

راهنمای ریاضی و آمار ۳ دوازدهم انسانی  
به همراه نمونه سوالات امتحانات نهایی

گردآوری شده توسط: اعظم عبادی ، دکتر ناصر عثمان پور  
دبیران ریاضی منطقه نازلو، استان آذربایجان غربی

---

## مقدمه

کتاب حاضر متشکل از همه سرفصل‌ها و مباحث ریاضی و آمار ۳ رشته علوم انسانی مطابق با آخرین تغییرات کتاب درسی می‌باشد و هر سه فصل کتاب را به خوبی پوشش داده است. با توجه به اینکه مطالب مطرح شده در کتاب درسی تا حدودی پیچیده و قابل فهم برای همه دانش‌آموزان این پایه نیست، لذا سعی بر آن شده است تا مفاهیم دروس در قالب یک درسنامه با نهایت سادگی و قابل فهم بودن ارائه شوند. در انتهای هر درس، سوالات امتحانات نهایی سالهای گذشته مربوط به آن درس و جواب تشریحی سوالات آورده شده است تا هم مطالب در ذهن دانش‌آموز جا بیفتد و هم با نمونه سوالات امتحانات نهایی مربوط به هر درس آشنا شود.

# فهرست مطالب

۵	۱ آمار و احتمال
۶	۱.۱ درس اول: شمارش
۶	۱.۱.۱ مفاهیم و نکات درس
۱۱	۲.۱.۱ سوالات امتحانات نهایی
۱۵	۳.۱.۱ پاسخنامه تشریحی
۲۴	۲.۱ درس دوم: احتمال
۲۴	۱.۲.۱ مفاهیم و نکات درس
۳۱	۲.۲.۱ سوالات امتحانات نهایی
۳۷	۳.۲.۱ پاسخنامه تشریحی
۵۰	۳.۱ درس سوم: چرخه‌ی آمار در حل مسائل
۵۰	۱.۳.۱ مفاهیم و نکات درس
۵۹	۲.۳.۱ سوالات امتحانات نهایی
۶۴	۳.۳.۱ پاسخنامه تشریحی
۶۷	۲ الگوهای خطی
۶۸	۱.۲ درس اول: مدل سازی و دنباله
۶۸	۱.۱.۲ مفاهیم و نکات درس
۷۲	۲.۱.۲ سوالات امتحانات نهایی
۷۵	۳.۱.۲ پاسخنامه تشریحی
۸۳	۲.۲ درس دوم: دنباله‌های حسابی
۸۳	۱.۲.۲ مفاهیم و نکات درس
۸۷	۲.۲.۲ سوالات امتحانات نهایی
۹۲	۳.۲.۲ پاسخنامه تشریحی

۱۰۹	۳	الگوهای غیرخطی
۱۱۰	۱.۳	درس اول: دنباله‌ی هندسی
۱۱۰	۱.۱.۳	مفاهیم و نکات درس
۱۱۲	۲.۱.۳	سوالات امتحانات نهایی
۱۱۶	۳.۱.۳	پاسخنامه تشریحی
۱۲۷	۲.۳	درس دوم: (ریشه‌ی $n$ ام و توان گویا)
۱۲۷	۱.۲.۳	مفاهیم و نکات درس
۱۳۱	۲.۲.۳	سوالات امتحانات نهایی
۱۳۵	۳.۲.۳	پاسخنامه تشریحی
۱۴۰	۳.۳	درس سوم: تابع نمایی
۱۴۰	۱.۳.۳	مفاهیم و نکات درس
۱۴۴	۲.۳.۳	سوالات امتحانات نهایی
۱۴۷	۳.۳.۳	پاسخنامه تشریحی

# فصل ۱

# آمار و احتمال

## ۱.۱ درس اول: شمارش

### ۱.۱.۱ مفاهیم و نکات درس

#### اصل جمع:

اگر بتوان عملی را به  $m$  طریق و عمل دیگری را به  $n$  طریق انجام داد، بطوریکه نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل به  $(m + n)$  طریق انجام پذیر است. حرف «یا» نشان دهنده این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. توجه کنید که اصل جمع برای بیش از دو عمل هم برقرار است.

مثال ۱ اگر مریم برای رفتن به مدرسه از ۳ خط اتوبوس یا ۲ خط مترو یا ۴ خط تاکسی استفاده کند، تعداد حالت‌های رفتن او به مدرسه برابر است با:

$$۳ + ۴ + ۲ = ۹ = \text{تعداد حالت‌ها}$$

#### اصل ضرب:

اگر عملی طی دو مرحله متوالی اول و دوم انجام شود، بطوریکه مرحله اول به  $m$  طریق و در مرحله دوم، هر یک از حالت‌های مرحله اول به  $n$  طریق انجام شود، در کل آن عمل به  $(m \times n)$  طریق قابل انجام است. حرف «و» نشان دهنده این است که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می‌دهیم. یعنی همه کارها (عمل‌ها) با هم انجام می‌شوند.

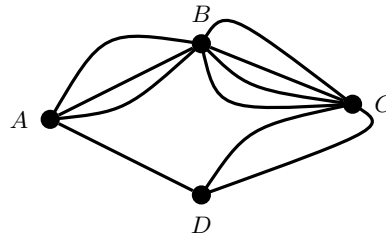
مثال ۲ فرض کنید امیر دو جفت کفش، سه پیراهن و پنج شلوار دارد. تعداد حالت‌هایی که او می‌تواند از کفش و پوشاک خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با:

$$۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰ = \text{تعداد حالت‌ها}$$

#### استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور همزمان:

در بعضی از سوالات مخصوصاً سوالات مربوط به سفر از یک شهر به شهر دیگر، از اصل ضرب و از اصل جمع به طور همزمان استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳ فردی می‌خواهد از شهر  $A$  به شهر  $C$  برود. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، بطوریکه:  
 الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.  
 ب) حتماً از شهر  $B$  عبور کند.



الف) برای رفتن از شهر  $A$  به شهر  $C$  دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} \text{مسیر ۱: } A \rightarrow B \rightarrow C & \text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 4 = 12 \\ \text{مسیر ۲: } A \rightarrow D \rightarrow C & \text{تعداد حالت‌ها} = 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = 12 + 2 = 14 \Rightarrow \text{طبق اصل جمع}$$

ب) چون این فرد می‌خواهد از شهر  $A$  به شهر  $C$  برود و حتماً باید از  $B$  هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر وجود دارد.

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$\text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 4 = 12$$

## نماد فاکتوریل:

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر برای سهولت در انجام محاسبات ریاضی، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از یک تا  $n$  را با نماد  $n!$  نشان می‌دهند.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

## مثال ۴

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

تذکر ۱ اگر نخواهیم فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم، کافی است هر جا که متوقف می‌شویم علامت فاکتوریل بگذاریم؛ مثلاً

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

که معمولاً از این عمل برای ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. مثلاً:

## مثال ۵

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

قرارداد:  $0! = 1$        $1! = 1$

## جایگشت:

به هریک از حالت‌های ممکن برای قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز کنار هم، یک **جایگشت**  $n$  تایی از آن  $n$  شیء می‌گوییم، و تعداد جایگشت  $n$  شیء متمایز برابر است با  $n!$ . توجه کنید که در جایگشت‌ها ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

مثال ۶ اگر افراد  $A$ ،  $B$  و  $C$  بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکانپذیر است؟

$$\frac{3}{C \text{ یا } B \text{ یا } A} \quad \frac{2}{\text{یکی از دو فرد باقیمانده}} \quad \frac{1}{\text{فرد باقیمانده}} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

## نکته ۱ روش حل مسائل مربوط به اعداد زوج یا فرد :

همانطوری که می‌دانید؛ اگر رقم یکان یک عدد زوج باشد، آن عدد زوج است و اگر رقم یکان یک عدد فرد باشد، آن عدد فرد است، لذا در بسیاری از مسائل مانند **زوج یا فرد** بودن عدد ابتدا لازم است خانه‌ی **سمت راست** را پر کنیم و سپس به سراغ اولین خانه از **سمت چپ** برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر کنیم.

مثال ۷ با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد فرد پنج رقمی، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ همانطوری که می‌بینید فقط عددهای ۱ و ۳ و ۵ فرد هستند بنابراین طبق نکته ۱ ابتدا اولین خانه از سمت راست را پر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانه از سمت چپ می‌رویم و خانه‌ها را به ترتیب از چپ به راست پر می‌کنیم،

$$\frac{3}{1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 5} \quad \frac{1}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{2}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{4}{\text{عدد باقیمانده}}$$

$$\Rightarrow \text{طبق اصل ضرب} \quad 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 72$$

نکته ۲ اگر **صفر جزء ارقام داده شده باشد**، و بخواهیم تعداد حالت‌های عدد زوج یا مضرب ۵ را بنویسیم و تکرار ارقام نیز غیرمجاز باشد، دو حالت جداگانه تشکیل می‌دهیم:

(۱) رقم‌هایی که به صفر ختم می‌شوند. (۲) رقم‌هایی که به صفر ختم نمی‌شوند.  
سپس طبق **اصل جمع** مقادیر بدست آمده از هر دو حالت را با هم جمع می‌کنیم.



مثال ۸ با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد زوج پنج رقمی، بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟ همانطوری که می بینید فقط عددهای ۰ و ۲ و ۴ زوج هستند بنابراین طبق نکته ۲ خواهیم داشت: (۱) رقم هایی که به صفر ختم می شوند:

$$\frac{1}{\text{فقط صفر}} \quad \frac{2}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{4}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{5}{\text{عدد باقیمانده}}$$

$$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \Rightarrow \text{طبق اصل ضرب}$$

(۲) رقم هایی که به صفر ختم نمی شوند:

$$\frac{2}{4 \text{ یا } 2} \quad \frac{2}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{4}{\text{عدد باقیمانده با صفر}} \quad \frac{4}{\text{عدد باقیمانده بدون صفر}}$$

$$192 = 2 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 \Rightarrow \text{طبق اصل ضرب}$$

$$312 = 120 + 192 \Rightarrow \text{طبق اصل جمع}$$

## تبدیل یا ترتیب:

تعداد جایگشت های  $r$  شیء از بین  $n$  شیء متمایز که در آنها جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن  $r$  شیء مهم باشد را معمولاً با  $P(n, r)$  نشان می دهیم و به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۹ از بین ۶ کارمند می خواهیم نفر اول را به عنوان مدیر، نفر دوم را به عنوان معاون و نفر سوم را به عنوان دفتردار انتخاب کنیم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

روش اول: چون ترتیب انتخاب مهم است، خواهیم داشت:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

روش دوم:

$$\frac{6}{\text{نفر اول}} \quad \frac{5}{\text{نفر دوم}} \quad \frac{4}{\text{نفر سوم}}$$

$$120 = 4 \times 5 \times 6 \Rightarrow \text{طبق اصل ضرب}$$

## ترکیب:

تعداد انتخاب‌های  $r$  شیء از بین  $n$  شیء متمایز که در آنها جابه‌جایی یا ترتیب قرار گرفتن  $r$  شیء مهم نباشد را معمولاً با  $C(n, r)$  یا  $\binom{n}{r}$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۱۰ مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

با توجه به تعریف مجموعه که با جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی تولید نمی‌شود (ترتیب قرار گرفتن اعضا مهم نیست)، خواهیم داشت:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(8, 3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \cdot 5!} = 56$$

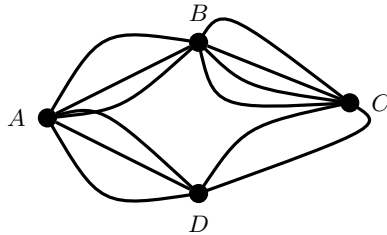
## ۲.۱.۱ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.  
 الف: تساوی  $\frac{6!}{3!} = 2!$  همواره برقرار است. (خرداد ۹۹)  
 ب: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت  $0! = 1$  و  $1! = 1$  تعریف می‌کنیم. (شهریور ۹۹ و دی ۱۴۰۲)  
 پ: حاصل  $\frac{8!}{4!}$  برابر ۲! است. (خرداد ۱۴۰۱)  
 ت: تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی برابر ۱۵ است. (خرداد ۱۴۰۲)
۲. جاهای خالی را با پاسخ درست کامل کنید.  
 الف: حاصل عبارت  $\binom{9}{6}$  برابر ..... می‌باشد. (شهریور ۹۸)  
 ب: تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز برابر ..... است. (شهریور ۹۸ و دی ۹۹ و خرداد ۱۴۰۰)  
 پ: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، بطوریکه در مرحله اول به  $m$  طریق و در مرحله دوم، هر کدام از این  $m$  طریق به  $n$  روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به ..... طریق انجام پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)  
 ت: برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت  $0! = \dots$  تعریف می‌کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)  
 ث: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۵ شیء متمایز را یک ..... از آن ۵ شیء می‌نامیم. (شهریور ۱۴۰۰)  
 ج: در ..... انتخاب  $r$  شیء از بین  $n$  شیء، جابه‌جایی اشیاء اهمیت ندارد. (شهریور ۱۴۰۰)  
 چ: مقدار  $\frac{0!}{1!}$  برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۰)  
 ح: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت ..... از آن ۷ شیء می‌نامیم. (دی ۱۴۰۰)  
 خ: حاصل  $\frac{5!}{3!}$  برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۱)  
 د: تعداد جایگشت‌های مختلف ۴ کتاب متمایز ..... می‌باشد. (دی ۱۴۰۱)  
 ذ: حاصل  $2! + 3!$  برابر است با ..... (شهریور ۱۴۰۲)
۳. گزینه صحیح را انتخاب کنید.  
 الف: حاصل  $\frac{6!}{3!}$  کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۰)  
 ۲۰(۱)    ۳۰(۲)    ۱۲۰(۳)    ۳۵(۴)  
 ب: با ۸ نقطه‌ی متمایز واقع بر محیط دایره، چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟ (خرداد ۱۴۰۰)  
 ۴۲(۱)    ۱۵(۲)    ۲۰(۳)    ۵۶(۴)  
 پ: حاصل عبارت  $P(2, 2)$  کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۰)  
 ۱(۱)    ۲(۲)    ۲(۳)    ۴(۴)
۴. ارقام ۱ تا ۹ مفروض‌اند. بدون تکرار ارقام (دی ۹۷)  
 الف) چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟  
 ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟
۵. حساب کنید که مجموعه ۸ عضوی  $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$  چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ (خرداد ۹۸)

۶. الف: به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟ ( شهریور ۹۸ )  
ب: به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)

۷. مجموعه پنج عضوی  $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ، چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟ (دی ۹۸)

۸. مطابق شکل زیر بین شهرهای  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  راههایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر  $A$  به شهر  $C$  مسافرت کرد؟ (خرداد ۹۹)



۹. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب مختلف، انتخاب کرد؟ (خرداد ۹۹)

۱۰. با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (خرداد ۹۹)

۱۱. به چند طریق می‌توان ۳ توپ هم‌رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (خرداد ۹۹)

۱۲. روی محیط یک دایره ۵ نقطه وجود دارد. مشخص کنید با این ۵ نقطه چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟ (خرداد ۹۹)

۱۳. به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟ (خرداد ۹۹)

۱۴. با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی‌معنی) (شهریور ۹۹)  
الف: چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند.

ب: چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند

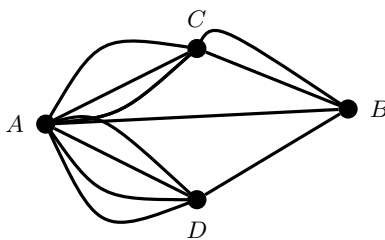
۱۵. می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)

۱۶. با ارقام ۹ و ۷ و ۴ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (دی ۹۹)

۱۷. مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند: (دی ۹۹)  
الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

۱۸. مطابق شکل زیر بین شهرهای  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  راههایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید، به چند طریق می‌توان از شهر  $C$  و بدون عبور از شهر  $B$  به شهر  $D$  مسافرت کرد؟ (خرداد ۱۴۰۰)



۱۹. با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (شهریور ۱۴۰۰)

۲۰. از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز، ۲ کتاب فیزیک متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌توان:

(شهریور ۱۴۰۰)

(الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد؟

(ب) یک کتاب ریاضی انتخاب کرد؟

۲۱. می‌خواهیم از بین ۲ سیب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟

(دی ۱۴۰۰)

۲۲. با حروف کلمه «مهرسان» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی) (دی ۱۴۰۰)

(الف) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع شوند؟

۲۳. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت  $(\frac{5}{3})$  باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

۲۴. علی ۳ کتاب علمی و ۴ کتاب داستانی دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش، یک کتاب علمی و یک کتاب داستانی

به دوستش هدیه دهد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۲۵. با ارقام ۱ تا ۹ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۲۶. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۳ رقمی زوج می‌توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۱)

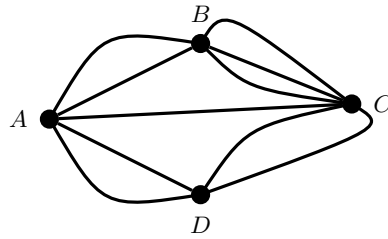
۲۷. مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  را در نظر بگیرید: (دی ۱۴۰۱)

الف: چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

ب:  $A$  چند زیرمجموعه‌ی ۴ عضوی شامل دو عضو  $b, c$  می‌باشد؟

۲۸. با ارقام ۳ و ۲ و ۷ و ۹ و ۴ و ۸ چند عدد سه رقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۲۹. میان چهار شهر  $A, B, C, D$  راه‌هایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر  $A$  به  $C$  سفر کرد؟ (شهریور ۱۴۰۲)



۳۰. با حروف کلمه «کوهستان» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی) (شهریور ۱۴۰۲)

الف) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که با «ک» شروع و به «س» ختم شوند؟

۳۱. دانش آموزی برای مطالعه به کتابخانه می رود، او از بین ۴ کتاب روانشناسی، ۳ کتاب جغرافیا و ۵ کتاب ریاضی به چند

طریق می تواند:

(دی ۱۴۰۲)

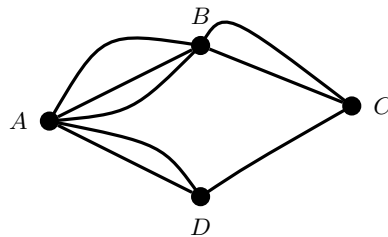
الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب روانشناسی و یک کتاب جغرافی انتخاب نماید؟

۳۲. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟ (دی ۱۴۰۲)

۳۳. مطابق شکل زیر، میان چهار شهر راههایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می توان از شهر B به شهر D سفر

کرد؟ (خرداد ۱۴۰۳)



۳۴. با ارقام ۱, ۰, ۳, ۵, ۷, ۹ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی و مضرب ۵ می توان نوشت؟ (خرداد ۱۴۰۳)

## ۳.۱.۱ پاسخ نامه تشریحی

۱ الف: نادرست است چون:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120 \neq 2!$$

ب: درست

پ: نادرست است، چون:

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 \neq 2!$$

ت) نادرست

با توجه به اینکه در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد، از ترکیب استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = 10$$

۲ الف: می‌دانیم فرم کلی ترکیب یعنی انتخاب  $r$  شیء از بین  $n$  شیء برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!3!} = 84$$

ب:  $n!$ 

طبق تعریف جایگشت

پ:  $m \times n$ 

طبق اصل ضرب

ت:  $1 = 1!$ 

ث: جایگشت ۵ تایی

ج: ترکیب

چ:

$$\frac{0!}{1!} = \frac{1}{1} = 1$$

ح: ۷ تایی

خ:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

$$د: ۴! = ۲۴$$

$$ذ: ۳ \times ۲ + ۲ = ۸$$

الف: گزینه‌ی ۳. ۳

$$\frac{۶!}{۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۱۲۰$$

ب: گزینه‌ی ۴.

$$\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۳!۵!} = ۵۶$$

پ: گزینه‌ی ۳.

$$P(۲, ۲) = \frac{۲!}{(۲-۲)!} = ۲$$

۴ الف) شرط خاصی برای عدد ۵ رقمی ذکر نشده به جز اینکه «رقم‌ها تکراری نباشند» پس پر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. توجه کنید که بعد از پر کردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده شده را به دلخواه از خانه‌ی بعدی حذف کنیم (چون تکرار ارقام مجاز نیست):

$$\frac{۹}{\text{رقم ۹}} \quad \frac{۸}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{۷}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{۶}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{۵}{\text{رقم باقیمانده}}$$

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ = ۱۵۱۲۰$$

ب) همانطوری که می‌دانیم، عددی زوج است که رقم یکان آن زوج باشد، پس ابتدا اولین خانه‌ی سمت راست را با توجه به این موضوع پر می‌کنیم، سپس به سراغ اولین خانه از سمت چپ می‌رویم،

$$\frac{۸}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{۷}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{۶}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{۴}{۲ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۶ \text{ یا } ۸}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$۸ \times ۷ \times ۶ \times ۴ = ۱۳۴۴$$

۵ با توجه به اینکه در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد، از ترکیب استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی} = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!(۸-۳)!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۳!۵!} = ۵۶$$



۶ الف: چون ترتیب انتخاب اهمیت ندارد از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3!5!} = 56$$

ب: شرط خاصی برای عدد ۴ رقمی ذکر نشده به جز اینکه «رقم‌ها تکراری نباشند» پس پر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. توجه کنید که بعد از پر کردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده شده را به دلخواه از خانه‌ی بعدی حذف کنیم (چون تکرار ارقام مجاز نیست):

$$\underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5} \quad \underline{4}$$

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

۷ با توجه به اینکه در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد، از ترکیب استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = 10$$

۸ برای رفتن از شهر A به شهر C دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} \text{مسیر ۱: } A \rightarrow B \rightarrow C & \text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 4 = 12 \\ \text{مسیر ۲: } A \rightarrow D \rightarrow C & \text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$

$$12 + 6 = 18 = \text{تعداد کل حالت‌ها} \Rightarrow \text{طبق اصل جمع}$$

۹ چون ترتیب انتخاب اهمیت ندارد از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!4!} = 126$$

۱۰ شرط خاصی برای عدد ۳ رقمی ذکر نشده به جز اینکه «رقم‌ها تکراری نباشند» پس پر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. توجه کنید که بعد از پر کردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده شده را به دلخواه از خانه‌ی بعدی حذف کنیم (چون تکرار ارقام مجاز نیست):

$$\underline{7} \quad \underline{6} \quad \underline{5}$$

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

۱۱ چون ۳ توپ هم رنگ خواسته، این ۳ توپ را از بین ۵ توپ قرمز یا از بین ۴ توپ آبی می توان انتخاب کرد. از طرفی می دانیم کلمه «یا» در بین انتخاب ها نشان دهنده اصل جمع می باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = \frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{3!1!} = 10 + 4 = 14$$

۱۲ برای رسم وتر دایره، باید دو نقطه‌ی روی دایره را به هم وصل کرد و چون در انتخاب نقاط ترتیب لازم نیست، در نتیجه ترکیب ۲ از ۵ را خواهیم داشت، به عبارتی:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = 10$$

۱۳ چون در هدیه دادن ترتیب لازم نیست لذا این مسئله، ترکیب است در نتیجه:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = 35$$

۱۴ الف: با توجه به اینکه در کلمه‌های ۳ حرفی، ذکر شده به «د» ختم شوند، ابتدا خانه‌ی آخر، سپس ۲ خانه‌ی اول را پر می‌کنیم پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\text{حرف «د»}} \quad \frac{4}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{5}{\text{حرف باقیمانده}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$5 \times 4 \times 1 = 20$$

ب: با توجه به اینکه در کلمه‌های ۴ حرفی، ذکر شده با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند، ابتدا دو خانه‌ی اول و آخر، و سپس خانه‌های وسط را پر می‌کنیم:

$$\frac{1}{\text{حرف «ی»}} \quad \frac{4}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{1}{\text{حرف «خ»}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$1 \times 4 \times 3 \times 1 = 12$$

۱۵ چون تاکید شده که فقط یک خودرو انتخاب کنیم لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$10 + 12 + 6 = 28$$

۱۶ همانطوری که می‌دانیم، عددی فرد است که رقم یکان آن فرد باشد، پس ابتدا اولین خانه‌ی سمت راست را با توجه به این موضوع پر می‌کنیم، سپس به سراغ اولین خانه از سمت چپ می‌رویم،

$$\frac{4}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{3}{9 \text{ یا } 7 \text{ یا } 1}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

۱۷ الف) چون تاکید شده یک کتاب انتخاب شود لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

ب) کلمه «و» در بین انتخابها نشان دهنده اصل ضرب می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$3 \times 2 \times 4 = 24$$

۱۸ با توجه به اینکه ذکر شده «بدون عبور از شهر B»، لذا فقط یک مسیر از شهر C به شهر D وجود دارد به عبارتی:

$$C \rightarrow A \rightarrow D$$

$$12 = 3 \times 4 = \text{تعداد حالتها}$$

۱۹ شرط خاصی برای عدد ۳ رقمی ذکر نشده به جز اینکه «رقم‌ها تکراری نباشند» پس پر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. توجه کنید که بعد از پر کردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده شده را به دلخواه از خانه‌ی بعدی حذف کنیم (چون تکرار ارقام مجاز نیست):

$$\frac{5}{\text{رقم}} \quad \frac{4}{\text{رقم باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{رقم باقیمانده}}$$

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

۲۰ الف: چون تاکید شده یک کتاب انتخاب شود لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

ب:

$$\binom{3}{1} = 3$$

۲۱ چون تاکید شده که فقط یک میوه انتخاب کنیم لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$2 + 3 + 4 = 9$$

۲۲ الف) شرط خاصی برای کلمه‌ی ۳ حرفی به جز «بدون تکرار حروف» ذکر نشده است. پس جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «مهرسان» به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{4}{\text{حرف ۴ باقیمانده}} \quad \frac{5}{\text{حرف ۵ باقیمانده}} \quad \frac{6}{\text{حرف ۶}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

ب) با توجه به اینکه در کلمه‌های ۳ حرفی، ذکر شده با حرف «م» شروع شوند، ابتدا خانه اول از سمت راست را پر می‌کنیم، سپس خانه‌های باقیمانده را پر می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\frac{4}{\text{حرف ۴ باقیمانده}} \quad \frac{5}{\text{حرف ۵ باقیمانده}} \quad \frac{1}{\text{حرف «م»}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$1 \times 5 \times 4 = 20$$

۲۳ تمام مسائلی که انتخاب ۳ شیء از ۵ شیء باشد، به طوری که ترتیب در انتخاب آن‌ها اهمیت نداشته باشد. مانند: به چند طریق می‌توان از بین ۵ کتاب ۳ کتاب را انتخاب کرد؟

۲۴ کلمه «و» در بین انتخابها نشان دهنده اصل ضرب می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$3 \times 4 = 12$$

۲۵ شرط خاصی برای عدد ۴ رقمی ذکر نشده به جز اینکه «رقم‌ها تکراری نباشند» پس پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. توجه کنید که بعد از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه‌ی بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده شده را به دلخواه از خانه‌ی بعدی حذف کنیم (چون تکرار ارقام مجاز نیست):

$$\underline{9} \quad \underline{8} \quad \underline{7} \quad \underline{6}$$

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

۲۶ همانطوری که می‌بینید فقط عددهای ۰ و ۲ و ۴ و ۶ زوج هستند بنابراین طبق نکته ۲ خواهیم داشت: (۱) رقم‌هایی که به صفر ختم می‌شوند:

$$\frac{6}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{5}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{1}{\text{فقط صفر}}$$

$$6 \times 5 \times 1 = 30 \Rightarrow \text{طبق اصل ضرب}$$

(۲) رقم‌هایی که به صفر ختم نمی‌شوند:

$$\frac{5}{\text{عدد باقیمانده بدون صفر}} \quad \frac{5}{\text{عدد باقیمانده با صفر}} \quad \frac{3}{\text{۲ یا ۴ یا ۶}}$$

$$5 \times 5 \times 3 = 75 \Rightarrow \text{طبق اصل ضرب}$$

$$30 + 75 = 105 \Rightarrow \text{طبق اصل جمع}$$

۲۷ الف: با توجه به اینکه در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد، از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!3!} = 20$$

ب: با توجه به اینکه ذکر شده در مجموعه‌های ۴ عضوی دو عضو  $b, c$  وجود داشته باشد، بنابراین کافی است دو عضو دیگر را از بین اعضای باقیمانده یعنی  $\{a, d, e, f\}$  انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = 6$$

۲۸ همانطوری که می‌دانیم، عددی زوج است که رقم یکان آن زوج باشد، پس ابتدا اولین خانه‌ی سمت راست را با توجه به این موضوع پر می‌کنیم، سپس به سراغ اولین خانه از سمت چپ می‌رویم،

$$\frac{5}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{4}{\text{عدد باقیمانده}} \quad \frac{3}{\text{۲ یا ۴ یا ۸}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

۲۹ برای رفتن از شهر A به شهر C سه مسیر کلی وجود دارد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مسیر ۱: } A \rightarrow B \rightarrow C \quad \text{تعداد حالتها} = 2 \times 3 = 6 \\ \text{مسیر ۲: } A \rightarrow C \quad \text{تعداد حالتها} = 1 \\ \text{مسیر ۳: } A \rightarrow D \rightarrow C \quad \text{تعداد حالتها} = 2 \times 2 = 4 \end{array} \right.$$

$$\text{تعداد کل حالتها} = 6 + 1 + 4 = 11 \Rightarrow \text{طبق اصل جمع}$$

۳۰ الف) شرط خاصی برای کلمه‌ی ۷ حرفی به جز «بدون تکرار حروف» ذکر نشده است. پس جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «کوهستان» به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{۱}{\text{حرف ۱ باقیمانده}} \quad \frac{۲}{\text{حرف ۲ باقیمانده}} \quad \frac{۳}{\text{حرف ۳ باقیمانده}} \quad \frac{۴}{\text{حرف ۴ باقیمانده}} \quad \frac{۵}{\text{حرف ۵ باقیمانده}} \quad \frac{۶}{\text{حرف ۶ باقیمانده}} \quad \frac{۷}{\text{حرف ۷}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$$

ب) با توجه به اینکه در کلمه‌های ۶ حرفی، ذکر شده با حرف «ک» شروع و به «س» ختم شوند، ابتدا دو خانه اول و آخر را پر می‌کنیم، سپس خانه‌های باقیمانده را پر می‌کنیم، پس خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\text{حرف «ک»}} \quad \frac{۲}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{۳}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{۴}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{۵}{\text{حرف باقیمانده}} \quad \frac{۱}{\text{حرف «س»}}$$

طبق اصل ضرب داریم:

$$1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

۳۱ الف) چون تاکید شده که فقط یک کتاب انتخاب کنیم لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$4 + 3 + 5 = 12$$

ب) کلمه «و» در بین انتخابها نشان دهنده اصل ضرب می‌باشد لذا خواهیم داشت:

$$4 \times 3 \times 5 = 60$$

۳۲ همانطوری که می‌دانیم، اعدادی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد، بنابراین طبق نکته ۲ خواهیم داشت:

(۱) رقم‌هایی که به صفر ختم می‌شوند:

$$\frac{۱}{\text{فقط صفر}} \quad \frac{۳}{\text{عدد باقیمانده ۳}} \quad \frac{۴}{\text{عدد باقیمانده ۴}} \quad \frac{۵}{\text{عدد باقیمانده ۵}}$$

$$\Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰ \text{ طبق اصل ضرب}$$

(۲) رقم‌هایی که به صفر ختم نمی‌شوند:

$$\frac{۱}{\text{فقط عدد ۵}} \quad \frac{۳}{\text{عدد باقیمانده ۳}} \quad \frac{۴}{\text{عدد باقیمانده با صفر}} \quad \frac{۴}{\text{عدد باقیمانده بدون صفر}}$$

$$\Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۴ \times ۴ = ۴۸ \text{ طبق اصل ضرب}$$

$$\Rightarrow ۴۸ + ۶۰ = ۱۰۸ \text{ طبق اصل جمع}$$

۳۳ برای رفتن از شهر B به شهر D دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} \text{تعداد حالت‌ها} = ۳ \times ۲ = ۶ & \text{مسیر ۱: } B \rightarrow A \rightarrow D \\ \text{تعداد حالت‌ها} = ۲ \times ۱ = ۲ & \text{مسیر ۲: } B \rightarrow C \rightarrow D \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۶ + ۲ = ۸ \text{ تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع}$$

۳۴ همانطوری که می‌دانیم، اعدادی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد، بنابراین طبق نکته ۲ خواهیم داشت:

(۱) رقم‌هایی که به صفر ختم می‌شوند:

$$\frac{۱}{\text{فقط صفر}} \quad \frac{۳}{\text{عدد باقیمانده ۳}} \quad \frac{۴}{\text{عدد باقیمانده ۴}} \quad \frac{۵}{\text{عدد باقیمانده ۵}}$$

$$\Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰ \text{ طبق اصل ضرب}$$

(۲) رقم‌هایی که به صفر ختم نمی‌شوند:

$$\frac{۱}{\text{فقط عدد ۵}} \quad \frac{۳}{\text{عدد باقیمانده ۳}} \quad \frac{۴}{\text{عدد باقیمانده با صفر}} \quad \frac{۴}{\text{عدد باقیمانده بدون صفر}}$$

$$\Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۴ \times ۴ = ۴۸ \text{ طبق اصل ضرب}$$

$$\Rightarrow ۴۸ + ۶۰ = ۱۰۸ \text{ طبق اصل جمع}$$

## ۲.۱ درس دوم: احتمال

## ۱.۲.۱ مفاهیم و نکات درس

## پدیده‌های قطعی و تصادفی

## پدیده‌های قطعی :

به پدیده‌هایی که نتایج آنها را قبل از رخ دادن بتوان تعیین کرد، پدیده‌های قطعی می‌گویند. مانند خارج کردن ۳ مهره قرمز از کیسه‌ای که در آن فقط ۵ مهره قرمز وجود دارد.

## پدیده‌های تصادفی :

به پدیده‌هایی که نتایج آنها را قبل از رخ دادن نتوان تعیین کرد، پدیده‌های تصادفی می‌گویند. مانند خارج کردن ۲ مهره قرمز از کیسه‌ای که در آن ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد.

## فضای نمونه‌ی یک پدیده تصادفی:

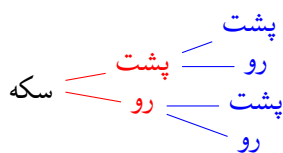
به مجموعه‌ی تمام نتایج حاصل از یک پدیده‌ی تصادفی، **فضای نمونه** می‌گوییم و آنرا با  $S$  نشان می‌دهیم. مثلاً در پرتاب یک تاس **فضای نمونه** برابر است با:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

همچنین به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی (اعضای مجموعه‌ی  $S$ ) یک **برآمد** گفته می‌شود. تعداد اعضای فضای نمونه را با  $n(S)$  نمایش می‌دهیم. که در پرتاب یک تاس ۶ برآمد (عضو) داریم به عبارتی:

$$n(S) = 6$$

مثال ۱۱ فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه را مشخص کنید.





$$S = \{(رو، رو)، (پشت، رو)، (رو، پشت)، (پشت، پشت)\}$$

نکته ۳ اگر یک آزمایش تصادفی را چندین بار تکرار کنیم (مثلاً یک سکه یا یک تاس را چندین بار پرتاب کنیم) یا چند آزمایش تصادفی مختلف را با هم انجام دهیم (مثلاً تاس و سکه را با هم پرتاب کنیم) تعداد اعضای فضای نمونه، برابر است با حاصلضرب تعداد اعضای فضای نمونه‌ی تک‌تک آزمایش‌ها به عبارتی:

$$n(S) = 2^n \text{ : تعداد اعضای فضای نمونه‌ای } n \text{ سکه}$$

$$n(S) = 2^n \text{ : تعداد اعضای فضای نمونه‌ای } n \text{ فرزند}$$

$$n(S) = 6^n \text{ : تعداد اعضای فضای نمونه‌ای } n \text{ تاس}$$

مثال ۱۲ سه سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را بیابید.

$$n(S) = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

مثال ۱۳ دو تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را بیابید.

$$n(S) = 6 \times 6 \times 2 = 72$$

## پیشامد

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ی  $S$  یک پیشامد می‌گویند.

### پیشامد حتمی:

می‌دانیم هر مجموعه زیر مجموعه‌ی خودش ( $S \subseteq S$ ) می‌باشد، پس  $S$  نیز یک پیشامد است که به آن پیشامد **حتمی** می‌گوییم.

## پیشامد غیر ممکن (نشدنی):

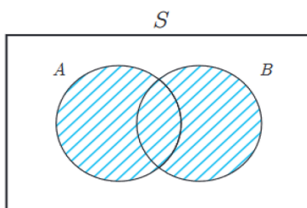
می‌دانیم تهی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است،  $(\emptyset \subseteq S)$  پس  $\emptyset$  نیز یک پیشامد روی  $S$  است که به آن پیشامد **غیر ممکن** یا **نشدنی** می‌گوییم.

## اعمال روی پیشامدها

فرض کنید  $A$  و  $B$  دو پیشامد در فضای نمونه‌ی  $S$  باشند؛ در این صورت اجتماع، اشتراک و تفاضل دو پیشامد  $A$  و  $B$  و همچنین متمم پیشامد  $A$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اجتماع دو پیشامد  $A$  یا  $B$ :

پیشامد  $A \cup B$  وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد  $A$  یا  $B$  یا هر دو با هم رخ دهند. (شکل ۱.۱) توجه کنید «یا» به معنای **اجتماع** دو مجموعه می‌باشد.



$$\text{شکل ۱.۱: } A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

مثال ۱۴ دو تاس را پرتاب می‌کنیم.

الف) پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۳ باشد.

ب) تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

الف)

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \text{ دو تاس یکسان}$$

$$B = \{(1, 2), (2, 1)\} \text{ مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۳ باشد}$$

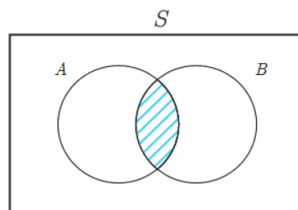
$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (2, 1)\}$$

ب)

$$n(A \cup B) = 8$$

اشتراک دو پیشامد  $A$  و  $B$ :

پیشامد  $A \cap B$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای  $A$  و  $B$  هر دو رخ دهند. (شکل ۲.۱)  
توجه کنید «و» به معنای **اشتراک** دو مجموعه می‌باشد.



شکل ۲.۱:  $A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$

مثال ۱۵ دو تاس را پرتاب می‌کنیم.  
الف) پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس‌ها ۳ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.  
ب) تعداد اعضای آن را مشخص کنید.  
الف)

یکی از تاس‌ها ۳ باشد:  $A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد:  $B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

$$A \cap B = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

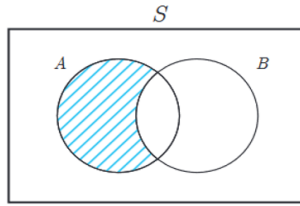
ب)

$$n(A \cap B) = 2$$

تفاضل دو پیشامد  $A$  و  $B$ :

پیشامد  $A - B$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد و پیشامد  $B$  رخ ندهد. (شکل ۳.۱)

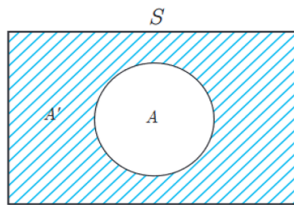
نکته ۴ توجه کنید که در تفاضل دو پیشامد، اعضای مشترک بین دو مجموعه را از مجموعه اول خط می‌زنیم و فقط اعضای باقیمانده از مجموعه اول را می‌نویسیم. مثلاً برای محاسبه‌ی  $B - A$  عضوهای مشترک  $A$  و  $B$  را از  $B$  حذف می‌کنیم و عضوهای باقیمانده از  $B$  را می‌نویسیم.

شکل ۳.۱:  $A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$ متمم پیشامد  $A$ :

متمم پیشامد  $A$  را با  $A'$  نشان می‌دهیم. پیشامد  $A'$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد. (شکل ۴.۱)

در این حالت  $A$  و  $A'$  را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم:

$$A \cup A' = S \quad \text{و} \quad A \cap A' = \emptyset$$

شکل ۴.۱:  $A' = \{x \in S | x \notin A\}$ 

مثال ۱۶ تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

(الف) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد.

(ب) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد.

(پ) پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد.

(ت) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد.

(ث) پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

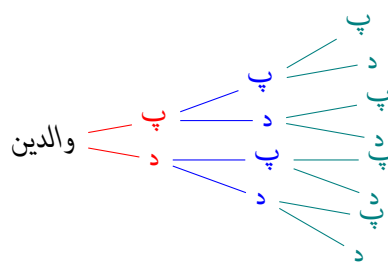
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{فضای نمونه} \quad A = \{2, 4, 6\} \quad \text{اعداد زوج} \quad B = \{2, 3, 5\} \quad \text{اعداد اول}$$

$$A \cap B = \{2\} \quad \text{الف} \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{ب} \quad A - B = \{4, 6\} \quad \text{پ}$$

$$B - A = \{3, 5\} \quad \text{ت} \quad B' = S - B = \{1, 4, 6\} \quad \text{ث}$$

توجه ۱ توجه کنید در سوالاتی که در آنها کلمه «حداقل» یا «لااقل» به کار رفته، علاوه بر حداقل، باید تمام حالت‌های بیشتر از آن نیز در نظر گرفته شود. و برعکس، در سوالاتی که کلمه «حداکثر» به کار رفته، علاوه بر حداکثر، باید تمام حالت‌های کمتر از آن نیز در نظر گرفته شود.

مثال ۱۷ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.  
 الف) پیشامد  $A$  اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.  
 ب) پیشامد  $B$  اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.  
 پ) پیشامد  $C$  اینکه حداکثر دو فرزند این خانواده پسر باشند.



$$S = \{(پ، پ، پ)، (پ، پ، د)، (پ، د، پ)، (پ، د، د)، (د، پ، پ)، (د، پ، د)، (د، د، پ)، (د، د، د)\}$$

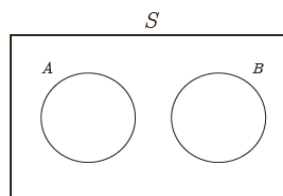
$$A = \{(پ، پ، پ)، (د، د، د)\}$$

$$B = \{(پ، د، د)، (د، پ، د)، (د، د، پ)، (د، د، د)\}$$

$$C = \{(پ، پ، پ)، (پ، د، پ)، (پ، د، د)، (د، پ، پ)، (د، پ، د)، (د، د، پ)، (د، د، د)\}$$

دو پیشامد ناسازگار ( $A \cap B = \emptyset$ ):

اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ی  $S$  باشند، به طوری که  $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای  $A$  و  $B$  را **ناسازگار** می‌گوییم. (شکل ۵.۱)



شکل ۵.۱:  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

## احتمال

### احتمال یک پیشامد:

اگر  $A$  یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ی  $S$  باشد، احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  که آن را با  $P(A)$  نشان می‌دهیم برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد مطلوب}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

توجه کنید که مقدار احتمال یک پیشامد نمی‌تواند منفی یا بیشتر از یک باشد؛ یعنی:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

نکته ۵  $P(A)$  وقتی صفر است که  $A = \emptyset$  باشد، به عبارتی اگر  $A$  یک پیشامد نشدنی یا غیر ممکن باشد  $P(A) = 0$ .

نکته ۶  $P(A)$  وقتی یک است که  $S = A$  باشد، به عبارتی اگر  $A$  یک پیشامد حتمی باشد  $P(A) = 1$ .

### احتمال واقع نشدن یک پیشامد:

اگر  $P(A)$  احتمال وقوع پیشامد  $A$  در فضای نمونه‌ی  $S$  باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با  $P(A')$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$P(A) + P(A') = 1 \quad \text{یا} \quad P(A') = 1 - P(A)$$

که در این حالت  $A$  و  $A'$  را دو پیشامد متمم می‌گوییم.

## ۲.۲.۱ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- (الف) خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن ۵ مهره سفید است، یک پیشامد حتمی است. (خرداد ۹۹)
- (ب) در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس، پیشامد رو شدن عددی بزرگتر از ۶ نشدنی است. (خرداد ۹۹)
- (پ) نتیجه‌ی حل معادله‌ی  $(x+1)^2 = 0$  یک پدیده‌ی تصادفی است. (خرداد ۹۹)
- (ت) نتیجه‌ی یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سوالات را شانسی پاسخ داده‌ایم، یک پیشامد حتمی است. (شهریور ۹۹)
- (ث) تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌هاست. (شهریور ۹۹)
- (ج) مجموعه‌ی تهی را یک پیشامد حتمی می‌نامیم. (شهریور ۹۹ و دی ۹۹)
- (چ) فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ سکه ۹ عضو دارد. (دی ۱۴۰۰)
- (ح) در پرتاب یک تاس، احتمال وقوع عددی بیشتر از شش یک پیشامد حتمی است. (دی ۱۴۰۰)
- (خ) احتمال رو شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر صفر است. (خرداد ۱۴۰۱)
- (د) پیشامد  $B - A$  وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $B$  رخ دهد و پیشامد  $A$  رخ ندهد. (خرداد ۱۴۰۲)
- (ذ) احتمال اینکه فاطمه به سینما برود ۰/۶ است. احتمال اینکه فاطمه به سینما نرود ۰/۴ است. (دی ۱۴۰۲)
- (ر) هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناتهی با فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، بطوریکه  $A - B = A$  و  $B - A = B$ . در این صورت، دو پیشامد  $A$  و  $B$  ناسازگار هستند. (خرداد ۱۴۰۳)

۲. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

- (الف) اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، دو پیشامد  $A$  و  $B$  را ..... می‌گوییم. (خرداد ۹۹)
- (ب) فضای نمونه‌ای یک تاس و دو سکه ..... عضو دارد. (خرداد ۹۹)
- (پ) پیشامد ..... وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ ندهد. (خرداد ۹۹)
- (ت) پیشامد ..... وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  رخ دهد و پیشامد  $B$  رخ ندهد. (دی ۹۹)
- (ث) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی ..... می‌گوییم. (شهریور ۹۹)
- (ج) فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه ..... عضو دارد. (شهریور ۹۹)
- (چ) پیشامد ..... وقتی رخ می‌دهد که پیشامد  $A$  و  $B$  هر دو رخ دهند. (شهریور ۹۹)
- (ح) اگر پیشامد  $A$  حتمی باشد، احتمال آن برابر با ..... است. (خرداد ۱۴۰۰)
- (خ) هرگاه  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، به طوریکه ..... در این صورت پیشامدهای  $A$  و  $B$  را ناسازگار می‌گوییم. (خرداد ۱۴۰۰)
- (د) پیشامد  $A'$  زمانی رخ می‌دهد که پیشامد ..... رخ ندهد. (شهریور ۱۴۰۰)
- (ذ) مجموعه ..... زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. (دی ۱۴۰۰)
- (ر) مجموعه تهی را پیشامد ..... می‌نامند. (دی ۱۴۰۱)

- (ز) به هر یک از نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، ..... می‌گویند. (شهریور ۱۴۰۱)
- (ژ) اگر پیشامد  $A$  با فضای نمونه‌ای  $S$  برابر باشد،  $A$  را یک پیشامد ..... می‌گوییم. (خرداد ۱۴۰۲)
- (س) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، ..... می‌گویند. (خرداد ۱۴۰۳)
- (ش) احتمال اینکه از بین سه نفر دوست، تولد هیچ دو تای آنها در یک فصل نباشد، برابر است با ..... (خرداد ۱۴۰۳)

۳. گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.

الف: فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان خانواده‌ای با سه فرزند، چند عضو دارد؟ (خرداد ۱۴۰۱)

۱) ۶      ۲) ۸      ۳) ۹      ۴) ۱۲

ب: احتمال اینکه فردا بارانی باشد، ۰٫۱ است. احتمال اینکه فردا بارانی نباشد، چقدر است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱) ۰٫۰۹      ۲) ۰٫۱      ۳) ۰٫۹      ۴) ۰٫۹۹

پ: اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند، در این صورت  $P(A \cap B)$  برابر است با: (دی ۱۴۰۲)

۱)  $\frac{1}{4}$       ۲) ۱      ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴) ۰

ت: تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ۳ عضوی از مجموعه‌ی  $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$  که شامل عدد ۷ باشد، کدام است؟

(خرداد ۱۴۰۳)

۱) ۱۰      ۲) ۸      ۳) ۶      ۴) ۴

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (دی ۹۷)

الف: اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشند.

ب: حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۴ باشد.

۵. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (دی ۹۷)

الف: فضای نمونه‌ی مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب: احتمال اینکه هر سه فرزند از یک جنسیت باشند را به دست آورید.

۶. از جعبه‌ای که شامل ۸ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۲ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی

احتمال اینکه:

(دی ۹۷)

الف: هر دو سیب سالم باشند.

ب: یک سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد

۷. از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه‌دار است، ۴ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی

احتمال اینکه سه سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد. (خرداد ۹۸)



۸. خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. (خرداد ۹۸)
- الف: فضای نمونه‌ی مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.  
 ب: احتمال اینکه هر دو فرزند از یک جنسیت باشند را به دست آورید.  
 ج: احتمال اینکه حداکثر یک فرزند پسر باشد را به دست آورید.
۹. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. ابتدا هر یک از پیشامدهای زیر را نوشته، سپس احتمال هر کدام را محاسبه کنید. (شهریور ۹۸)
- الف: مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۱۰ باشد.  
 ب: اعداد رو شده از هر دو تاس بر ۳ بخش‌پذیر باشند.
۱۰. تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (دی ۹۸)
- الف: پیشامد اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر چهار باشد.  
 ب: پیشامد اینکه عدد رو شده در هر دو تاس یکسان باشد، ولی زوج نباشد.
۱۱. از جعبه‌ای که شامل ۷ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی سفید است، ۳ مهره را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد. (دی ۹۸)
۱۲. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم (دی ۹۸)
- الف: فضای نمونه‌ای را بنویسید.  
 ب: احتمال اینکه سکه پشت و تاس زوج بیاید را به دست آورید.  
 ج: احتمال اینکه عدد ظاهر شده برای تاس حداکثر ۳ باشد را به دست آورید.
۱۳. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. (خرداد ۹۹)
- الف) فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.  
 ب) احتمال اینکه هر سه فرزند از یک جنسیت نباشند
۱۴. یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه تاس حداکثر ۳ یا سکه رو بیاید. (خرداد ۹۹)
۱۵. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم، یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم و ۲ نفر از اعضای تیم دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم باشند. (شهریور ۹۹)
۱۶. هر یک از اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۵ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (شهریور ۹۹)
۱۷. در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (شهریور ۹۹)
- الف: مجموع اعداد رو شده مساوی ۱۰ باشد.  
 ب: اعداد رو شده از هر دو تاس یکسان و هر دو زوج باشند.

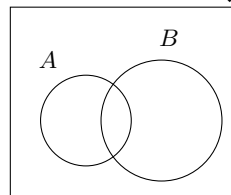
۱۸. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه‌ی یک سیما را تماشا نکند، برابر با  $\frac{۳۲}{۹۹}$  است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه ریحانه سریال را تماشا کند. (شهریور ۹۹)

۱۹. در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی زرد و ۲ مهره‌ی آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه رنگ سه مهره متفاوت باشد. (دی ۹۹)

۲۰. یک تاکسی دارای ۴ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه هر ۴ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند. (دی ۹۹)

۲۱. از بین ۲ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و ۳ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی و ۲ دانش‌آموز رشته‌ی انسانی، ۳ دانش‌آموز را به تصادف به اردوی مشهد انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش‌آموز انتخاب شود؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۲۲. در شکل زیر پیشامد خواسته شده را سایه بزنید.



«پیشامد  $A$  یا  $B$  رخ دهد»

(شهریور ۱۴۰۰)

۲۳. یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. (شهریور ۱۴۰۰)

الف: فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

ب: پیشامد  $A$  که در آن سکه پشت و تاس عدد فرد بیاید را بنویسید.

۲۴. خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه: (شهریور ۱۴۰۰)

الف: هر دو فرزند دختر باشند.

ب: همه‌ی فرزندان دارای یک جنسیت باشند.

۲۵. در پرتاب دو تاس، پیشامد «مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۱۰ باشد» را بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

۲۶. هریک از اعداد ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم.

مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (دی ۱۴۰۰)

۲۷. می‌خواهیم از جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی، سه مهره به تصادف خارج کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی

احتمال آن‌که ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باشد. (دی ۱۴۰۰)

۲۸. کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

الف: مشاهده‌ی عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن، عدد ۳ حک شده است.

ب: نتیجه‌ی یک آزمون چهار گزینه‌ای که نیمی از سوالات آن را شانسی پاسخ داده‌اند.

۲۹. از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه به تصادف ۲ مهره انتخاب می‌کنیم. احتمال این را که هر دو مهره سفید باشد، محاسبه کنید.

(خرداد ۱۴۰۱)

۳۰. در پرتاب یک سکه به همراه یک تاس؛ (شهریور ۱۴۰۱)

الف) فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

ب) پیشامد رو آمدن سکه و زوج بودن تاس را مشخص کنید.

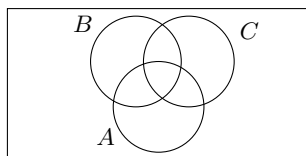
۳۱. از بین ۴ کارمند زن و ۶ کارمند مرد می‌خواهیم یک تیم بازرسی ۳ نفره انتخاب کنیم، احتمال اینکه یک زن و دو مرد انتخاب شود را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)

۳۲. دو تاس را پرتاب می‌کنیم،  $A$  را پیشامد آنکه اعداد آمده از دو تاس یکسان باشند و  $B$  را پیشامد آن که مجموع اعداد رو آمده از دو تاس ۸ باشند، در نظر می‌گیریم: (دی ۱۴۰۱)

الف: پیشامدهای  $A$  و  $B$  را مشخص کنید. ب: آیا  $A$  و  $B$  ناسازگارند؟ چرا؟

۳۳. از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۷ مهره قرمز است، سه مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که حداکثر ۲ مهره از مهره‌های انتخاب شده، قرمز باشند. (دی ۱۴۰۱)

۳۴. اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند، پیشامد آنکه « $A$  یا  $C$  رخ دهد ولی  $B$  رخ ندهد» را در شکل مقابل سایه بزنید. (دی ۱۴۰۱)



۳۵. دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

الف) حاصل ضرب اعداد رو شده از دو تاس بزرگتر یا مساوی ۳۰ باشد.

ب) مجموع اعداد رو شده از دو تاس برابر ۱۳ باشد.

۳۶. می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۴ والیبالیست یک گروه ۶ نفره به طور تصادفی تشکیل دهیم مطلوب است احتمال اینکه: (خرداد ۱۴۰۲)

الف) حداقل ۴ نفر فوتبالیست باشند.

ب) به تعداد مساوی از هر دو رشته‌ی ورزشی انتخاب شوند.

۳۷. خانواده‌ای دارای دو فرزند است. (شهریور ۱۴۰۲)

الف) فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان را بنویسید.

ب) پیشامد  $A$  که در آن هر دو فرزند خانواده از یک جنسیت باشند را بنویسید.

۳۸. از جعبه‌ای که شامل ۳ مداد و ۵ خودکار است، به‌طور تصادفی ۴ شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه حداقل ۳ شیء انتخابی خودکار باشد. (شهریور ۱۴۰۲)
۳۹. احتمال اینکه دانش‌آموزی فردا به کتابخانه مدرسه نرود برابر با  $\frac{7}{45}$  است. چقدر احتمال دارد او فردا به کتابخانه مدرسه برود؟ (شهریور ۱۴۰۲)
۴۰. یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است: (دی ۱۴۰۲)  
 الف) پیشامد اینکه سکه پشت یا تاس حداقل ۵ بیاید را بنویسید.  
 ب) احتمال اینکه سکه رو و تاس عدد اول بیاید را محاسبه کنید.
۴۱. با حروف کلمه «دانش‌پژوه» یک واژه شش حرفی با حروف متمایز می‌سازیم، با کدام احتمال، واژه ساخته شده به حروف نقطه‌دار ختم می‌شود؟ (دی ۱۴۰۲)
۴۲. هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۹ را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت برمی‌داریم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۳)  
 الف) عدد روی کارت اول باشد، ولی کمتر از ۴ نباشد.  
 ب) عدد روی کارت مجذور کامل و فرد باشد.
۴۳. گروه المپیاد ادبی شهری، شامل ۵ دانش‌آموز دختر و ۴ دانش‌آموز پسر است. می‌خواهیم به‌طور تصادفی ۳ نفر را از بین آنها انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه: (خرداد ۱۴۰۳)  
 الف) دو دختر و یک پسر انتخاب شود.  
 ب) حداقل دو پسر انتخاب شده باشد.

## ۳.۲.۱ پاسخ نامه تشریحی

- ۱ الف) درست. چون همه‌ی مهره‌ها سفید هستند.  
 ب) درست. چون فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس از ۱ تا ۶ می‌باشد.  
 پ) نادرست. چون فقط یک جواب دارد.  
 ت) نادرست. با توجه به کلمه شانس، پس تصادفی است و حتمی نیست.  
 ث) درست.  
 ج) نادرست. چون تهی پیشامد غیر ممکن است.  
 چ) نادرست. چون با توجه به نکته ۳ خواهیم داشت:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

- ح) نادرست.  
 خ) درست.  
 د) درست. با توجه به تعریف و شکل (۳.۱)  
 ذ) نادرست. چون  $0.4 = 0.6 - 1$   
 ر) درست

- ۲ الف) ناسازگار  
 ب) فضای نمونه‌ای یک تاس برابر با ۶ و دو سکه برابر با ۴ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$6 \times 4 = 24$$

- پ)  $A'$   
 ت)  $A - B$   
 ث) برآمد  
 ج) با توجه به نکته ۳ خواهیم داشت:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

- چ)  $A \cap B$   
 ح) ۱  
 خ)  $A \cap B = \emptyset$   
 د)  $A$   
 ذ) تهی  
 ر) غیرممکن  
 ز) برآمد  
 ژ) حتمی

$$\begin{aligned} & \text{س) برآمد} \\ & \text{ش) } \frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

۳ الف: گزینه‌ی ۲

$$n(S) = 2^3 = 8$$

ب: گزینه‌ی ۴

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.1 = 0.9$$

پ: گزینه‌ی ۴

ت: گزینه‌ی ۳

چون عدد ۷ انتخاب شده، پس کافی است از بین ۴ عدد باقیمانده ۲ عدد دیگر انتخاب شود، به عبارتی:

$$\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 3 \times 2 = 6$$

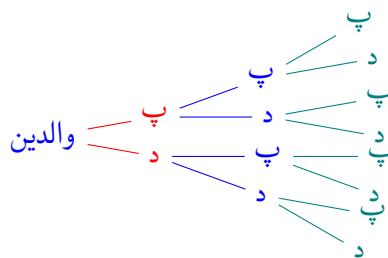
۴ الف:

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

ب:

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$$

۵ الف) با توجه به نمودار درختی فضای نمونه عبارت است از:



$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\}$$

$$A = \{(پ, پ, پ), (د, د, د)\}$$

$$n(S) = 8 \quad n(A) = 2 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۶

$$\begin{cases} \text{تعداد سیب‌های سالم} = ۸ \\ \text{تعداد سیب‌های لکه‌دار} = ۴ \\ \text{تعداد کل سیب‌های سالم و لکه‌دار} = ۸ + ۴ = ۱۲ \end{cases}$$

(الف)

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!(8-2)!}}{\frac{12!}{2!(12-2)!}} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

(ب) یک سیب سالم و یک سیب لکه دار.  
توجه کنید که حرف «و» نشان دهنده‌ی اصل ضرب می‌باشد.

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{8!}{1!(8-1)!} \times \frac{4!}{1!(4-1)!}}{\frac{12!}{2!(12-2)!}} = \frac{32}{66} = \frac{16}{33}$$

۷

$$\begin{cases} \text{تعداد سیب‌های سالم} = ۹ \\ \text{تعداد سیب‌های لکه‌دار} = ۲ \\ \text{تعداد کل سیب‌های سالم و لکه‌دار} = ۹ + ۲ = ۱۱ \end{cases}$$

یک سیب سالم و یک سیب لکه دار.  
توجه کنید که حرف «و» نشان دهنده‌ی اصل ضرب می‌باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{9}{3} \binom{2}{1}}{\binom{11}{4}} = \frac{\frac{9!}{3!(9-3)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!}}{\frac{11!}{4!(11-4)!}} = \frac{84 \times 2}{330} = \frac{84}{165}$$

(الف ۸)

$$S = \{(پ، پ)، (پ، د)، (د، پ)، (د، د)\}$$

(ب)

$$A = \{(پ، پ)، (د، د)\}$$

$$n(S) = ۴ \quad n(A) = ۲ \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

(ج) با توجه به کلمه‌ی «حداکثر» خواهیم داشت:

$$B = \{(د، پ)، (د، پ)، (د، د)\}$$

$$n(B) = 3 \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

۹ الف) با توجه به نکته (۳) فضای نمونه‌ای یعنی  $n(S) = 36$  می‌باشد.

$$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \quad n(A) = 3 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(ب)

$$B = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\} \quad n(B) = 4 \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

۱۰ الف)

$$A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$$

(ب)

$$B = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5)\}$$

۱۱

$$\begin{cases} \text{تعداد مهره‌های قرمز} = 7 \\ \text{تعداد مهره‌های سفید} = 3 \\ \text{تعداد کل مهره‌ها} = 3 + 7 = 10 \end{cases}$$

دو مهره قرمز و یک مهره سفید.

توجه کنید که حرف «و» نشان دهنده‌ی اصل ضرب می‌باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{7!}{2!(7-2)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{21 \times 3}{120} = \frac{21}{40}$$

۱۲ الف)

$$S = \{(پ, ۱)(پ, ۲)(پ, ۳)(پ, ۴)(پ, ۵)(پ, ۶)(رو, ۱)(رو, ۲)(رو, ۳)(رو, ۴)(رو, ۵)(رو, ۶)\}$$

(ب)

$$A = \{(پ, ۲)(پ, ۴)(پ, ۶)\}$$

$$n(S) = 12 \quad n(A) = 3 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

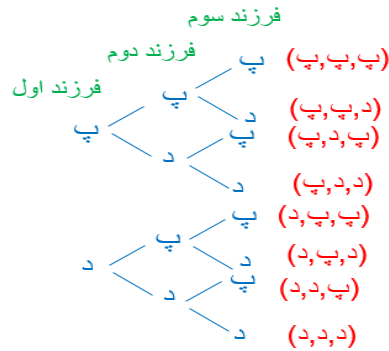
(ج) با توجه به کلمه‌ی «حداکثر» خواهیم داشت:

$$B = \{(پ, ۱)(پ, ۲)(پ, ۳)(رو, ۱)(رو, ۲)(رو, ۳)\}$$



$$n(B) = 6 \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

۱۳ الف) با توجه به نمودار درختی شکل (۶.۱) فضای نمونه عبارت است از:



شکل ۶.۱:

$$S = \{(پ, پ, پ), (د, پ, پ), (پ, د, پ), (د, د, پ), (پ, پ, د), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د)\}$$

(ب)

$$A = \{(پ, پ, د), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د)\}$$

$$n(S) = 8 \quad n(A) = 6 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

۱۴

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (د, ۱), (د, ۲), (د, ۳), (د, ۴), (د, ۵), (د, ۶)\}$$

برای نوشتن پیشامد «تاس حداکثر ۳ یا (به معنی اجتماع) سکه رو بیاید»، کافی است پیشامدها را به صورت جداگانه نوشته و در نهایت اجتماع دو مجموعه را بنویسیم:  
پیشامد اینکه تاس حداکثر ۳ بیاید:

$$A = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳)\}$$

پیشامد اینکه سکه رو بیاید:

$$B = \{(رو, ۱), (رو, ۲), (رو, ۳), (رو, ۴), (رو, ۵), (رو, ۶)\}$$

$$A \cup B = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (رو, ۱), (رو, ۲), (رو, ۳), (رو, ۴), (رو, ۵), (رو, ۶)\}$$

$$n(S) = 12 \quad n(A \cup B) = 9 \quad P(A) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۱۵

$$\begin{cases} \text{تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی دوازدهم} = ۵ \\ \text{تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم} = ۴ \\ \text{تعداد کل دانش‌آموزان} = ۹ \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده تیم ۶ نفره تشکیل می‌شود خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = 84$$

احتمال اینکه ۴ نفر آنها از پایه‌ی دوازدهم و **(نشان دهنده‌ی اصل ضرب)** ۲ نفر آنها از پایه‌ی یازدهم باشد برابر است با:

$$n(A) = \binom{5}{4} \times \binom{4}{2} = \frac{5!}{4!(5-4)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} = 5 \times 6 = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{84}$$

۱۶ اعداد فرد طبیعی از ۱ تا ۱۵ عبارتند از:

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\} \Rightarrow n(S) = 8$$

و مضارب ۳ عبارتند از:

$$S = \{3, 9, 15\} \Rightarrow n(A) = 3$$

در نتیجه احتمال مضارب ۳ برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

۱۷ الف)

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

ب)

$$B = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$$

۱۸

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{32}{99} = \frac{67}{99}$$

۱۹

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد مهره‌های سفید} = 4 \\ \text{تعداد مهره‌های زرد} = 3 \\ \text{تعداد مهره‌های آبی} = 2 \\ \text{تعداد کل مهره‌ها} = 4 + 3 + 2 = 9 \end{array} \right.$$

با توجه به اینکه ذکر شده ۳ مهره به تصادف خارج می‌شود، خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

احتمال اینکه رنگ سه مهره متفاوت باشد، برابر است با:

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

۲۰ همانطوریکه می‌دانیم یک سال برابر با ۱۲ ماه است، بنابراین احتمال اینکه هر ۴ نفر در یک ماه از سال (خرداد) متولد شده باشند برابر است با:

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^4$$

۲۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد دانش‌آموزان ریاضی} = 2 \\ \text{تعداد دانش‌آموزان تجربی} = 3 \\ \text{تعداد دانش‌آموزان انسانی} = 2 \\ \text{تعداد کل دانش‌آموزان} = 2 + 3 + 2 = 7 \end{array} \right.$$

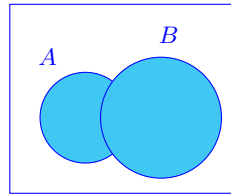
$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

احتمال اینکه از هر رشته یک دانش‌آموز انتخاب شود، برابر است با:

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{35}$$

۲۲ «پیشامد A یا B رخ دهد» همان پیشامد  $A \cup B$  است.



۲۳ الف

$$S = \{(رو، ۱)(رو، ۲)(رو، ۳)(رو، ۴)(رو، ۵)(رو، ۶)(پ، ۱)(پ، ۲)(پ، ۳)(پ، ۴)(پ، ۵)(پ، ۶)\}$$

(ب)

$$A = \{(پ، ۱)، (پ، ۳)، (پ، ۵)\}$$

۲۴

$$S = \{(پ، پ)، (د، پ)، (پ، د)، (د، د)\} \Rightarrow n(S) = 4$$

(الف)

$$A = \{(د، د)\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

(ب)

$$B = \{(پ، پ)، (د، د)\} \Rightarrow n(B) = 2$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4}$$

۲۵

$$\{(۵، ۶)، (۶، ۵)، (۶، ۶)\}$$

۲۶

$$S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\} \Rightarrow n(S) = 10$$

مضارب ۳ عبارتند از:

$$A = \{3, 6, 9\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

۲۷

$$\begin{cases} \text{تعداد مهره‌های قرمز} = 5 \\ \text{تعداد مهره‌های آبی} = 4 \\ \text{تعداد کل مهره‌ها} = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده ۳ مهره به تصادف خارج می‌شود، خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

احتمال اینکه ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{5!}{1!(5-1)!} = 6 \times 5 = 30 \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{84} \end{aligned}$$

۲۸ الف: قطعی

ب: تصادفی

۲۹

$$\begin{cases} \text{تعداد مهره‌های سفید} = 4 \\ \text{تعداد مهره‌های سیاه} = 3 \\ \text{تعداد کل مهره‌ها} = 4 + 3 = 7 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده ۲ مهره به تصادف خارج می‌شود، خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 5!} = 21$$

احتمال اینکه هر ۲ مهره سفید باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 2 \times 3 = 6 \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21} \end{aligned}$$

۳۰ الف) فضای نمونه‌ای یک تاس برابر با ۶ و یک سکه برابر با ۲ می‌باشد، لذا خواهیم داشت:

$$6 \times 2 = 12$$

(ب)

$$A = \{(رو، ۲), (رو، ۴), (رو، ۶)\}$$

۳۱

$$\begin{cases} \text{تعداد کارمند زن} = 4 \\ \text{تعداد کارمند مرد} = 6 \\ \text{تعداد کل کارمندان} = 6 + 4 = 10 \end{cases}$$

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = 120$$

احتمال اینکه یک زن و دو مرد انتخاب شود، برابر است با:

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!} = 4 \times 15 = 60$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

۳۲ الف:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$$

ب: خیر ناسازگار نیستند، چون

$$A \cap B = \{(4, 4)\}$$

۳۳

$$\begin{cases} \text{تعداد مهره‌های آبی} = 5 \\ \text{تعداد مهره‌های قرمز} = 7 \\ \text{تعداد کل مهره‌ها} = 5 + 7 = 12 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده ۳ مهره به تصادف خارج می‌شود، خواهیم داشت:

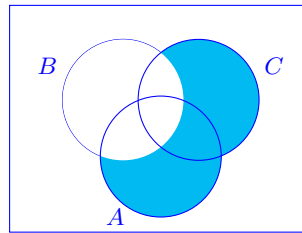
$$n(S) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = 220$$

احتمال اینکه حداکثر ۲ مهره از مهره‌های انتخاب شده قرمز باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{7}{0} \times \binom{5}{3} + \binom{7}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \\ &= \frac{7!}{0!(7-0)!} \times \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{7!}{1!(7-1)!} \times \frac{5!}{2!(5-2)!} \\ &\quad + \frac{7!}{2!(7-2)!} \times \frac{5!}{1!(5-1)!} = 185 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

۳۴



$$A = \{(6, 6), (5, 6), (6, 5)\} \quad \text{الف } ۳۵$$

$$B = \emptyset \quad \text{ب}$$

۳۶

$$\begin{cases} \text{تعداد فوتبالیست‌ها} = ۵ \\ \text{تعداد والیبالیست‌ها} = ۴ \\ \text{تعداد کل ورزشکاران} = ۵ + ۴ = ۹ \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده یک گروه ۶ نفره به تصادف تشکیل شود، خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = 84$$

الف) احتمال اینکه حداقل ۴ نفر از بین فوتبالیست‌ها باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{5}{4} \times \binom{4}{2} + \binom{5}{5} \times \binom{4}{1} \\ &= \frac{5!}{4!(5-4)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!} \times \frac{4!}{1!(4-1)!} = 30 + 4 = 34 \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{34}{84} \end{aligned}$$

ب) با توجه به اینکه ذکر شده به تعداد مساوی از هر دو رشته‌ی ورزشی انتخاب شود خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n(B) &= \binom{5}{3} \times \binom{4}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{4!}{3!(4-3)!} = 10 \times 4 = 40 \\ \Rightarrow P(B) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{40}{84} \end{aligned}$$

۳۷ الف)

$$S = \{(پ, پ), (پ, د), (د, پ), (د, د)\}$$

ب)

$$A = \{(پ, پ), (د, د)\}$$

۳۸

$$\begin{cases} \text{تعداد مدادها} = 3 \\ \text{تعداد خودکارها} = 5 \\ \text{تعداد کل} = 3 + 5 = 8 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده ۴ شیء انتخاب می‌شود، خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4!} = 70$$

احتمال اینکه حداقل ۳ شیء انتخابی خودکار باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{5}{3} \times \binom{3}{1} + \binom{5}{4} \times \binom{3}{0} \\ &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{5!}{4!(5-4)!} = 10 \times 3 + 5 = 35 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$$

۳۹

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۴۰ الف) برای نوشتن پیشامد «تاس حداقل ۵ یا (به معنی اجتماع) سکه پشت بیاید»، کافی است پیشامدها را به صورت

جداگانه نوشته و در نهایت اجتماع دو مجموعه را بنویسیم:

پیشامد اینکه تاس حداقل ۵ بیاید:

$$A = \{(پ، ۶)(پ، ۵)(رو، ۶)(رو، ۵)\}$$

پیشامد اینکه سکه پشت بیاید:

$$B = \{(پ، ۱)(پ، ۲)(پ، ۳)(پ، ۴)(پ، ۵)(پ، ۶)\}$$

$$A \cup B = \{(پ، ۱)(پ، ۲)(پ، ۳)(پ، ۴)(پ، ۵)(پ، ۶)(رو، ۵)(رو، ۶)\}$$

ب) احتمال اینکه سکه رو و تاس عدد اول باشد:

$$n(S) = 2 \times 6 = 12$$

$$C = \{(رو، ۲)(رو، ۳)(رو، ۵)\} \Rightarrow n(C) = 3$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$



۴۱

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 4}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{2}$$

۴۲ الف) اعداد اول کوچکتر از ۴ عبارتند از:

$$A = \{2, 3\}$$

ب) مجذور کامل و فرد عبارتند از:

$$B = \{1, 9\}$$

۴۳

$$\begin{cases} \text{تعداد دخترها} = 5 \\ \text{تعداد پسرها} = 4 \\ \text{تعداد کل دانش آموزان} = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ذکر شده یک گروه ۳ نفره به تصادف تشکیل شود، خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

الف) احتمال اینکه دو دختر و یک پسر باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(A) &= \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{4!}{1!(4-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} \times \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 10 \times 4 = 40 \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84} \end{aligned}$$

احتمال اینکه حداقل ۲ پسر انتخاب شده باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} n(B) &= \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} + \binom{5}{0} \times \binom{4}{3} \\ &= \frac{5!}{1!(5-1)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} + \frac{5!}{0!(5-0)!} \times \frac{4!}{3!(4-3)!} = 5 \times 6 + 1 \times 4 = 34 \\ \Rightarrow P(A) &= \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{34}{84} \end{aligned}$$

## ۳.۱ درس سوم: چرخه‌ی آمار در حل مسائل

### ۱.۳.۱ مفاهیم و نکات درس

#### یادآوری:

**متغیر:** به هر ویژگی از افراد یا اشیا که قرار است مورد بررسی واقع شود، متغیر می‌گویند. مثلاً نمره‌ی ریاضی دانش‌آموزان کلاس دهم انسانی که ممکن است از ۰ تا ۲۰ متغیر باشد.

**انواع متغیر:** ۱- متغیر کمی ۲- متغیر کیفی.

**متغیرهای کمی:** به متغیرهایی که قابل شمارش و اندازه‌گیری باشند، متغیر کمی گفته می‌شود، مانند: قد و وزن.

**متغیرهای کیفی:** به متغیرهایی که قابل شمارش نباشند، متغیر کیفی گفته می‌شود، مانند: مراحل تحصیل، فصل‌های سال، نوع آلاینده‌های موجود در هوا.

#### مقیاس‌های اندازه‌گیری متغیرها:

مقیاس‌های اندازه‌گیری متغیرهای کمی عبارتند از:

۱- **فاصله‌ای (گسسته):** فقط اعداد صحیح را می‌تواند اختیار کند. مانند: تعداد تصادفات رانندگی یا تعداد تماس‌های تلفنی.

۲- **نسبتی (پیوسته):** هر عدد حقیقی را می‌تواند اختیار کند. مانند: قد و وزن افراد.

مقیاس‌های اندازه‌گیری متغیرهای کیفی عبارتند از:

۱- **ترتیبی:** با این مقیاس، داده‌ها را می‌توان با هم مقایسه کرد. مانند: مراحل تحصیل یا ماه‌های سال.

۲- **اسمی:** با این مقیاس، داده‌ها را نمی‌توان به هیچ عنوان با هم مقایسه کرد و هیچ یک اولییتی بر دیگری ندارد. مانند: گروه خونی افراد و نوع آلاینده‌های موجود در هوا.

**معیارهای گرایش به مرکز:** ۱- میانگین ۲- میان

۱- **میانگین:** همان معدل داده‌ها است که یک دید کلی نسبت به جامعه در اختیار ما قرار می‌دهد و از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال ۱۸ میانگین اعداد ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{5 + 6 + 7 + 8 + 9}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

مثال ۱۹ اگر میانگین داده‌های ۱۰،  $x$ ، ۴۰ برابر با ۳۰ باشد، مقدار  $x$  را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$30 = \frac{10 + x + 40}{3}$$

$$10 + x + 40 = 90$$

$$x = 90 - 50 = 40$$

تذکر ۲ اگر تمام یا بعضی از داده‌ها تکراری باشند (داده‌ها فراوانی داشته باشند)، هر داده را در تعدادش ضرب می‌کنیم و میانگین را طبق فرمول بالا به دست می‌آوریم.

مثال ۲۰ میانگین داده‌های جدول زیر را به دست آورید.

داده‌ها	۴	۵	۶	۳
فراوانی	۲	۳	۲	۴

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{(2 \times 4) + (3 \times 5) + (2 \times 6) + (4 \times 3)}{2 + 3 + 2 + 4} = \frac{47}{11} = 4,27$$

**داده‌ی دورافتاده:** مقدار آن بسیار متفاوت از سایر داده‌ها است. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر از بقیه‌ی داده‌ها است.

تذکر ۳ اگر در بین داده‌ها یک یا چند داده‌ی دورافتاده داشته باشیم، بهتر است به جای میانگین از **میانه** استفاده کنیم.

**۲- میانه (چارک دوم):** پس از مرتب کردن داده‌ها به ترتیب از کمترین مقدار به بیشترین مقدار، میانه عددی است که دقیقاً در جایگاه وسط قرار دارد. **میانه همان چارک دوم** است که با  $Q_2$  نمایش می‌دهیم.

نکته ۷ برای پیدا کردن میانه؛ ابتدا داده‌ها را از کمترین مقدار به بیشترین مقدار مرتب می‌کنیم، اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، **داده‌ی وسط همان میانه** است ولی اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، **میانه برابر است با میانگین دو داده‌ی وسط**. یعنی دو داده‌ی وسط را با هم جمع کرده و بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

مثال ۲۱ میانه داده‌های جدول زیر را به دست آورید.

داده‌ها	۱۹	۶	۵	۳	۷
فراوانی	۱	۲	۴	۲	۳

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$3, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 19$$

با توجه به اینکه تعداد داده‌ها زوج می‌باشد میانگین دو داده‌ی وسط، میانه خواهد بود:

$$\text{میانه} = \frac{5+6}{2} = 5.5$$

**معیارهای پراکندگی:** ۱- واریانس و انحراف معیار ۲- دامنه‌ی میان چارکی

**واریانس و انحراف معیار:** در داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  اگر  $\bar{x}$  میانگین باشد، واریانس از رابطه زیر به دست می‌آید: (واریانس را با  $\delta^2$  یا  $S^2$  نمایش می‌دهیم.)

$$\delta^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

همچنین انحراف معیار عبارت است از جذر واریانس. به عبارتی:

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

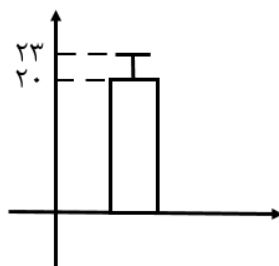
مثال ۲۲ واریانس و انحراف معیار را در مثال (۱۸) به دست آورید.

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(5-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2 \\ \delta &= \sqrt{2} = 1.41 \end{aligned}$$

نکته ۸ نام دیگر انحراف معیار، انحراف از میانگین می‌باشد، به این معنی که داده‌ها چقدر از میانگین فاصله دارند. به عبارتی هرچه قدر انحراف معیار در یک سری از داده‌ها بیشتر باشد، پراکندگی داده‌ها از میانگین بیشتر و در نتیجه داده‌ها از میانگین دورتر می‌باشند و برعکس هرچه قدر انحراف معیار در یک سری از داده‌ها کمتر باشد، پراکندگی داده‌ها از میانگین کمتر و در نتیجه داده‌ها به میانگین نزدیکتر می‌باشند

در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند (هنگامی که داده‌ی دور افتاده نداشته باشیم)، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان دهنده‌ی میانگین باشد و میله‌ی خطای آن، به اندازه‌ی انحراف معیار از مستطیل بالا آمده باشد. مثلاً در نمودار زیر میانگین  $20^\circ$  و انحراف معیار  $3$  است.

تذکر ۴ اگر در بین داده‌ها، داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، به جای استفاده از میانگین ( $\bar{x}$ ) و انحراف معیار ( $\delta$ ) از شاخص دیگری به نام **میانه و دامنه‌ی میان چارکی (IQR)** استفاده کنیم:



**چارک اول :** میانه‌ی داده‌های قبل از میانه را چارک اول می‌نامیم و آنرا با  $Q_1$  نشان می‌دهیم.  
**چارک سوم :** میانه‌ی داده‌های بعد از میانه را چارک سوم می‌نامیم و آنرا با  $Q_3$  نشان می‌دهیم.  
**دامنه‌ی میان چارکی :** تفاضل چارک اول از چارک سوم را دامنه‌ی میان چارکی می‌نامیم و آن را با  $IQR$  نشان می‌دهیم:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

**دامنه‌ی تغییرات :** اختلاف بیشترین و کمترین داده‌ها را دامنه‌ی تغییرات می‌نامیم و با  $R$  نشان می‌دهیم:

$$R = \max - \min$$

مثال ۲۳ دامنه‌ی تغییرات و دامنه‌ی میان چارکی را در مثال (۲۱) به دست آورید.  
 ابتدا داده‌ها را مرتب کرده و کمترین مقدار، بیشترین مقدار، چارک اول و سوم را مشخص می‌کنیم:

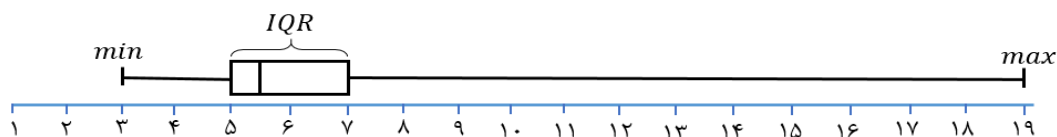
۳, ۳, ۵, ۵, ۵, ۵, ۶, ۶, ۷, ۷, ۷, ۱۹

$$\min = ۳, \quad \max = ۱۹, \quad R = ۱۹ - ۳ = ۱۶$$

$$Q_1 = ۵, \quad Q_3 = ۷, \quad IQR = ۷ - ۵ = ۲$$

**نمودار جعبه‌ای :** این نمودار، روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌ها است. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه‌ی میان چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین مقادیر داده‌ها را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای می‌توان بیش از یک مجموعه داده را نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه بهتر است.

مثال ۲۴ نمودار مثال (۲۱) را رسم کنید.



**نمودار دایره‌ای :** برای رسم نمودار دایره‌ای از یکی از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:  
الف) اگر زاویه‌های مرکزی برحسب درجه خواسته شوند:

$$\alpha = \frac{f}{N} \times 360^\circ$$

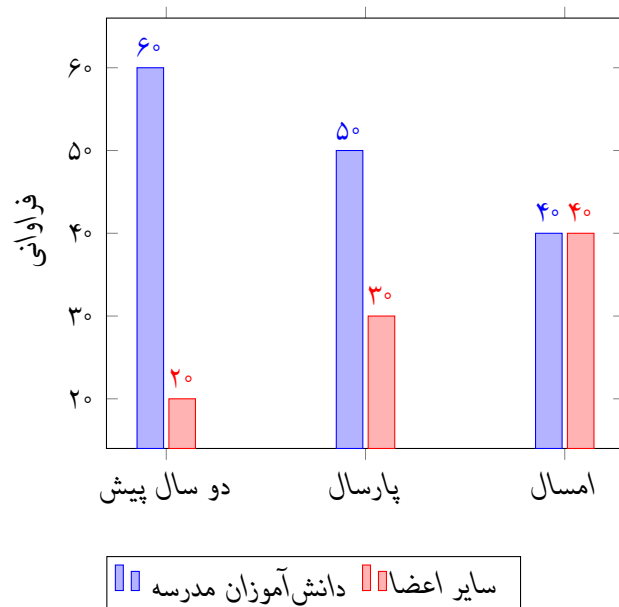
ب: اگر درصد مساحت‌های قسمت‌های مختلف دایره خواسته شوند:

$$S = \frac{f}{N} \times 100$$

توجه کنید که  $f$  فراوانی دسته‌ی مورد نظر و  $N$  حاصل جمع فراوانی است.

نکته ۹ از نمودار دایره‌ای برای نمایش متغیرهای کیفی استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۵ مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی، از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده‌ی تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

۳۰ نفر

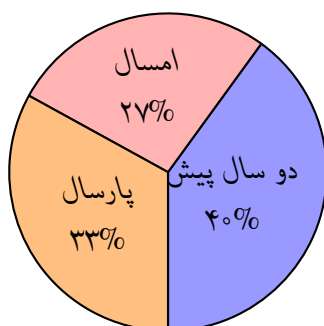
ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

۳۰ نفر

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هر یک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

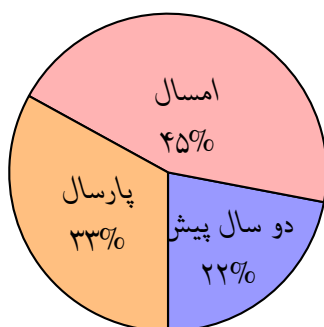
نمودار دایره‌ای دانش‌آموزان مدرسه:

سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)	درصد
دو سال پیش	۶۰	$\frac{۶۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۴۴$	$\frac{۶۰}{۱۵۰} \times ۱۰۰ = ۴۰$
پارسال	۵۰	$\frac{۵۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$	$\frac{۵۰}{۱۵۰} \times ۱۰۰ \approx ۳۳$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۱۵۰} \times ۳۶۰ = ۹۶$	$\frac{۴۰}{۱۵۰} \times ۱۰۰ \approx ۲۷$
مجموع	۱۵۰	۳۶۰	۱۰۰



نمودار دایره‌ای سایر اعضا:

سال	فراوانی	زاویه‌ی مرکزی (بر حسب درجه)	درصد
دو سال پیش	۲۰	$\frac{۲۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۸۰$	$\frac{۲۰}{۹۰} \times ۱۰۰ \approx ۲۲$
پارسال	۳۰	$\frac{۳۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۲۰$	$\frac{۳۰}{۹۰} \times ۱۰۰ \approx ۳۳$
امسال	۴۰	$\frac{۴۰}{۹۰} \times ۳۶۰ = ۱۶۰$	$\frac{۴۰}{۹۰} \times ۱۰۰ \approx ۴۵$
مجموع	۹۰	۳۶۰	۱۰۰



## گام‌های چرخه‌ی آمار در حل مسائل

علم آمار به کمک پنج مرحله‌ی مختلف، به بررسی مسائل و پدیده‌های واقعی می‌پردازد، به این پنج مرحله، گام‌های چرخه‌ی آمار می‌گوییم.

### گام اول: بیان مسئله

در این مرحله **مسئله را به‌طور شفاف و دقیق** مطرح می‌کنیم. در واقع هرچه پرسش‌ها شفاف‌تر و دقیق‌تر باشند، جواب‌های ما نیز به واقعیت نزدیکتر می‌شوند. همچنین باید با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه‌ی آماری را محدود کرد. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم مقدار فعالیت بدنی دختران در شهرستان ارومیه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. سوال‌هایی که مطرح می‌شود این است که سن این دختران چقدر باید باشد؟ محل سکونت آنها در چه مناطقی از ارومیه است؟ میزان توانایی‌ها جسمانی آنها چقدر است؟

ملاحظه می‌کنید محدودیت‌ها را باید در نظر گرفت. در غیر این صورت بررسی‌ها ممکن است ماه‌ها و یا حتی سال‌ها به طول بیانجامد. به عنوان مثال محدودیت‌ها می‌توانند این‌طور باشند که دختران ۱۴ الی ۱۸ سال که در ناحیه‌ی ۱ ارومیه در مدارس مختلف درس می‌خوانند را مورد بررسی قرار دهیم.

### گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری و روش انجام کار)

حال باید **راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله** که در گام اول توضیح دادیم، پیدا کنیم. اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر موردنظر است. در اندازه‌گیری، **اطلاعات توصیفی (کیفی)** را تا حد امکان به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل می‌کنیم. مثلاً در مورد جنسیت می‌توان عدد ۱ را برای مرد بودن و عدد ۲ را برای زن بودن انتخاب کرد. توجه کنید بعضی از متغیرها فقط باید توسط متخصصین مربوطه اندازه‌گیری شوند. مانند: اندازه‌گیری «میزان اختلالات روانی» یا «مقدار IQ افراد».

در مرحله‌ی طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره‌ی چگونگی متغیرهای مورد نظر، درباره‌ی اندازه‌ی نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه‌ی تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.

**نکته ۱۰** تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه می‌نامیم. هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگتری نیاز داریم.

مثال ۲۶ برای بررسی کدام یک از موارد زیر به اندازه‌ی نمونه‌ی بزرگتری نیاز است؟

(الف) سن دانش‌آموزان یک کلاس

(ب) معدل دانش‌آموزان یک کلاس.

(ب) چون تنوع و پراکندگی بیشتری دارد.



## گام سوم: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

در این گام وارد عمل شده و می‌خواهیم داده‌ها را جمع‌آوری کنیم. ولی در هر مطالعه ممکن است، گردآوری یا ثبت داده‌ها یا حتی وارد کردن داده‌ها اشتباهی رخ دهد که با بررسی مجدد، می‌توان آنها را تصحیح کرد. توجه کنید که در این گام، گردآوری داده‌ها، سازماندهی و پاک‌سازی بیشتر مورد توجه است.

## گام چهارم: (مرتب کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و شاخص‌های پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

در این مرحله داده‌هایی که جمع‌آوری کرده بودیم را به شکل‌های مختلف نمایش می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع گزارش کردن داده‌ها و محاسبه‌ی شاخص‌های مرکزی (میانۀ  $(Q_2)$ ، میانگین  $(\bar{x})$  و مد)، شاخص‌های پراکندگی (دامنه‌ی تغییرات  $(R)$ ، دامنه‌ی میان چارکی  $(IQR)$ ، واریانس  $(\sigma^2)$  و انحراف معیار  $(\sigma)$ ) و رسم نمودارهای آماری مناسب برای آنها است.

تذکر ۵ برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند و معیارهای پراکندگی، دوری و نزدیکی داده‌ها نسبت به میانگین را نشان می‌دهند. توجه کنید اگر داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهد بود و باید از میانۀ و دامنه‌ی میان چارکی استفاده کنیم.

نکته ۱۱ اگر بخواهیم متغیرهای کیفی (اسمی یا ترتیبی) را به صورت درصد گزارش کنیم، باید تعداد افراد و اشیاء مورد بررسی را نیز به همراه درصد بیان کنیم. مثلاً فرض کنید امسال قبولی کنکور در مدرسه‌ی  $A$  به اندازه‌ی ۱۰۰ درصد و در مدرسه‌ی  $B$  به اندازه‌ی ۵ درصد نسبت به سال قبل افزایش داشته است. آیا می‌توان گفت قطعاً عملکرد مدرسه‌ی  $A$  از مدرسه‌ی  $B$  بهتر است؟

خیر. زیرا اگر در مدرسه‌ی  $A$  تعداد قبولی‌های پارسال ۳ نفر باشد، با ۱۰۰ درصد افزایشی که امسال دارد، تعداد قبولی‌ها به ۶ نفر رسیده است.

$$3 + \frac{100}{100} \times 3 = 3 + 3 = 6$$

ولی اگر در مدرسه‌ی  $B$  تعداد قبولی‌های پارسال ۲۰ نفر باشد، با ۵ درصد افزایش امسال تعداد قبولی‌ها به ۲۱ نفر می‌رسد

$$20 + \frac{5}{100} \times 20 = 20 + 1 = 21$$

## گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید)

پس از تحلیل داده‌ها، به تفسیر نتایج به دست آمده می‌پردازیم. و پاسخی برای مسئله‌ی اصلی پیدا می‌کنیم. توجه به محدودیت‌های مطالعه‌ای که انجام داده‌ایم بسیار مهم است. در بهترین حالت می‌توانیم نتایج را فقط به جامعه‌ی آماری مورد بررسی، تعمیم

دهیم. توجه کنید اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکرده باشیم، نتایج ما قطعی نخواهند بود؛ چون در نمونه‌گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار خواهند گرفت و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

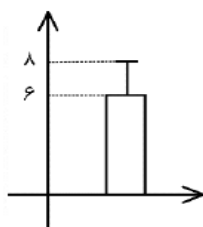
### یکپارچگی چرخه‌ی آمار در حل مسائل

برای اینکه نتایج حاصل از علم آمار در مسائل به نتیجه‌ی مطلوب برسد، باید هر ۵ گام به‌طور کامل و دقیق توسط کارشناسان مربوطه انجام شود. مثلاً اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی جامعه‌ی آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه‌ی نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود.

کیفیت اجرای هر یک از گام‌های چرخه‌ی آمار، گام‌های دیگر را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می‌توانیم چرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکندگی را نقد کنیم، بلکه باید درباره‌ی چگونگی نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری، نوع ورود داده‌ها و تمامی موارد گام‌های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.

## ۲.۳.۱ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- الف: طرح و برنامه ریزی، دومین گام برای یافتن داده‌ها است. (شهریور ۹۸)
- ب: هرچه جامعه بزرگتر شود، اندازه‌ی نمونه ثابت می‌ماند. (شهریور ۹۸)
- پ: طرح و برنامه ریزی، دومین گام در چرخه‌ی آمار است. (شهریور ۹۹)
- ت: برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد. (شهریور و دی ۹۹)
- ث: معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکز هستند. (دی ۹۹)
- ج: دامنه‌ی تغییرات از معیارهای گرایش به مرکز می‌باشد. (دی ۹۹)
- چ: وقتی داده‌ی دور افتاده نداریم، میانه شاخص مناسب‌تری از میانگین برای توصیف داده‌ها می‌باشد. (دی ۹۹)
- ح: وقتی داده‌ی دور افتاده داریم، میانه معیار مناسبی برای توصیف داده‌ها می‌باشد. (خرداد ۱۴۰۰)
- خ: برای توصیف داده‌های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد. (خرداد ۱۴۰۰)
- د: مرتب کردن داده‌ها در گام دوم چرخه‌ی آمار اتفاق می‌افتد. (خرداد ۱۴۰۰)
- ذ: طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحله بیان مسئله صورت می‌گیرد. (خرداد ۱۴۰۰)
- ر: هنگامی که داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، می‌توانیم از میانه و دامنه‌ی میان چارکی استفاده کنیم. (دی ۱۴۰۰)
- ز: گردآوری و سازماندهی داده‌ها سومین گام در چرخه‌ی آمار است. (دی ۱۴۰۰)
- ژ: برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد متفاوت باشد. (دی ۱۴۰۰)
- س: برای جامعه‌ی آماری با داده‌ی دور افتاده، استفاده از میانگین و انحراف معیار کافی است. (شهریور ۱۴۰۱)
- ش: در گام پنجم چرخه‌ی آمار، نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم. (دی ۱۴۰۱)
- ص: در شکل مقابل انحراف معیار و میانگین به ترتیب ۶ و ۸ است. (دی ۱۴۰۱)



- ض: طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. (شهریور ۱۴۰۲)
۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.
- الف: راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه‌ی اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم، این گام چرخه‌ی آمار را گام ..... می‌نامند. (دی ۹۷)
- ب: تعداد اعضای جامعه را ..... می‌نامند. (دی ۹۷ و ۹۸ و ۱۴۰۰)
- پ: اگر در داده‌ها، داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، معیار پراکندگی ..... مناسب است. (خرداد ۹۸)

ت: فعالیت « داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم » مربوط به گام ..... آمار است. (خرداد ۹۸)

ث: برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش ..... همراه باشد. (شهریور ۹۸ و خرداد ۹۹)

ج: اندازه‌گیری یا سنجش ..... گام برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. (دی ۹۸ و خرداد ۹۹)

چ: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها گام ..... در چرخه‌ی آمار است. (خرداد ۹۹)

ح: هنگامی که داده‌ی دور افتاده نداشته باشیم، میانگین و ..... شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند.

(شهریور ۹۹)

خ: مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر ..... نمودار جعبه‌ای است. (شهریور ۹۹)

د: داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کمتر و نصف داده‌ها از آن بیشتر هستند. (دی ۹۹)

ذ: بیان مسأله و فهم آن ..... گام در چرخه‌ی آمار است. (دی ۹۹ و شهریور ۱۴۰۰)

ر: هر چه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد، برای اطمینان از وجود تنوع، به نمونه یا اندازه‌ی ..... نیاز داریم. (دی ۹۹)

ز: اگر داده‌ی دور افتاده داشته باشیم، از نمودار ..... استفاده می‌کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)

ژ: اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر ..... است. (دی ۱۴۰۰)

س: نمودار ..... بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متمرکزتر و کجا پراکنده‌ترند. (دی ۱۴۰۰)

ش: برای توصیف داده‌های کیفی، گزارش درصد باید همیشه با گزارش ..... همراه باشد. (شهریور ۱۴۰۱)

ص: اگر داده‌ها برابر باشند، دامنه‌ی تغییرات آنها ..... می‌شود. (دی ۱۴۰۱)

ض: مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر کمی، ..... است. (شهریور ۱۴۰۲)

ط: برای توصیف داده‌های ..... گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد. (دی ۱۴۰۲)

ظ: بیان مسأله و فهم آن، گام ..... در چرخه آمار است. (دی ۱۴۰۲)

۳. گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.

الف: روش نمونه‌گیری مربوط به کدام مرحله‌ی چرخه‌ی آمار است؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۱) طرح و برنامه‌ریزی ۲) بیان مسأله ۳) بحث و نتیجه‌گیری ۴) تحلیل داده‌ها

ب: کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها متمرکزتر و پراکنده‌تر است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

۱) مستطیلی ۲) دایره‌ای ۳) میله‌ای ۴) جعبه‌ای

پ: گام سوم در چرخه‌ی آمار در حل مسائل ..... می‌باشد. (شهریور ۱۴۰۰)

۱) بحث و نتیجه‌گیری ۲) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها ۳) طرح و برنامه‌ریزی ۴) تحلیل داده‌ها

ت: اگر در داده‌ها، داده‌ی دور افتاده وجود نداشته باشد، کدام معیار گرایش به مرکز مناسب است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

۱) مد ۲) انحراف معیار ۳) میانگین ۴) میانه

ث: تفسیر نتایج به دست آمده، کدام گام در چرخه‌ی حل مسائل آماری است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

۱) بیان مسأله ۲) گردآوری داده‌ها ۳) تحلیل داده‌ها ۴) بحث و نتیجه‌گیری

ج: کدام گزینه جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه‌ی حل مسائل آماری محسوب نمی‌شود. (خرداد ۱۴۰۲)  
 (۱) استفاده از نمودارها (۲) مرتب کردن داده‌ها (۳) گزارش معیارها (۴) تفسیر داده‌ها  
 (چ) در یک نمودار جعبه‌ای اگر چارک اول برابر ۳ و دامنه‌ی میان‌چارکی آن  $(IQR)$  برابر ۱۱ باشد، چارک سوم آن کدام است؟

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۴(۱) ۷(۲) ۸(۳) ۱۵(۴)

ح) کدام گزینه جزء گام بحث و نتیجه‌گیری از چرخه حل مسائل آماری محسوب می‌شود؟ (شهریور ۱۴۰۲)  
 (۱) نقد و بررسی (۲) سازماندهی (۳) شیوه اندازه‌گیری (۴) نمودارها و جدولها  
 (خ) کدام یک از موارد زیر، جزء گام تحلیل داده‌ها در چرخه‌ی آمار نمی‌باشد. (دی ۱۴۰۲)  
 (۱) گزارش معیارها (۲) رسم نمودار (۳) تفسیر داده‌ها (۴) مرتب کردن داده‌ها  
 (د) اگر اندازه‌گیری وزن افراد با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده باشد، اجرای نادرست کدام گام از چرخه‌ی آمار است؟ (خرداد ۱۴۰۳)

(۱) بیان مسئله (۲) طرح و برنامه‌ریزی (۳) گردآوری و پاک سازی داده‌ها (۴) تحلیل داده‌ها

۰۴. در کدام یک از موارد زیر احتیاج به نمونه‌ی بیشتری داریم؟ چرا؟ (دی ۹۷)

الف: سن دانش‌آموزان یک کلاس

ب: معدل دانش‌آموزان یک کلاس

۰۵. اولین و آخرین گام چرخه‌ی آمار را بنویسید. (تیر ۹۸)

۰۶. در نمونه‌گیری زیر میزان مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره (بر حسب متر مکعب) به دست آمده است. (شهریور ۹۸)  
 میانه، چارک اول و چارک سوم را مشخص کنید.

۴۰، ۱۱۰، ۷۰، ۳۰، ۵۰، ۱۲۰، ۷۵، ۶۵، ۱۳۰

۰۷. با توجه به چرخه‌ی آمار نام هر گام را بنویسید. (خرداد ۹۹)

الف: راهی برای رسیدن به پاسخ مسأله پیدا می‌کنیم و به نمونه‌گیری و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم  
 ب: نتایج به دست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم

۰۸. در موارد زیر، نام گام را بنویسید. (دی ۹۹)

الف: برگزاری آزمون پیشرفت تحصیلی در مدارس و بررسی نمره‌ی دانش‌آموزان  
 ب: بررسی علل پایین بودن سرانه‌ی مطالعه‌ی دانش‌آموزان کشور در دوره‌ی متوسطه

۰۹. با توجه به داده‌های زیر میانگین و میانه را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)

۴، ۳، ۴، ۲، ۸، ۳، ۷، ۱، ۳

۱۰. داده‌های زیر، میزان حقوق ماهیانه (بر حسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد. (خرداد ۱۴۰۱)

۸، ۶، ۶، ۵، ۱۱، ۲۰، ۹، ۸، ۳۵، ۱۲، ۱۰

الف: دامنه‌ی تغییرات و میانه‌ی داده‌های بالا را به دست آورید.

ب: آیا میانه، معیار گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌ها است؟ چرا؟

۱۱. در یک مطالعه‌ی آماری، برای اندازه‌گیری وزن افراد از دو واحد متفاوت استفاده شده است. (شهریور ۱۴۰۱)

الف) این مورد مربوط به اجرای نادرست کدام یک از گام‌های چرخه‌ی آمار در حل مسائل است؟

ب) این اجرای نادرست بر کدام گام‌های این چرخه اثر می‌گذارد؟

۱۲. برای بررسی میزان مطالعه‌ی افراد یک شهر، آیا انتخاب نمونه از بین افراد عضو کتابخانه‌ی عمومی آن شهر، روش نمونه‌گیری

مناسبی است؟ چرا؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۱۳. درصد قبولی دانش‌آموزان دو مدرسه‌ی  $A$  و  $B$  در درس ریاضی، به ترتیب ۶۵ درصد و ۸۰ درصد بوده است. تعداد قبولی

دانش‌آموزان کدام مدرسه بیشتر است؟ چرا؟ (دی ۱۴۰۱)

۱۴. داده‌های ۵، ۲۸، ۵، ۷، ۸، ۶، ۸، ۹، ۷، ۳۰، ۵ و ۶ متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون تعدادی از دانش‌آموزان یک

کلاس در هفته را نشان می‌دهد. کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای

تلویزیون» مناسب‌تر است؟ چرا؟

(شهریور ۱۴۰۲)

۱۵. برای بررسی میزان مطالعه‌ی افراد یک شهر، آیا انتخاب نمونه از بین افراد عضو کتابخانه‌ی عمومی آن شهر، روش نمونه‌گیری مناسبی

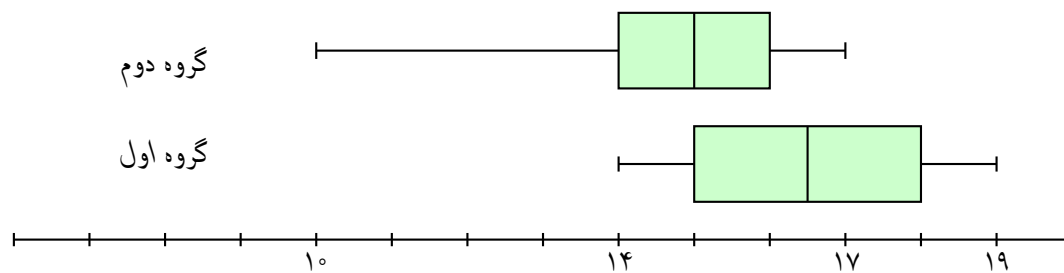
است؟ چرا؟ (دی ۱۴۰۲)

۱۶. با توجه به نمودار جعبه‌ای رسم شده به سوالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۱۴۰۳)

الف) در کدام گروه، گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه کننده باشد؟

ب) دامنه‌ی میان‌چارکی کدام گروه بزرگتر است؟

ج) در کدام گروه مقدار میانه و میانگین به هم نزدیکترند؟



## ۳.۳.۱ پاسخ نامه تشریحی

الف: درست	ب: نادرست	پ: درست	ت: درست	ث: نادرست	ج: نادرست
چ: نادرست	ح: درست	خ: نادرست	ذ: نادرست	ذ: درست	ر: درست
ز: درست	ژ: نادرست	س: نادرست	ش: درست	ص: نادرست	ض: درست

۲ الف) طرح و برنامه ریزی (ب) اندازه‌ی جامعه (پ) دامنه‌ی میان چارکی (ت) سوم (گردآوری و پاک‌سازی)  
 (ث) تعداد (ج) دومین (چ) سوم (ح) انحراف معیار (خ) کمی  
 (د) میانه (ذ) اولین (ر) بزرگتری (ز) جعبه‌ای (ژ) اندازه‌گیری یا سنجش  
 (س) جعبه‌ای (ش) تعداد (ص) صفر (ض) نمودار جعبه‌ای (ط) کیفی (ظ) اولین

۳ الف: گزینه (۱) ب: گزینه (۴) پ: گزینه (۲) ت: گزینه (۳) ث: گزینه (۴)  
 ج: گزینه (۴) چ: گزینه (۱) ح: گزینه (۱) خ: گزینه (۳) د: گزینه (۲)

۴ معدل دانش‌آموزان یک کلاس. زیرا تنوع بیشتری دارد.

۵ گام اول: بیان مسئله

گام آخر: بحث و نتیجه‌گیری

۶ بعد از مرتب کردن داده‌ها میانه عددی است که در وسط قرار دارد.

۳۰, ۴۰, ۵۰, ۶۵, ۷۰, ۷۵, ۱۱۰, ۱۲۰, ۱۳۰

میانه:  $Q_2 = 70$

چارک اول:  $Q_1 = \frac{40 + 50}{2} = 45$

چارک سوم:  $Q_3 = \frac{110 + 120}{2} = 115$

۷ الف: طرح و برنامه ریزی

ب: بحث و نتیجه‌گیری

۸ الف: طرح و برنامه ریزی

ب: بیان مسأله

۹ میانگین:

$$\bar{x} = \frac{3 + 1 + 5 + 7 + 3 + 8 + 2 + 4 + 3 + 4}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

برای به دست آوردن میانه داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۱, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۵, ۷, ۸



$$Q_2 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

۱۰ الف: داده‌ها را از کمترین مقدار به بیشترین مقدار مرتب می‌کنیم:

۵, ۶, ۶, ۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۲۰, ۳۵

دامنه‌ی تغییرات:

$$R = \text{کمترین مقدار} - \text{بیشترین مقدار} = 35 - 5 = 30$$

میانه:

$$Q_2 = 9$$

ب: بله. زیرا در بین داده‌ها، داده‌ی دور افتاده وجود دارد.

۱۱ الف) گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی

ب) بر گام سوم، گام چهارم و گام پنجم اثر می‌گذارد.

۱۲ خیر. زیرا کسانی که در کتابخانه نیستند شانس حضور در نمونه را ندارند. همچنین چون فقط از افراد کتابخانه

نمونه‌گیری انجام شده است، میانگین داده‌های به دست آمده (آماره نمونه) بزرگتر از میانگین آن در جامعه‌ی آماری (پارامتر جامعه) می‌شود. چون افرادی که به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند.

۱۳ نمی‌توان نظری داد، چون گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

۱۴ میانه معیار گرایش به مرکز مناسب، و دامنه‌ی میان چارکی معیار پراکندگی مناسب است.

چون در میان داده‌ها داده دور افتاده مانند ۲۸ و ۳۰ وجود دارد.

۱۵ خیر. زیرا کسانی که در کتابخانه نیستند شانس حضور در نمونه را ندارند. همچنین چون فقط از افراد کتابخانه

نمونه‌گیری انجام شده است، میانگین داده‌های به دست آمده (آماره نمونه) بزرگتر از میانگین آن در جامعه‌ی آماری (پارامتر جامعه) می‌شود. چون افرادی که به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند.

۱۶ الف) گروه دوم

ب) گروه اول

ج) گروه اول



## فصل ۲

# الگوهای خطی

## ۱.۲ درس اول: مدل سازی و دنباله

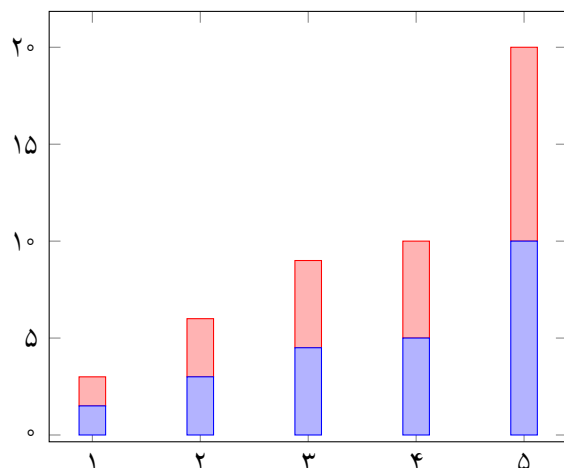
### ۱.۱.۲ مفاهیم و نکات درس

**مدل سازی:** بیان مسأله به زبان ریاضی را مدل سازی می گویند.

برای مدل سازی پدیده‌ها می توان از توابع با دامنه‌ی (ورودی‌ها) اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ ) و اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ ) کمک گرفت. توجه کنید، توابعی که پاسخ آن‌ها بستگی به بررسی مسأله در گام اول، دوم و ... و  $n$ ام دارد، دامنه‌ی آنها زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می باشد.

در واقع اگر دامنه‌ی تابع بتواند عدد اعشاری بگیرد، دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ی  $\mathbb{N}$  است. اما اگر دامنه‌ی تابع بتواند عدد اعشاری بگیرد، دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ی  $\mathbb{R}$  است.

مثال ۲۷ به نمودار میله‌ای زیر توجه کنید. این نمودار نشان می دهد که در یک مسیر اتوبوس که ۵ ایستگاه دارد، در هر ایستگاه چند نفر از اتوبوس پیاده شده‌اند.



شماره ایستگاه (n)	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه f(n)	۳	۶	۹	۱۰	۲۰

ملاحظه می کنید در سه ایستگاه اول، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه، ۳ برابر شماره ایستگاه است. همچنین در دو ایستگاه آخر (ایستگاه ۴ و ۵)، اگر شماره ایستگاه را منهای ۳ کنیم و در ۱۰ ضرب کنیم، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه به دست می آید، پس داریم:

$$f(n) = \begin{cases} 3n, & n = 1, 2, 3 \\ 10(n-3), & n = 4, 5 \end{cases}$$

همانطوریکه ملاحظه می کنید، ما در این مثال رابطه‌ی بین ایستگاه اتوبوس و تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه را با یک تابع ریاضی مدل سازی کردیم. به طوریکه دامنه‌ی این تابع اعداد طبیعی ۱ تا ۵ می باشد:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 5\}$$

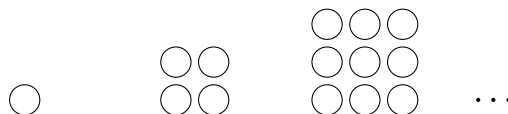
و برد آن برابر است با:

$$R_f = \{3, 6, 9, 10, 20\}$$

مثال ۲۸ مساحت دایره‌ای به شعاع  $r$  را بیابید.

در این مثال دامنه (ورودی)، شعاع دایره یعنی  $r$ ، و برد (خروجی) مساحت دایره یعنی  $\pi r^2$  می‌باشد. چون  $r$  می‌تواند شامل اعداد اعشاری باشد، بنابراین دامنه‌ی تابع مدل آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. یکی از تفاوت‌های دو مثال (۲۷) و (۲۸)، دامنه‌ی آنهاست. در مثال (۲۷) دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد طبیعی است، اما در مثال (۲۸) دامنه، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. از جمله مدل‌سازی‌های مهم که می‌توان به کمک توابع با دامنه‌ی اعداد طبیعی مثال زد، الگوها و یافتن جمله  $n$ ام در آن‌ها می‌باشد.

مثال ۲۹ تعداد دایره‌های شکل  $n$ ام در الگوی زیر را بیابید.

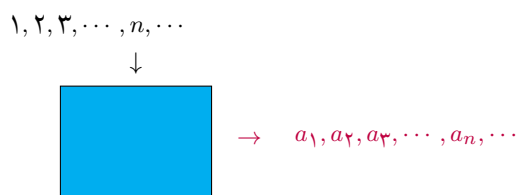


با توجه به الگوی داده شده جدول زیر را پر می‌کنیم:

شماره‌ی شکل	(۱)	(۲)	(۳)	...	( $n$ )
تعداد دایره‌ها	۱	۴	۹	...	$n^2$

نکته ۱۲ آرایشی از اعداد که در آن تعدادی عدد حقیقی به دنبال هم قرار دارند را دنباله‌ای از اعداد حقیقی می‌نامیم.

**تعریف دنباله:** همانطوریکه مشاهده شد، اگر  $a$  تابعی از  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  باشد، اعضای برد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله‌ی اول آن را با  $a_1$  و جمله‌ی دوم را با  $a_2$  و جمله‌ی سوم را با  $a_3$  و ... جمله‌ی  $n$ ام را با  $a_n$  نشان دهیم.



جمله‌ی  $n$ ام یعنی  $a_n$  را **جمله‌ی عمومی** یا **ضابطه‌ی دنباله** می‌نامند که به دو صورت زیر بیان می‌شود:

۱- **ضابطه‌ی تابعی:** رابطه‌ای که  $a_n$  بر حسب  $n$  بیان می‌شود.

۲- **رابطه‌ی بازگشتی:** رابطه‌ای که ارتباط جملات دنباله با یکدیگر را نشان می‌دهد، رابطه بازگشتی نامیده می‌شود. در واقع رابطه‌ی بازگشتی یک **الگوی ارتباطی** بین هر جمله و جمله قبلی است.

نکته ۱۳ اگر به جملات یک دنباله  $k$  تا  $k$  تا اضافه شود، جمله‌ی عمومی آن به صورت  $a_n = kn + \bigcirc$  و رابطه‌ی بازگشتی آن به صورت  $a_{n+1} = a_n + k$  است و برای به دست آوردن  $\bigcirc$ ، باید جمله‌ی اول از دنباله را در آن تست کنیم.

مثال ۳۰ دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

الف) رابطه‌ی بازگشتی ب) ضابطه‌ی تابعی آن را بنویسید.

الف) طبق نکته‌ی ۱۳ هر جمله، غیر از جمله‌ی اول، با افزودن عدد ثابت ۳ به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. پس رابطه‌ی بین جملات (رابطه‌ی بازگشتی) به صورت زیر می‌باشد:

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 4$$

ب) طبق نکته‌ی ۱۳ چون به جملات دنباله ۳ تا ۳ تا اضافه شده است لذا خواهیم داشت:

$$1 + (\text{شماره‌ی جمله}) \times 3 = \text{هر جمله}$$

$$a_n = 3n + 1: \text{ضابطه‌ی تابعی}$$

نکته ۱۴ اگر هر جمله‌ی یک دنباله نسبت به دنباله‌ی قبلی اش  $k$  برابر شود، جمله‌ی عمومی آن به صورت  $a_n = \bigcirc \cdot k^n$  و رابطه‌ی بازگشتی آن  $a_{n+1} = k \cdot a_n$  است و برای به دست آوردن  $\bigcirc$  باید جمله‌ی اول از دنباله را در آن تست کنیم.

مثال ۳۱ با توجه به جملات دنباله‌ی مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$$

الف: رابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید. ب: ضابطه‌ی دنباله را به دست آورید.

با توجه به نکته ۱۴ چون هر جمله نسبت به جمله‌ی قبلی  $\frac{1}{3}$  برابر شده است، بنابراین خواهیم داشت:

الف)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \quad a_1 = 9$$

ب)

$$a_n = 3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow a_n = 3^{3-n}$$

مثال ۳۲ چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی  $a_n = n^2 + 1$  را بنویسید.

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$a_3 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$a_4 = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$$

۲, ۵, ۱۰, ۱۷

همانطوریکه ملاحظه کردید، دنباله‌ها را می‌توان به عنوان تابعی با دامنه‌ی اعداد طبیعی نمایش داد. بنابراین نمودار آن‌ها را نیز می‌توان به کمک مکان‌یابی به راحتی رسم کرد:

مثال ۳۳ نمودار دنباله‌ی زیر را برای  $n \leq 4$  رسم کنید.

$$a_n = 2n - 1$$

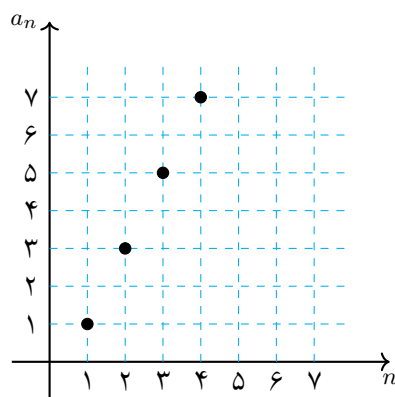
$$a_1 = 2(1) - 1 = 1$$

$$a_2 = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$a_4 = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$a_n = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$



## ۲.۱.۲ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید.

الف) در دنباله‌ی  $a_{n+1} = a_n + 3$ ، اگر جمله‌ی پنجم ۱۷ باشد، جمله‌ی ششم آن ۲۳ است. (خرداد ۱۴۰۱)  
 ب) یک دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن اعداد حقیقی می‌باشد. (دی ۱۴۰۲)

۲. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی  $3, 7, 11, \dots$  برابر با ..... و جمله‌ی دهم دنباله ..... می‌باشد. (دی ۹۷)

ب: در دنباله‌ی  $1, -4, -9, \dots$  ضابطه‌ی این دنباله ..... می‌باشد. (خرداد ۹۸)

پ: جمله‌ی چهارم دنباله‌ی  $a_n = \frac{1}{3}n - \frac{5}{3}$  برابر ..... می‌باشد. (خرداد ۹۸)

ت: جمله‌ی پنجم دنباله‌ی  $a_n = n^2 - 3$  برابر ..... است. (دی ۹۸)

ث: رابطه‌ی را که بیانگر ارتباط جملات دنباله، با یکدیگر است، ..... می‌نامیم. (شهریور ۱۴۰۲)

ج: اگر ضابطه‌ی دنباله‌ی  $a_n = 5 - 3n$  باشد، جمله‌ی ..... دنباله برابر ۲۸- است. (دی ۱۴۰۲)

۳. گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.

ضابطه‌ی تابعی دنباله‌ی  $\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$  کدام گزینه است؟ (خرداد ۱۴۰۳)

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad (۴) \quad a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \quad (۳) \quad a_n = \frac{-n}{n+1} \quad (۲) \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \quad (۱)$$

۴. با توجه به دنباله‌های  $b_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$  و  $c_n = \frac{1}{3n-1}$  و  $d_n = n^2 + 1$ ، حاصل عبارت  $b_4 + d_2 - c_1$  را به دست آورید. (خرداد ۹۸)

۵. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{1-n}{n+2}$  و  $b_n = 3^{n-1}$  و  $c_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ ، حاصل عبارت  $a_3 + b_2 + c_1$  را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

۶. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{n+6}{n}$  و  $b_n = n^2$  و  $c_n = (3)^{n-2}$ ، حاصل عبارت  $b_4 + a_3 - c_2$  را به دست آورید. (دی ۹۸)

۷. با توجه به جملات دنباله‌ی مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.  $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$

الف: رابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید. ب: ضابطه‌ی دنباله را به دست آورید. (خرداد ۹۹)

۸. پنج جمله‌ی اول دنباله‌ی  $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n$  را با فرض  $a_1 = 3$  بنویسید. (خرداد ۹۹)

۹. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$  و  $b_n = n + 4$  و  $c_n = \frac{n}{2}$ ، حاصل  $a_1 + b_4 - c_2$  را به دست آورید. (خرداد ۹۹)



۱۰. چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی  $(\frac{-1}{3})^n$  را به دست آورید. (خرداد ۹۹)

۱۱. برای جملات دنباله‌ی  $1, 4, 7, 10, 13, \dots$  (شهریور ۹۹)

الف: رابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.

ب: ضابطه‌ی تابعی دنباله را بنویسید.

۱۲. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{n+6}{3n-2}$  و  $b_n = n^2 - 1$  حاصل عبارت  $a_2 + b_4$  را به دست آورید. (شهریور ۹۹)

۱۳. چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی  $c_n = \frac{1}{n}$  را بنویسید. (شهریور ۹۹)

۱۴. برای جملات دنباله‌ی  $3, 8, 13, 18, 23, \dots$  (دی ۹۹)

الف: رابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.

ب: ضابطه‌ی تابعی دنباله را بنویسید.

۱۵. جمله‌ی پنجم از دنباله‌ی بازگشتی زیر را بنویسید. (دی ۹۹)

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 2$$

۱۶. جدول زیر را کامل کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

ضابطه‌ی دنباله	فرمول بازگشتی	۴ جمله‌ی اول دنباله
$a_n = 2n + 1$		

۱۷. با توجه به دنباله‌های  $a_n = 2^{2n+1}$  و  $b_n = \frac{15}{n+1}$  و  $c_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$  حاصل عبارت  $a_1 - b_4 + c_2$  را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۸. جمله‌ی عمومی (ضابطه‌ی تابعی) یک دنباله‌ای به صورت  $a_n = \frac{n+1}{n}$  است. چهار جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۹. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{2n-1}{n-2}$ ،  $b_n = n^2$  و  $c_n = \frac{n}{3}$  حاصل عبارت  $a_3 + b_5 + c_4$  را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

۲۰. اگر ضابطه‌ی تابعی (جمله‌ی عمومی) دنباله‌ای  $a_n = 2n - 1$  باشد: (دی ۱۴۰۱)  
الف: ۳ جمله‌ی اول دنباله را بنویسید.

ب: رابطه‌ی بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ج: نمودار دنباله را برای سه جمله‌ی اول رسم کنید.

۲۱. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ ،  $b_n = 2n^2 + 1$ ،  $c_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$  حاصل عبارت  $b_3 - a_2 + c_3$  را بیابید.

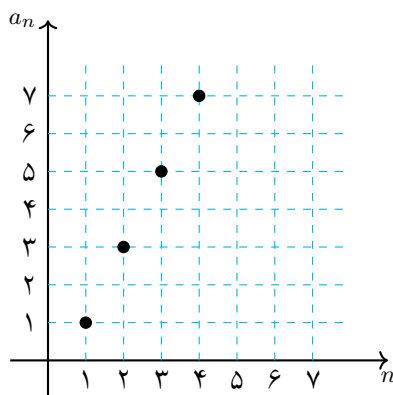
(دی ۱۴۰۱)

۲۲. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ ،  $b_n = n^2 + 1$  حاصل عبارت  $2a_1 + b_3$  را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

۲۳. جمله پنجم دنباله‌ی بازگشتی زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

۲۴. با توجه به نمودار دنباله‌ی داده شده، با نوشتن اعضای دنباله، جمله‌ی عمومی آن را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)



۲۵. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}$  و  $b_n = 3n - 2$  حاصل عبارت  $a_3 - b_2$  را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

۲۶. جمله دوم تا پنجم دنباله بازگشتی  $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$  را مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

۲۷. اگر  $a_n = 3^n$  و  $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$  باشد، حاصل  $a_2 \times b_1$  را بیابید. (دی ۱۴۰۲)

۲۸. جملات دنباله‌ای به صورت  $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots$  می‌باشد. رابطه‌ی بازگشتی این دنباله را بنویسید. (دی ۱۴۰۲)

۲۹. با توجه به دنباله‌های  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$  و  $b_n = n^2 + 2$  حاصل عبارت  $8a_3 + b_2$  را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۳)

۳۰. در دنباله‌ی بازگشتی  $a_{n+1} = 2a_n + n$  با جمله‌ی اول  $a_1 = 3$ ، چهار جمله‌ی اول را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۳)

## ۳.۱.۲ پاسخ نامه تشریحی

۱ الف) نادرست. چون داریم:

$$a_5 = 17, \quad n = 5 \Rightarrow a_{5+1} = a_5 + 3$$

$$a_6 = 17 + 3 = 20$$

(ب) نادرست. چون دنباله تابعی است که دامنه‌ی آن اعداد طبیعی می‌باشد.

۲ الف) با توجه به نکته‌ی ۱۳ چون به جملات دنباله ۴ تا ۴ اضافه شده لذا می‌توانیم جمله‌ی عمومی آن را به صورت زیر بنویسیم

$$a_n = 4n - 1$$

با توجه به اینکه جمله‌ی دهم دنباله را خواسته بنابراین به جای  $n$  عدد ۱۰ را جایگذاری می‌کنیم:

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 4 \times 10 - 1 = 39$$

(ب)  $-n^2$ (پ)  $-\frac{1}{4}$ با توجه به اینکه جمله‌ی چهارم دنباله را خواسته بنابراین به جای  $n$  عدد ۴ را جایگذاری می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1}{4}n - \frac{5}{4}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4} \times 4 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

(ت) ۲۲

با توجه به اینکه جمله‌ی پنجم دنباله را خواسته بنابراین به جای  $n$  عدد ۵ را جایگذاری می‌کنیم:

$$a_n = n^2 - 3$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5^2 - 3 = 22$$

(ث) رابطه بازگشتی

(ج) جمله یازدهم یا ۱۱

$$-28 = 5 - 3n \Rightarrow -28 - 5 = -3n \Rightarrow -33 = -3n \Rightarrow n = 11$$

۳ گزینه‌ی (۱)

چون اعداد یک در میان منفی هستند لذا ضریب (-۱) با توانهای زوج و فرد باید داشته باشیم، و دو گزینه ۱ و ۳ این

شرط را دارا می‌باشند اما اولین جمله دنباله یک مقدار مثبت است یعنی با جایگذاری عدد ۱ به جای  $n$  در گزینه‌های ۱ و ۳ می‌توان نتیجه گرفت گزینه ۱ درست است

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_1 = (-1)^{1+1} \left( \frac{1}{1+1} \right) = (-1)^2 \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

۴ ابتدا مقادیر  $b_4, d_2, c_1$  را محاسبه می‌کنیم:

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \quad d_n = n^2 + 1 \quad c_n = \frac{1}{3n-1}$$

$$b_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{2}-1} \quad d_2 = 2^2 + 1 \quad c_1 = \frac{1}{3 \times 1 - 1}$$

$$b_4 = -\frac{1}{2} \quad d_2 = 5 \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

$$b_4 + d_2 - c_1 = -\frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{2} = -1 + 5 = 4$$

۵ ابتدا مقادیر  $a_3, b_2, c_1$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = \frac{8-n}{n+2} \quad b_n = 3^{n-1} \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_3 = \frac{8-3}{3+2} \quad b_2 = 3^{2-1} \quad c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}$$

$$a_3 = \frac{5}{5} = 1 \quad b_2 = 3 \quad c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$a_3 + b_2 + c_1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

۶ ابتدا مقادیر  $b_4, a_3, c_2$  را محاسبه می‌کنیم:

$$b_n = n^2 \quad a_n = \frac{n+6}{n} \quad c_n = 3^{n-2}$$

$$b_4 = 4^2 \quad a_3 = \frac{3+6}{3} \quad c_2 = 3^{2-2}$$

$$b_4 = 16 \quad a_3 = \frac{9}{3} = 3 \quad c_2 = 3^0 = 1$$

$$b_4 + a_3 - c_2 = 16 + 3 - 1 = 18$$

۷ با توجه به نکته ۱۴ چون هر جمله نسبت به جمله قبلی  $\frac{1}{3}$  برابر شده است، بنابراین خواهیم داشت:  
(الف)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \quad a_1 = 9$$

(ب)

$$a_n = 3^{3-n}$$

۸ جمله  $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n$  یک رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد که در آن جمله‌ی اول یعنی  $a_1 = 3$  را داریم، بنابراین از جمله‌ی دوم شروع می‌کنیم و به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار می‌دهیم تا پنج جمله‌ی اول را به دست آوریم:

$$a_{n+1} = -a_n + (-1)^n, \quad a_1 = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = -a_1 + (-1)^1 \Rightarrow a_2 = -3 - 1 = -4$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = -a_2 + (-1)^2 \Rightarrow a_3 = -(-4) + (1) = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = -a_3 + (-1)^3 \Rightarrow a_4 = -5 + (-1) = -6$$

$$n = 4 \Rightarrow a_{4+1} = -a_4 + (-1)^4 \Rightarrow a_5 = -(-6) + (1) = 7$$

۹ ابتدا مقادیر  $a_1$ ،  $b_8$  و  $c_2$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = \frac{n^2}{(-1)^n} \quad b_n = n + 4 \quad c_n = \frac{n}{2}$$

$$a_1 = \frac{1^2}{(-1)^1} \quad b_8 = 8 + 4 \quad c_2 = \frac{2}{2}$$

$$a_1 = -1 \quad b_8 = 12 \quad c_2 = 1$$

$$a_1 + b_8 - c_2 = -1 + 12 - 1 = 10$$

۱۰ کافی است به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار دهیم:

$$a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = \left(\frac{-1}{2}\right)^1 = \frac{-1}{2}$$

$$a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 2 \Rightarrow a_2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 3 \Rightarrow a_3 = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$$

$$a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a_4 = \left(\frac{-1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

۱۱ طبق نکته‌ی ۱۳ چون به جملات دنباله ۳ تا ۳ تا اضافه شده است لذا خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 1$$

(ب)

$$a_n = 3n - 2$$

۱۲ ابتدا مقادیر  $a_2$  و  $b_4$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = \frac{n+6}{3n-2} \quad b_n = n^2 - 1$$

$$a_2 = \frac{2+6}{3 \times 2 - 2} \quad b_4 = 4^2 - 1$$

$$a_2 = \frac{8}{4} = 2 \quad b_4 = 16 - 1 = 15$$

$$a_2 + b_4 = 2 + 15 = 17$$

۱۳ کافی است به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را قرار دهیم:

$$c_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$c_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$$

$$c_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow c_4 = \frac{1}{4}$$

۱۴ با توجه به نکته‌ی ۱۳ چون به جملات ۵ تا ۵ تا اضافه شده خواهیم داشت:

(الف)

$$a_{n+1} = a_n + 5, \quad a_1 = 3$$

(ب)

$$a_n = 5n - 2$$

۱۵ جمله‌ی  $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$  یک رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد که در آن جملات اول، دوم و سوم یعنی

$a_1 = a_2 = a_3 = 2$  را داریم، بنابراین از جمله‌ی چهارم شروع می‌کنیم و به جای  $n$  اعداد ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم تا جملات چهارم و پنجم را به دست آوریم:

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 2$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+3} = a_1 + a_{1+1} + a_{1+2}$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+3} = a_2 + a_{2+1} + a_{2+2}$$

$$a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 2 + 6 = 10$$

۱۶ ابتدا چهار جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = 2n + 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_n = 2n + 1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_n = 2n + 1 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_n = 2n + 1 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

جملات دنباله به صورت  $3, 5, 7, 9, \dots$  است.

با توجه به نکته ۱۳ چون به جملات دنباله ۲ تا ۲ تا اضافه شده است، لذا خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 3$$

۱۷ ابتدا مقادیر  $a_1$ ،  $b_4$  و  $c_2$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = 2^{2n+1} \quad b_n = \frac{15}{n+1} \quad c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$a_1 = 2^{2 \times 1 + 1} \quad b_4 = \frac{15}{4+1} \quad c_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-2}$$

$$a_1 = 2^3 = 8 \quad b_4 = \frac{15}{5} = 3 \quad c_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$a_1 - b_4 + c_2 = 8 - 3 + 1 = 6$$

۱۸ کافی است به جای  $n$  اعداد  $1, 2, 3, 4$  را قرار دهیم:

$$a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

۱۹ ابتدا مقادیر  $a_3$ ،  $b_5$  و  $c_4$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n-1}{n-2} & b_n &= n^2 & c_n &= \frac{n}{3} \\ a_3 &= \frac{2 \times 3 - 1}{3 - 2} & b_5 &= 5^2 & c_4 &= \frac{4}{3} \\ a_3 &= \frac{5}{1} = 5 & b_5 &= 25 & c_4 &= 2 \\ a_3 + b_5 + c_4 &= 5 + 25 + 2 = 32 \end{aligned}$$

۲۰ ابتدا ۳ جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

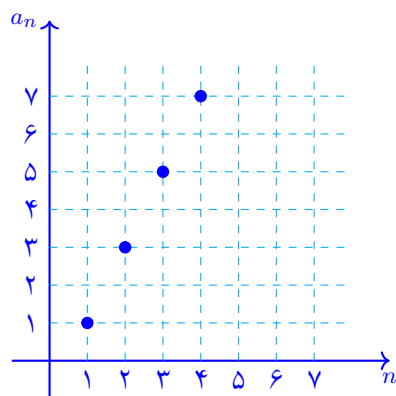
$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

جملات دنباله به صورت  $1, 3, 5, \dots$  است.

با توجه به نکته ۱۳ چون به جملات دنباله ۲ تا ۲ اضافه شده است، لذا خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 1$$



۲۱ ابتدا مقادیر  $b_3$ ،  $a_2$  و  $c_3$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} b_n &= 2n^2 + 1 & a_n &= \frac{2n-1}{n+1} & c_n &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ b_3 &= 2 \times 3^2 + 1 & a_2 &= \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} & c_3 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{3-1} \\ b_3 &= 2 \times 9 + 1 = 19 & a_2 &= \frac{3}{3} = 1 & c_3 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ b_3 - a_2 + c_3 &= 19 - 1 + \frac{1}{4} = 18 + \frac{1}{4} = \frac{73}{4} \end{aligned}$$



۲۲ ابتدا مقادیر  $a_1$  و  $b_3$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \quad b_n = n^2 + 1$$

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{2} = \frac{1}{2} \quad b_3 = 3^2 + 1 = 10$$

$$2a_1 + b_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 10 = 1 + 10 = 11$$

۲۳ جمله‌ی  $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$  یک رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد که در آن جملات اول، دوم و سوم یعنی  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  را داریم، بنابراین از جمله‌ی چهارم شروع می‌کنیم و به جای  $n$  اعداد ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم تا جملات چهارم و پنجم را به دست آوریم:

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+3} = a_1 + a_{1+1} + a_{1+2}$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+3} = a_2 + a_{2+1} + a_{2+2}$$

$$a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$$

۲۴ جملات دنباله عبارتند از:

$$1, 3, 5, \dots$$

با توجه به نکته ۱۳ چون به جملات دنباله ۲ تا ۲ اضافه شده است، لذا خواهیم داشت:

$$a_n = 2n - 1$$

۲۵ ابتدا مقادیر  $a_3$  و  $b_2$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} \Rightarrow a_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{3-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$$

$$b_n = 3n - 2 \Rightarrow b_2 = 3 \times 2 - 2 = 4$$

$$a_3 - b_2 = 1 - 4 = -3$$

۲۶ کافی است به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار دهیم:

$$a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 2$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = a_1 + 1 \Rightarrow a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = a_2 + 2 \Rightarrow a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 5 + 3 = 8$$

$$n = 4 \Rightarrow a_{4+1} = a_4 + 4 \Rightarrow a_5 = 8 + 4 = 12$$

۲۷ ابتدا مقادیر  $a_2$  و  $b_1$  را محاسبه می کنیم:

$$a_n = 3^n \Rightarrow a_2 = 3^2 = 9$$

$$b_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \Rightarrow b_1 = \left(-\frac{1}{4}\right)^{1+1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 \times b_1 = 9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

۲۸ با توجه به نکته‌ی ۱۴ چون جملات دنباله  $\frac{1}{3}$  برابر شده است، بنابراین خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, a_1 = 9$$

۲۹ ابتدا مقادیر  $a_3$  و  $b_2$  را محاسبه می کنیم:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \Rightarrow a_3 = \frac{(-1)^3}{3+1} = \frac{-1}{4}$$

$$b_n = n^2 + 2 \Rightarrow b_2 = 2^2 + 2 = 6$$

$$8a_3 + b_2 = 8 \times \frac{-1}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

۳۰ کافی است به جای  $n$  اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم:

$$a_{n+1} = 2a_n + n, a_1 = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = 2a_1 + 1 \Rightarrow a_2 = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = 2a_2 + 2 \Rightarrow a_3 = 2 \times 7 + 2 = 16$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = 2a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 2 \times 16 + 3 = 35$$

## ۲.۲ درس دوم: دنباله‌های حسابی

### ۱.۲.۲ مفاهیم و نکات درس

#### دنباله‌ی حسابی:

دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن به جز جمله‌ی اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله‌ی قبل از خود به دست می‌آید، **دنباله‌ی حسابی** نامیده می‌شود. به عبارت دیگر یک دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای به صورت:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

است که در آن  $a$  جمله‌ی اول و عدد ثابت  $d$  «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به فرم کلی

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

می‌باشد. که در آن  $a_1$  جمله‌ی اول،  $n$  شماره‌ی جمله و  $d$  اختلاف مشترک می‌باشد.  $d$  را اختلاف مشترک دنباله‌ی حسابی می‌نامند؛ زیرا همه‌ی جملات دنباله در یک ویژگی مشترک‌اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت  $d$  است.

#### ضابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی حسابی:

نکته ۱۵ در یک دنباله‌ی حسابی اگر اختلاف مشترک مثبت باشد، جملات دنباله افزایشی (صعودی) و اگر اختلاف مشترک منفی باشد، جملات دنباله کاهشی (نزولی) خواهد بود. همچنین اگر اختلاف مشترک صفر باشد، جملات دنباله ثابت خواهد بود:

$$d < 0 \Rightarrow \text{کاهشی (نزولی)} \quad d = 0 \Rightarrow \text{ثابت} \quad d > 0 \Rightarrow \text{افزایشی (صعودی)}$$

با جمع شدن هر جمله با اختلاف مشترک  $d$ ، جمله‌ی بعدی به دست می‌آید. بنابراین فرم کلی ضابطه بازگشتی دنباله‌های حسابی به صورت زیر می‌باشد.

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_1 = a$$

#### نمودار دنباله‌ی حسابی:

هر دنباله‌ی حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی  $d$  است.

$$y = mx + h$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

توجه کنید چون دنباله‌ها توابعی با دامنه‌ی اعداد طبیعی می‌باشند ( $n \in \mathbb{N}$ )، لذا نمودار هر دنباله‌ی حسابی از یک سری نقاط تشکیل می‌شود که تمامی این نقاط روی یک خط قرار دارند.

مثال ۳۴ تابعی با ضابطه‌ی  $y = 2x - 1$  را در نظر بگیرید:

الف) دنباله‌ی ساخته شده از تابع را بنویسید.

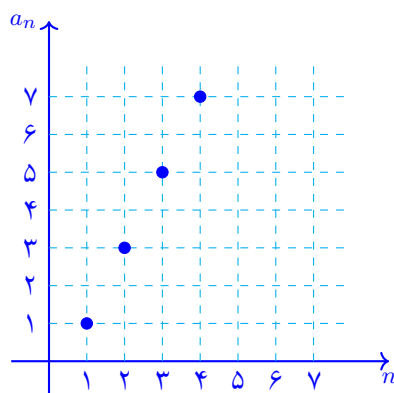
ب) چهار جمله اول دنباله را نوشته و نمودار آن را رسم کنید.

الف)

$$a_n = 2n - 1$$

ب)

$$1, 3, 5, 7, \dots$$



نکته ۱۶ توجه کنید که برای نوشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به جمله‌ی اول و اختلاف مشترک نیاز داریم لذا با توجه به مطالب ذکر شده اگر جمله‌ی  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشد، **اختلاف مشترک** را می‌توان از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

همچنین برای پیدا کردن **جمله‌ی اول** می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

مثال ۳۵ یازدهمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۵۲ و جمله‌ی نوزدهم آن ۹۲ است. جمله‌ی سی‌ام این دنباله حسابی را به دست آورید.

برای به دست آوردن  $a_{30}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ ، به دست آوردن  $a_1$  و  $d$  ضروری است. داده‌ها و مقادیر مجهول را مشخص می‌کنیم:

$$a_{11} = 52 \quad a_{19} = 92 \quad a_{30} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_{11}$  یا  $a_{19}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آنها در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \Rightarrow 52 = a_1 + (11-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 52 - 50 = 2$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$ ، جمله‌ی عمومی را به دست آورده و سپس  $a_{30}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)5 = 2 + 5n - 5$$

$$\Rightarrow a_n = 5n - 3 \Rightarrow a_{30} = 5 \times 30 - 3 = 150 - 3 = 147$$

### واسطه‌ی حسابی:

به میانگین دو عدد  $a$  و  $b$ ، واسطه‌ی حسابی آن دو عدد می‌گوییم که برابر با  $\frac{a+b}{2}$  است. مثلاً واسطه‌ی حسابی دو عدد ۳ و ۹ برابر است با:  $\frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

### درج چند واسطه‌ی حسابی:

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  عدد بنویسیم که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند، مقدار اختلاف مشترک ( $d$ ) را می‌توان از رابطه‌ی

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

محاسبه کرد که در آن  $a$  اولین عدد،  $b$  آخرین عدد و  $n$  تعداد جملات می‌باشد.

مثال ۳۶ سه عدد را به گونه‌ای بین ۱۲ و ۲۴ قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند.

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{24-12}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$$

$$12, 15, 18, 21, 24$$

### مجموع $n$ جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی:

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را می‌توان از رابطه‌ی

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (1.2)$$

محاسبه کرد که در آن  $a_1$  اولین جمله،  $a_n$  آخرین جمله و  $n$  تعداد جملات است. توجه کنید اگر جمله آخر را نداشته باشیم در این صورت با جایگذاری جمله عمومی در رابطه (۱.۲) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم که می‌توان مجموع  $n$  جمله‌ی اول را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (2.2)$$

مثال ۳۷ مجموع سی جمله‌ی اول اعداد فرد را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_1 = 1 & S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ d = 2 & S_{30} = \frac{30}{2}(2 \times 1 + (30-1)(2)) \\ n = 30 & S_{30} = 15(2 + 29 \times 2) \\ S_{30} = ? & S_{30} = 15(60) = 900 \end{cases}$$

## ۲.۲.۲ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.  
 الف) هر دنباله‌ی حسابی، یک تابع خطی است که شیب آن همان اختلاف مشترک جملات دنباله است. (شهریور ۱۴۰۱ و خرداد ۱۴۰۲)
- ب) اختلاف مشترک در دنباله‌ی اعداد  $۱۲, ۰۰۰, ۸, ۵, ۲$  برابر ۳ است. (دی ۱۴۰۱)
- پ) اگر در یک دنباله حسابی اختلاف مشترک  $(d)$  عددی مثبت باشد، جملات دنباله کاهشی می‌شود. (شهریور ۱۴۰۲)
- ت) دنباله‌ی  $۱, ۴, ۹, ۱۶, ۰۰۰$  یک دنباله‌ی حسابی است. (خرداد ۱۴۰۳)
۲. جاهای خالی را با پاسخ درست کامل کنید.  
 بین دو عدد ۳ و ۱۹ ..... واسطه‌ی حسابی با اختلاف مشترک ۴ می‌توان نوشت. (شهریور ۹۸)
۳. گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.  
 با مصرف یک قرص آسپرین،  $۲۵^{\circ}$  میلی‌گرم دارو به بدن شخصی وارد می‌شود و پس از پایان هر یک ساعت،  $۱۵$  میلی‌گرم دارو در سطح خون کاهش می‌یابد. چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش  $۱۳^{\circ}$  میلی‌گرم می‌شود؟ (شهریور ۱۴۰۲)
- |      |      |      |       |
|------|------|------|-------|
| ۷(۱) | ۸(۲) | ۹(۳) | ۱۰(۴) |
|------|------|------|-------|
۴. یازدهمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۵۲ و جمله‌ی نوزدهم آن ۹۲ است. جمله‌ی سی‌ام این دنباله را مشخص کنید. (دی ۹۷)
۵. مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را به دست آورید. (دی ۹۷)
- $$۱, ۵, ۹, ۰۰۰$$
۶. سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد  $۱۰$  و  $۱۸$  قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. (دی ۹۷)
۷. مجموع سی جمله‌ی اول اعداد فرد را به دست آورید. (خرداد ۹۸ و خرداد ۹۹)
۸. یازدهمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۵۲ و جمله‌ی نوزدهم آن ۹۲ است. جمله‌ی بیست و ششم این دنباله را مشخص کنید. (خرداد ۹۸)
۹. در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی نهم برابر ۶۱ و جمله‌ی شانزدهم برابر ۹۶ است. اختلاف مشترک و جمله‌ی سی‌ام این دنباله را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

۱۰. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله  $35, 31, 27, \dots$  را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

۱۱. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله  $4, 7, 10, \dots$  را به دست آورید. (دی ۹۸)

۱۲. هشتمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۶۵ و جمله‌ی شانزدهم آن ۱۰۵ است. جمله‌ی بیست و نهم این دنباله حسابی را به دست آورید. (دی ۹۸)

۱۳. هفتمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۴۵ و جمله‌ی پانزدهم آن ۹۳ است. جمله‌ی سی و یکم این دنباله را به دست آورید. (خرداد ۹۹)

۱۴. الف) مجموع شانزده جمله‌ی اول اعداد زوج را به دست آورید. (خرداد ۹۹)  
ب) در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول ۲۵ و اختلاف مشترک برابر با ۱۸ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۶۰۱ است؟ (خرداد ۹۹ و شهریور ۹۹)

۱۵. سه عدد را به گونه‌ای میان ۱۰ و ۲۶ قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل دهد. (به دست آوردن اختلاف مشترک الزامی است). (خرداد ۹۹)

۱۶. الف) چهار جمله اول از دنباله‌ی زیر را بنویسید. (شهریور ۹۹)  
ب) آیا این دنباله حسابی است؟

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 4 \\ a_1 = -2 \end{cases}$$

۱۷. اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = -5 + 3(n-1)$  باشد، جمله‌ی اول و اختلاف مشترک را به دست آورید. (شهریور ۹۹)

۱۸. مجموع سی جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی روبرو را به دست آورید. (شهریور ۹۹)

$$-1, 4, 9, \dots$$

۱۹. با توجه به رابطه‌ی  $\begin{cases} a_{n+1} = 5 + a_n \\ a_1 = -2 \end{cases}$  مطلوب است محاسبه‌ی  $S_{12}$ . (شهریور ۹۹)

۲۰. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول ۱۲ و اختلاف مشترک برابر با ۲۰ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۵۹۲ است؟ (دی ۹۹)



۲۱. در یک دنباله‌ی حسابی  $a_6 + a_4 + a_8 = 90$  باشد، جمله‌ی ششم دنباله چقدر است؟ (دی ۹۹)

۲۲. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را به دست آورید. (دی ۹۹)

$$-10, -6, -2, 2, 6, \dots$$

۲۳. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول  $-17$  و جمله‌ی دهم برابر  $10$  است. جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

۲۴. در دنباله‌ی حسابی زیر، مجموع ۱۶ جمله‌ی اول را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$11, 8, 5, \dots$$

۲۵. کدام یک از جملات عمومی زیر مربوط به دنباله‌ی حسابی است؟ اختلاف مشترک آن را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\text{الف) } a_n = n(n-1)$$

$$\text{ب) } b_n = 3(n-2)$$

۲۶. سه عدد را به گونه‌ای میان  $15$  و  $23$  قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل دهد. (شهریور ۱۴۰۰)

۲۷. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

۲۸. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول برابر  $25$  و اختلاف مشترک برابر با  $20$  است. کدام جمله‌ی دنباله برابر  $225$  است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

۲۹. جمله‌ی یازدهم یک دنباله‌ی حسابی  $32$  و جمله‌ی نوزدهم آن  $72$  است. جمله‌ی سی‌ام این دنباله را مشخص کنید. (دی ۱۴۰۰)

۳۰. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول برابر  $25$  و اختلاف مشترک برابر با  $10$  است. کدام جمله‌ی دنباله برابر  $225$  است؟ (دی ۱۴۰۰)

۳۱. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

$$4, 10, 16, 22, \dots$$

۳۲. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول ۵ و اختلاف مشترک برابر ۷ است. (خرداد ۱۴۰۱)
- الف) جمله‌ی یازدهم این دنباله را به دست آورید.  
ب) کدام جمله‌ی دنباله، برابر ۹۶ است؟
۳۳. در دنباله‌ی حسابی  $3, 7, 11, 15, \dots$  مجموع بیست جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱)
۳۴. در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۳ و اختلاف مشترک ۶: (شهریور ۱۴۰۱)
- الف) جمله‌ی پانزدهم را به دست آورید.  
ب) مجموع ده جمله‌ی اول را بنویسید.
۳۵. الف) چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی  $a_n = n^2 + 1$  را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)  
ب) رابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی  $1^0, 17, 24, \dots$  را بنویسید.
۳۶. سه عدد را به گونه‌ای میان دو عدد  $1^0$  و ۲۲ قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل دهد. (شهریور ۱۴۰۱)
۳۷. جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۵ و جمله‌ی دهم آن ۳۲ است. (دی ۱۴۰۱)
- الف) اختلاف مشترک را بیابید.  
ب) مجموع بیست جمله‌ی اول آن را به دست آورید.
۳۸. یازدهمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی ۴۷ و جمله‌ی هفدهم آن ۷۷ است. جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)
۳۹. در دنباله‌ی حسابی مقابل:  $2, 5, 8, 11, \dots$  (خرداد ۱۴۰۲)
- الف) جمله‌ی چندم آن ۹۵ است؟  
ب) مجموع چهل جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.
۴۰. در دنباله حسابی  $1, 5, 9, \dots, 401$  (شهریور ۱۴۰۲)
- الف) جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.  
ب) مجموع جملات دنباله را به دست آورید.
۴۱. میان دو عدد ۱۲ و ۵۲ چهار عدد را به گونه‌ای قرار دهید که شش جمله‌ی حاصل، یک دنباله‌ی حسابی افزایشی تشکیل دهند. (شهریور ۱۴۰۲)
۴۲. سه عدد به گونه‌ای میان  $1^0$  و ۲۶ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند. (دی ۱۴۰۲)

۴۳. یک طراح برای یک سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی و در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای این سالن با ۱۶۸ صندلی، باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟ (دی ۱۴۰۲)

۴۴. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم برابر ۵۳ و جمله‌ی بیست‌وپنجم برابر ۱۰۷ است. (خرداد ۱۴۰۳)  
الف) جمله‌ی اول و اختلاف مشترک دنباله را حساب کنید.  
ب) جمله‌ی پنجاه‌ویکم دنباله را مشخص کنید.

۴۵. بین اعداد ۷ و ۲۷ سه عدد را طوری قرار دهید که این پنج عدد با هم، تشکیل دنباله‌ی حسابی افزایشی دهند. (خرداد ۱۴۰۳)

۴۶. مدت زمان مطالعه‌ی دانش‌آموزی در درس ریاضی و آمار بر حسب دقیقه به صورت دنباله‌ی زیر است. (خرداد ۱۴۰۳)

۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ...

مجموع مدت زمان مطالعه‌ی دانش‌آموز در شانزده روز اول را بیابید. (با استفاده از فرمول مجموع)

## ۳.۲.۲ پاسخ نامه تشریحی

۱ الف) درست

ب) نادرست

پ) نادرست

ت) نادرست

۲ سه

چون اختلاف مشترک ۴ یعنی هر جمله از اضافه شدن عدد ۴ به جمله‌ی ماقبل خود به دست می‌آید:

$$3, 7, 11, 15, 19$$

بنابراین بین ۳ تا ۱۹ سه عدد با اختلاف مشترک ۴ خواهیم داشت.

۳ گزینه ۲

داریم:

$$a_1 = 250 \quad d = -15 \quad a_n = 130 \quad n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  خواهیم داشت:

$$130 = 250 + (n-1)(-15) \Rightarrow 250 - 15n + 15 = 130 \Rightarrow 15n = 250 + 15 - 130 \Rightarrow 15n = 135 \Rightarrow n = 9$$

یعنی ۸ ساعت پس از مصرف دارو سطح آسپرین در بدن  $130^\circ$  میلی‌گرم می‌شود.

۴

توجه ۲ برای حل مسائل بهتر است داده‌های مسئله و خواسته‌ی مسئله را در یک گوشه یادداشت کنیم.

برای به دست آوردن  $a_3$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، به دست آوردن  $a_1$  و  $d$  ضروری است. داده‌ها و مقادیر مجهول را مشخص می‌کنیم:

$$a_{11} = 52 \quad a_{19} = 92 \quad a_{30} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_{11}$  یا  $a_{19}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \Rightarrow 52 = a_1 + (11-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 52 - 50 = 2$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$  در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی سی‌ام را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{30} = 2 + (30-1)5 = 2 + 29 \times 5 = 2 + 145 = 147$$

۵ با توجه به دنباله‌ی  $1, 5, 9, \dots$  داریم:

$$a_1 = 1 \quad d = 4 \quad n = 10 \quad S_{10} = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 1 + (10-1)4) = 5(2 + 36) = 190$$

۶ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a = 10 \quad b = 18 \quad n = 3$$

که با توجه به مقادیر داده شده، اختلاف مشترک را به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{18-10}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$10, 12, 14, 16, 18$$

۷ دنباله‌ی اعداد فرد عبارتند از:

$$1, 3, 5, \dots$$

با توجه به دنباله‌ی فوق، داریم:

$$a_1 = 1 \quad d = 2 \quad n = 30 \quad S_{30} = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{30} = \frac{30}{2}(2 \times 1 + (30-1)2) = 15(2 + 58) = 900$$

۸ برای به دست آوردن  $a_{26}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، به دست آوردن  $a_1$  و  $d$  ضروری است. داده‌ها و مقادیر مجهول را مشخص می‌کنیم:

$$a_{11} = 52 \quad a_{19} = 92 \quad a_{26} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_{11}$  یا  $a_{19}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \Rightarrow 52 = a_1 + (11-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 52 - 50 = 2$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$ ، در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی بیست و ششم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{26} = 2 + (26-1)5 = 2 + 25 \times 5 = 2 + 125 = 127$$

۹ برای به دست آوردن  $a_{30}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  به دست آوردن  $a_1$  و  $d$  ضروری است:

$$a_9 = 61 \quad a_{16} = 96 \quad a_{30} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{16} - a_9}{16 - 9} = \frac{96 - 61}{7} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_9$  یا  $a_{16}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_9 = a_1 + (9-1)d \Rightarrow 61 = a_1 + (9-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 61 - 40 = 21$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$  در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی سی‌ام را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{30} = 21 + (30-1)5 = 21 + 145 = 166$$

۱۰ با توجه به دنباله‌ی  $35, 31, 27, \dots$  داریم:

$$a_1 = 35 \quad d = -4 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 35 + (20-1)(-4)) = 10(70 - 76) = -60$$

۱۱ با توجه به دنباله‌ی  $۴, ۷, ۱۰, \dots$  داریم:

$$a_1 = 4 \quad d = 3 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 4 + (20-1)(3)) = 10(8 + 57) = 650$$

۱۲ برای به دست آوردن  $a_{29}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، ابتدا باید مقادیر  $a_1$  و  $d$  را به دست آوریم:

$$a_8 = 65 \quad a_{16} = 105 \quad a_{29} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{16} - a_8}{16 - 8} = \frac{105 - 65}{8} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_8$  یا  $a_{16}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_8 = a_1 + (8-1)d \Rightarrow 65 = a_1 + (8-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 65 - 35 = 30$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$ ، در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی بیست و نهم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{29} = 30 + (29-1)5 = 30 + 140 = 170$$

۱۳ برای به دست آوردن  $a_{31}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، ابتدا باید مقادیر  $a_1$  و  $d$  را به دست آوریم:

$$a_7 = 45 \quad a_{15} = 93 \quad a_{31} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{15} - a_7}{15 - 7} = \frac{93 - 45}{8} = 6$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_7$  یا  $a_{15}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_7 = a_1 + (7-1)d \Rightarrow 45 = a_1 + (7-1) \times 6 \Rightarrow a_1 = 45 - 36 = 9$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$  در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی سی‌ویکم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{31} = 9 + (31-1)6 = 9 + 30 \times 6 = 9 + 180 = 189$$

۱۴ الف) دنباله‌ی اعداد زوج عبارتند از:

$$2, 4, 6, \dots$$

با توجه به جملات دنباله، داریم:

$$a_1 = 2 \quad d = 2 \quad n = 16 \quad S_{16} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{16} = \frac{16}{2}(2 \times 2 + (16-1)2) = 8(4 + 30) = 272$$

ب) مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 25 \quad d = 18 \quad a_n = 601 \quad n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در جمله‌ی عمومی خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$601 = 25 + (n-1)(18)$$

$$601 = 25 + 18n - 18$$

$$601 = 18n + 7$$

$$594 = 18n$$

$$n = 33$$

۱۵ با توجه به فرض سوال داریم:

$$a = 10 \quad b = 26 \quad n = 3$$

با توجه به مقادیر داده شده اختلاف مشترک را به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{26-10}{3+1} = \frac{16}{4} = 4$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$10, 14, 18, 22, 26$$



۱۶ الف) جمله  $a_{n+1} = -a_n + 4$  یک رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد که در آن جمله‌ی اول یعنی  $a_1 = -2$  را داریم، بنابراین از جمله‌ی دوم شروع می‌کنیم و به جای  $n$  اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار می‌دهیم تا چهار جمله‌ی اول را به دست آوریم:

$$a_{n+1} = -a_n + 4, \quad a_1 = -2$$

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = -a_1 + 4 \Rightarrow a_2 = -(-2) + 4 = 6$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = -a_2 + 4 \Rightarrow a_3 = -(6) + 4 = -2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_{3+1} = -a_3 + 4 \Rightarrow a_4 = -(-2) + 4 = 6$$

جملات دنباله عبارتند از:

$$-2, 6, -2, 6$$

ب) خیر دنباله حسابی نیست.

۱۷ کافی است در عبارت  $a_n = -5 + 3(n-1)$  به جای  $n$  اعداد ۱ و ۲ را قرار دهیم، تا جملات اول و دوم را به دست آوریم:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = -5 + 3(1-1) \Rightarrow a_1 = -5$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -5 + 3(2-1) \Rightarrow a_2 = -2$$

$$d = -2 - (-5) = -2 + 5 = 3$$

۱۸ با توجه به دنباله‌ی  $1, 4, 9, \dots$  داریم:

$$a_1 = -1 \quad d = 5 \quad n = 30 \quad S_{30} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{30} = \frac{30}{2}(2 \times (-1) + (30-1)(5)) = 15(-2 + 145) = 15 \times 143 = 2145$$

۱۹ عبارت  $\begin{cases} a_{n+1} = 5 + a_n \\ a_1 = -2 \end{cases}$  یک رابطه‌ی بازگشتی می‌باشد که در آن:

$$a_1 = -2 \quad d = 5 \quad n = 12 \quad S_{12} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times (-2) + (12-1)(5)) = 6(-4 + 55) = 6 \times 51 = 306$$

۲۰ اطلاعات سوال به صورت زیر می باشد:

$$a_1 = 12 \quad d = 20 \quad a_n = 592 \quad n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در جمله عمومی خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$592 = 12 + (n - 1)(20)$$

$$592 = 12 + 20n - 20$$

$$592 = 20n - 8$$

$$600 = 20n$$

$$n = 30$$

۲۱ اگر در جمله عمومی به جای  $n$  اعداد ۴ و ۶ و ۸ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_1 + (4 - 1)d = a_1 + 3d$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_1 + (6 - 1)d = a_1 + 5d$$

$$n = 8 \Rightarrow a_8 = a_1 + (8 - 1)d = a_1 + 7d$$

با جایگذاری عبارتهای فوق به جای  $a_6 + a_4 + a_8 = 90$  خواهیم داشت:

$$a_6 + a_4 + a_8 = 90$$

$$a_1 + 5d + a_1 + 3d + a_1 + 7d = 90$$

$$3a_1 + 15d = 90$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر عدد ۳، مقدار  $a_6$  حاصل خواهد شد. یعنی:

$$a_6 = a_1 + 5d = 30$$

۲۲ با توجه به دنباله  $10, -6, -2, 2, 6, \dots$  داریم:

$$a_1 = -10 \quad d = 4 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times (-10) + (20 - 1)(4)) = 10(-20 + 76) = 10 \times 56 = 560$$

۲۳ با توجه به فرم کلی جمله عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، مقادیر  $a_1$  و  $d$  را باید مشخص کنیم:

$$a_1 = -17 \quad a_{10} = 10 \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{10} - a_1}{10 - 1} = \frac{10 - (-17)}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$ ، جمله‌ی عمومی حاصل می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = -17 + (n-1)3$$

$$a_n = -17 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n - 20$$

۲۴ با توجه به دنباله‌ی  $11, 8, 5, \dots$  داریم:

$$a_1 = 11 \quad d = -3 \quad n = 16 \quad S_{16} = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{16} = \frac{16}{2}(2 \times 11 + (16-1)(-3)) = 8(22 - 45) = 8 \times -23 = -184$$

۲۵ قسمت (ب) دنباله‌ی حسابی است.

برای به دست آوردن اختلاف مشترک چندین جمله از دنباله  $b_n = 3(n-2)$  را به دست می‌آوریم:

$$n = 1 \Rightarrow b_1 = 3(1-2) = -3$$

$$n = 2 \Rightarrow b_2 = 3(2-2) = 0$$

$$n = 3 \Rightarrow b_3 = 3(3-2) = 3$$

جملات دنباله عبارتند از:

$$-3, 0, 3, \dots$$

$$d = 3$$

۲۶ با توجه به فرض سوال داریم:

$$a = 15 \quad b = 23 \quad n = 3$$

با توجه به مقادیر داده شده اختلاف مشترک را به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{23-15}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$15, 17, 19, 21, 23$$

۲۷ با توجه به دنباله‌ی  $1, 3, 5, 7, \dots$  داریم:

$$a_1 = 1 \quad d = 2 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 1 + (20-1)2) = 10(2 + 38) = 400$$

۲۸ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 25 \quad d = 20 \quad a_n = 225 \quad n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در جمله‌ی عمومی خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$225 = 25 + (n-1)(20)$$

$$225 = 25 + 20n - 20$$

$$225 = 20n + 5$$

$$220 = 20n$$

$$n = 11$$

۲۹ برای به دست آوردن  $a_{30}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  به دست آوردن  $a_1$  و  $d$  ضروری است:

$$a_{11} = 32 \quad a_{19} = 72 \quad a_{30} = ? \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{72 - 32}{8} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_{11}$  یا  $a_{19}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \Rightarrow 32 = a_1 + (11-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 32 - 50 = -18$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$  در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی سی‌ام را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{30} = -18 + (30-1)5 = -18 + 145 = 127$$

۳۰ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 25 \quad d = 10 \quad a_n = 225 \quad n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در جمله‌ی عمومی خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$225 = 25 + (n-1)(10)$$

$$225 = 25 + 10n - 10$$

$$225 = 10n + 15$$

$$210 = 10n$$

$$n = 21$$

۳۱ با توجه به دنباله‌ی  $4, 10, 16, 22, \dots$  داریم:

$$a_1 = 4 \quad d = 6 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times (4) + (20-1)(6)) = 10(8 + 114) = 10 \times 122 = 1220$$

۳۲ الف) مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 5 \quad d = 7 \quad n = 11 \quad a_{11} = ?$$

با قرار دادن مقادیر بالا در جمله عمومی دنباله، جمله یازدهم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{11} = 5 + (11 - 1)(7)$$

$$a_{11} = 5 + 70$$

$$a_{11} = 75$$

ب) با توجه به صورت سوال مقادیر و مجهول های زیر را داریم:

$$a_1 = 5 \quad d = 7 \quad a_n = 96 \quad n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در جمله عمومی خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$96 = 5 + (n - 1)(7)$$

$$96 = 5 + 7n - 7$$

$$96 = 7n - 2$$

$$98 = 7n$$

$$n = 14$$

۳۳ با توجه به دنباله ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ... داریم:

$$a_1 = 3 \quad d = 4 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times (3) + (20 - 1)(4)) = 10(6 + 76) = 10 \times 82 = 820$$

۳۴ الف) مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 3 \quad d = 6 \quad n = 15 \quad a_{15} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در جمله عمومی دنباله، جمله پانزدهم را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{15} = 3 + (15 - 1)(6)$$

$$a_{15} = 3 + 84$$

$$a_{15} = 87$$

(ب)

$$a_1 = 3 \quad d = 6 \quad n = 10 \quad S_{10} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times (3) + (10 - 1)(6)) = 5(6 + 54) = 5 \times 60 = 300$$

۳۵ الف) کافی است در دنباله  $a_n = n^2 + 1$  به جای  $n$  اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را قرار دهیم:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 1 \Rightarrow a_2 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 1 \Rightarrow a_3 = 10$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 1 \Rightarrow a_4 = 17$$

(ب) چون  $d = 7$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = a_n + 7, \quad a_1 = 10$$

۳۶ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a = 10 \quad b = 22 \quad n = 3$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی زیر اختلاف مشترک را به دست می آوریم:

$$d = \frac{b - a}{n + 1} = \frac{22 - 10}{3 + 1} = \frac{12}{4} = 3$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$10, 13, 16, 19, 22$$

۳۷ الف) مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 5 \quad a_{10} = 32 \quad d = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی زیر، نسبت مشترک را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$d = \frac{a_{10} - a_1}{10 - 1}$$

$$d = \frac{32 - 5}{9}$$

$$d = \frac{27}{9} = 3$$

ب) با توجه به صورت سوال مقادیر و مجهول‌های زیر را داریم:

$$a_1 = 5 \quad d = 3 \quad n = 20 \quad S_{20} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 5 + (20-1)(3)) = 10(10 + 57) = 10 \times 67 = 670$$

۳۸ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_{11} = 47 \quad a_{17} = 77 \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{17} - a_{11}}{17 - 11} = \frac{77 - 47}{6} = 5$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_{11}$  یا  $a_{17}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n-1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = a_1 + (11-1)d \Rightarrow 47 = a_1 + (11-1) \times 5 \Rightarrow a_1 = 47 - 50 = -3$$

۳۹ الف) مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 2 \quad d = 3 \quad a_n = 95 \quad n = ?$$



با جایگذاری مقادیر فوق در جمله‌ی عمومی خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$95 = 2 + (n - 1)(3)$$

$$95 = 2 + 3n - 3$$

$$95 = 3n - 1$$

$$96 = 3n$$

$$n = 32$$

(ب) مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 2 \quad d = 3 \quad n = 40 \quad S_{40} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \times 2 + (40 - 1)(3)) = 20(4 + 117) = 20 \times 121 = 2420$$

الف) با توجه به دنباله‌ی  $1, 5, 9, \dots, 401$  داریم: ۴۰

$$a_1 = 1 \quad d = 4 \quad a_n = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  خواهیم داشت:

$$a_n = 1 + (n - 1)4 = 4n - 4 + 1 = 4n - 3$$

(ب) برای به دست آوردن مجموع جملات ابتدا باید تعداد جملات را به دست آوریم. با جایگذاری  $401$  به جای  $a_n$  در جمله عمومی به دست آمده از قسمت الف، خواهیم داشت:

$$401 = 4n - 3 \Rightarrow 4n = 401 + 3 = 404 \Rightarrow n = \frac{404}{4} = 101$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه زیر مجموع جملات حاصل می‌شود:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{101} = \frac{101 \times (1 + 401)}{2} = \frac{101 \times 402}{2} = 20301$$

۴۱ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a = 12 \quad b = 52 \quad n = 4$$

با توجه به مقادیر داده شده، اختلاف مشترک را به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{52-12}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$12, 20, 28, 36, 44, 52$$

۴۲ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a = 10 \quad b = 26 \quad n = 3$$

با توجه به مقادیر داده شده، اختلاف مشترک را به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{26-10}{3+1} = \frac{16}{4} = 4$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$10, 14, 18, 22, 26$$

۴۳ جملات دنباله عبارتند از ۱۵, ۱۸, ۲۱, ... بنابراین:

$$a_1 = 15 \quad d = 3 \quad S_n = 168 \quad n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$168 = \frac{n}{2}(2 \times 15 + (n-1) \times 3)$$

$$336 = n(30 + 3n - 3)$$

$$336 = n(3n + 27)$$

$$336 = 3n^2 + 27n$$

$$3n^2 + 27n - 336 = 0$$

با تقسیم طرفین معادله بر ۳ خواهیم داشت:

$$n^2 + 9n - 112 = 0 \Rightarrow (n-7)(n+16) = 0 \quad \begin{cases} \text{ق ق } (n-7) = 0 \Rightarrow n = 7 \\ \text{غ ق } (n+16) = 0 \Rightarrow n = -16 \end{cases}$$

۴۴ داده‌های مسئله به صورت زیر است:

$$a_7 = 53 \quad a_{25} = 107 \quad a_1 = ? \quad d = ?$$

الف) با توجه به نکته ۱۶ مقدار  $d$  را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{25} - a_7}{25 - 7} = \frac{107 - 53}{18} = \frac{54}{18} = 3$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_7$  یا  $a_{25}$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d \Rightarrow 53 = a_1 + 6 \times 3 \Rightarrow a_1 = 53 - 18 = 35$$

ب) با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $d$  در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی پنجاه‌ویکم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_{51} = 35 + (51 - 1) \times 3 = 35 + 150 = 185$$

۴۵ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a = 7 \quad b = 27 \quad n = 3$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی زیر اختلاف مشترک را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{b - a}{n + 1} = \frac{27 - 7}{3 + 1} = \frac{20}{4} = 5$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$7, 12, 17, 22, 27$$

۴۶ مقادیر داده شده در سوال به صورت زیر می‌باشند:

$$a_1 = 10 \quad d = 5 \quad n = 16 \quad S_{16} = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$  خواهیم داشت:

$$S_{16} = \frac{16}{2}(2 \times 10 + (16 - 1) \times 5) = 8(20 + 75) = 8 \times 95 = 760$$



## فصل ۳

# الگوهای غیرخطی

## ۱.۳ درس اول: دنباله‌ی هندسی

### ۱.۱.۳ مفاهیم و نکات درس

#### دنباله‌ی هندسی:

دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن به جز جمله‌ی اول، از ضرب کردن یک عدد ثابت (مخالف صفر) به جمله‌ی قبل از خود به دست می‌آید، دنباله‌ی هندسی نامیده می‌شود. به عبارت دیگر یک دنباله‌ی هندسی دنباله‌ای به صورت:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن  $a$  جمله‌ی اول و عدد ثابت  $r$  «نسبت مشترک» جملات دنباله است. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی به فرم کلی

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

می‌باشد. که در آن  $a_1$  جمله‌ی اول،  $n$  شماره‌ی جمله و  $r$  نسبت مشترک می‌باشد.

تذکر ۶ در تعریف دنباله‌ی هندسی گفتیم هر جمله از ضرب کردن جمله‌ی قبلی در نسبت مشترک به دست می‌آید، بنابراین نسبت مشترک را می‌توان از تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبل از خودش به دست آورد:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

نکته ۱۷ در یک دنباله‌ی هندسی اگر نسبت مشترک عددی بزرگتر از ۱ باشد، جملات دنباله افزایشی (صعودی) و اگر نسبت مشترک عددی بین صفر و یک باشد، جملات دنباله کاهشی (نزولی) خواهد بود. همچنین اگر نسبت مشترک مساوی با یک باشد، جملات دنباله ثابت خواهد بود:

$$r > 1 \Rightarrow \text{افزایشی (صعودی)} \quad r = 1 \Rightarrow \text{ثابت} \quad 0 < r < 1 \Rightarrow \text{کاهشی (نزولی)}$$

#### ضابطه‌ی بازگشتی دنباله‌ی هندسی:

با ضرب کردن هر جمله در نسبت مشترک  $r$ ، جمله‌ی بعدی به دست می‌آید. بنابراین فرم کلی ضابطه بازگشتی دنباله‌های هندسی به صورت زیر می‌باشد.

$$a_{n+1} = r a_n, \quad a_1 = a$$

نکته ۱۸ توجه کنید که برای نوشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی، به جمله‌ی اول و نسبت مشترک نیاز داریم، لذا با توجه به مطالب ذکر شده اگر جمله‌ی  $m$ ام و  $n$ ام یک دنباله‌ی هندسی معلوم باشد، نسبت مشترک را می‌توان از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$r^{(m-n)} = \frac{a_m}{a_n}$$

## واسطه‌ی هندسی:

اگر  $a, b, c$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه رابطه‌ی زیر بین آنها برقرار است:

$$b^2 = ac$$

## درج چند واسطه‌ی هندسی:

اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  عدد بنویسیم که یک دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند، مقدار نسبت مشترک ( $r$ ) را می‌توان از رابطه‌ی

$$r^{(n+1)} = \frac{b}{a}$$

محاسبه کرد که در آن  $a$  اولین عدد،  $b$  آخرین عدد و  $n$  تعداد جملات می‌باشد.

## مجموع $n$ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی:

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی را می‌توان از رابطه‌ی

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad (1.3)$$

محاسبه کرد که در آن  $a_1$  اولین جمله،  $r$  نسبت مشترک و  $n$  تعداد جملات است.

## ۲.۱.۳ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.  
در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک  $r$  و جمله اول  $a_1 > 0$ ، اگر  $1 < r < 0$  باشد، دنباله کاهشی است. (دی ۱۴۰۲)
۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.  
الف) در دنباله  $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$  ضابطه‌ی این دنباله برابر ..... است. (دی ۹۸)  
ب) نسبت مشترک دنباله‌ی هندسی  $150, 30, 6, \dots$  برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۱)  
پ) در یک دنباله‌ی هندسی با نسبت مشترک  $r$ ، اگر  $r = 1$  باشد، آنگاه دنباله ..... است. (خرداد ۱۴۰۲)
۳. گزینه صحیح را انتخاب کنید.  
چه تعداد از دنباله‌های زیر هندسی نیست؟ (خرداد ۱۴۰۲)
- ۳, ۶, ۱۲, ...      ۸, ۴, ۲, ...      ۴, ۸, ۱۲, ...      ۲, ۲√۲, ۴, ...
- یک (۱)      دو (۲)      سه (۳)      چهار (۴)
۴. با توجه به دنباله‌ی مقابل به سوالات پاسخ دهید.  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$  (دی ۹۷)  
الف) نوع دنباله را مشخص کنید و نسبت مشترک آن را به دست آورید.  
ب) جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.  
پ) ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.
۵. جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی ۹ و جمله‌ی ششم آن ۲۴۳ است. جمله‌ی دهم این دنباله‌ی هندسی را به دست آورید. (دی ۹۷)
۶. با توجه به دنباله‌ی مقابل به سوالات پاسخ دهید.  $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$  (خرداد ۹۸)  
الف) نوع دنباله را مشخص کنید.  
ب) ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.  
پ) جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.  
ت) جمله‌ی یازدهم این دنباله را بنویسید.
۷. در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول ۱۵۳۶ و نسبت مشترک دنباله  $\frac{1}{3}$  است. (خرداد ۹۸)  
الف) چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۶ می‌باشد؟  
ب) مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.
۸. مقدار  $a$  را چنان بیابید که  $1 - \sqrt{a}$  و  $1 + \sqrt{a}$  تشکیل یک دنباله‌ی هندسی بدهند. سپس مقدار نسبت مشترک دنباله را تعیین کنید. (شهریور ۹۸)



۹. با توجه به دنباله‌ی هندسی  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  حاصل عبارت  $\frac{a_1}{a_7}$  را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

۱۰. با توجه به دنباله‌ی مقابل به سوالات پاسخ دهید.  $3, 9, 27, 81, 243, \dots$  (دی ۹۸)  
 الف) نوع دنباله را مشخص کنید.  
 ب) ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.  
 پ) جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.  
 ت) جمله‌ی دهم این دنباله را بنویسید.

۱۱. در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول  $1024$  و نسبت مشترک دنباله  $\frac{1}{4}$  است. (دی ۹۸)  
 الف) چندمین جمله‌ی دنباله برابر  $64$  می‌باشد؟  
 ب) مجموع شش جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.

۱۲. در دنباله‌ی هندسی زیر با فرض نسبت مشترک مثبت آن را به دست آورید. سپس جاهای خالی را پر کنید. (خرداد ۹۹)

$$7, \dots, \dots, \dots, 112$$

۱۳. مجموع شش جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید. (خرداد ۹۹)

$$1, 4, 16, \dots$$

۱۴. اگر  $x + 3$  و  $x + 2$  و  $x$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید. (شهریور ۹۹)

۱۵. با توجه به دنباله‌ی هندسی  $1, 2, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$  حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (دی ۹۹)

$$\frac{14}{a_9 - a_6}$$

۱۶. در دنباله‌ی هندسی زیر جاهای خالی را پر کنید. (دی ۹۹)

$$4, 12, \dots, 108, \dots, \dots$$

۱۷. به کمک رابطه‌ی بازگشتی  $a_1 = \frac{1}{3}$  و  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$  : (خرداد ۱۴۰۰)  
 الف) سه جمله‌ی اول دنباله را بنویسید.  
 ب) جمله‌ی عمومی و نسبت مشترک آن را به دست آورید.

۱۸. نخستین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی  $96$  و نسبت مشترک این دنباله  $2$  می‌باشد. کدام جمله‌ی دنباله برابر  $768$  است؟  
 (خرداد ۱۴۰۰)

۱۹. اگر  $x + 3$  و  $4 - x$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۰)

۲۰. کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، نسبت مشترک را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۰)

پ)  $10, 100, 1000, \dots$       ب)  $2, 8, 14, \dots$       الف)  $2, 8, 32, \dots$

۲۱. با توجه به دنباله‌ی مقابل به سوالات پاسخ دهید. (شهریور ۱۴۰۰)  
الف) ضابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید.      ب) جمله‌ی ششم این دنباله را به دست آورید.

۲۲. در دنباله‌ی هندسی مقابل جمله‌ی نهم را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)  
 $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$

۲۳. اگر  $\sqrt{x} - 2$  و  $3$  و  $\sqrt{x} + 2$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

۲۴. کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، نسبت مشترک را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

ب)  $1, 4, 9, 16, \dots$       الف)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

۲۵. جمله‌ی دوم یک دنباله‌ی هندسی ۶، و جمله‌ی پنجم همین دنباله ۴۸ است. (خرداد ۱۴۰۱)  
الف) نسبت مشترک این دنباله را به دست آورید.      ب) جمله‌ی هفتم این دنباله را به دست آورید.

۲۶. مجموع هفت جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی  $3, 6, 12, \dots$  را با استفاده از فرمول به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)

۲۷. در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی چهارم برابر ۵ و جمله‌ی هفتم برابر ۱۳۵ است. نسبت مشترک دنباله چند می‌باشد. (شهریور ۱۴۰۱)

۲۸. اگر  $x + 3$  و  $x$  و  $x - 1$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید. (دی ۱۴۰۱)

۲۹. با توجه به دنباله‌ی هندسی  $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$  حاصل  $\frac{a_n}{a_3}$  را به دست آورید. (دی ۱۴۰۱)

۳۰. در دنباله‌ی هندسی  $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$  (خرداد ۱۴۰۲)

الف) جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.      ب) رابطه‌ی بازگشتی آن را مشخص کنید.

۳۱. اگر  $x + 5$  و  $3$  و  $x - 3$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی افزایشی باشند، مقدار  $x$  را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)
۳۲. جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ است. (خرداد ۱۴۰۲)
- الف) جمله‌ی نهم این دنباله را بنویسید.  
ب) مجموع ده جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.
۳۳. در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم ۳۲ و جمله‌ی پنجم این دنباله ۲۵۶ است. جمله‌ی هفتم این دنباله را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)
۳۴. در دنباله‌ی هندسی  $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$  (شهریور ۱۴۰۲)
- الف) ضابطه‌ی بازگشتی این دنباله را بنویسید.  
ب) مجموع ۶ جمله‌ی اول دنباله‌ی داده شده را به دست آورید.
۳۵. دنباله‌ی هندسی  $4, 2, 1, \dots$  را در نظر بگیرید: (دی ۱۴۰۲)
- الف) چهار جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.  
ب) مجموع پنج جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.
۳۶. جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی ۲۷ و جمله‌ی ششم همین دنباله ۷۲۹ است. جمله‌ی نهم دنباله را به دست آورید. (دی ۱۴۰۲)
۳۷. برای دنباله‌ی هندسی مقابل:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \dots$  (خرداد ۱۴۰۳)
- الف) نسبت مشترک و جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.  
ب) رابطه‌ی بازگشتی آن را مشخص کنید.
۳۸. جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۵ و نسبت مشترک آن ۲ است. (خرداد ۱۴۰۳)
- الف) جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۶۴۰ است؟  
ب) با استفاده از فرمول، مجموع نه جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.

## ۳.۱.۳ پاسخ نامه تشریحی

۱ درست است. طبق نکته (۱۷)

۲ الف)  $a_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{1}{4} \quad a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ب) ۵

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^0}{6} = \frac{1}{2} = 5$$

پ) ثابت

۳ گزینه‌ی یک

فقط دنباله‌ی ۴, ۸, ۱۲, ... هندسی نیست

۴ الف) دنباله هندسی است.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ب) برای به دست آوردن جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی مقادیر  $a_1$  و  $r$  را باید مشخص کنیم که  $a_1 = 1$  و  $r = \frac{1}{3}$  می‌باشد. بنابراین:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

پ) با جایگذاری مقادیر  $a_1 = 1$  و  $r = \frac{1}{3}$  در رابطه‌ی  $a_n = k$  خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \quad a_1 = 1$$

۵ برای به دست آوردن  $a_{10}$  ابتدا باید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آوریم که با توجه به فرم کلی جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 r^{n-1}$ ، به دست آوردن  $a_1$  و  $r$  ضروری است. بنابراین داریم:

$$a_3 = 9 \quad a_6 = 243 \quad a_{10} = ? \quad a_1 = ? \quad r = ?$$

با توجه به نکته (۱۸) می‌توان  $r$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$r^{m-n} = \frac{m}{n}$$

$$r^{6-3} = \frac{243}{9}$$

$$r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

یکی از داده‌های مسئله یعنی  $a_3$  یا  $a_6$  را انتخاب می‌کنیم و با جایگذاری آن در جمله‌ی عمومی  $a_n = a_1 r^{n-1}$  مقدار  $a_1$  را به دست می‌آوریم:

$$a_3 = 3^{3-1} a_1 \Rightarrow 9 = 3^2 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{9} = 1$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $r$  در جمله‌ی عمومی، مقدار  $a_{10}$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 1 \times 3^{10-1} = 3^9$$

الف) دنباله هندسی است.

ب) ابتدا کافی است نسبت مشترک دنباله را به صورت زیر به دست آوریم:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}, \quad a_1 = 1$$

بنابراین ضابطه بازگشتی دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n, \quad a_1 = 1$$

پ) برای به دست آوردن جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی مقادیر  $a_1$  و  $r$  را در رابطه‌ی  $a_n = a_1 r^{n-1}$  جایگذاری می‌کنیم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

ت) با جایگذاری  $n = 11$  در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$a_{11} = \left(\frac{1}{5}\right)^{11-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

الف) طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1 = 1536 \quad r = \frac{1}{4} \quad a_n = 6 \quad n = ?$$

با استفاده از جمله عمومی دنباله خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$6 = 1536 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{6}{1536} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^8 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

(ب) داریم:

$$a_1 = 1536 \quad r = \frac{1}{4} \quad S_n = ? \quad n = 10$$

با توجه به داده های بالا، مجموع ده جمله اول این دنباله را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{1536(1-(\frac{1}{4})^{10})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1536(1-\frac{1}{1024})}{\frac{3}{4}} = 3069$$

۸ اگر  $a, b, c$  سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه رابطه‌ی زیر بین آنها برقرار است:

$$b^2 = ac$$

با جایگذاری مقادیر « $c = \sqrt{a} + 1, b = 7, a = \sqrt{a} - 1$ » در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$7^2 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1) \Rightarrow 49 = a - 1 \Rightarrow a = 50$$

بنابراین جملات دنباله عبارتند از:

$$\sqrt{50} - 1, 7, \sqrt{50} + 1$$

و مقدار نسبت مشترک نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7}{\sqrt{50} - 1}$$

۹ با توجه به دنباله داده شده داریم:

$$a_1 = \frac{1}{8} \quad r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{4} = 2 \quad \frac{a_{10}}{a_7} = ?$$

$$\frac{a_{10}}{a_7} = \frac{a_1 r^{10-1}}{a_1 r^{7-1}} = \frac{2^{10-1}}{2^{7-1}} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3 = 8$$

۱۰ الف) دنباله هندسی است.

(ب) ابتدا نسبت مشترک دنباله را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9}{3} = 3, \quad a_1 = 3$$

بنابراین ضابطه بازگشتی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

پ) برای به دست آوردن جمله عمومی دنباله هندسی مقادیر  $a_1$  و  $r$  را در رابطه  $a_n = a_1 r^{n-1}$  جایگذاری می‌کنیم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} = 3^{n-1+1} = 3^n$$

ت) با جایگذاری  $n = 10$  در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$a_{10} = 3^{10}$$

۱۱ الف) طبق فرض داریم:

$$a_1 = 1024 \quad r = \frac{1}{4} \quad a_n = 64 \quad n = ?$$

با جایگذاری موارد فوق در جمله عمومی داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ 64 &= 1024 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \frac{64}{1024} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{16} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^4 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad n-1=4 \Rightarrow n=5 \end{aligned}$$

ب) داریم:

$$a_1 = 1024 \quad r = \frac{1}{4} \quad S_6 = ? \quad n = 6$$

با جایگذاری داده‌های بالا در رابطه زیر، مجموع شش جمله اول دنباله به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{1024(1-(\frac{1}{4})^6)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1024(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{4}} = 2016$$

۱۲ اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$ ،  $n$  عدد بنویسیم که یک دنباله هندسی تشکیل دهند، مقدار نسبت مشترک را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

بنابراین کافی است مقادیر « $r = ?$ »،  $n = 3$ ،  $b = 112$ ،  $a = 7$  را در رابطه فوق جایگذاری کنیم:

$$r^{3+1} = \frac{112}{7} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r^4 = 2^4 \Rightarrow r = 2$$

لذا دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$7, 14, 28, 56, 112$$

۱۳ با توجه به جملات دنباله داریم:

$$a_1 = 1 \quad r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 \quad n = 6 \quad S_6 = ?$$

مجموع شش جمله اول دنباله به صورت زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{1(1-4^6)}{1-4} = \frac{-4095}{-3} = 1365$$

۱۴ با جایگذاری مقادیر « $a = x$ ،  $b = x + 2$ ،  $c = x + 3$ » در رابطه  $b^2 = ac$  خواهیم داشت:

$$(x+2)^2 = x(x+3) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 3x \Rightarrow 4x - 3x = -4 \Rightarrow x = -4$$

۱۵ با توجه به دنباله هندسی داده شده، داریم:

$$a_1 = \frac{1}{8} \quad r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2$$

با استفاده از جمله عمومی، مقادیر  $a_9$  و  $a_6$  را به دست می آوریم و در رابطه  $\frac{14}{a_9 - a_6}$  جایگذاری می کنیم:

$$a_9 = \frac{1}{8} \times 2^{9-1} = \frac{1}{8} \times 2^8 = \frac{256}{8} = 32$$

$$a_6 = \frac{1}{8} \times 2^{6-1} = \frac{1}{8} \times 2^5 = \frac{32}{8} = 4$$

$$\frac{14}{32-4} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

۱۶ کافی است مقدار  $r$  را به دست آوریم:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{12}{4} = 3$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر خواهند بود:

$$4, 12, 36, 108, 324, 972$$

۱۷ الف) در دنباله ی بازگشتی  $a_1 = \frac{1}{3}$ ،  $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$  کافی است به جای  $n$  اعداد ۱ و ۲ را جایگذاری کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow a_{1+1} = \frac{2}{3}a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_{2+1} = \frac{2}{3}a_2 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$



بنابراین جلات دنباله عبارتند از:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$$

(ب) داریم:

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad r = ? \quad a_n = ?$$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

بنابراین جمله عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

۱۸ الف) از معلومات مسئله داریم:

$$a_1 = 96 \quad r = 2 \quad a_n = 768 \quad n = ?$$

با جایگذاری موارد بالا در جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$768 = 96 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{768}{96} = 2^{n-1}$$

$$8 = 2^{n-1}$$

$$2^3 = 2^{n-1} \quad n-1=3 \Rightarrow n=4$$

۱۹ با جایگذاری مقادیر « $c = x + 3$ ,  $b = 4$ ,  $a = x - 3$ » در رابطه  $b^2 = ac$  خواهیم داشت:

$$4^2 = (x-3)(x+3) \Rightarrow 16 = x^2 - 9 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

چون سه جمله متوالی هستند پس ۵- غیرقابل قبول است. بنابراین

$$x = 5$$

۲۰ گزینه‌های (الف) و (پ)

$$\text{الف) } r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} = 4$$

$$\text{پ) } r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^\circ}{10^\circ} = 10$$

۲۱ الف) با توجه به دنباله داده شده، جمله اول و نسبت مشترک به صورت زیر می‌باشند:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{1} = 5, \quad a_1 = 1$$

بنابراین ضابطه بازگشتی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_{n+1} = 5a_n, \quad a_1 = 1$$

ب) با جایگذاری  $n = 6$  در جمله عمومی  $a_n = a_1 r^{n-1}$  جمله ی ششم دنباله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a_6 = 1 \times 5^{6-1} = 5^5 = 3125$$

۲۲ با توجه به دنباله داده شده داریم:

$$a_1 = \frac{1}{27} \quad r = \frac{1}{9} \div \frac{1}{27} = 3 \quad n = 9 \quad a_9 = ?$$

با جایگذاری موارد بالا در جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_9 = \frac{1}{27} \times 3^{9-1} = \frac{1}{27} \times 3^8 = 3^{8-3} = 3^5 = 243$$

۲۳ با جایگذاری مقادیر  $a = \sqrt{x} - 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = \sqrt{x} + 2$  در رابطه  $b^2 = ac$  خواهیم داشت:

$$3^2 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) \Rightarrow 9 = x - 4 \Rightarrow x = 13$$

۲۴ گزینه‌ی (الف)

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

۲۵ با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$a_2 = 6 \quad a_5 = 48 \quad r = ?$$

طبق نکته (۱۸) از رابطه زیر می‌توان نسبت مشترک را به دست آورد:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

$$r^{5-2} = \frac{48}{6}$$

$$r^3 = 8$$

$$r^3 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

(ب)

$$a_1 = \frac{a_2}{r} \Rightarrow a_1 = \frac{6}{2} = 3$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $r$  در جمله عمومی، مقدار  $a_7$  حاصل می‌شود:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_7 = 3 \times 2^{7-1} = 3 \times 64 = 192$$

۲۶ با توجه به دنباله داده شده داریم:

$$a_1 = 3 \quad r = \frac{6}{3} = 2 \quad n = 7 \quad S_7 = ?$$

از جایگذاری موارد بالا در رابطه مجموع زیر داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_7 = \frac{3(1-2^7)}{1-2} = \frac{3(1-128)}{1-2} = \frac{-381}{-1} = 381$$

۲۷ طبق فرض مسئله داریم:

$$a_4 = 5 \quad a_7 = 135 \quad r = ?$$

طبق نکته (۱۸) از رابطه زیر می‌توان نسبت مشترک را به دست آورد:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^{7-4} = \frac{135}{5} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3$$

۲۸ با جایگذاری مقادیر « $c = x + 3$ ,  $b = x$ ,  $a = x - 1$ » در رابطه  $b^2 = ac$  خواهیم داشت:

$$x^2 = (x-1)(x+3) \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۲۹ با توجه به دنباله داده شده، جمله اول و نسبت مشترک به صورت زیر است:

$$a_1 = \frac{1}{27} \quad r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{9} \div \frac{1}{27} = 3 \quad \frac{a_8}{a_3} = ?$$

بنابراین طبق جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$\frac{a_8}{a_3} = \frac{a_1 r^{8-1}}{a_1 r^{3-1}} = \frac{3^{8-1}}{3^{3-1}} = 3^{7-2} = 3^5 = 243$$

۳۰ از دنباله داده شده داریم:

$$a_1 = 1 \quad r = \frac{1}{5}$$

(الف)

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

(ب)

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n \quad a_1 = 1$$

۳۱ با جایگذاری مقادیر « $c = x - 3$ ,  $b = 3$ ,  $a = x + 5$ » در رابطه  $b^2 = ac$  خواهیم داشت:

$$3^2 = (x+5)(x-3) \Rightarrow 9 = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

معادله  $x^2 + 2x - 24 = 0$  را با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه کرده و ریشه‌های  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow (x-4)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -6 \end{cases}$$

چون دنباله افزایشی است پس  $x = 4$  جواب قابل قبول است

(الف) با توجه به فرضیات مسئله داریم: ۳۲

$$a_1 = 6 \quad r = 2 \quad n = 9 \quad a_9 = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_9 = 6 \times 2^{9-1} = 6 \times 2^8 = 1536$$

(ب)

$$a_1 = 6 \quad r = 2 \quad n = 10 \quad S_{10} = ?$$

با استفاده از رابطه مجموع و جایگذاری موارد بالا به صورت زیر می‌توان مجموع ده جمله اول دنباله را به دست آورد:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_{10} = \frac{6(1-2^{10})}{1-2} = 6 \times 1023 = 6138$$

۳۳

$$a_2 = 32 \quad a_5 = 256 \quad r = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه  $r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$  می‌توان  $r$  را به دست آورد:

$$r^{5-2} = \frac{256}{32}$$

$$r^3 = 8$$

$$r^3 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} \Rightarrow a_1 = \frac{32}{2} = 16$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $r$  در جمله‌ی عمومی، مقدار  $a_7$  حاصل می‌شود:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_7 = 16 \times 2^{7-1} = 16 \times 64 = 1024$$

۳۴ الف) با توجه به دنباله داده شده داریم:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3, \quad a_1 = \frac{2}{3}$$

با داشتن نسبت مشترک، ضابطه‌ی بازگشتی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = \frac{2}{3}$$

ب) با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$a_1 = \frac{2}{3} \quad r = 3 \quad n = 6 \quad S_6 = ?$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{2}{3}(1-3^6)}{1-3} = \frac{\frac{2}{3}(1-729)}{-2} = \frac{728}{3}$$

۳۵ الف) با توجه به دنباله داده شده نسبت مشترک و تعدادی از جملات دنباله به صورت زیر هستند:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$$

ب) با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$a_1 = 4 \quad r = \frac{1}{2} \quad n = 5 \quad S_5 = ?$$

با جایگذاری موارد بالا در رابطه مجموع زیر داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_5 = \frac{4 \times (1 - (\frac{1}{2})^5)}{1 - (\frac{1}{2})} = \frac{31}{4}$$

۳۶ طبق فرض داریم:

$$a_3 = 27 \quad a_6 = 729 \quad r = ?$$

با جایگذاری مقادیر داده شده در رابطه  $r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$  می‌توان  $r$  را به دست آورد:

$$r^{6-3} = \frac{729}{27} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3$$

$$a_3 = a_1 r^{3-1} \Rightarrow 27 = a_1 \times (3)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{27}{9} = 3$$

با جایگذاری مقادیر  $a_1$  و  $r$  در جمله عمومی، مقدار  $a_9$  حاصل می‌شود:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_9 = 3 \times 3^{9-1} = 3^9$$

۳۷ طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad a_2 = \frac{1}{10} \quad r = ?$$

الف) نسبت مشترک را از رابطه‌ی زیر می‌توان به دست آورد.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

برای به دست آوردن جمله عمومی دنباله‌ی هندسی مقادیر  $a_1$  و  $r$  را باید مشخص کنیم که  $a_1 = \frac{1}{4}$  و  $r = \frac{1}{5}$  می‌باشد. بنابراین:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

ب) با جایگذاری مقادیر  $a_1 = \frac{1}{4}$  و  $r = \frac{1}{5}$  در رابطه‌ی  $a_{n+1} = r a_n$  خواهیم داشت:

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n, \quad a_1 = \frac{1}{4}$$

۳۸ الف) طبق فرض مسئله داریم:

$$a_1 = 5 \quad r = 2 \quad a_n = 640 \quad n = ?$$

با استفاده از جمله عمومی دنباله خواهیم داشت:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 640 = 5 \times 2^{n-1} \Rightarrow \frac{640}{5} = 2^{n-1} \Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

ب) داریم:

$$a_1 = 5 \quad r = 2 \quad S_n = ? \quad n = 9$$

با توجه به داده‌های بالا، مجموع نه جمله اول این دنباله را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \Rightarrow S_9 = \frac{5 \times (1-2^9)}{1-2} = \frac{5 \times (1-512)}{-1} = \frac{5 \times (-511)}{-1} = 5 \times 511 = 2555$$

۲.۳ درس دوم: (ریشه‌ی  $n$ ام و توان گویا)

## ۱.۲.۳ مفاهیم و نکات درس

## توان (یادآوری)

اگر  $n$  عددی طبیعی باشد،  $a^n$  یعنی  $a$ ،  $n$  بار در خودش ضرب شود.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$$

به  $a$  پایه و به  $n$  توان یا نما می‌گویند. مثلاً:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \quad 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

## یادآوری چند قانون مهم از اعداد تواندار:

مثال	توضیح	رابطه‌ی کلی	ردیف
$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	در ضرب اعداد تواندار با پایه‌های یکسان، توان‌ها را جمع می‌کنیم	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	۱
$4^3 \times 2^3 = (4 \times 2)^3 = 8^3$	در ضرب اعداد تواندار با توان‌های یکسان، پایه‌ها را ضرب می‌کنیم	$a^n \times b^n = (ab)^n$	۲
$3^6 \div 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$	در تقسیم اعداد تواندار با پایه‌های یکسان، توان‌ها را کم می‌کنیم	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	۳
$8^3 \div 4^3 = \left(\frac{8}{4}\right)^3 = 2^3$	در تقسیم اعداد تواندار با توان‌های یکسان، پایه‌ها را تقسیم می‌کنیم	$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	۴
$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6$	اگر عددی تواندار به توان برسد، توانها را ضرب می‌کنیم	$(a^m)^n = a^{mn}$	۵
$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$	هر عدد غیر از صفر به توان صفر برسد حاصل برابر با یک می‌شود	$a^0 = 1, a \neq 0$	۶
$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	با معکوس کردن اعداد تواندار، علامت توان قرینه می‌شود	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	۷

نکته ۱۹ توان دوم هر عدد را مربع یا مجذور آن عدد می‌نامند. به عنوان مثال عدد ۹ مربع یا مجذور عدد ۳ می‌باشد.  $3^2 = 9$

نکته ۲۰ توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد می‌نامند. به عنوان مثال عدد ۲۷ مکعب عدد ۳ می‌باشد.  $3^3 = 27$

## ریشه‌ی دوم

برای هر عدد مثبت  $a$ ، دو عدد  $\sqrt{a}$  و  $-\sqrt{a}$  را ریشه‌های دوم عدد  $a$  می‌گویند.

به عنوان مثال مربع یا توان دوم اعداد  $-4$  و  $4$  برابر عدد  $16$  است. به عبارتی:  $16 = (-4)^2 = 4^2$ ، بنابراین دو عدد  $-4$  و  $4$  را ریشه‌های دوم عدد  $16$  می‌گویند.

نکته ۲۱ چون مربع یا مجذور هر عدد حقیقی، عددی مثبت است، بنابراین اعداد منفی ریشه‌ی دوم حقیقی ندارند. به عنوان مثال، عدد ۹- ریشه‌ی دوم حقیقی ندارد.

نکته ۲۲ عدد صفر فقط یک ریشه‌ی دوم دارد که همان صفر است.

نکته ۲۳ ریشه‌ی دوم مثبت عدد  $a$  ( $a > 0$ ) را جذر  $a$  می‌نامند و آن را با نماد  $\sqrt{a}$  نمایش می‌دهند. توجه کنید که جذر اعداد حقیقی مثبت، فقط عددی مثبت می‌تواند باشد. به عنوان مثال ریشه‌های دوم عدد ۴ اعداد  $\pm 2$  هستند، اما جذر عدد ۴ فقط عدد ۲+ می‌باشد. یعنی  $\sqrt{4} = 2$ .

نکته ۲۴ جواب‌های معادله‌ی  $x^2 = a$  ( $a > 0$ )، ریشه‌ی دوم عدد  $a$  هستند. به عنوان مثال جواب‌های معادله‌ی  $x^2 = 25$ ، دو عدد  $\pm 5$  هستند که هر دو ریشه‌های دوم عدد ۲۵ می‌باشند.

### ریشه‌ی سوم

برای هر عدد حقیقی  $a$ ، عدد  $\sqrt[3]{a}$  را ریشه‌ی سوم عدد  $a$  می‌گویند. بنابراین هر عدد حقیقی (اعداد مثبت، صفر و اعداد منفی) فقط یک ریشه‌ی سوم دارد.

به عنوان مثال مکعب یا توان سوم عدد ۳- برابر با ۲۷- است، یعنی:  $(-3)^3 = -27$  و همچنین مکعب یا توان سوم عدد ۳ برابر با ۲۷ است، یعنی:  $3^3 = 27$ . بنابراین عدد ۳- ریشه‌ی سوم ۲۷- و عدد ۳ ریشه‌ی سوم ۲۷ می‌گویند.

نکته ۲۵ ریشه‌های سوم سه عدد ۱ و ۰ و ۱- با خودشان برابر است. یعنی:

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad \sqrt[3]{0} = 0 \quad \sqrt[3]{1} = 1$$

نکته ۲۶ جواب‌های معادله‌ی  $x^3 = a$ ، ریشه‌ی سوم عدد  $a$  هستند. به عنوان مثال جواب معادله‌ی  $x^3 = 5$ ، عدد  $\sqrt[3]{5}$  هستند که ریشه‌ی سوم عدد ۵ می‌باشد.

با توجه به مطالب ذکر شده در ادامه ریشه‌ی  $n$ ام اعداد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ریشه‌ی $n$ ام

اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $n \geq 2$  باشد،  $x$  را ریشه‌ی  $n$ ام عدد  $a$  می‌نامیم، هر گاه  $x^n = a$  باشد. توجه کنید که بسته به زوج یا فرد بودن  $n$ ، دو حالت پیش می‌آید:

(۱) اگر  $n$  عددی فرد باشد، آنگاه  $\sqrt[n]{a^n}$  برابر با  $a$  است. به عنوان مثال:

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad \sqrt[3]{-a^3} = -a \quad \sqrt[5]{4^5} = 4 \quad \sqrt[5]{-4^5} = -4$$

(۲) اگر  $n$  عددی زوج باشد، آنگاه  $\sqrt[n]{a^n}$ ،  $(a > 0)$  برابر با  $|a|$  است. به عنوان مثال:

$$\sqrt[2]{a^2} = |a| \quad \sqrt[4]{a^4} = |a| \quad \sqrt[2]{(-4)^2} = |-4| = 4 \quad \sqrt[2]{-4^2} = \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$



پس در حالت کلی:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & n \text{ فرد باشد} \\ |a| & n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

## توان‌های گویا

در بخش قبل مروری بر مطالب مربوط به توان‌های صحیح داشتیم. در این بخش مطالب مربوط به توان‌های گویا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید  $a$  یک عدد حقیقی و مثبت باشد. برای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$ ، توان  $\frac{1}{n}$  عدد  $a$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

تذکر ۷ توجه کنید که اگر  $a < 0$  باشد، در این کتاب درسی  $a^{\frac{1}{n}}$  را تعریف نمی‌کنیم. به عنوان مثال  $(-2)^{\frac{1}{2}}$  یا  $(-4)^{\frac{1}{3}}$  را تعریف نمی‌کنیم.

مثال ۳۸ عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار و عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{5}{6}} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$$

در حالت کلی فرض کنید  $m$  عددی صحیح،  $n$  عددی طبیعی و  $a$  عددی مثبت باشد، در این صورت داریم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

همچنین  $a^{-\frac{m}{n}}$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

مثال ۳۹ عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار و عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} \quad 2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^2}} \quad \sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}}$$

تمام قوانینی که در توان‌های صحیح یادآوری شد، در خصوص توان‌های گویا و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار هستند. فرض کنید  $m$  و  $n$  اعداد حقیقی و  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی و مخالف صفر باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{مثال: } 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} = 2^1$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \quad \text{مثال : } 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = (2 \times 5)^{\frac{1}{2}} = (10)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \text{مثال : } 4^{\frac{1}{2}} \div 4^{\frac{1}{2}} = 4^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = 4^0 \quad (3)$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \text{مثال : } 8^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{مثال : } (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 5^{(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3})} = 5^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

## ۲.۲.۳ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.  
 الف) نمایش  $\sqrt{-7}$  را به صورت  $(-7)^{\frac{1}{2}}$  می‌توان نوشت. (خرداد ۱۴۰۱)  
 ب) ریشه‌ی چهارم  $-۱۶$ ، عدد  $-۲$  است. (شهریور ۱۴۰۱)  
 پ) اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت  $a$  برابر شود، بعد از یک ساعت جرم آن  $\sqrt{a}$  برابر می‌شود. (خرداد ۱۴۰۲)  
 ت) ریشه‌ی پنجم عدد  $-۳۲$  برابر  $۲$  است. (شهریور ۱۴۰۲)

۲. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.  
 الف) ریشه‌ی چهارم عدد  $۱۶$  برابر ..... و ..... می‌باشد. (دی ۹۷)  
 ب) ریشه‌ی سوم عدد  $۱۰۰۰$  برابر ..... است. (دی ۱۴۰۱)  
 پ) ریشه‌ی چهارم عدد  $۱۰$  برابر است با ..... و ..... (خرداد ۱۴۰۲)  
 ت) عبارت  $\sqrt[3]{7}$  به صورت تواندار ..... و عبارت  $(41)^{\frac{1}{3}}$  به صورت رادیکالی ..... نوشته می‌شود. (شهریور ۱۴۰۲)  
 ث) ریشه‌های ششم عدد  $۶۴$  برابر ..... و ..... می‌باشد. (دی ۱۴۰۲)  
 ج) ریشه‌ی چهارم عدد  $۷$  برابر است با ..... و ..... (خرداد ۱۴۰۳)

۳. گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.  
 در تساوی  $(0.27)^{15} = (0.27)^{x+1} \times (0.27)^5 \times (0.27)^2$  مقدار  $x$  کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۲)  
 ۶(۱)      ۷(۲)      ۸(۳)      ۹(۴)

۴. اعداد توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. (دی ۹۷)

الف)  $۱۲^{-\frac{1}{3}}$       ب)  $\sqrt[3]{45}$

۵. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (دی ۹۷)

الف)  $۲^{\frac{1}{2}} \times ۸^{\frac{1}{2}}$       ب)  $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^2}\right)^{-4}$

۶. عبارات توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. (خرداد ۹۸)

الف)  $(0.31)^{\frac{1}{2}}$       ب)  $\sqrt[3]{47}$

۷. حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. ( $m$  و  $n$  اعداد حقیقی مثبت‌اند). (خرداد ۹۸)

$$\text{الف) } (m^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}})^2 (m^2n^3)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ب) } 8^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

۸. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (شهریور ۹۸)

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{ب) } \sqrt[5]{0.18}$$

۹. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (دی ۹۸)

$$\text{الف) } (0.32)^{\frac{1}{5}} \quad \text{ب) } \sqrt[3]{41}$$

۱۰. حاصل عبارتهای زیر را به سادهترین صورت ممکن بنویسید. ( $m$  و  $n$  اعداد حقیقی مثبت اند). (دی ۹۸)

$$\text{الف) } (m^4n^3)^2 (m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}})^6 \quad \text{ب) } 21^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2}{3}}$$

۱۱. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (خرداد ۹۹)

$$\text{الف) } 3^{\frac{1}{5}} \quad \text{ب) } 6^{\frac{1}{4}} \quad \text{پ) } \sqrt[3]{45} \quad \text{ت) } \sqrt[4]{37}$$

۱۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید. (شهریور ۹۹)

$$\text{الف) } \left(\frac{34}{26}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ب) } 3^{0.26} \times 3^{0.74}$$

۱۳. حاصل عبارات زیر را به دست آورید. (دی ۹۹)

$$\text{الف) } 11^{\frac{2}{3}} \times 11^{\frac{1}{3}} \quad \text{ب) } 3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$$

۱۴. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (دی ۹۹)

$$\text{الف) } \sqrt[3]{x^5} \quad \text{ب) } (0.1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{پ) } (a)^{\frac{2}{3}}$$

۱۵. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\text{الف) } 4^{\frac{1}{2}} \quad \text{ب) } (0.8)^{\frac{1}{3}} \quad \text{پ) } \sqrt[5]{(21)^4} \quad \text{ت) } \sqrt[3]{(0.47)^3}$$

۱۶. در هر یک از تساویهای زیر مقدار  $x$  را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\text{الف) } 8^4 \times 9^x = 72^4 \quad \text{ب) } (5^x)^6 = \frac{1}{5^2} \quad \text{پ) } (0.6)^3 \times (0.6)^x \times (0.6)^3 = (0.6)^8$$

۱۷. حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

الف)  $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^4$       ب)  $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{3}}$

۱۸. حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (شهریور ۱۴۰۰)

الف)  $\frac{15^4}{15^2}$       ب)  $2^9 \times 2^{-9}$

۱۹. حاصل عبارات زیر را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

الف)  $\left(\frac{38}{34}\right)^{\frac{1}{2}}$       ب)  $5 \times 5^2$

۲۰. عبارات توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

الف)  $\sqrt[3]{x^7}$       ب)  $(m)^{\frac{2}{5}}$       پ)  $(0.9)^{\frac{1}{2}}$

۲۱. عبارات توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

الف)  $\sqrt[5]{123}$       ب)  $(0.24)^{\frac{1}{2}}$

۲۲. در تساوی  $8^x \times 8^3 = 8^1$ ، مقدار  $x$  را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

۲۳. حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (خرداد ۱۴۰۱)

الف)  $(15^6)^{\frac{1}{2}}$       ب)  $11^{\frac{2}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}}$       پ)  $4^{\frac{1}{2}} \div 4^{\frac{1}{3}}$

۲۴. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت اعداد توان‌دار بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

الف)  $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$       ب)  $(7^3)^{\frac{1}{2}}$       پ)  $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \div \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

۲۵. عبارات توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

الف)  $\sqrt[5]{112}$       ب)  $(0.9)^{\frac{2}{3}}$

۲۶. مقدار  $x$  را در تساوی زیر به دست آورید. (دی ۱۴۰۱)

$$\frac{x^6 \times 14^2}{2 \times 2^4 \times 2^3} = 7^8$$

۱۳۳

۲۷. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (دی ۱۴۰۱)

الف)  $(۱۳)^{\frac{1}{5}}$       ب)  $\sqrt[3]{۱۷۲}$

۲۸. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

الف)  $\sqrt[4]{(۳۵)^4}$       ب)  $۲^{\frac{5}{6}}$

۲۹. حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\left(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^3 \times (a^8)^{\frac{1}{4}} =$$

۳۰. حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (شهریور ۱۴۰۲)

الف)  $۵^{۰.۱۲} \times ۵^{۰.۸۸}$       ب)  $\left(\frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{-1}}\right)^{-۱۲}$

۳۱. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (دی ۱۴۰۲)

الف)  $\sqrt[3]{۴۷}$       ب)  $(۰.۳۴)^{\frac{1}{5}}$

۳۲. عبارات توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (خرداد ۱۴۰۳)

الف)  $(۰.۳۵)^{\frac{1}{3}}$       ب)  $\sqrt[3]{۴۲}$       ج)  $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{۶}\right)^3}$       د)  $\left(\frac{1}{۳}\right)^{\frac{1}{3}}$

۳۳. حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (خرداد ۱۴۰۳)  $(a > 0)$

الف)  $\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^{-6}$       ب)  $(۳)^{\frac{1}{3}} \times (۱۲)^{\frac{1}{3}} \times (۰.۷)^0$

## ۳.۲.۳ پاسخ‌نامه تشریحی

- ۱ الف) نادرست  
با توجه به تذکر ۷ این عبارت نادرست است.  
ب) نادرست  
اعداد منفی ریشه‌ی زوج حقیقی ندارند.  
پ) نادرست  
ت) نادرست است چون پاسخ ۲- است.

- ۲ الف) ۲ و ۲-  
ب)  $-10$   
پ)  $\sqrt[3]{10}$  و  $-\sqrt[3]{10}$   
ت)  $(71)^{\frac{1}{3}}$  و  $\sqrt[3]{(41)^2}$   
ث) ۲- و  
ج)  $-\sqrt[3]{7}$  و  $\sqrt[3]{7}$

- ۳ گزینه‌ی ۲ صحیح است.  
چون پایه‌ها یکسان است، پس کافی است توان‌ها را جمع کنیم:

$$2 + 5 + x + 1 = 15 \Rightarrow x + 8 = 15 \Rightarrow x = 15 - 8 = 7$$

۴ ب)  $\sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$  الف)  $12^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{12^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}$

۵ ب)  $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{2}{3}}}\right)^{-4} = (m^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}})^{-4} = (m^{\frac{-1}{6}})^{-4} = m^{\frac{4}{3}} = m^{\frac{14}{3}}$  الف)  $2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}} = (2 \times 8)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

۶ ب)  $\sqrt[3]{47} = 47^{\frac{1}{3}}$  الف)  $(0.31)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.31}$

۷

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad (m^{\frac{5}{2}}n^{\frac{1}{2}})^2(m^2n^3)^{\frac{1}{2}} &= (m^{(2 \times \frac{5}{2})}n^{(2 \times \frac{1}{2})})(m^{(2 \times \frac{1}{2})}n^{(3 \times \frac{1}{2})}) = (m^5n)(mn^{\frac{3}{2}}) \\ &= m^{(5+1)}n^{(1+\frac{3}{2})} = m^6n^{\frac{5}{2}} = (mn)^{\frac{5}{2}} = \sqrt{(mn)^5} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad 8^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(8 \times \frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 12^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{12^2}$$

۸

$$\text{الف)} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} \quad \text{ب)} \quad \sqrt[3]{0.18} = (0.18)^{\frac{1}{3}}$$

۹

$$\text{الف)} \quad (0.32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0.32} \quad \text{ب)} \quad \sqrt[3]{41} = (41)^{\frac{1}{3}}$$

۱۰

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad (m^4n^3)^2(m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}})^6 &= (m^{(2 \times 4)}n^{(2 \times 3)})(m^{(\frac{1}{2} \times 6)}n^{(\frac{1}{2} \times 6)}) \\ &= (m^8n^6)(m^3n^3) = m^{(8+3)}n^{(6+3)} = m^{11}n^9 \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad 21^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(21 \times \frac{3}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{2}{3}}$$

۱۱

$$\text{الف)} \quad 3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3} \quad \text{ب)} \quad 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6} \quad \text{پ)} \quad \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \text{ت)} \quad \sqrt[3]{37} = (37)^{\frac{1}{3}}$$

۱۲

$$\text{الف)} \quad \left(\frac{3^4}{4^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3^4 \times \frac{1}{4}}{4^6 \times \frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{3^2}{4^3}\right) = \frac{9}{8} \quad \text{ب)} \quad 3^{0.26} \times 3^{0.74} = 3^{(0.26+0.74)} = 3$$

۱۳

$$\text{الف)} \quad 11^{\frac{6}{5}} \times 11^{\frac{3}{5}} = 11^{(\frac{6}{5}+\frac{3}{5})} = 11^{\frac{9}{5}} = 11^2 = 121$$

$$\text{ب)} \quad 3^{\frac{5}{7}} \times 5^{\frac{5}{7}} = (3 \times 5)^{\frac{5}{7}} = 15^{\frac{5}{7}} = 15\sqrt[7]{15}$$



۱۴

$$\text{الف) } \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}} \quad \text{ب) } (0.1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0.1} \quad \text{پ) } (a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

۱۵

$$\text{الف) } 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \quad \text{ب) } (0.8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{(0.8)^2} \quad \text{پ) } \sqrt[5]{(21)^4} = 21^{\frac{4}{5}} \quad \text{ت) } \sqrt[3]{(0.47)^3} = (0.47)^{\frac{3}{3}}$$

۱۶

$$\text{الف) } 8^x \times 9^x = 72^x$$

$$8^x \times 9^x = 8^x \times 9^x \Rightarrow x = 4$$

$$\text{ب) } (5^x)^6 = \frac{1}{5^2}$$

$$5^{6x} = \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{6x} = 5^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{پ) } (0.6) \times (0.6)^x \times (0.6)^3 = (0.6)^8$$

$$(0.6)^{1+x+3} = (0.6)^8 \Rightarrow x+4=8 \Rightarrow x=8-4=4$$

۱۷

$$\text{الف) } \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^4 = \frac{a^{4 \times \frac{1}{2}}}{a^{4 \times \frac{1}{3}}} = \frac{a^2}{a^{\frac{4}{3}}} = a^{2-1} = a$$

$$\text{ب) } 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})} = 5^0 = 1$$

۱۸

$$\text{الف) } \frac{15^4}{15^2} = 15^{4-2} = 15^2$$

$$\text{ب) } 2^9 \times 2^{-9} = 2^{9+(-9)} = 2^0 = 1$$

۱۹

$$\text{الف) } \left(\frac{3^8}{3^4}\right)^{\frac{1}{2}} = (3^{(8-4)})^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4 \times \frac{1}{2}} = 3^2$$

$$\text{ب) } 5 \times 5^2 = 5^{(1+2)} = 5^3$$

۲۰

$$\text{الف) } \sqrt{x^y} = x^{\frac{y}{2}} \quad \text{ب) } m^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{m} \quad \text{پ) } (0.9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{0.9}$$

۲۱

$$\text{الف) } \sqrt[5]{125} = 125^{\frac{1}{5}} \quad \text{ب) } (0.24)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(0.24)^2}$$

۲۲

$$8^x \times 8^3 = 8^{10} \Rightarrow 8^{x+3} = 8^{10} \Rightarrow x+3 = 10 \Rightarrow x = 10 - 3 = 7$$

۲۳

$$\text{الف) } (15^6)^{\frac{1}{2}} = 15^{(6 \times \frac{1}{2})} = 15^3$$

$$\text{ب) } 11^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{5}} = (11 \times 6)^{\frac{1}{5}} = 66^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{پ) } 4^{\frac{1}{2}} \div 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 4^0$$

۲۴

$$\text{الف) } 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = (8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ب) } (7^3)^{\frac{1}{2}} = 7^{3 \times \frac{1}{2}} = 7^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{پ) } \left(\frac{1}{4}\right)^6 \div \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{6 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{11}{2}}$$

۲۵

$$\text{الف) } \sqrt[5]{1125} = 1125^{\frac{1}{5}} \quad \text{ب) } (0.9)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(0.9)^4}$$

۲۶

$$\frac{x^6 \times 14^2}{2 \times 24 \times 2^3} = 7^8 \Rightarrow \frac{x^6 \times 14^2}{2^{1+4+3}} = 7^8 \Rightarrow \frac{x^6 \times 14^2}{2^8} = 7^8 \Rightarrow x^6 \times 14^2 = 2^8 \times 7^8$$

$$x^6 \times 14^2 = 14^8 \Rightarrow x^6 = 14^8 \div 14^2 \Rightarrow x^6 = 14^{8-2} = 14^6 \Rightarrow x = 14$$

۲۷

$$\text{الف) } (13)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{13^5} \quad \text{ب) } \sqrt[3]{1728} = 1728^{\frac{1}{3}}$$

۲۸

$$\text{الف) } \sqrt[5]{(35)^4} = (35)^{\frac{4}{5}} \quad \text{ب) } 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$$

۲۹

$$(a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}})^3 \times (a^8)^{\frac{1}{2}} = a^{3 \times \frac{1}{3}} b^{3 \times \frac{2}{3}} a^{8 \times \frac{1}{2}} = a^1 b^2 a^4 = a^{1+4} b^2 = a^5 b^2 = (ab)^5$$

۳۰

$$5^{0/12} \times 5^{0/88} = 5^{0/12+0/88} = 5^0 = 5 \quad \left(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\right)^{-12} = \frac{\sqrt{-1}^4}{\sqrt{-1}^4} = \sqrt{-1}^{4-4} = \sqrt{-1}^0 = 1$$

۳۱

$$\sqrt[5]{47} = (47)^{\frac{1}{5}} \quad (0.34)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(0.34)^2}$$

۳۲

$$\text{الف) } (0.35)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(0.35)} \quad \text{ب) } \sqrt[3]{42} = (42)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ج) } \sqrt[4]{\left(\frac{1}{6}\right)^3} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{4}} \quad \text{د) } \left(2\frac{1}{3}\right)^{\frac{-4}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$$

۳۳

$$\text{الف) } \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{6}}}\right)^{-6} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{4}{6}}}{a^{\frac{3}{6}}} = a^{\frac{1}{2}} = a \quad \text{ب) } (3)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{1}{2}} \times (0.7)^0 = (3 \times 12)^{\frac{1}{2}} \times 1 = (36)^{\frac{1}{2}} = 6$$

## ۳.۳ درس سوم: تابع نمایی

## ۱.۳.۳ مفاهیم و نکات درس

## تابع نمایی:

هر تابع به صورت  $y = a^x$ ، که در آن  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

تذکره ۸ حرف  $a$  معرف پایه و حرف  $x$  معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می‌توان تابع نمایی را به صورت زیر تعریف کرد:

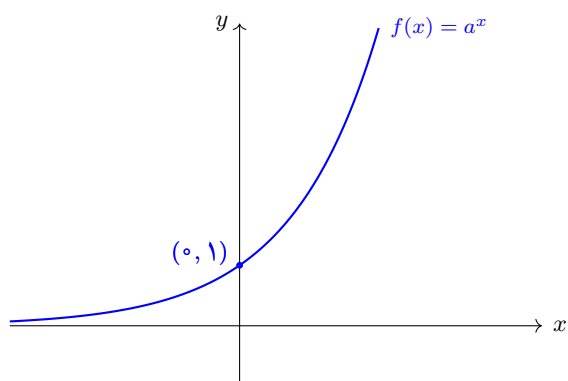
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

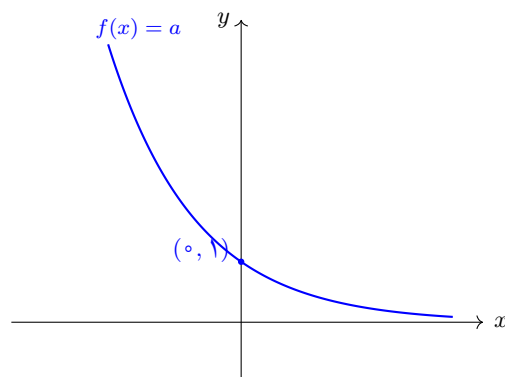
منظور از  $\mathbb{R}^+$ ، مجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  است.

## نمودار توابع نمایی:

برای رسم نمودار توابع نمایی با توجه به اینکه  $a > 1$  یا  $0 < a < 1$  باشد، دو حالت زیر را خواهیم داشت:  
 (۱) اگر  $a > 1$  باشد، نمودار حالت صعودی (افزایش) دارد. یعنی با افزایش مقادیر  $x$ ها از چپ به راست، مقادیر  $y$ ها نیز افزایش می‌یابد. که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



(۲) اگر  $0 < a < 1$  باشد، نمودار حالت نزولی (کاهشی) دارد. یعنی با افزایش مقادیر  $x$ ها از چپ به راست، مقادیر  $y$ ها، کاهش می‌یابد. که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به مطالب ذکر شده می‌توان مهم‌ترین ویژگی‌های تابع نمایی را به صورت زیر بیان کرد:

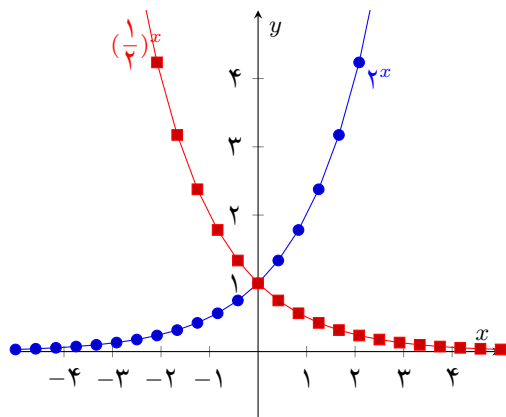
- (۱) دامنه‌ی توابع نمایی  $\mathbb{R}$  و برد آنها  $\mathbb{R}^+$  است.
- (۲) نمودار توابع نمایی محور  $y$ ها را در نقطه‌ی  $(0, 1)$  قطع می‌کنند.
- (۳) نمودار توابع نمایی محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند.
- (۴) اگر  $a > 1$  باشد، آنگاه نمودار تابع صعودی و اگر  $0 < a < 1$  باشد، آنگاه نمودار تابع نزولی خواهد بود.

### رسم نمودار توابع نمایی:

برای رسم نمودار توابع نمایی از چند نقطه‌ی کمکی دلخواه استفاده می‌کنیم بدین منظور به  $x$  چند عدد دلخواه می‌دهیم و با جایگذاری این مقادیر در تابع، مقادیر  $y$  را به دست می‌آوریم. سپس نقاط به دست آمده را بر روی محور مختصات مشخص کرده و نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال ۴۰ نمودار توابع  $f(x) = 2^x$  و  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و سپس، آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید.

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴
$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



شباهتها:

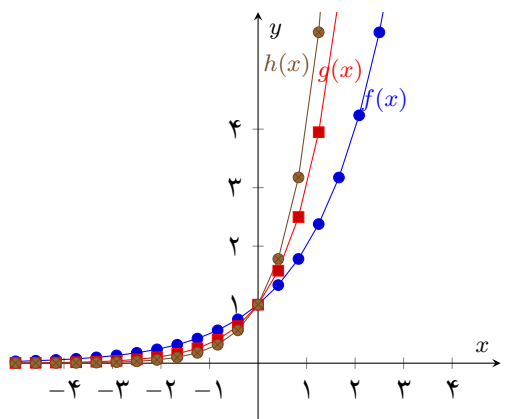
دامنه‌ی هر دو  $\mathbb{R}$  و برد هر دو  $\mathbb{R}^+$  است. نمودار هر دو محور  $y$ ها را در نقطه‌ی  $(0, 1)$  قطع می‌کنند. ولی محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند.

تفاوت‌ها:

$f(x)$  تابعی صعودی، ولی  $g(x)$  تابعی نزولی است.

مثال ۴۱ نمودار توابع  $f(x) = 2^x$ ،  $g(x) = 3^x$  و  $h(x) = 4^x$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و سپس، آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید.

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴
$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$g(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹
$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$h(x) = 4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	۱	۴	۱۶



شباهتها:

دامنه‌ی هر سه  $\mathbb{R}$  و برد هر سه  $\mathbb{R}^+$  است. نمودار هر سه تابع، محور  $y$ ها را در نقطه‌ی  $(0, 1)$  قطع می‌کنند. ولی محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند.

هر سه تابع صعودی هستند.

تفاوت‌ها:

سرعت کاهش مقدار  $y$ های سه تابع، با هم برابر نیست.

## رشد و زوال نمایی

یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی، رشد و زوال نمایی است. که در ادامه به یادگیری آن‌ها می‌پردازیم.

### رشد نمایی:

در مسائلی که با گذشت زمان به مقدار یک ماده و یا هر چیز دیگری افزوده شود، که این **افزایش** به صورت ثابت و نمایی باشد، با **رشد نمایی** مواجه هستیم که معادله‌ی کلی رشد نمایی، به صورت  $f(t) = c(1+r)^t$  است که در آن  $f(t)$  بیانگر **مقدار نهایی**،  $c$  بیانگر **مقدار اولیه**،  $r$  بیانگر **میزان رشد** (تغییرات بر حسب اعشار) و  $t$  بیانگر **زمان** است.

### زوال نمایی:

در مسائلی که با گذشت زمان از مقدار یک ماده و یا هر چیز دیگری **کاسته** شود، که این کاهش به صورت ثابت و نمایی باشد، با **زوال نمایی** مواجه هستیم که معادله‌ی کلی زوال نمایی، به صورت  $f(t) = c(1-r)^t$  است که در آن  $f(t)$  بیانگر **مقدار نهایی**،  $c$  بیانگر **مقدار اولیه**،  $r$  بیانگر **میزان نزول** بر حسب اعشار و  $t$  بیانگر **زمان** است.

مثال ۴۲ جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

همانطوریکه قبلاً ذکر کردیم برای حل مسائل بهتر است داده‌ها و خواسته‌ی مسئله را مشخص کنیم.

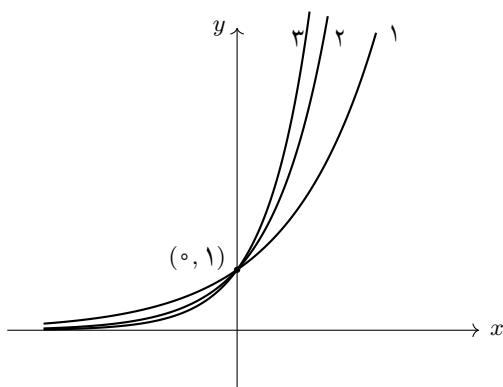
$$c = 1000000 \quad r = 0.06 \quad t = 10 \quad f(t) = ?$$

$$f(t) = c(1+r)^t = 1000000(1+0.06)^{10} = 1000000 \times 1.79 = 1790000$$

## ۲.۳.۳ سوالات امتحانات نهایی

۱. درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.  
نمودار تابع نمایی  $y = 3^{-x}$ ، نموداری کاهشی است. (دی ۱۴۰۱)
۲. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = 2^x$  را رسم کنید و کاهشی یا افزایشی بودن آن را بیان کنید.  
(دی ۹۷، شهریور ۹۸، دی ۹۸، دی ۱۴۰۰، خرداد ۱۴۰۱)
۳. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = 3^x$  را رسم کنید. (خرداد ۹۸، شهریور ۹۹، خرداد ۱۴۰۰، شهریور ۱۴۰۱، شهریور ۱۴۰۲)
۴. جمعیت یک روستا در سال ۱۳۹۶ حدود دو هزار نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این روستا با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟ (خرداد ۹۸)
۵. جمعیت شهری در سال ۲۰۱۸ میلادی حدود یک میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ ۱۰ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (شهریور ۹۸)
۶. جمعیت کشوری در سال ۱۳۹۶ حدود بیست میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشوری با نرخ یک درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۱۳۹۸ چند نفر خواهد بود؟ (دی ۹۸)
۷. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = (\frac{1}{7})^x$  را رسم کنید. (خرداد ۹۹)
۸. جمعیت کشوری در سال ۲۰۱۷ میلادی حدود چهار میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (شهریور ۹۹)
۹. نمودار توابع  $f(x) = 2^x$ ،  $f(x) = 3^x$  و  $f(x) = 4^x$  در شکل زیر رسم شده است. ضابطه‌ی هر نمودار را مشخص کنید. (دی ۹۹)





۱۰. جمعیت شهری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود ۱۰۰۰۰۰ نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۱ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (دی ۹۹)

۱۱. پدر سارا قصد دارد مبلغ ۲۰ میلیون تومان را برای هزینه‌ی دانشگاه دخترش در بانکی سپرده گذاری کند. این بانک سالانه ۲۰ درصد سود به سپرده‌ها پرداخت می‌کند. پدر سارا بعد از ۲ سال چه مبلغی را می‌تواند دریافت کند؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۱۲. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = (\frac{1}{4})^x$  را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۳. جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۰ میلادی حدود ده میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال افزایش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۱ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (دی ۱۴۰۰)

۱۴. جمعیت شهری در سال ۱۴۰۰ شمسی حدود دو میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر به صورت نمایی با ضریب ثابت ۱۰ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۱ چند نفر خواهد بود؟ (خرداد ۱۴۰۱)

۱۵. طی چند سال اخیر، جمعیت گونه‌ای از پرندگان هر سال نسبت به سال قبل ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. اگر جمعیت آن‌ها در حال حاضر، ۱۰۰۰۰ (ده هزار) باشد، پس از گذشت دو سال، جمعیت آن‌ها چه تعداد خواهد بود؟ (شهریور ۱۴۰۱)

۱۶. الف) به کمک جدول، تابع  $y = 2^x$  را رسم کنید. (دی ۱۴۰۱)  
ب) مقدار تقریبی  $2^{\frac{1}{4}}$  را از روی نمودار الف به دست آورید.

۱۷. جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۲ میلادی حدود ۴۰ میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۲۴ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (دی ۱۴۰۱)

۱۸. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$  را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۹. جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۳ میلادی حدود بیست میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور به صورت نمایی و با نرخ دو درصد در حال کاهش باشد، جمعیت این کشور در سال ۲۰۲۴ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (خرداد ۱۴۰۲)

۲۰. فردی ده میلیون تومان پول خود را در یک شرکت تولیدی کارگاه ایرانی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال به پاس اعتمادش ۲۰ درصد سود علی‌الحساب از طرف شرکت به او پرداخت شود، آنگاه پس از دو سال مبلغ سرمایه‌گذاری او چه مقدار خواهد بود؟ (شهریور ۱۴۰۲)

۲۱. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = 4^x$  را رسم کنید. (دی ۱۴۰۲)

۲۲. پدر احسان قصد دارد مبلغ ۵۰ میلیون تومان برای راه‌اندازی یک شرکت تولیدی دانش بنیان سپرده‌گذاری کند. اگر سالانه ۱۰ درصد به سپرده‌ها سود پرداخت کند، پدر احسان بعد از ۲ سال چه مبلغی دریافت می‌کند؟ (دی ۱۴۰۲)

۲۳. نمودار مختصاتی تابع نمایی  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۳)

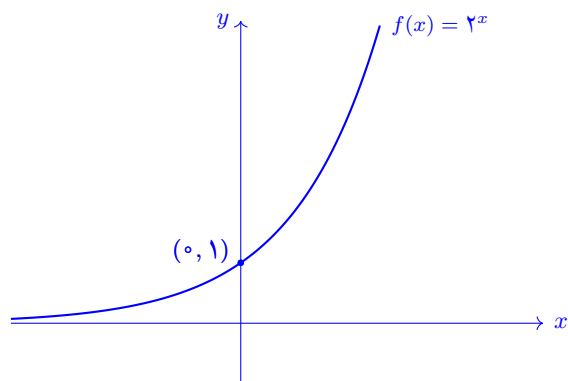
۲۴. شخصی چهل میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال ۳۰ درصد سود علی‌الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سود او چقدر خواهد شد؟ (خرداد ۱۴۰۳)

۳.۳.۳ پاسخ نامه تشریحی

۱ درست

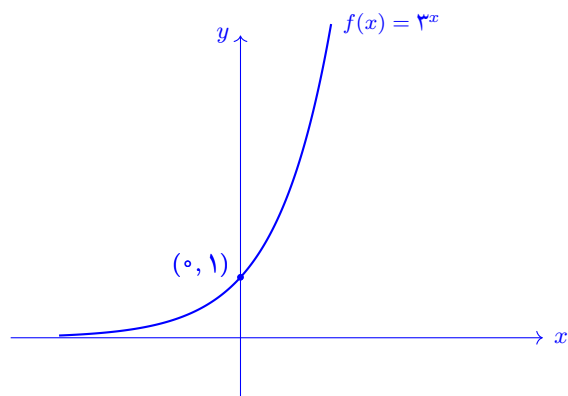
۲ تابع افزایشی است.

$x$	-۱	۰	۱
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{2}$	۱	۲



$x$	-۱	۰	۱
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{3}$	۱	۳

۳



۴ مقادیر مسئله به صورت زیر هستند:

$$c = 2000 \quad r = 0.01 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در تابع رشد نمایی داریم:

$$f(t) = c(1+r)^t = 2000(1+0.01)^2 = 2000 \times 0.9801 = 1960.2$$

۵ مقادیر مسئله به صورت زیر هستند:

$$c = 1000000 \quad r = 0.1 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در تابع رشد نمایی داریم:

$$f(t) = c(1+r)^t = 1000000(1+0.1)^2 = 1000000 \times 1.21 = 1210000$$

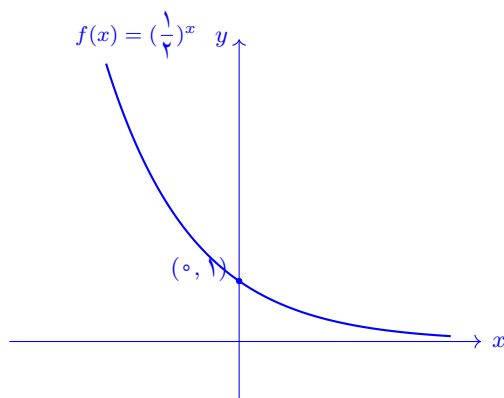
۶ مقادیر مسئله به صورت زیر هستند:

$$c = 20000000 \quad r = 0.01 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

با جایگذاری مقادیر فوق در تابع رشد نمایی داریم:

$$f(t) = c(1+r)^t = 20000000(1+0.01)^2 = 20000000 \times 1.0201 = 20402000$$

$x$	-1	0	1
$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	2	1	$\frac{1}{4}$



۸ فرضیات مسئله به صورت زیر است:

$$c = 40000000 \quad r = 0.01 \quad t = 1 \quad f(t) = ?$$

چون کاهش است از تابع زوال نمایی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(t) = c(1-r)^t = 40000000(1-0.01)^1 = 40000000 \times 0.99 = 39600000$$

۹ نمودار شماره‌ی (۱) تابع  $f(x) = 2^x$

نمودار شماره‌ی (۲) تابع  $f(x) = 3^x$

نمودار شماره‌ی (۳) تابع  $f(x) = 4^x$

۱۰ فرضیات مسئله به صورت زیر است:

$$c = 100000 \quad r = 0.01 \quad t = 1 \quad f(t) = ?$$

چون کاهش می‌یابد از تابع زوال نمایی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(t) = c(1 - r)^t = 100000(1 - 0.01)^1 = 100000 \times 0.99 = 99000$$

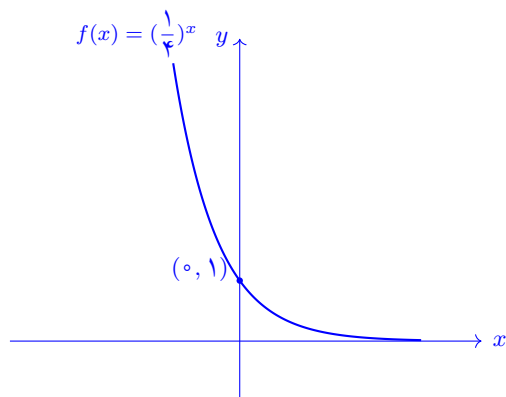
۱۱ فرضیات مسئله به صورت زیر است:

$$c = 20000000 \quad r = 0.02 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

چون افزایش می‌یابد از تابع رشد نمایی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(t) = c(1 + r)^t = 20000000(1 + 0.02)^2 = 20000000 \times 1.04 = 20800000$$

$x$	-1	0	1
$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	4	1	$\frac{1}{4}$



۱۳ مقادیر مسئله به صورت زیر هستند:

$$c = 10000000 \quad r = 0.01 \quad t = 1 \quad f(t) = ?$$

چون افزایشی است از تابع رشد نمایی به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$f(t) = c(1+r)^t = 1000000(1+0.1)^1 = 1000000 \times 1.1 = 1100000$$

۱۴ مقادیر مسئله به صورت زیر هستند:

$$c = 2000000 \quad r = 0.1 \quad t = 1 \quad f(t) = ?$$

تابع رشد افزایشی به صورت زیر است:

$$f(t) = c(1+r)^t = 2000000(1+0.1)^1 = 2000000 \times 1.1 = 2200000$$

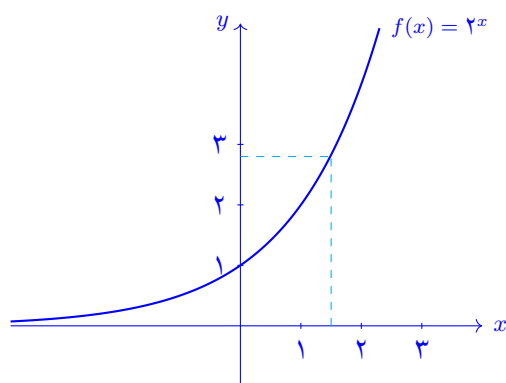
۱۵ مقادیر مسئله به صورت زیر هستند:

$$c = 10000 \quad r = 0.2 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

چون کاهش می دهد از تابع زوال نمایی به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$f(t) = c(1-r)^t = 10000(1-0.2)^2 = 10000 \times 0.64 = 6400$$

$x$	-1	0	1	(الف) ۱۶
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{2}$	1	2	



(ب) عددی نزدیک به ۳

۱۷ مفروضات مسئله به صورت زیر می باشند:

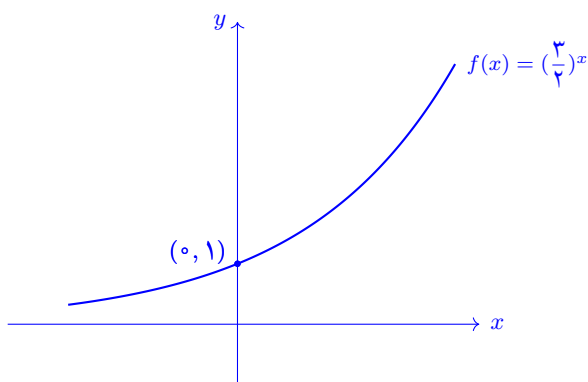
$$c = 40000000 \quad r = 0.01 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

چون کاهشی است از تابع زوال نمایی به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$f(t) = c(1 - r)^t = 40000000(1 - 0.01)^2 = 40000000 \times 0.9801 = 39204000$$

$x$	-1	0	1
$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{4}$

۱۸



۱۹ مفروضات مسئله به صورت زیر می باشند:

$$c = 20000000 \quad r = 0.02 \quad t = 1 \quad f(t) = ?$$

چون کاهشی است از تابع زوال نمایی به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$f(t) = c(1 - r)^t = 20000000(1 - 0.02)^1 = 20000000 \times 0.98 = 19600000$$

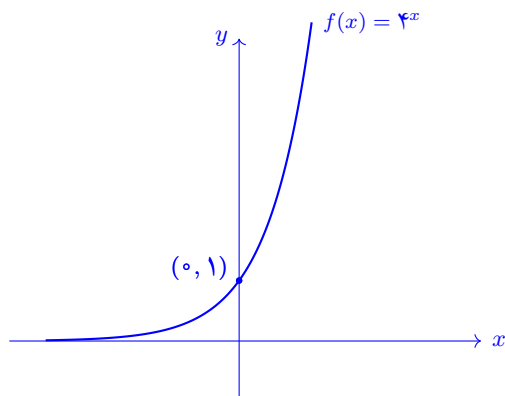
۲۰ مفروضات مسئله به صورت زیر می باشند:

$$c = 10000000 \quad r = 0.02 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

مقادیر بالا را در تابع رشد نمایی به صورت زیر جایگذاری می کنیم:

$$f(t) = c(1 + r)^t = 10000000(1 + 0.02)^2 = 10000000 \times 1.044 = 10440000$$

$x$	-1	0	1	۲۱
$f(x) = 4^x$	$\frac{1}{4}$	1	4	



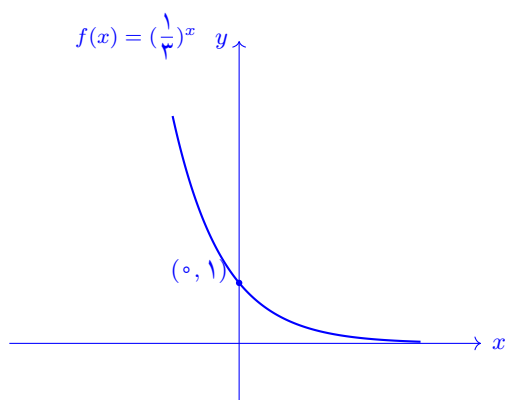
۲۲ مفروضات مسئله به صورت زیر می باشند:

$$c = 5000000 \quad r = 0.1 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$

مقادیر بالا را در تابع رشد نمایی به صورت زیر جایگذاری می کنیم:

$$f(t) = c(1+r)^t = 5000000(1+0.1)^2 = 5000000 \times 1.21 = 6050000$$

$x$	-1	0	1	۲۳
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	3	1	$\frac{1}{3}$	



۲۴ مفروضات مسئله به صورت زیر می باشند:

$$c = 4000000 \quad r = 0.3 \quad t = 2 \quad f(t) = ?$$



مقادیر بالا را در تابع رشد نمایی به صورت زیر جایگذاری می کنیم:

$$f(t) = c(1 + r)^t = 40000000(1 + 0.3)^2 = 40000000 \times 1.69 = 67600000$$