



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

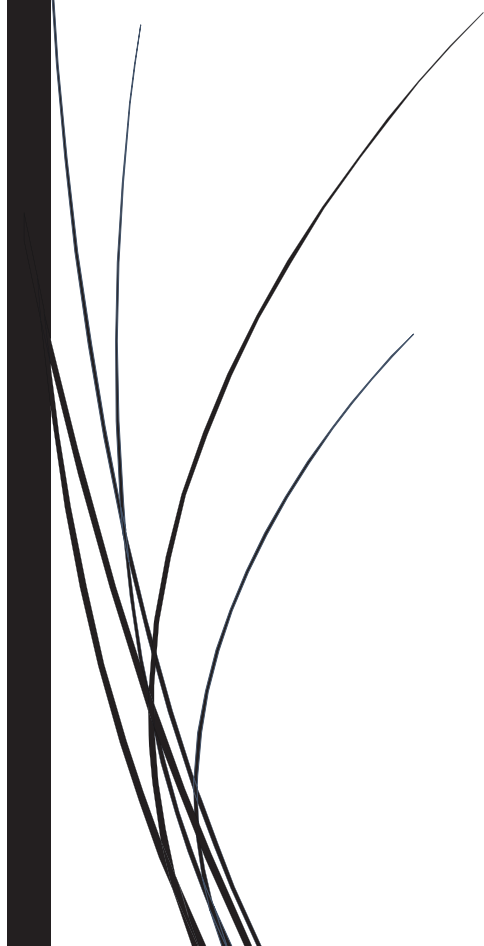
به نام خدا

(۱۲ انسانی)

جزوه ریاضی و آمار ۳

نهیبه و تنظیم: فاطمه بوربور

دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران (وراین)



فصل اول

آمار و احتمال

❖ درس اول: شمارش

❖ درس دوم: احتمال

❖ درس سوم: چرخہ آمار در حل مسائل

بارم فصل ۱:

شہرورادی	نوبت دوم	نوبت اول
۸	۳/۵	۱۵

فصل ۱ درس ۱: شمارش

اهداف درس ۱:

- آشنایی با برخی روش های شمارش و آشنایی با مفاهیم اصل جمع و اصل ضرب و به کارگیری آنها در حل مسائل
- آشنایی با نماد فاکتوریل و توانایی محاسبه مسائل شامل آن
- به کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت و آشنایی با مفهوم جایگشت و به کارگیری آن در حل مسائل
- به کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم تبدیل و آشنایی با مفهوم تبدیل و به کارگیری آن در حل مسائل
- به کارگیری اصل ضرب و مفهوم تبدیل برای رسیدن به مفهوم ترکیب و آشنایی با مفهوم ترکیب و به کارگیری آن در حل مسائل
- ❖ توانایی طرح مسائلی که پاسخ آنها با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب است.

شمارش:

برای این که بتوانیم بدون شمردن، تعداد حالت های یک عمل را شمارش کنیم از ابزارهای اصل جمع، اصل ضرب، جایگشت، تبدیل و ترکیب کمک می گیریم.

اصل جمع:

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگر را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، بنابراین به $m+n$ طریق می توان عمل اول (یا) عمل دوم را انجام داد

✓ حرف (یا) نشان دهنده اصل جمع است

✓ اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است. یعنی اصل جمع را می توان برای بیشتر از

۲ عمل نیز بکار برد به شرطی که عمل ها با هم انجام

نگیرد

✓ در اصل جمع، عمل در یک مرحله و به طور غیر همزمان انجام پذیر است

(فعالیت هی ۲)

① در کتابخانه ای ۳۰ کتاب روان شناسی و ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فقط یک کتاب با موضوع روان شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟
 ✓ حل: توجه داشته باشید که دانش آموز می خواهد در این کتابخانه فقط کتاب روان شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند. بنابراین این طبق اصل جمع $(۳۰ + ۲۵ = ۵۵)$ راه انتخاب وجود دارد

② پرستاری می تواند به صورت رایگان (سرویس یا پیاده روی) یا با پرداخت هزینه (تاکسی، اتوبوس یا مترو) به بیمارستان برود او برای رفتن به بیمارستان چند انتخاب دارد؟
 ✓ حل: $(۲ + ۳ = ۵)$

(مثال هی ۳ و تهرین هی ۱۰)

مثال: به چند طریق می توان فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس را از بین چهار خودکار یا چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ های متفاوت و سه روان نویس با رنگ های متمایز انتخاب کرد؟

✓ حل: $(۵ + ۴ + ۳ = ۱۲)$

① می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموزانتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟

اصل ضرب:

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق (و) در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند. در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است

✓ حرف (و) نشان دهنده اصل ضرب است

✓ اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است. یعنی اصل ضرب را می توان برای بیشتر از ۲ عمل نیز بکار برد به شرطی که عمل ها مرحله به مرحله انجام گیرد.

✓ توجه داشته باشید در اصل ضرب، عملی در دو یا چند مرحله و به طور همزمان انجام پذیر است

(فعالیت ص ۳ و تمرین ۵ ص ۱۱)

① دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی، یک درس و از میان سه درس اختصاصی، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی و یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟

☑ حل: توجه داشته باشید که دانشجو می خواهد هم درس عمومی و هم درس اختصاصی انتخاب کند. بنابراین این طبق اصل ضرب $(6 = 2 \times 3)$ انتخاب وجود دارد

⑤ یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

(مثال ص ۴)

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام داران و هیئت امناء را در دو گروه A, B دسته بندی می کند. ۷ نفر در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می گیرند. گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی و گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند

الف) مدیرعامل به چند طریق می تواند فقط با یک نفر از این ۱۵ نفر مشورت کند؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

❖ به طور کلی:

اگر در سؤال گفته شود کار اول یا کار دوم یا ... انجام می شود، برای حل سؤال از اصل جمع و اگر در سؤال گفته شود کار اول و کار دوم و ... انجام می شود، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده می کنیم.

مثال: فرض کنید مغازه ای ۵ نوع بستنی و ۳ نوع آبیوه دارد.

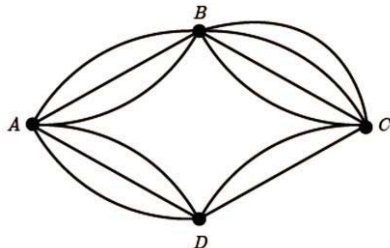
الف) اگر بخواهید برای دوست خود فقط بستنی یا آبیوه بخرید، به چند روش می توان این کار را انجام داد؟

ب) اگر بخواهید برای دوست خود هم بستنی و هم آبیوه بخرید، به چند روش می توان این کار را انجام داد؟

✓ نکته: در برخی از مسائل لازم است همزمان از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود

(گارد در کلاسی ص ۴)

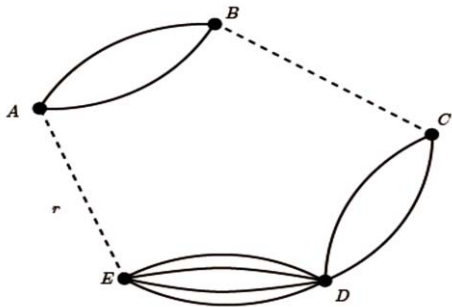
بین ۴ شهر A, B, C, D در شکل زیر راههایی وجود دارد مشخص کنید به چند طریق می توان:



الف) از شهر A به شهر C از طریق شهر B سفر کرد؟
☑ حل:

$$\underbrace{(3 \times 4)}_{ABC} = 12$$

⑩ تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



نماد فاکتوریل: $(!)$

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک تر از خودش از نماد فاکتوریل $(!)$ استفاده می کنیم. مثل: $۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$

قرارداد: $۱! = ۱$, $۰! = ۱$

✓ در فاکتوریل از هر شیء فقط یک بار استفاده می شود و تعداد حالت ها در هر قسمت، نسبت به قبلی، یکی کم می شود.

✓ در مسائل فاکتوریل بنا بر نیاز هر جا که لازم بود فاکتوریل را قطع می کنیم. مثل: $۵! = ۵ \times ۴ \times \dots$

(مثال ص ۵)

حاصل هر یک را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$۱) ۴! \times ۲ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۴۸$$

$$۲) \frac{۵!}{۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۵ \times ۴ = ۲۰$$

$$۳) \frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$$

$$۴) \frac{۳! \times ۵! \times ۰!}{۷! \times ۱!} = \frac{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۵! \times ۱}{۷ \times ۶ \times ۵! \times ۱} = \frac{۱}{۷}$$

(ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

$$\underbrace{(۳ \times ۴)}_{ABC} + \underbrace{(۳ \times ۲)}_{ADC} = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

(پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

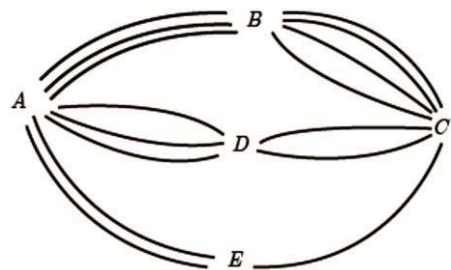
$$\underbrace{(۴ \times ۲)}_{BCD} + \underbrace{(۳ \times ۳)}_{BAD} = ۸ + ۹ = ۱۷$$

(تمرین ۲ ص ۱۰)

② بین ۵ شهر A, B, C, D, E در شکل زیر راههایی وجود دارد که همه دو طرفه اند مشخص کنید به چند طریق می توان (الف) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

(ب) از شهر A به شهر C از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

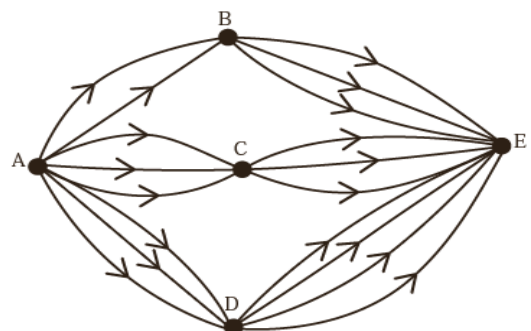
(پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



(تمرین ۹ و ۱۰ ص ۱۱)

⑨ مساله ای طرح کنید که جواب آن $۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + ۳^۲$ باشد

✓ حل: اگر شکل زیر نشان دهنده ی جاده های بین شهر های A, B, C, D, E باشد و همه ی جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E سفر کرد؟



جایگشت:

* هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شی می نامیم.

(جایگشت به معنی مرتب سازی یا تغییر ترتیب اعضای یک مجموعه است.)

* مفهوم کلمات زیر یعنی تکرار مجاز نیست:

۱. ارقام یا حروف متمایز ۲. جایگشت ۳. کنار هم قرار گرفتن

* تعداد جایگشت های n تایی از n شیء متمایز برابر با $n!$ است

$$n \times \frac{n-1}{-} \times \frac{n-2}{-} \times \dots \times \frac{2}{-} \times \frac{1}{-} = n!$$

مثال ۱: تعداد جایگشت های ۳ تایی از ۳ شیء متمایز برابر ۳!

$$3 \times \frac{2}{-} \times \frac{1}{-} = 3!$$

مثال ۲: با حروف کلمه ی "درخشان" و بدون تکرار حروف چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت؟

حل: کلمه درخشان ۶ حرف دارد و تعداد جایگشت ۶ تایی از ۶ شیء متمایز برابر ۶! می باشد.

(فعالیت ۵)

① اگر افراد A, B, C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

✓ نکته: برای تعیین تعداد اعداد n رقمی، می توان از اصل ضرب استفاده نمود. فقط باید اعداد را به گونه ای نوشت که رقم اول از سمت چپ صفر نباشد. مثلاً عدد سه رقمی ۰۱۵ وجود ندارد.

✓ برای زوج یا فرد بودن اعداد، ابتدا باید رقم یکان را مشخص کرده و سپس اولین رقم سمت چپ و پس از آن تعداد حالات ارقام میانی شمرده شود.

✓ وقتی می گویند بدون تکرار ارقام، یعنی، تعداد راههای پرکردن هر خانه که تمام شد برای خانه های بعدی یک واحد از تعداد حالت های قبلی کم کرده تا الی آخر.

(فعالیت ۲ ص ۵)

② با ارقام ۲ و ۷ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120 \quad \text{حل: } \checkmark$$

(گارد رگلابی ص ۶)

با ارقام ۰ و ۲ و ۱ و ۳ و ۴ و ۵:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟
حل: \checkmark

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5 \times 5! = 600$$

۲. چند عدد پنج رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\frac{4}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} \times \frac{3}{1,3,5} = 288$$

۳. چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\left. \begin{array}{l} 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{0} = 5! = 120 \\ 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times \frac{2}{2,4} = 192 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 312$$

۴. چند عدد پنج رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\left. \begin{array}{l} 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{0} = 5! = 120 \\ 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{5} = 96 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 216$$

جایگشت r شیء از n شیء (تبدیل یا ترتیب):

* تعداد جایگشت r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n, r)$ نمایش می دهیم و مقدار آن از فرمول زیر بدست می آید.

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(تقریباً ۳ و ۴ و ۶ ص ۱۱)

③ با حروف کلمه ی "ولایت" و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ی ۵ حرفی می توان نوشت؟

حل: $5! = 120$

ب) چند کلمه ی ۳ حرفی می توان نوشت که به "ی" ختم شوند؟ و لایات

$$\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 12$$

۴ حرف در ۲ خانه یا جایگشت ۲ تایی از ۴ حرف

پ) چند کلمه ی ۵ حرفی می توان نوشت که با "و" شروع و به "ل" ختم شوند؟ و لایات

$$\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5} = 6$$

۳ حرف در ۳ خانه یا جایگشت ۳ تایی از ۳ حرف

④ یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها باهم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

حل: چون گفته رفت و برگشت یعنی برای ما مهم است که ابتدا کدام تیم اول و کدام تیم دوم باشد پس:

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow p(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

⑥ مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است:

الف) چند عدد ۵ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی بزرگتر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

*در جایگشت ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم است. یعنی با جا به جا کردن اشیاء حالت جدیدی به وجود می آید.

* به جای استفاده از روش اصل ضرب (پرکردن خانه ها) می توانیم از فرمول جایگشت در بالا استفاده کنیم.

(فعالیت ۷ ص ۷)

① با ارقام ۱ تا ۷ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

حل: می توانیم از دو روش اصل ضرب یا فرمول جایگشت استفاده کنیم

$$\frac{7}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{4} = 840$$

روش اول:

روش دوم:

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow p(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840$$

(گارد در کلاسی ۹ ص ۹)

① به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)

(مثال ص ۸)

با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟

(فعالیت ۲ ص ۷)

② به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

✓ در هدیه دادن، ساختن تیم، انتخاب مهره ها، شمارش n ضلعی ها با داشتن تعدادی نقطه و مجموعه ها ترتیب مهم نیست. بنابراین از ترکیب استفاده می کنیم.

(مثال ص ۹)

به چند طریق می توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب، انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟
✓ حل:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

(گاردو گلاسی ۲ و ۴ ص ۱۰)

② به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

④ در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم؟

(تمرین ۷ ص ۱۱)

روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این ۱۲ نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟
✓ حل:

با وصل کردن هر سه نقطه، یک مثلث ایجاد می شود

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220$$

* اگر در جایگشت افراد یا اشیاء، بخواهیم چند فرد یا چند شیء کنار هم باشند، کافی است آنها را در یک بسته، در نظر گرفته و سپس جایگشت درون بسته را حساب کرده، در جایگشت خود بسته با افراد یا اشیاء بیرون آن ضرب کنیم.

مثال: با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «د»، «ی» کنار هم باشند.

ترکیب r شیء از n شیء:

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها

ترتیب قرار گرفتن مهم نباشد، با C_r^n یا $\binom{n}{r}$ یا $c(n, r)$

نمایش می دهیم و با استفاده از اصل ضرب و رابطه تبدیل، رابطه ترکیب به دست می آید و فرمول آن به صورت زیر است:

$$\binom{n}{r} = \frac{p(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

✓ روابط ساده و سریع در ترکیب:

$$\binom{n}{n} = 1 \longrightarrow \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1 \longrightarrow \binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \longrightarrow \binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{n}{n-1} = n \longrightarrow \binom{3}{2} = 3$$

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟
 حل:

با وصل کردن هر دو نقطه، یک وتر ایجاد می شود.

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 10!} = 66$$

* تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی 2^n

* تعداد زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی:

$$\binom{n}{r}$$

* تعداد زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی

$$\binom{n-k}{r}$$

فاقد k عضو:

* تعداد زیر مجموعه های r عضوی از یک مجموعه n عضوی

$$\binom{n-k}{r-k}$$

شامل k عضو:

مثال:

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مفروض است:

الف) چند زیر مجموعه دارد؟

$$2^7 = 128 \quad \text{حل: } \checkmark$$

ب) چند زیر مجموعه ی ۴ عضوی دارد؟

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = 35$$

ب) چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل رقم ۲ دارد؟

$$\binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

ت) چند زیرمجموعه ۴ عضوی فاقد رقم ۲ دارد؟

$$\binom{7-1}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15$$

ث) چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل عدد ۲ و فاقد عدد ۶ دارد؟

$$\binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3}$$

$$\binom{6-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

(گارد رگلاسی ۳ هی ۱۰)

③ مجموعه ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ چند زیر مجموعه ی سه عضوی دارد؟

(تمرین ۶ هی ۱۱)

⑥ مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است:

الف) چند زیر مجموعه ی سه عضوی دارد؟

ب) چند زیر مجموعه ی سه عضوی شامل رقم ۸ دارد؟

✓ نکته:

حداقل عددی، یعنی آن عدد یا بیشتر از آن عدد
حداکثر عددی، یعنی آن عدد یا کمتر از آن عدد

(تمرین ۸ ص ۱۱)

⑧ می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش
آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره
والبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم
این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:
الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در
تیم حضور داشته باشند.

✓ حل:

$$\binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 200$$

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

✓ حل: یعنی کاپیتان از قبل انتخاب شده است پس یک نفر از
۶ نفری که قرار بود انتخاب کنید، کم می شود

$$5 + 5 = 10 \rightarrow \binom{10}{5} = 252$$

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم
باشند.

✓ حل: حداقل ۴ نفر، یعنی ۴ نفر یا بیشتر از ۴ نفر

$$\left. \begin{array}{l} \binom{6}{4} \times \binom{5}{2} = 15 \times 10 = 150 \\ \binom{6}{5} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30 \\ \binom{6}{6} = 1 \end{array} \right\} + \rightarrow 181$$

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.
✓ حل:

$$\binom{5}{2} + \binom{6}{4} = 150$$

فصل ۱ درس ۲: احتمال

اهداف درس ۲:

- یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای و پیشامدهای تصادفی
- مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در حالت های مختلف و یافتن تعداد اعضای آنها با ابزارهای شمارش
- آشنایی با جبر پیشامدها و اعمال روی پیشامدها و استفاده از آنها در مسائل مربوط به احتمال
- استفاده از جایگشت، تبدیل و ترکیب در حل مسائل احتمال

پدیده ها:

* به آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش ها یا پدیده های قطعی می گوئیم.

* به پدیده ها یا آزمایش هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می گویند.

(گاردوگرگلاسی هی ۱۳ و تهرپین هی ۲۵)

کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟

(الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه دوازدهم؛

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

(پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛

(ت) پیش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه ای پرتاب می شود و به دنبال آن تاسی انداخته می شود. اگر شخصی سکه اش رو

و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می توان نفر برنده را مشخص کرد؟

(تهرپین هی ۲۵)

(الف) نام ۲۰ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می کشیم تا نام یکی از دانش آموزها استخراج شود.

(ب) مقداری آب را حرارت می دهیم تا به بخار تبدیل شود. (پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سوالات آن را شانس می پاسخ داده ایم.

(ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می دهد.

عددی را انتخاب می کند.

سه واحد به آن عدد می افزاید.

سپس حاصل را دو برابر می کند.

از عدد حاصل ۲ واحد کم می کند.

نتیجه به دست آمده را نصف می کند.

از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می کند.

در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده پاسخ را اعلام می کند.

فضای نمونه ای:

* به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می گوئیم .

* همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه ای را تشکیل می دهد که به آن فضای نمونه می گوئیم و آن را با حرف s نمایش می دهیم. و تعداد عضوهای آن را با $n(s)$ نشان می دهیم.

مثلا در پرتاب یک تاس، فضای نمونه ای و تعداد آن به صورت زیر است:

$$s = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(s) = 6$$

فضای نمونه ای مهم:

* جنسیت n فرزند:

$$n(s) = 2^n$$

* پرتاب n سکه با هم یا پرتاب n بار یک سکه:

$$n(s) = 2^n$$

* پرتاب n تاس با هم یا پرتاب n بار یک تاس:

$$n(s) = 6^n$$

* در پرتاب m تاس و n سکه:

$$n(s) = 6^m \times 2^n$$

* انتخاب k شیء از n شیء

$$n(s) = \binom{n}{k}$$

* برای نمایش اعضای فضای نمونه ای از نمودار درختی و جدول نیز می توان استفاده کرد.

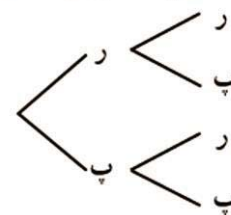
(فعالیت هی ۱۱۴)

فضای نمونه هر یک از آزمایش های تصادفی زیر را بنویسید.
۱. پرتاب دو سکه باهم.

حل: $n(s) = 2^2 = 4$

$$S = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$$

پرتاب سکه اول پرتاب سکه دوم

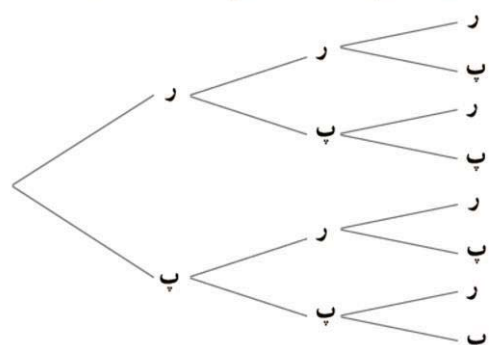


۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

حل: $n(s) = 2^3 = 8$

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

پرتاب سوم پرتاب دوم پرتاب اول



۳. پرتاب یک تاس و یک سکه با هم.

حل: $n(s) = 6^1 \times 2^1 = 12$

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶)\}$$

(گاردو گلاسی ۲ و ۳ هی ۱۵)

② سه دوست با نام های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

حل: $n(s) = 3! = 6$

③ در کیسه ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را هم زمان از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$3 + 4 + 4 = 11$$

حل: $n(s) = \binom{11}{3} = 6$

پیشامد:

* به هر یک از زیرمجموعه های فضای نمونه S یک پیشامد می گوئیم. $(A \subseteq S)$

* هر مجموعه ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه ها است

* پیشامد S را پیشامد قطعی (حتمی) و پیشامد تهی \emptyset را پیشامد غیرممکن (نشدنی) می نامیم

* تعداد همه پیشامدهای یک فضای نمونه ای برابر 2^n است.

(گاردو گلاسی هی ۱۵)

① تعداد و تمام پیشامدهای مربوط به پرتاب یک سکه را بنویسید

حل: $S = \{ر, پ\} \rightarrow 2^2 = 4 \rightarrow \{\}, \{ر\}, \{پ\}, \{ر, پ\}$

② بر روی سه کارت نامهای مریم، ملیکا و سوگند را نوشتیم و داخل کیسه انداختیم. به تصادف یکی از کارتها را خارج

$$\binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتر از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

$$\binom{6}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 150 + 60 + 20 = 230$$

(تقریبی ۵ و ۶ ص ۲۵)

۵) هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶) خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشد.

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

کردیم. تمام زیر مجموعه های یک عضوی و دو عضوی را بنویسید.

$$S = \{\text{مریم، ملیکا، سوگند}\} \rightarrow 2^3 = 8$$

زیر مجموعه های یک عضوی:

{مریم}، {ملیکا}، {سوگند}

زیر مجموعه های دو عضوی:

{مریم و ملیکا}، {مریم و سوگند}، {سوگند و ملیکا}

* برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

۳) تاسی را پرتاب می کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده اند؟

الف) {۳ و ۲ و ۵} ب) {۲} پ) {۲ و ۴ و ۶}

✓ حل: هر سه زیر برآمد ۲ در همه مجموعه ها هست.

* تعداد اعضای پیشامد تصادفی A را با n(A) و B را با n(B) و ...

نمایش می دهیم. (ص ۹۷)

۴) دو تاس را پرتاب می کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

$$n(s) = 6^2 = 36$$

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \rightarrow n(B) = 6$$

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

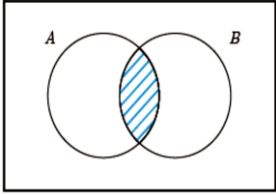
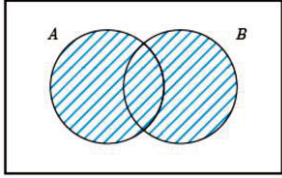
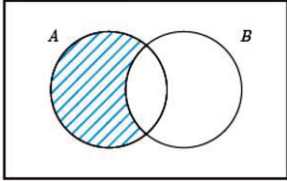
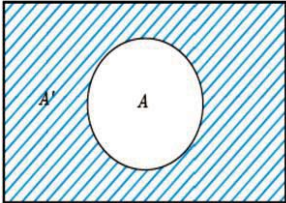
۵) در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتر از ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشتر از سه پایه مختلف باشند.

✓ حل:

اعمال روی پیشامدها:

پیشامدها از نوع مجموعه ها هستند پس از قوانین مجموعه ها استفاده می کنیم.

نمودار ون	نماد ریاضی و مجموعه ای	بیان توصیفی
	$A \cap B = \{x \in S / x \in A \wedge x \in B\}$ نماد \wedge به معنی "و" میباشد	اشتراک دو پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند
	$A \cup B = \{x \in S / x \in A \vee x \in B\}$ نماد \vee به معنی "یا" میباشد	اجتماع دو پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند
	$A - B = \{x \in S / x \in A \wedge x \notin B\}$	تفاضل دو پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.
	$A' = \{x \in S x \notin A\}$	متمم یک پیشامد وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. $* A \cup A' = S$ $* A \cap A' = \phi$

حرف "و" یعنی اشتراک:

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

ب) دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

(مثال ص ۱۷)

دو تاس را پرتاب می کنیم؛ هریک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) یکی از تاس ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

حل:

$$A = \left\{ (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6) \right\}$$

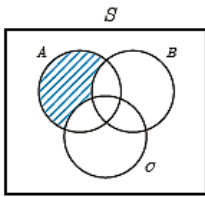
$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

ت) پیشامدهای $(A \cap B)$, $(A - B)$ را با اعضا مشخص کنید.

(گاردو کلاسی ۲ ص ۱۸)

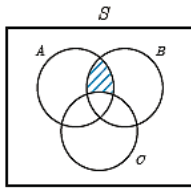
② فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، با توجه به نمودار ون داده شده هر یک از عبارتهای زیر را هاشور بزنید سپس، عبارت مجموعه ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید. حل:

الف) فقط پیشامد A و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



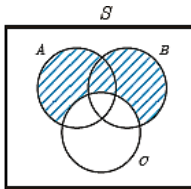
$$A - (B \cup C)$$

ب) پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



$$(A \cap B) - C$$

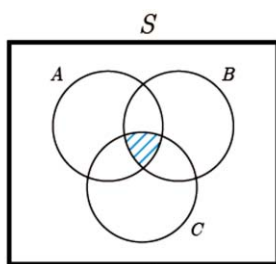
ج) پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



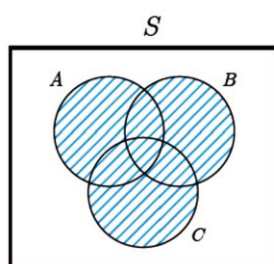
$$(A \cup B) - C$$

(تقریب ۴ ص ۲۵)

④ برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه ای بنویسید.



(الف)



(ب)

(گاردو کلاسی ۱ ص ۱۸)

① تاسی را پرتاب می کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

ج) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

د) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

ه) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

(تقریب ۳ و ۲ ص ۲۵)

② سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

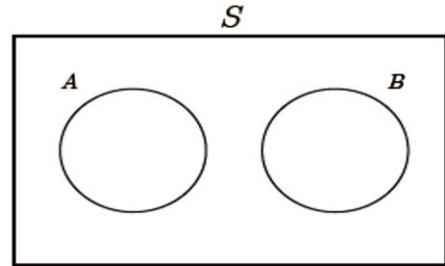
③ هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک تر از ۲۰ را روی یک کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها به طور تصادفی یک کارت را برمی داریم؛ مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

پیشامد ناسازگار:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S و $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می نامیم.



مثلا در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

* دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی دهند.

$$\left. \begin{array}{l} A - B = A \\ B - A = B \end{array} \right\} \rightarrow A \cap B = \emptyset$$

* پیشامد تصادفی A و متمم آن (A') ، دو پیشامد ناسازگارند زیرا: $A \cap A' = \emptyset$

(گاردو گلابی ۳ و ۴ هی ۱۸)

③ خانواده ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. حل:

الف) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$$A = \{(د، د، د)، (پ، پ، پ)\}$$

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند پسر و یک فرزند دختر باشند.

$$B = \{(پ، د، پ)، (پ، پ، د)، (د، پ، پ)\}$$

ج) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند دختر باشند.

$$C = \{(د، د، د)، (د، د، پ)، (د، پ، د)، (پ، د، د)\}$$

با توجه به A, B, C پاسخ دهید:

آیا پیشامدهای A, B ناسازگارند؟ بله زیرا $A \cap B = \emptyset$

آیا پیشامدهای B, C ناسازگارند؟ بله زیرا $B \cap C = \emptyset$

آیا پیشامدهای A, C ناسازگارند؟ خیر

② دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

حل: یعنی دو پیشامد بنویسیم که اشتراکشان تهی باشد. مثل: در پرتاب تاس پیشامد آمدن عدد زوج و پیشامد آمدن عدد فرد

(تهرینی ۷ هی ۲۶)

⑦ خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

ت) آیا پیشامدهای A, C ناسازگارند؟

احتمال:

برای به دست آوردن احتمال وقوع پیشامد A از رابطه ی زیر استفاده می کنیم:

$$\text{احتمال وقوع یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد پیشامد}}{\text{تعداد فضای نمونه ای}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

* جوابی که به دست می آورید حتماً باید بین صفر و یک باشد بنابراین برای هر پیشامد A داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

↙	↘
پیشامد غیر ممکن (نشدنی)	پیشامد قطعی (حتمی)
(مثل عدد بزرگتر از ۶ در پرتاب یک تاس)	(مثل عدد کوچکتر از ۶ در پرتاب یک تاس)

$$* P(S) = 1 \text{ (قطعی)}$$

$$* P(\emptyset) = 0 \text{ (غیر ممکن)}$$

(فعالیت او ۳ و ۲ ص ۱۹)

① چنانکه پیشامد A نشدنی باشد یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید. \square حل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \xrightarrow{A=\emptyset} \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

② چنانکه پیشامد A حتمی باشد یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید. \square حل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \xrightarrow{A=S} \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

③ جاهای خالی را پر کنید. \square حل:

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \boxed{n(B)} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

* برای حل مسائل احتمال باید دو مرحله را به ترتیب طی کنیم:

۱. پیدا کردن تعداد فضای نمونه = مخرج کسر

۲. پیدا کردن تعداد پیشامد = صورت کسر

(گارد در گلابی ص ۲۰)

① یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. مطلوب است

الف) احتمال این که تاس زوج بیاید.

\square حل:

$$S = \{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر), (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(S) = 12$$

$$A = \{ (۲,ر), (۴,ر), (۶,ر), (۲,پ), (۴,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) احتمال این که سکه پشت بیاید.

\square حل:

$$S = \{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر), (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(S) = 12$$

$$B = \{ (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ج) احتمال این که تاس زوج یا سکه رو بیاید.

\square حل:

$$S = \{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر), (۱,پ), (۲,پ), (۳,پ), (۴,پ), (۵,پ), (۶,پ) \} \rightarrow n(S) = 12$$

تاس زوج $\{ (۲,ر), (۴,ر), (۶,ر), (۲,پ), (۴,پ), (۶,پ) \}$

سکه رو $\{ (۱,ر), (۲,ر), (۳,ر), (۴,ر), (۵,ر), (۶,ر) \}$

تاس زوج یا سکه رو:

* برای حل مسائل تاریخ تولد از روش پر کردن خانه ها کمک می گیریم.

(گاردو در گلابی ۲ ص ۲۰)

② یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است: مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.
 ب) هر سال ۱۲ ماه است پس برای هر کدام ۱۲ حالت وجود دارد.

$$\frac{12}{12} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{12} = n(S) = 12^5$$

هر کدام فقط یک انتخاب دارند آن هم ماه فروردین است.

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

در نتیجه:

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.
 حل: اولی ۱۲ انتخاب دارد چون نمی دانیم در چه ماهی به دنیا آمده ولی نفرات بعدی یک انتخاب دارند چون ماه تولدشان با نفر اول یکسان است

$$\frac{12}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = n(B) = 12$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

در نتیجه:

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

حل: اولی ۱۲ انتخاب دارد و دومی ۱۱ انتخاب چون نمی تواند ماه تولدش با نفر اول یکسان باشد و سومی ۱۰ انتخاب و ...

$$n(C) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12}$$

در نتیجه:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4}$$

$$C = \{(1,ر), (2,ر), (3,ر), (4,ر), (5,ر), (6,ر), (2,پ), (4,پ), (6,پ)\}$$

$$\rightarrow n(C) = 9$$

$$P(B) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

د) احتمال این که تاس فرد و سکه پشت بیاید.

حل:

$$S = \{(1,ر), (2,ر), (3,ر), (4,ر), (5,ر), (6,ر), (1,پ), (2,پ), (3,پ), (4,پ), (5,پ), (6,پ)\} \rightarrow n(S) = 12$$

$$\text{تاس فرد} \{ (1,ر), (3,ر), (5,ر), (1,پ), (3,پ), (5,پ) \}$$

$$\text{سکه پشت} \{ (1,پ), (2,پ), (3,پ), (4,پ), (5,پ), (6,پ) \}$$

$$\text{تاس فرد و سکه پشت} \{ (1,پ), (3,پ), (5,پ) \} \rightarrow n(D) = 3$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(تمرین ۹ ص ۲۶)

عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که:



الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

*جدول مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

✓ حل:

شماره های غیر اول $\{1, 4, 6\}$ مکان های زوج $\{2, 4, 6\}$

۳ پرچم غیر اول

۴ پرچم باقی مانده

در ۳ مکان زوج

در ۴ مکان باقی مانده

$$\left. \begin{array}{l} n(B) = 3! \times 4! \\ n(S) = 7! \end{array} \right\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

⑪ یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

(گارد رگلاسی ۳ ص ۲۱)

*طبق جدول $n(S) = 36$ و بیشترین تعداد پیشامد مربوط به مجموع دو تاس ۷ و کمترین آن مربوط به ۲ و ۱۲ است.

مثال: در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو تاس برابر ۴ باشد چیست؟

✓ حل: بدون استفاده از جدول

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$n(A) = 3 \rightarrow \{(3,1), (1,3), (2,2)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

✓ حل: با استفاده از جدول

اگر مجموع دو تاس ۴ باشد، تعداد پیشامد ۳ است و احتمال آن

$$\left(\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \right) \text{ می باشد}$$

* حل مسائل احتمال به کمک ترتیب و ترکیب

(تمرین ۱۰ و ۱۱ ص ۲۶)

(مثال ص ۲۳ قسمت ب، پ، ت)

در یک فروشگاه ورزشی ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

⑩ ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم ها با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد.
 حل:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{330}{680}$$

پ) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های لکه دار بیشتر باشد.

حل:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{3} + \binom{12}{2} \binom{5}{1}}{\binom{17}{3}} = \frac{220 + 330}{680} = \frac{550}{680}$$

12) در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه دار باشند.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

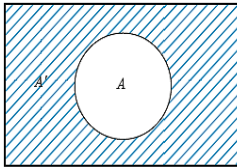
(تمرین ۸ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۶ و ۲۷)

8) از جعبه ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی برمی داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند.

$$n(S) = \binom{12+5}{3} = \binom{17}{3} \quad \text{حل: } \checkmark$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{220}{680}$$



پیشامد متمم:

$P(A) \rightarrow$ احتمال واقع شدن پیشامد A

$P(A') \rightarrow$ احتمال واقع نشدن پیشامد A

$$P(A) + P(A') = 1 \rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

(گاردنر گلاسی ص ۲۳)

① احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$\text{حل: } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

② احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با $0/01$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

③ احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

(مثال ص ۲۳ قسمت ۵)

در یک فروشگاه ورزشی ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

⑬ انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه: الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند. ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

* برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

* اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، این تساوی به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(مثال ص ۲۳ قسمت الف)

در یک فروشگاه ورزشی ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد. احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

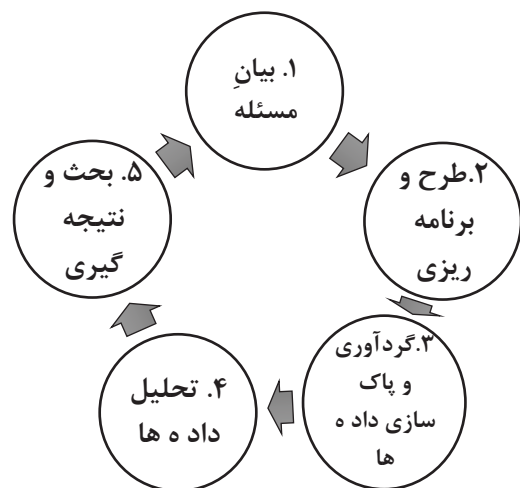
فصل ۱ درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

اهداف درس ۳:

- یادآوری شاخصها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری پایه های پیشین
- یادآوری و درک منطق انتخاب شاخصها، و نمودارهای آماری
- آشنایی با چرخه حل مسائل آماری به عنوان الگویی برای آماری فکر کردن
- درک روش به دست آوردن نتایج آماری و پرسیدن پرسش های تعیین کننده با توجه به بستر و زمینه مسئله
- پرورش نگاه نقادانه به مسائل و نتایج آماری و ارائه پیشنهاد مناسب

چرخه حل مسائل آماری:

حل کردن مسئله های مرتبط با آمار به صورت چرخه ای کامل شامل گام های زیر است:



* برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازبینی می شود. بنابراین این فرایند را یک چرخه، می نامیم.

گام اول (بیان مسئله):

* مسئله ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می کنیم.

* طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام رسیدن به پاسخ است.

* موارد زیر در گام اول بیشتر مورد توجه است:

۱. فهم مسئله

۲. تعریف دقیق

* با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.

گام دوم (طرح و برنامه ریزی):

* راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می کنیم. به نمونه گیری، شیوه اندازه گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می اندیشیم.

* موارد زیر در گام دوم بیشتر مورد توجه است:

۱. شیوه اندازه گیری

۲. روش نمونه گیری

۳. روش کار

* اندازه گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده ها و بررسی متغیر مورد نظر است.

* در اندازه گیری، اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل می کنیم.

(تقریباً ۳ ص ۴۰)

در هر یک از موارد زیر،

(۱) علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه های انتخاب شده را توضیح دهید .

(۲) برای بهبود نمونه گیری چه پیشنهادی دارید؟

(الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه روزی

نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

حل:

(۱) میزان رضایت شغلی کارمندان شیفت روز نسبت به کارمندان شیفت شب بالاتر است پس نمونه انتخاب شده مناسب نیست.

(۲) باید از لیست تمامی کارمندان همه شیفت ها به صورت تصادفی افرادی را انتخاب کنیم.

(ب) مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه های کودک تلویزیون

نمونه: انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

حل:

(۱) مادرانی که شاغل هستند شانس حضور ندارند

(۲) گردآوری داده ها را می توان به عصرها یا ساعات مختلفی از شبانه روز موکول کرد.

(پ) مسئله: نظرسنجی از دانش آموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام دادن تکالیف مدرسه اختصاص می دهند.

نمونه: دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده اند.

حل:

(۱) فقط دختران مورد بررسی قرار گرفته اند.

(۲) می توان لیستی از دانش آموزان (دختران و پسران) مدارس این منطقه تهیه کرد و به صورت تصادفی افرادی را انتخاب کرد.

*در هر مسئله واحد اندازه گیری متغیر مورد بررسی باید مشخص باشد. مثلاً اگر واحد اندازه گیری مدت زمان استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) مشخص نباشد ممکن است پاسخهایی با واحد ساعت یا پاسخهایی کیفی (کم، متوسط، زیاد) دریافت کنیم که تحلیل داده ها را مشکل می کند.

*در این گام به حضور افراد متخصص نیاز داریم.

*در این گام علاوه بر چگونگی اندازه گیری متغیرها، درباره ی اندازه ی نمونه، چگونگی نمونه گیری و همچنین شیوه ی تحلیل داده ها، تصمیم گیری می شود.

*تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامیم. هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.

* نمونه انتخابی در این گام، باید یک نمونه ی تصادفی باشد، تا همه اعضای جامعه شانس حضور یکسان در نمونه را داشته باشند.

(گاردنر گلابی ۱۰۳ ص ۳۳)

① در کدام یک از موارد زیر احتیاج به نمونه بیشتری داریم؟ چرا؟

(الف) سن دانش آموزان یک کلاس

(ب) معدل دانش آموزان یک کلاس

حل: (ب) زیرا تنوع و پراکندگی بیشتری دارد.

③ برای بررسی وضعیت اجتماعی - اقتصادی خانوارهای یک شهر، در کدام شیوه نمونه گیری همه ی قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

(الف) انتخاب خانوارها بر اساس رقم اول تلفن خانه ها

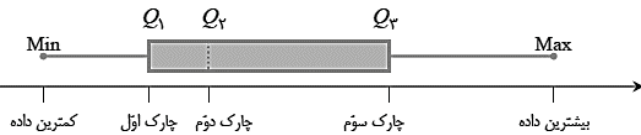
(ب) انتخاب خانوارها بر اساس رقم آخر تلفن خانه ها

حل: (الف) زیرا رقم اول تلفن منازل برای همه افراد آن شهر معمولاً یکسان است. پس همه ی افراد شهر شانس حضور یکسان برای انتخاب در نمونه را ندارند.

* در این گام داده ها را تحلیل کرده و نتایج را ارائه می دهیم ولی کاری به تفسیر نتایج نداریم

* منظور از تحلیل داده ها در واقع گزارش شاخص ها و معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است.

* نمودار جعبه ای و فرمول های پر کاربرد:



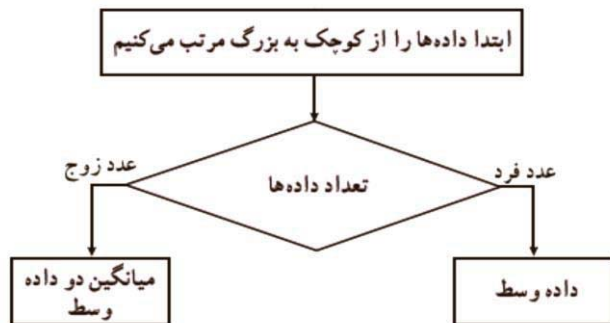
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (1) \text{ میانگین:}$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 \quad (2) \text{ دامنه میان چارکی:}$$

$$R = \max - \min \quad (3) \text{ دامنه تغییرات:}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad (4) \text{ انحراف معیار:}$$

(5) میانه:



مثال:

الف) میانه، دامنه تغییرات و دامنه میان چارک داده های زیر را بیابید و نمودار جعبه ای آن را رسم کنید

۵, ۴, ۱, ۴, ۵, ۱, ۸, ۲, ۵, ۷

گام سوم (گردآوری و پاک سازی داده ها):

* داده ها را گردآوری می کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می شویم.

* موارد زیر در گام سوم بیشتر مورد توجه است:

۱. گردآوری

۲. سازماندهی

۳. پاک سازی

* گام سوم به سازمان دهی داده ها می پردازد یعنی تبدیل واحدهای اندازه گیری یا محاسبه یک متغیر جدید بر اساس اطلاعات گردآوری شده (مثلاً محاسبه شاخص توده بدنی با استفاده از قد و وزن)

* با بررسی دقیق داده ها می توان برخی از اشتباه هائی که در مرحله اندازه گیری، گردآوری یا ثبت داده ها و یا وارد کردن داده ها در نرم افزار رخ می دهد را تصحیح کرد.

* پس از گردآوری و سازماندهی آنها مرحله پاک سازی یا حذف داده هایی است که نادرست یا ناسازگار هستند و می توانند منجر به نتیجه گیری غلط شوند. داده هایی که ناقص، دارای تکرار یا خطا باشند نیاز به پاکسازی دارند.

گام چهارم (تحلیل داده ها):

با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته ایم، نتایج را متناسب با هدف های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی های داده ها گزارش می کنیم.

* موارد زیر در گام چهارم بیشتر مورد توجه است:

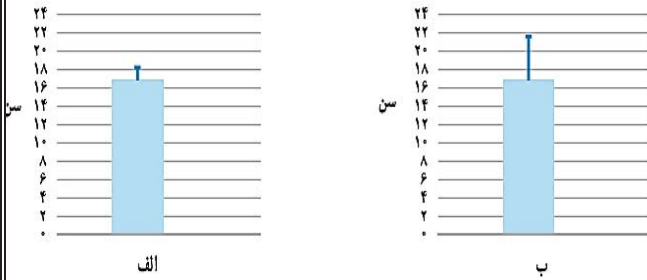
۱. مرتب کردن داده ها

۲. معیارها و شاخص ها: (گرایش به مرکز، پراکندگی)

۳. نمودارها و جدول ها:

(دایره ای، میله ای، جعبه ای، میانگین و انحراف معیار) (مستطیل و میله)

- کدا میک از نمودارهای زیر نشان دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟



✓ حل: نمودار الف

- برای متغیر "تماشای تلویزیون" نمودار جعبه ای مناسب تر است یا نمودار میانگین و انحراف معیار؟ هر کدام مناسب تر است رسم کنید.

✓ حل: نمودار جعبه ای زیرا داده دور افتاده داریم



* برای متغیرهای کمی هم گزارش معیار گرایش به مرکز و هم گزارش معیار پراکندگی لازم است.

(گارد رگلاسی ای ۳۷)

حقوق کارمندان دو شرکت به صورت زیر است

۱) ۱/۸ ۱/۱ ۳ ۱/۹ ۱/۴ ۱/۷ ۱/۲ ۱/۵ ۱/۱

۲) ۰/۸ ۰/۹ ۱۰/۱ ۱/۶ ۰/۸ ۱۲/۱ ۱ ۸ ۰/۷

نمودار جعبه ای دو شرکت را رسم کنید و بگویید آیا در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است؟

(ب) میانگین و انحراف معیار داده های ۲, ۴, ۵, ۶, ۸ را حساب کنید.

* معیارهای گرایش به مرکز (میانگین \bar{X} و میانه Q_p) به ما کمک می کنند بدانیم داده ها در کجا متمرکزند و معیارهای پراکندگی (دامنه تغییرات R و انحراف معیار δ و دامنه میان چارکی IQR) به ما کمک می کنند بدانیم داده ها چگونه متراکم یا پراکنده شده اند

* اگر داده دور افتاده داشته باشیم، شاخص مرکزی میانه Q_p و شاخص پراکندگی دامنه میان چارکی IQR و نمودار جعبه ای استفاده می کنیم.

* اگر داده دور افتاده نداشته باشیم، شاخص مرکزی میانگین \bar{X} و شاخص پراکندگی انحراف معیار δ و نمودار مستطیل میله (بلندی مستطیل آن نشان دهنده میانگین و میله خطای آن، نشان دهنده انحراف معیار) استفاده می کنیم.

(مثال ص ۳۵)

با توجه به داده ها جدول زیر کامل شده است.

۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۷

۴ ۵ ۳۰ ۶ ۸ ۷ ۶/۵ ۷ ۴ ۶ ۶ ۲۹ ۴ میزان تماشای تلویزیون

معیارهای گرایش به مرکز		معیارهای پراکندگی		
میانگین	میانه	IQR	SD (σ)	دامنه تغییرات
۱۶/۸۳	۱۷	۱۸-۱۵/۵=۲/۵	۱/۳۴	۱۹-۱۵=۴
۹/۷۱	۶/۲۵	۷/۵-۴/۵=۳	۸/۵۵	۳۰-۴=۲۶

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیک ترند؟
 حل: در گروه یک

ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه ای می توان تعمیم داد؟
 حل: دانش آموزان پایه دوازدهم مدرسه سعید و سهراب

۵) داده های گرد آوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۳ ۶ ۴ ۰ ۲۰ ۱۸ ۲۲ ۲۰ ۱۴ ۱۲

الف) این داده ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

حل: ابتدا میانگین و میانه داده ها را حساب کرده

$$\bar{X} = \frac{189}{15} = 12.6$$

۰ ۴ ۶ ۱۰ ۱۰ ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۶ ۱۸ ۲۰ ۲۰ ۲۲
 میانه

اگر عددی بزرگتر مثل ۳۰ به جای ماکزیمم داده ها (۲۲) قرار دهیم میانگین و انحراف معیار بزرگتر می شوند ولی میانه و چارکها تغییر نمی کنند.

۰ ۴ ۶ ۱۰ ۱۰ ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۶ ۱۸ ۲۰ ۲۰ ۳۰

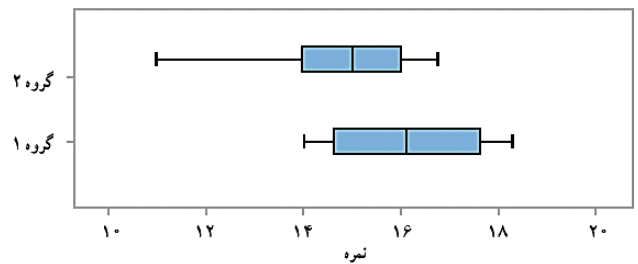
ب) دو داده به این نمونه اضافه کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

حل: اگر دو عدد با فاصله های برابر (یکی کمتر و دیگری بیشتر از میانگین) به داده ها اضافه شود میانگین تغییر نخواهد کرد. اگر بخواهیم میانه نیز تغییر نکند نباید عددی بین میانگین و میانه قرار گیرد پس این دو عدد مناسبند
 $11/6, 13/6$

۶) در مطالعه ای با بررسی تمامی دانش آموزان ۳ کلاس دهم میزان خواب دانش آموزان را در هفته گذشته بر حسب ساعت پرسیده شد و ثبت کردیم. پس از گردآوری داده ها نمودار های زیر نمایش داده شد. (بلندی مستطیل ها، نشان دهنده ی میانگین و میله ی خطا نشان دهنده ی انحراف معیار است.)

(تمرین ۵ و ۶ ص ۴۱)

۴) سعید و سهراب نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی صدا قرار می دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانش آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی دهند (گروه دو) مقایسه کردند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه ای می گیرید؟

حل: ۱۶: میانه گروه ۱، ۱۶: چارک سوم گروه ۲
 ۵۰٪ از دانش آموزان گروه یک عملکرد بهتری نسبت به ۷۵٪ دانش آموزان گروه دو داشته اند.

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.

حل:

$$\text{گروه ۱} \begin{cases} R = 18/5 - 14 = 4/5 \\ IQR = 17/5 - 14/5 = 3/5 \end{cases}$$

$$\text{گروه ۲} \begin{cases} R = 17 - 11 = 6 \\ IQR = 16 - 14 = 2 \end{cases}$$

دامنه تغییرات R گروه دو بیشتر از گروه یک و دامنه میان چارکی IQR گروه یک بیشتر از گروه دو است.

پ) از مقایسه کمینه (Min) گروه یک با چارک اول گروه دو چه نتیجه ای می گیرید؟

حل:

$$\text{گروه ۲ } Q_1 = 14 \quad \text{گروه ۱ } Min = 14$$

تمامی دانش آموزان گروه یک عملکرد بهتری نسبت به ۲۵ درصد دانش آموزان گروه دو دارند.

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می تواند گمراه کننده باشد؟

حل: گروه ۲ چون داده دور افتاده دارد

الف) متغیر "قبولی در کنکور" (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

☑ حل: کیفی

ب) افزایش ۲۰۰ درصدی و ۲۰ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

☑ حل: افزایش ۲۰۰ درصدی یعنی به ازای ۱۰۰ واحد، ۲۰۰ واحد افزایش صورت گرفته و افزایش ۲۰ درصدی یعنی به ازای ۱۰۰ واحد، ۲۰ واحد افزایش صورت گرفته

پ) با توجه به اطلاعات، کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟

☑ حل: مدرسه اول که قبولی آن ۲۰٪ بوده.

پ) فرض کنید در مدرسه اول تعداد قبولی ها ۱ نفر بوده و حالا ۳ نفر شده است (۲۰۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم تعداد قبولی ۷۰ نفر بوده و حالا ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟

☑ حل: مدرسه دوم که قبولی آن ۲۰٪ بوده

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می تواند گمراه کننده باشد؟

☑ حل: با توجه به مراحل بالا از درصد و نسبت بدون داشتن تعداد نمی توان نتیجه گیری درستی کرد

گام پنجم (بحث و نتیجه گیری):

*نتایج به دست آمده را تفسیر می کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می کنیم.

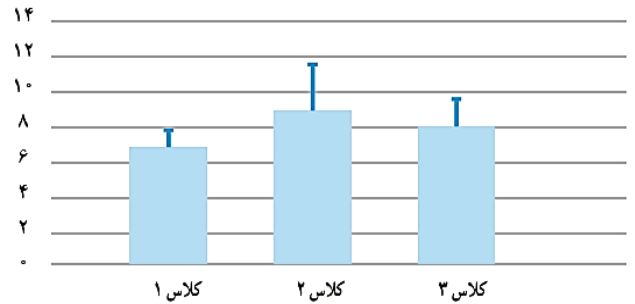
*موارد زیر در گام پنجم بیشتر مورد توجه است:

۱. تفسیر نتایج

۲. نتیجه گیری

۳. نقد و بررسی

۴. ایده های جدید



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گرد آوری داده ها نتایج را از واقعیت دور کند؟

☑ حل: فراموش کردن ساعت های خواب می تواند بر نتایج تأثیر بگذارد.

ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه گیری (فاصله ای /نسبتی - اسمی/ ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

☑ حل: کمی، نسبتی

پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید. ☑ حل:

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۵	۱/۵

ت) چه کسانی می توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

☑ حل: متخصصین اختلالات خواب، روان شناسان، والدین و مشاوران آموزشی

*برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد زیرا گزارش ناقص نتایج می تواند گمراه کننده باشد.

(گارد رگلاسی ص ۳۷)

دو مدرسه داریم که مدرسه اول قبولی هایش در کنکور ۲۰۰ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲۰ درصد

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر و مقیاس اندازه گیری را مشخص کنید.

☑ حل:

- متغیر تصادفی: شیوه حمل و نقل
- نوع متغیر و مقیاس اندازه گیری: کیفی ترتیبی
(زیرا شیوه حمل و نقل از سازگارترین با محیط زیست تا زیانبارترین برای محیط زیست طبقه بندی شده اند)

ت) چه نمودارها و چه آماره هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب اند؟

☑ حل:

می توانیم از نمودار میله ای یا دایره ای و از تعداد و درصد برای گزارش نتایج استفاده کنیم.

ج) آیا می توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش آموزان این کلاس به کل سال تحصیلی تعمیم دهیم؟

☑ حل:

خیر؛ زیرا ممکن است شیوه رفت و آمد دانش آموزان در فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال تغییر کند.

ث) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به تصادف انتخاب می کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می شد؟

☑ حل:

خیر؛ ممکن است نتایج متفاوتی حاصل شود زیرا پارامتر جامعه (تعداد و درصد در کل کلاس) مقدار ثابتی است ولی آماره نمونه (تعداد و درصد در افرادی که در نمونه قرار گرفته اند) متأثر از نمونه گیری است و تغییر می کند

یکبارگی چرخه آمار در حل مسائل:

در تمامی گام های حل مسئله :

۱. باید مسئله مورد بررسی، متغیرهای آماری و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم.

۲. آمارگیران باید اهداف کلی مطالعه آماری و ویژگی های جامعه آماری را بشناسند.

*در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت های مطالعه ای که انجام داده ایم بسیار مهم است

*در بهترین حالت می توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعمیم (گسترش) دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده ایم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

*از جامعه ای با اندازه N به $\binom{N}{n}$ طریق می توان نمونه

هایی با اندازه n داشت

(تقریباً ۲هزار و ۴۰۰)

② با توجه به تأثیر شیوه های مختلف حمل و نقل بر محیط زیست می خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه های زیر به مدرسه آمده اند؟

۱. پیاده یا با دوچرخه

۲. با وسایل حمل و نقل عمومی

۳. با سرویس مدرسه یا خودرو شخصی

الف) در این مطالعه جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

☑ حل:

- جامعه آماری: تمامی دانش آموزان این کلاس

- نمونه آماری: ۹ دانش آموز به صورت تصادفی

- اندازه جامعه: ۲۸

- اندازه نمونه: ۹

ب) داده های این مطالعه را با چه روشی می توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در جمع آوری این داده ها رخ دهد؟

☑ حل:

- پرسش نامه

- ممکن است برخی دانش آموزان پیاده به مدرسه بیایند ولی با اتوبوس برگردند. قبل از گردآوری داده ها باید به این مسائل فکر کنیم.

۳. اگر در آمارگیری هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد اما اگر مطالعه در منطقه ای انجام شود که آمارگیری ویژگی های آن را به خوبی نشناسد، نتیجه مطالعه مطلوب نخواهد بود.

۴. در تمام گام های حل مسئله باید به دانش اهالی منطقه و متخصصین آن موضوع اولویت دهیم.

۵. کیفیت اجرای هر یک از گام ها در چرخه آمار، گام های دیگر را به شدت تحت تاثیر قرار می دهد

(گاردورگلاسی ۲ ص ۳۹)

② هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام های دیگر اثر می گذارد؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجراکنندگان برداشت های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

☑ حل: گام اول (بیان مسئله). بر همه گام های دیگر اثر می گذارد

ب) اندازه گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

☑ حل: گام دوم (طرح و برنامه ریزی). بر همه گام های دیگر اثر می گذارد

پ) تمامی داده های دورافتاده حذف شده اند.

☑ حل: گام سوم (داده ها). بر گام ۵ اثر می گذارد

ت) براساس توزیع داده ها، میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی بود. اما چون مقدارمیانه با آنچه انتظار می رفت متفاوت بود، میانگین داده ها گزارش شد

☑ حل: گام چهارم (تحلیل داده ها). بر گام ۵ اثر می گذارد

ث) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده اند.

☑ حل: گام پنجم (بحث و نتیجه گیری). بر گام ۵ اثر می گذارد