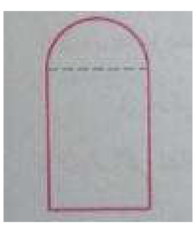
از یک ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع 24 سانتی متر، یک جعبه درباز با بیشترین حجم ساخته می شود. اگر برای این کار از هر گوشهٔ ورق، مربعی به ضلع x سانتی متر حذف شده باشد، مقدار x کدام است؟

1) 3   2) 4   3) 5   4) 6

تست

در پنجرهٔ شکل زیر، قطر نیم دایره با عرض مستطیل برابر است. اگر محیط پنجره برابر 6 متر باشد، شعاع نیم دایره کدام باشد تا پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد؟

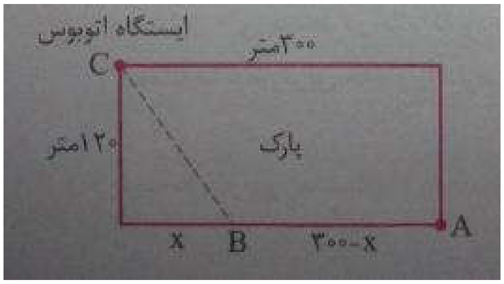
1) $\frac{4}{\pi+4}$ 2) $\frac{6}{\pi+4}$ 3) $\frac{4}{\pi+3}$ 4) $\frac{6}{\pi+3}$



تست

در شکل زیر، شخصی در نقطهٔ A قرار دارد. او می خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد. این شخص می تواند با سرعت 4 متر بر ثانیه از نقطهٔ A به سمت غرب برود و هم چنین می تواند از درون پارک و تنها با سرعت 2 متر بر ثانیه عبور کند. مقدار x کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟

1) $40\sqrt{3}$ 2) $20\sqrt{3}$ 3) $20\sqrt{2}$ 4) $15\sqrt{2}$



تست

هزینهٔ سوخت یک اتومبیل در هر ساعت برای حرکت با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت، $40v^2$ تومان است. اگر سایر هزینه ها برای هر ساعت به طور ثابت برابر 1000 تومان باشد، اتومبیل با چه سرعتی حرکت کند تا هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟

1) 3   2) 4   3) 5   4) 6

تست

غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{3t}{t^3+16}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5