



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



ریاضی دوازدهم رشته تجربی

مهندس مرتضی مهرپویان

09107602027

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل اول

تابع



این فصل را با ما بخوان

از ما شوی ...

درس اول

توابع چند جمله ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله ای

توابعی را که ضابطه آن ها، چند جمله ای های چپری از یک متغیر باشند، توابع چند جمله ای می گوئیم.

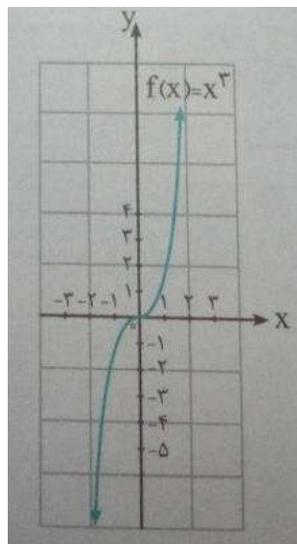


تابع درجه 3

تابع چند جمله ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) یک تابع درجه 3 است. دامنه و برد

این تابع برابر R ، مجموعه اعداد حقیقی است.

نمودار تابع $y = x^3$ به کمک نقطه یابی به صورت مقابل است:



x	$f(x) = x^3$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8



مثال

نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص نمایید.

الف) $y = (x - 1)^3 - 1$

ب) $y = (x + 2)^3 - 2$

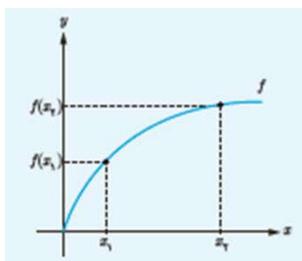
توابع صعودی و نزولی



تابع اکیداً صعودی

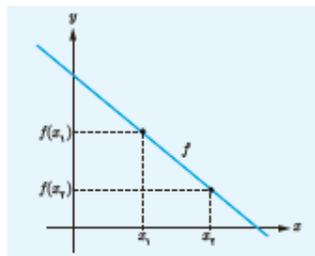
اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی

اکیداً صعودی می‌نامیم.



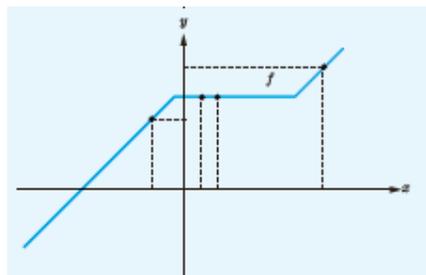
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می نامیم.



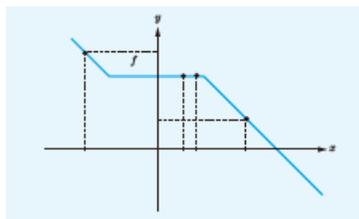
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می نامیم.



تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می نامیم.





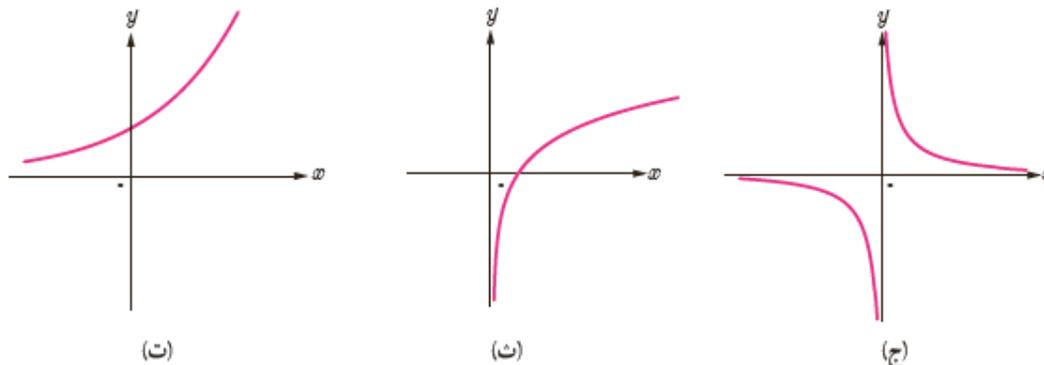
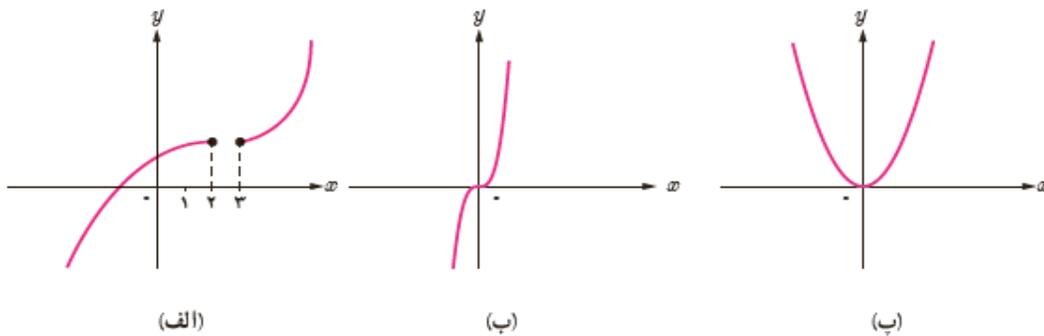
نکته

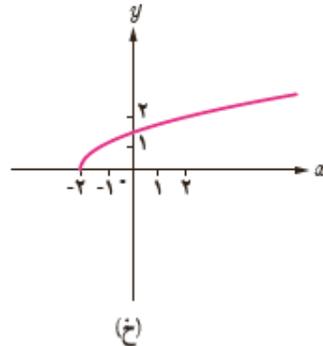
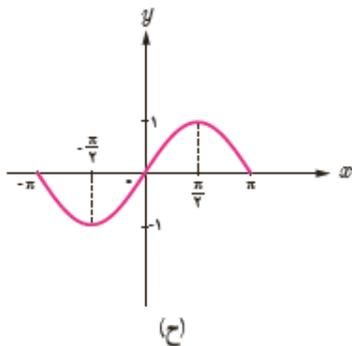
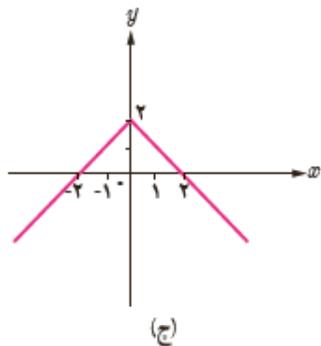
تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

مثال

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟





مثال

نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.



(پ) $y = (x - 2)^3 + 1$

(ب) $y = -x^3 + 1$

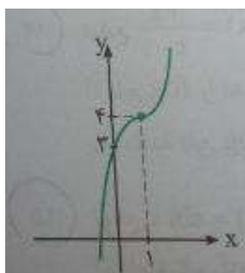
(آ) $y = x^3 - 2$

(ث) $y = -(x - 1)^3 - 1$

(ج) $y = (x + 1)^3 - 1$

مثال

نمودار تابع $y = a(x - b)^3 + c$ به صورت مقابل است. مقادیر a , b و c را مشخص کنید.



مثال

نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ x^3 & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال

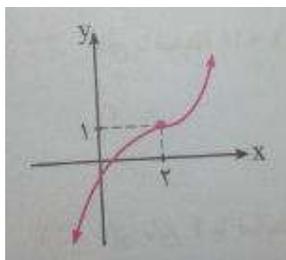
تابع چندجمله‌ای از درجه سوم f ، محور x را در نقاطی به طول‌های -2 ، 0 و 1 قطع می‌کند. اگر $f(-1) = 4$ باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟



- 16 (4) 12 (3) -12 (2) -16 (1)

مثال

نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 7$ به صورت مقابل است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟



- 26 (4) -24 (3) -20 (2) -17 (1)

مثال

کدام یک از توابع زیر، تابعی اکیداً یکتوا است؟

(2) $\{(-1, 4), (4, 8), (3, 5)\}$

(1) $\{(-1, 2), (3, 5), (2, 0)\}$

(4) $\{(1, 5), (2, 7), (4, 6)\}$

(3) $\{(-2, 0), (-4, 2), (1, 5)\}$

مثال

اگر تابع $f = \{(-1, 4), (0, a), (\frac{1}{2}, 3), (1, b), (1, -1)\}$ ، تابعی نزولی باشد، بیشترین مقدار a-b

کدام است؟

(4) 5

(3) 4

(2) 3

(1) 2

مثال

کدام تابع زیر در دامنه خود، اکیداً نزولی است.

(2) $f(x) = -\log x + 4$

(1) $f(x) = 3^x - 1$

(4) $f(x) = x^2 - 4x$

(3) $f(x) = x^2|x|$



مثال

در بازه ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع

$g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(4) فاقد نقطه مشترک

(3) 3

(2) 2

(1) 1

درس دوم

ترکیب توابع



مثال

اگر $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = 9x + 7$ باشد، حاصل $(fog)(x) - (gof)(x)$ کدام است؟

- 1) $18x+2$ 2) $-18x-2$ 3) -33 4) 33



مثال

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ مقدار $f(-f(x))$ برابر کدام است؟

- 1) 1 2) $x+1$ 3) x^2+1 4) $(x^2 + 1)^2 + 1$



مثال

اگر $f = \{(0, 1), (2, -1), (4, 3)\}$ و $g = \{(1, 1), (-1, 5), (3, 4)\}$ ، تابع gof شامل چند زوج مرتب

است؟

- 1) صفر 2) 1 3) 2 4) 3





نکته

برای محاسبه دامنه تابع $g \circ f$ دو روش وجود دارد:

روش اول: تابع $g \circ f(x)$ را تشکیل دهیم و دامنه تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش نباید ضابطه تابع را در هیچ مرحله ای ساده کنیم.)

مثال

اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را بدست آورید.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

دامنه تابع $g \circ f$ را می توان به صورت مقابل نوشت:

با توجه به تعریف دامنه $g \circ f$ ، شرط آن که تابع $g \circ f$ تشکیل شود، آن است که:

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$



نکته

مثال

اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه $f \circ g$ کدام است؟

(1) $[0,2]$ (2) $[0,1]$ (3) $[1,2]$ (4) $[1,3]$

مثال

اگر $f(x) = x^2 - 4x$ باشد، آن گاه $f(x+2)$ کدام است؟

(1) $x^2 - 2x + 2$ (2) $x^2 + 2x - 3$ (3) $x^2 + 6x - 4$ (4) $x^2 - 4x + 1$





اگر $f(g(x)) = 2x$ و $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه $g(x)$ را مشخص کنید.



اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را

به دست آورید.



در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g, (f \circ g)}(x)$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g, (f \circ g)}(x)$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f, (g \circ f)}(x)$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f, (g \circ f)}(x)$



اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.



مثال

مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آن گاه $(f \circ g)(4) = 5$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

مثال

با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود

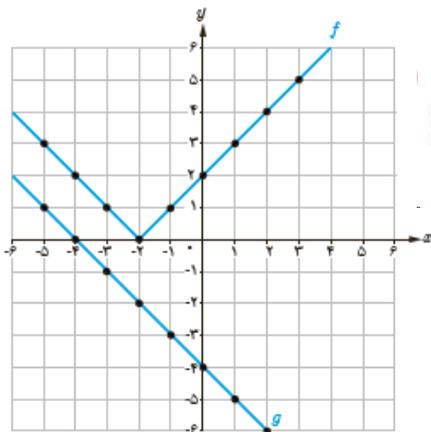
بیابید.

الف) $(f \circ g)(-1)$

ب) $(g \circ f)(0)$

پ) $(f \circ g)(1)$

ت) $(g \circ f)(-1)$



مثال

با توجه به ضابطه های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن ها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(f \circ g)(x) = 7$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، $g(x) = 1 - 2x$: $(g \circ f)(x) = -5$





تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ ، کافی است عرض همه تقاطع واقع بر نمودار $y = f(x)$ را k برابر می کنیم.

برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه

نکته

کنیم.

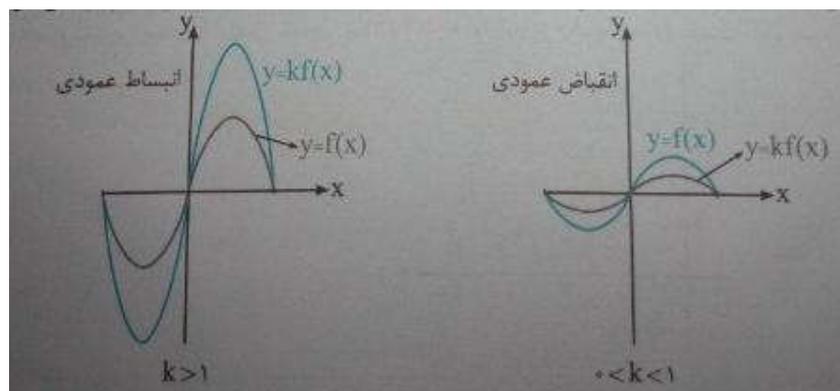
نمودار تابع $y = kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید:

نکته

اگر $k > 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می شود که در این حالت می گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

اگر $0 < k < 1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k جمع می شود که در این حالت می گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها قرینه می شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.





نکته

دامنه تابع $y = kf(x) + a$ با دامنه تابع $y = f(x)$ یکی است ولی برد آن‌ها لزوماً یکی نیست.

نکته

اگر f تابعی با دامنه $[-4, 1]$ و برد $[0, 4]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = 3f(x) - 1$ کدام است؟

$R = [0, 4]$, $D = [-5, 0]$ (2)

$R = [-1, 11]$, $D = [-4, 1]$ (1)

$R = [0, 12]$, $D = [-5, 0]$ (4)

$R = [0, 4]$, $D = [-4, 1]$ (3)



نکته

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور x ها است، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم کنیم.



مثال

نمودار تابع $y = ||x| - 1|$ را رسم کنید.



نکته

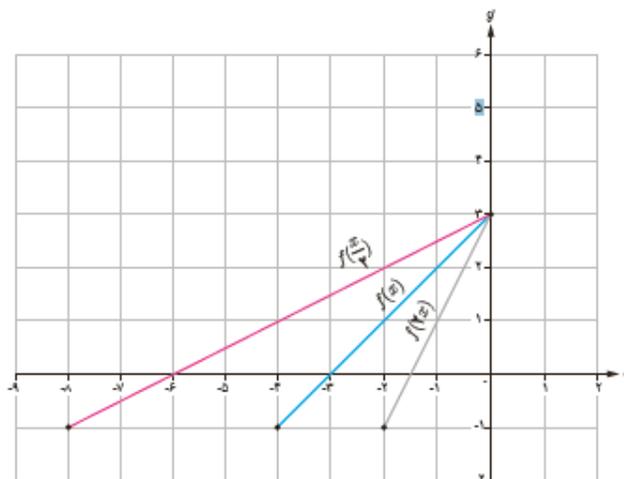
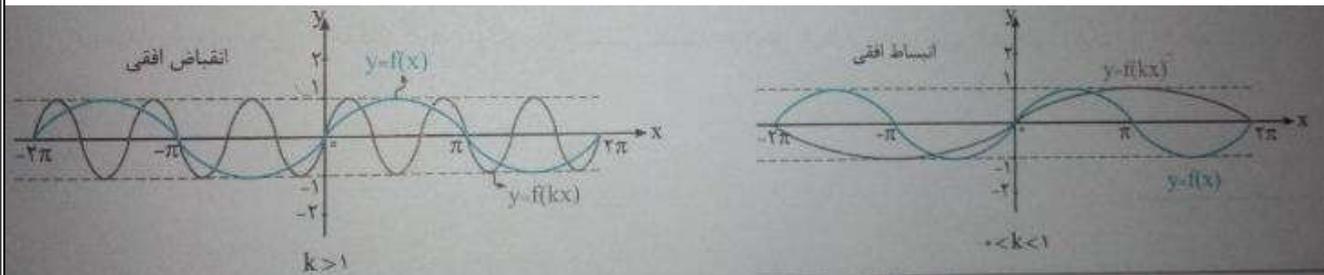
برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، کافی است طول همه نقاط واقع بر نمودار $y = f(x)$ را بر k تقسیم کنیم، بدون آن که عرض نقاط متناظر تغییری کند.



نکته

نمودار تابع $y = f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می آید:

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = f(kx)$ را می توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد. در حالتی که $k > 1$ نمودار $y = f(x)$ با ضریب $1/k$ منقبض (نمودار در راستای محور x ها جمع تر می شود) و در حالتی که $0 < k < 1$ نمودار $y = f(x)$ با ضریب $1/k$ منبسط (نمودار در راستای محور x ها بازتر می شود) می شود.



نکته

برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.



برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ به کمک نمودار $y = f(x)$ در حالتی که $k < 0$ باشد، ابتدا

نکته

نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه و سپس با ضریب $\frac{1}{|k|}$ به طور افقی منبسط یا منقبض می کنیم.



رسم نمودار تابع $y = f(ax + b)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$:

نکته

برای رسم نمودار تابع $y = f(ax + b)$ ، با فاکتورگیری از a (ضریب x)، آن را به صورت $y = f(a(x + \frac{b}{a}))$

می نویسیم. ابتدا طول نقاط متناظر روی نمودار $y = f(x)$ را بر a تقسیم می کنیم و سپس به اندازه $\frac{b}{a}$ به

سمت راست (اگر $\frac{b}{a}$ عددی منفی باشد) یا چپ (اگر $\frac{b}{a}$ عددی مثبت باشد) انتقال می دهیم.

مثال

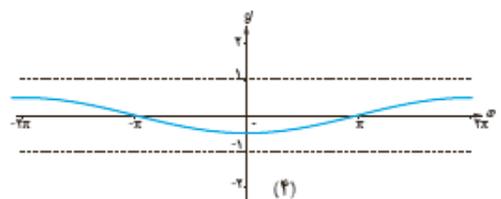
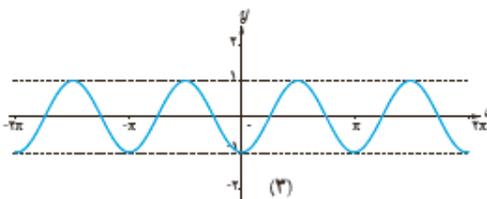
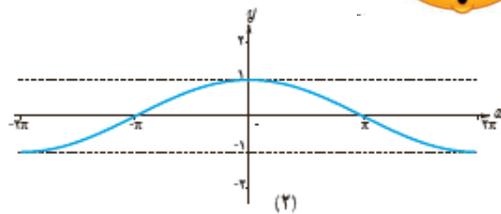
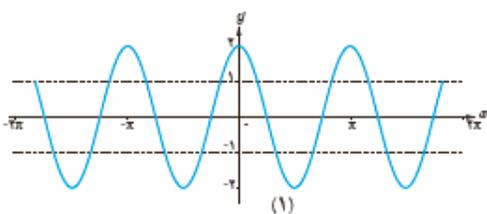
با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$

ب) $y = 2 \cos 2x$

پ) $y = \cos(\frac{1}{2}x)$

ت) $y = \cos 2x$



مثال

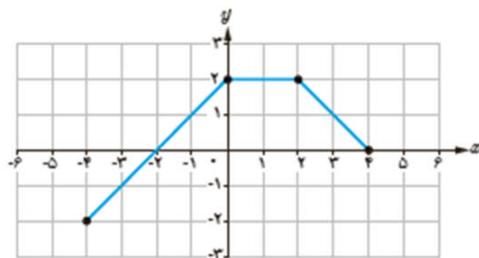
نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2\sin(-\frac{1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$

رسم کنید.



مثال

با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

پ) $y = 2f(x - 1) - 3$

ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

تمرینات تکمیلی

مثال

نمودار توابع زیر را رسم کنید و بازه هایی که در آن ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ x^3 & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال

اگر $f = \{(2, 5), (3, -1), (1, 4), (5, 6)\}$ و $g = \{(4, -2), (-1, 5), (-2, 1), (6, 0)\}$ دو تابع باشند،

توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ و $g \circ g$ را به دست آورید.

مثال



توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند.

(آ) تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

(ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

مثال



توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ داده شده اند.

(آ) دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(ب) تابع $g \circ f$ را تشکیل دهید.

مثال



دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید.

(آ) دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

(ب) مقدار $(g \circ f)(-3)$ را به دست آورید.

مثال



دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ داده شده اند.

(آ) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.

(ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

مثال

در هر یک از قسمت های زیر، با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $g(x)$ ، معادلات مورد نظر را تشکیل دهید و آن ها را حل کنید.



(آ) $(f \circ g)(x) = 20, g(x) = 3x - 1, f(x) = x^2 + 4$

(ب) $(g \circ f)(x) = -1, g(x) = 2x + 5, f(x) = 3x^2 - 4x - 7$

مثال

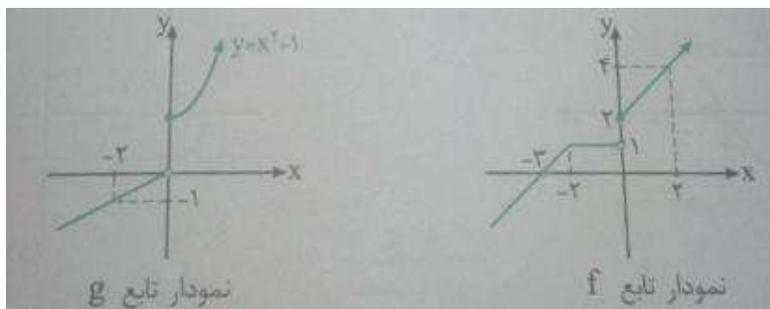
با توجه به نمودار توابع f و g ، هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید.

(ب) $(g \circ f)(0)$

(آ) $(f \circ g)(2)$

(ج) $(f \circ f)(-4)$

(ب) $(f \circ g)(-1)$



مثال

اگر $(f \circ g)(x) = 8x + 12$ و $f(x) = 2x + 4$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید.



مثال



با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

(ب) $y = -\sqrt{x} + 2$

(آ) $y = \sqrt{x} - 1$

(د) $y = \sqrt{x+1}$

(پ) $y = \sqrt{x-3}$

(ج) $y = \sqrt{2x}$

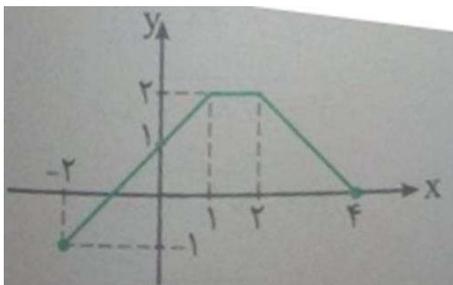
(ت) $y = 2\sqrt{x-1}$

(ح) $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + 3$

(ث) $y = \sqrt{-x+3}$

مثال

با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



(آ) $y = f(2x) + 1$

(ب) $y = \frac{1}{2}f(-x) - 1$

(پ) $y = 2f(x+1) - 1$

(د) $y = -f\left(\frac{x}{2}\right)$

مثال

اگر $f = \{(2, -1), (3, 4), (0, 5)\}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ دو تابع باشند، حاصل عددی $\frac{(g \circ f)(2)}{(g - 2f)(3)}$ کدام

است؟

$-\frac{1}{5}$ (4)

$-\frac{1}{7}$ (3)

$\frac{1}{7}$ (2)

$\frac{1}{5}$ (1)



مثال

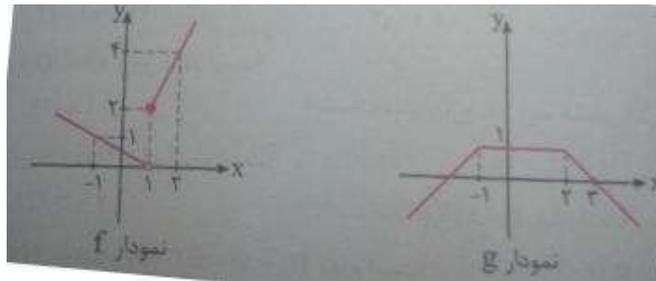
اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، عدد a کدام است؟



- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

مثال

نمودار توابع f و g داده شده اند. مقدار تابع $f \circ g$ به ازای $x = 4$ ، کدام است؟



- 1 (1) $\frac{1}{2}$ 2 (2) 1 3 (3) -1 4 (4) $-\frac{1}{2}$

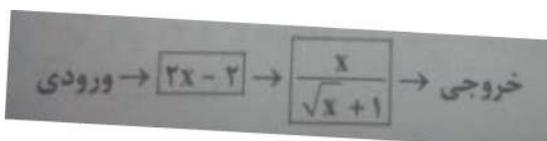
مثال

اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

- 1 (1) -4 2 (2) -3 3 (3) -2 4 (4) -1

مثال

اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟



- 1 (1) $\frac{11}{9}$ 2 (2) $\frac{7}{2}$ 3 (3) 3 4 (4) 4



مثال

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (1) $x - 1$ (2) $x + 1$ (3) x (4) $2x$

مثال

اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (1) x (2) $-x$ (3) $-x - 1$ (4) $x + 1$

مثال

اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ باشد، آن گاه نمودارهای دو تابع f و fg با کدام طول متقاطع

اند؟



- (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{3}{4}$

مثال

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x + 4$ باشند، جواب معادله $(gof)(x) = (fog)(x)$ کدام است؟

- (1) -1 و -7 (2) -7 و 1 (3) 7 و -1 (4) 7 و 1



مثال

اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ، مجموعه طول نقاطی که به ازای آن‌ها منحنی تابع $g \circ f$ در بالای

محور x ها قرار گیرد، برابر کدام بازه است؟



(4) (1 و -1)

(3) (1 و -2)

(2) (2 و -3)

(1) (1 و -4)

مثال

اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ باشد، مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر

محور x ها قرار می گیرند، برابر کدام بازه است؟



(4) (5 و 1)

(3) (1 و -2)

(2) (5 و -1)

(1) (1 و -5)

مثال

اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x + 1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط $y = 3$ به معادله

$y = 3$ کدام است؟



(4) 6

(3) 4/5

(2) 4

(1) 3

مثال

اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، آن گاه دامنه تابع $f(3 - x)$ کدام است؟

(4) [1,3]

(3) [1,2]

(2) [0,3]

(1) [0,2]



مثال

اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (1) $[-4, 2]$ (2) $[-2, 0]$ (3) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (4) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

مثال

اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (1) $(0, 5] \cup [20, 25)$ (2) $[-5, 0) \cup (15, 20]$ (3) $(15, 20]$ (4) $[-5, 0)$

مثال

اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (1) $[0, 1]$ (2) $[-1, 1]$ (3) \mathbb{R} (4) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

مثال

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (1) $[0, 1)$ (2) $\{0\}$ (3) $(-1, 1)$ (4) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

مثال

اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (1) 4 (2) -2 (3) 2 (4) -4



مثال



اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

- (1) $x^2 - x + 3$ (2) $x^2 - 2x - 1$ (3) $x^2 - 2x + 1$ (4) $x^2 - x + 1$

مثال

اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

- (1) $x^2 - 4x + 3$ (2) $x^2 - 4x + 5$ (3) $x^2 - 2x + 5$ (4) $x^2 - 2x + 3$

مثال

اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

- (1) $2x^2 + 3x + 1$ (2) $2x^2 - 2x + 3$ (3) $2x^2 - x + 4$ (4) $2x^2 + x + 3$

مثال

اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، مقدار $f(5)$ کدام

است؟



- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

مثال

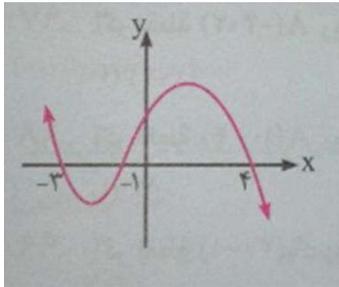
نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را 4 واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم.

نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

- (1) $-3/5$ (2) -3 (3) $-2/5$ (4) -2

مثال

شکل روپرو، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



(1) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

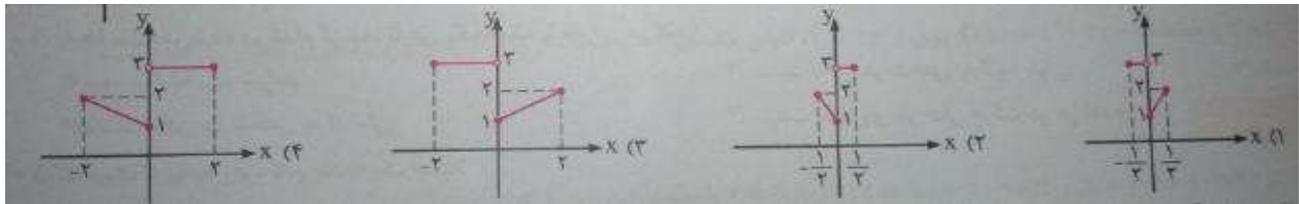
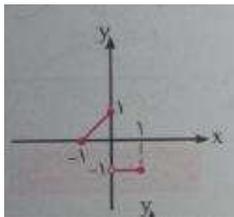
(2) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(3) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(4) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

مثال

نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار $y = 2 - f(-\frac{x}{2})$ به کدام صورت است؟



مثال

نمودار تابع $f(x) = |x + 2| + 3x$ را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم. نمودار حاصل، سهمی $y = 4x^2$

را در چند نقطه قطع می کند؟

(4) 3

(3) 2

(2) 1

(1) صفر

مثال

قرینه نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس 2 واحد به طرف x های مثبت انتقال می

دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟



- (1) -2 (2) 0,5 (3) 1 (4) 1,5

مثال

اگر f تابعی با دامنه $[-1,2]$ باشد، دامنه تابع $y = 3f\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1$ کدام است؟



- (1) $[-2,4]$ (2) $[-4,5]$ (3) $[1,4]$ (4) $[-4,0]$

مثال

اگر f تابعی با برد $[-3,2]$ باشد، برد تابع $y = -2f(2x + 5) + 4$ کدام است؟



- (1) $[-5,4]$ (2) $[-1,8]$ (3) $[0,10]$ (4) $[2,12]$



درس سوم

تابع یک به یک

اگر در تابع f هر دو عضو متمایز در دامنه تابع به دو عضو متمایز در برد نظیر شوند، به تابع f ، تابع یک به یک می گویند.

به عبارت دیگر تابعی که بین دو مجموعه تعریف می شود، هنگامی یک به یک است که به هر دو عضو مجموعه دوم پیش از یک عضو از مجموعه اول نظیر نشود. به عنوان مثال تابع $f = \{(-1, 4), (2, 5), (3, 8)\}$ تابعی یک به یک است، زیرا هر دو عدد متمایز از دامنه به دو عدد متمایز از برد نظیر شده است.

نکته

اگر یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها داده شده باشد (مؤلفه های اول زوج های مرتب متمایز، باید متمایز باشند)، هنگامی تابع یک به یک است که مؤلفه های دوم آن دو به دو متمایز باشند و اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه های دوم یکسان باشند، باید مؤلفه های اول آن ها نیز برابر باشند.

نکته

یک تابع اگر به صورت نمودار پیکانی نمایش داده شده باشد، هنگامی تابع یک به یک است که به هر عضو از برد فقط یک پیکان وارد شود.

نکته

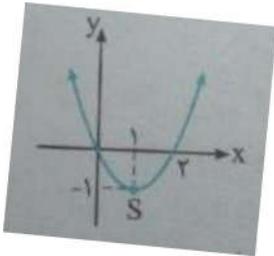
اگر هر خط موازی محور x ها، نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند (نمودار را قطع نکند یا فقط در یک نقطه قطع کند)، آن گاه آن تابع یک به یک است.

نکته

هر تابعی که اکیداً یکنوا باشد، حتماً تابعی یک به یک است.

محدود کردن دامنه و ساختن یک تابع یک به یک

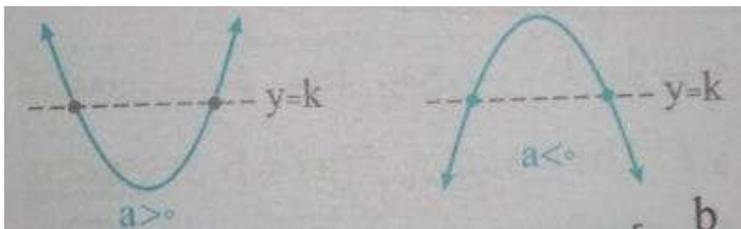
نمودار سهمی به معادله $f(x) = x^2 - 2x$ به صورت مقابل است:



خطی مانند $y = 1$ (هر خط به صورت $y = k$ و $k > -1$)، نمودار تابع را در دو نقطه قطع می کند. پس f تابعی یک به یک نمی باشد. اما می توان با محدود کردن دامنه تابع، تابعی یک به یک از آن ساخت که وارون آن، یک تابع باشد. مثلاً می توان دامنه آن را $[1, +\infty)$ در نظر گرفت تا تابع f روی این بازه، تابعی یک به یک شود.

نکته

با توجه به سهمی، هیچ تابع چندجمله ای از درجه 2، روی \mathbb{R} یک به یک نیست.



خط $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن سهمی است. اگر نمودار f را در یکی از بازه های $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ و یا هر زیرمجموعه ای از این دو بازه در نظر بگیریم، آن گاه f تابعی یک به یک خواهد شد.

مثال

توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

وارون تابع

اگر در تابع f که به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب است، جای مؤلفه ها را عوض کنیم، مجموعه جدیدی از زوج های مرتب به دست می آید که به آن وارون تابع f می گوئیم و آن را با f^{-1} نشان می دهیم. به عنوان مثال،

وارون تابع $f = \{(-1, 1), (2, -1), (4, 2), (5, 1)\}$ به صورت

$f^{-1} = \{(1, -1), (-1, 2), (2, 4), (1, 5)\}$ است.

نکته

اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، آن گاه:

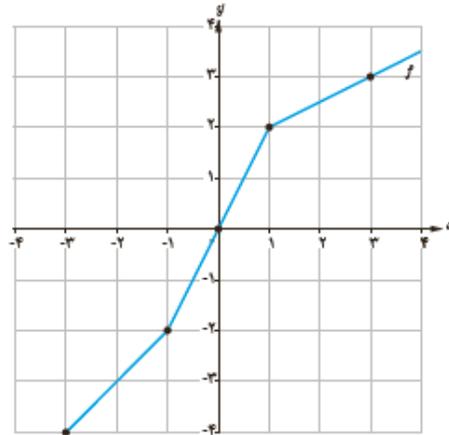
(2) دامنه تابع $f^{-1} =$ برد تابع f ($R_f = D_{f^{-1}}$)

(1) برد تابع $f^{-1} =$ دامنه تابع f ($D_f = R_{f^{-1}}$)

مثال

از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$



تست

اگر f تابعی با ضابطه $f(x) = x^2 + 5x$ باشد، کدام یک از عبارات های زیر درست است؟

$f^{-1}(-1) = -1$ (4) $f^{-1}(1) = 6$ (3) $f^{-1}(-4) = -1$ (2) $f^{-1}(10) = 2$ (1)

تست

اگر $f(x) = 3 - \sqrt{2x + 5}$ باشد، مقدار $f^{-1}(0)$ کدام است؟

$3 - \sqrt{5}$ (1) 2 (2) 4 (3) 4 (4) تعریف نشده است.



تست

تابع با ضابطه $f(x) = (a - 1)x^2 + ax - 2$ روی \mathbb{R} تابعی یک به یک می باشد، $f^{-1}(4)$ کدام است؟

2 (1) 4 (2) 6 (3) 8 (4)

نکته مهم

نمودار یک تابع و نمودار وارون آن تابع نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند. پس اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، برای رسم وارون آن تابع کافی است که قرینه آن را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.



نکته

اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، آن گاه:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x; x \in D_{f^{-1}} \quad (1)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x; x \in D_f \quad (2)$$

نکته

اگر f و g دو تابع باشند، به طوری که $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ ، آن گاه دو تابع f و g وارون یکدیگرند.



نکته

اگر f و g دو تابع باشند، آن گاه $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ و $(f^{-1})^{-1} = f$

مثال

اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

الف) $(fog)^{-1}(5)$



تابع وارون

اگر f یک تابع باشد، آن گاه وارون تابع f ممکن است تابع نباشد.

اگر وارون یک تابع خود نیز تابع باشد به آن تابع، تابع وارون پذیر می گوییم.

شرط آن که تابعی وارون پذیر باشد آن است که تابع یک به یک باشد.

اگر تابع f روی بازه D ، اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، آن گاه تابع f روی بازه D یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.



به دست آوردن ضابطه تابع وارون تابع های وارون

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون تابع f ، ابتدا از نماد y به جای $f(x)$ استفاده می کنیم. سپس x را بر حسب y حساب می کنیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از نماد $f^{-1}(x)$ استفاده می کنیم.

مثال

ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} + 3$ را به دست آورید.

مثال

ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$



مثال

در مورد هر یک از قسمت های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$, $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x-8}$, $g(x) = 8 + x^2 ; x \leq 0$



مثال

با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون

آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.



تمرینات تکمیلی

مثال

ضابطه تابع وارون توابع زیر را به دست آورید.

ب) $f(x) = 3 - \sqrt{2x-1}$

ت) $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

ج) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

آ) $f(x) = \frac{-5x+3}{4}$

پ) $f(x) = x^3 - 4$

ث) $f(x) = x^2 - 6x, x \geq 3$



مثال

اگر $f(x) = 6x + 2$ و $g(x) = x^3 + 1$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

ب) $(f \circ g)^{-1}(-4)$

ب) $(f^{-1} \circ g^{-1})(-7)$

آ) $(f^{-1} \circ g)(1)$

ج) $(g \circ g^{-1})(5)$

ث) $(f^{-1} \circ f)(\frac{3}{4})$

ت) $(f^{-1} \circ f^{-1})(1)$

مثال

نمودار تابع وارون هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



مثال

اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورید و نمودار آن‌ها را در یک دستگاه رسم کنید. ضابطه f^{-1} را نیز به دست آورید.

مثال

اگر $f = \{(1, 2), (3, -4), (4, 1)\}$ و $g = \{(1, 5), (3, 2), (-1, 1)\}$ دو تابع باشند، تابع های $g \circ f^{-1}$ و $f \circ g^{-1}$ را با زوج های مرتب بنویسید.



مثال

با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

مثال

نمودار تابع f به صورت مقابل است. روی کدام بازه زیر، f^{-1} تابع است؟

(-1 و 2) (4

(1 و 3) (3

(-3 و 0) (2

(-∞ و 2) (1

مثال

اگر $A = \{-4, -2, 2, 4\}$ و $f = \{(x, y) | x \in A, y = \frac{x}{2} + 1\}$ باشد، وارون تابع f کدام است؟

$\{(-1, -2), (1, -1), (0, 2), (3, 4)\}$ (2

$\{(-1, -4), (0, -2), (2, 2), (3, 4)\}$ (1

$\{(0, -2), (-2, 2), (-1, 4), (3, 4)\}$ (4

$\{(-1, -4), (0, -1), (2, 2), (3, -1)\}$ (3

مثال

دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض اند. تابع

$g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

$\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$ (2

$\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$ (1

$\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ (4

$\{(3, 3), (1, 1), (4, 4)\}$ (3

مثال

دو تابع با ضابطه های $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض اند. اگر

$(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

4 (4

3 (3

2 (2

1 (1

مثال

دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$

باشد، a کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (1)

مثال

دو تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$

مفروض اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

- 4 (4) 2 (3) -1 (2) -4 (1)



مثال

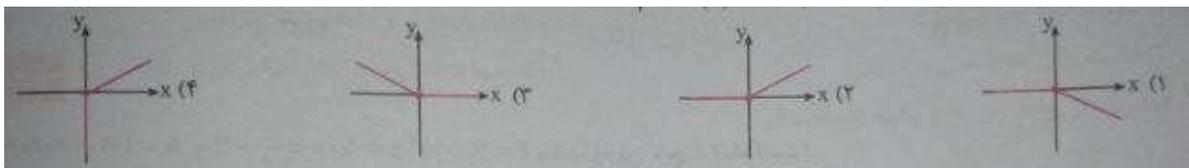
نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ ، در نقطه ای به طول 1- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$

باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

- 3 (4) 1 (3) -2 (2) -3 (1)

مثال

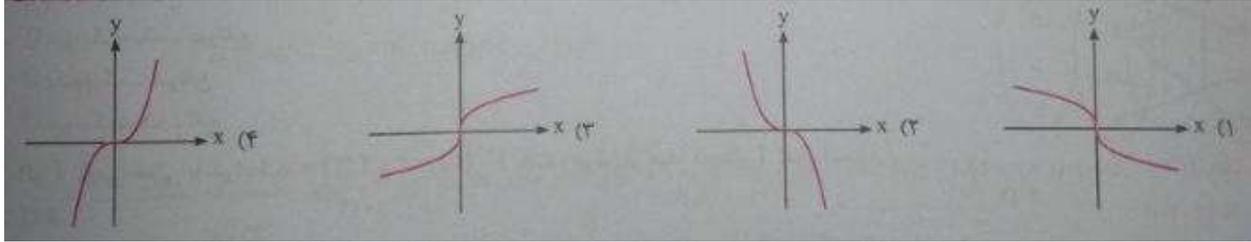
منحنی نمایش وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + |2x|$ کدام است؟



مثال

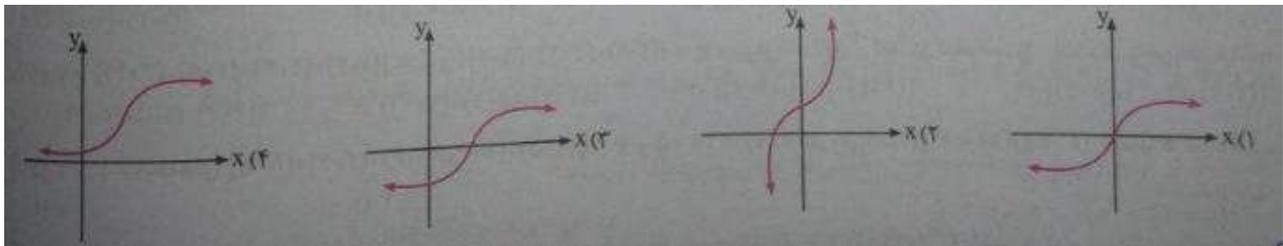
اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟





مثال

اگر $f(x) = x^3 + 2$ باشد، نمودار وارون تابع f کدام است؟



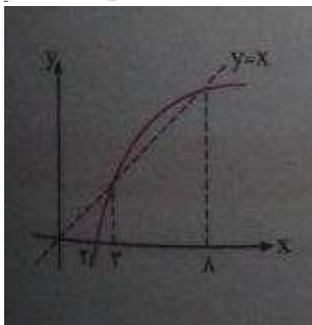
مثال

شکل روبرو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$



کدام است؟

- (1) (0,2] (2) [3,2] (3) [2,8] (4) [3,8]



مثال

نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می کند؟

- (1) -4 و -1 (2) 4 و -1 (3) -4 و 1 (4) 4 و 1

مثال

تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه \mathbb{R} ، چگونه است؟

- (1) نزولی (2) صعودی (3) وارون ناپذیر (4) یک به یک

مثال

اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ آن گاه نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ به کدام صورت است؟



مثال

دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض اند. اگر

$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 6 (4) 7

مثال

نمودار تابع f به صورت مقابل است. ضابطه وارون تابع f کدام است؟

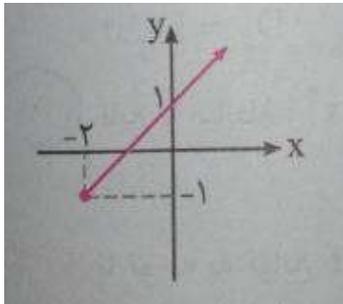


$$f^{-1}(x) = x - 1, x \geq -1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = x + 1, x \geq -1 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = x - 1, x \geq -2 \quad (3)$$

$$f^{-1}(x) = x + 1, x \geq -2 \quad (4)$$



مثال

قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y=x$ ، خط d می نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2



مثال

ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، به کدام صورت است؟

$$y = -x^2 + 4x - 5, x \leq 2 \quad (2)$$

$$y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2 \quad (1)$$

$$y = -x^2 + 4x - 5, x \geq 1 \quad (4)$$

$$y = x^2 - 4x + 5, x \geq 1 \quad (3)$$





ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

$y = x^2, x < 0$ (2)

$y = x|x|, x \in \mathbb{R}$ (1)

$y = \pm x|x|, x \in \mathbb{R}$ (4)

$y = \mp x^2, x \in \mathbb{R}$ (3)



ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (2)

$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$ (1)

$y = x|x|, x \in \mathbb{R}$ (4)

$y = x|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (3)



ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟



$y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1$ (2)

$y = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1$ (1)

$y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1$ (4)

$y = \frac{x}{|x|-1}, |x| > 1$ (3)