فصل ۶

حد و پیوستگی

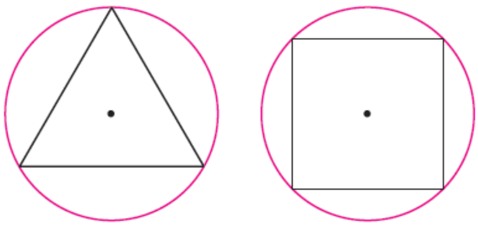
درس اوّل — فرایندهای حدی

درس دوم — محاسبه حد توابع

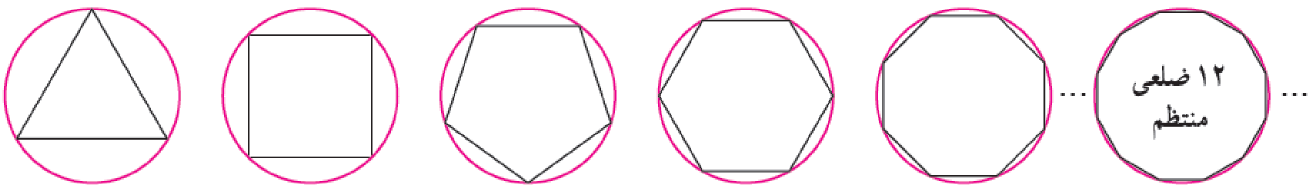
درس سوم — پیوستگی

فرایندهای حدی

در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع است. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.



حدس می‌زنید مساحت کدام یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ با افزایش تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی در داخل دایره چه اتفاقی می‌افتد؟

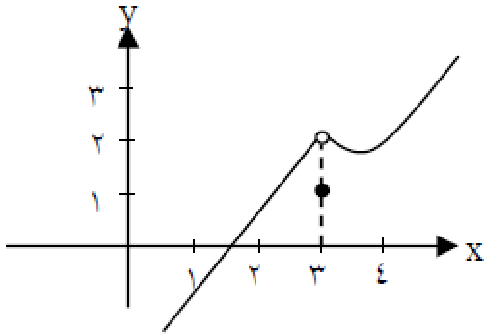


مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود).

فعالیت. با تکمیل جدول زیر، مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x<۱ \\ ۲x & x>۱ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۱$ بدست آورید.

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱
f(x)			→	؟	←		

تذکر. وقتی $x \longrightarrow ۳^{+}$ گوییم x از راست به ۳ نزدیک می‌شود و وقتی $x \longrightarrow ۳^{-}$ می‌گوییم x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود. در حقیقت رفتار تابع در نزدیکی نقطه ۳ مورد بررسی قرار گرفته است.



در نمودار مقابل وقتی $x \longrightarrow ۳^-$ ملاحظه می‌شود که مقادیر y یا همان $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، در این حالت مـی‌گـوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۲ است و می‌نویسیم : $\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۲$

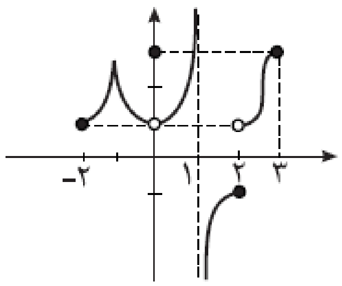
به طریق مشابه وقتی $x \longrightarrow ۳^+$ باز هم مقادیر $f(x)$ به عـدد دلخواه ۲ نزدیک می‌شوند. در این حالت هم می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از سمت راسـت بـه ۳ نزدیـک می‌شود برابر ۲ است و می‌نویسیم : $\lim_{x\to ۳^+} f(x)$

اگر هم حد راست و هم حد چپ یک تابع در یک نقطه موجود بود و برابر باشند، گوییم تابع در آن نقطه حد دارد. بطور نمونه در مثال فوق هم حد راست و هم حد چپ تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود (میل می‌کند) موجود و برابر ۲ است. بطور خلاصه می‌نویسیم : $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۲$.

حد از روی نمودار :

شرایط وجود حد از روی نمودار
- ۱ – داشتن همسایگی در حداقل یک طرف نقطهٔ مورد نظر
- ۲ – برابری حدهای چپ و راست

حد تابع در صورت وجود یکتاست.



با توجه به شکل :

$x = -۲$: فقط حد راست وجود دارد و برابر یک است. بنابر این حد در نقطه $x = -۲$ برابر یک میشود.

$\lim_{x\to -۲} f(x) = \lim_{x\to -۲^+} f(x) = ۱$

$x = ۳$: فقط حد چپ وجود دارد و برابر ۳ است. بنابر این حد در نقطهٔ $x = ۳$ برابر ۳ میشود.

$\lim_{x\to ۳} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۳$

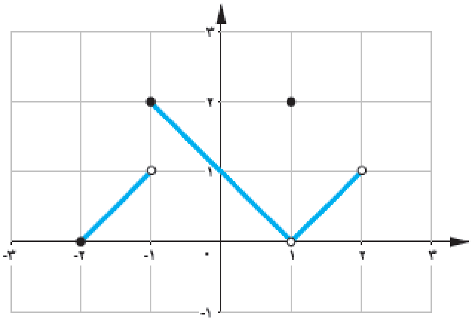
$x = ۰$: در نقطهٔ صفر حد وجود دارد ولی با مقدار تابع برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۱ \\ f(۰) = ۳ \end{cases}$$

$x = ۱, ۲$: در نقطهٔ ۱ و ۲ حد وجود ندارد، چون شاخه‌ها به هم نرسیدند.

$$\lim_{x\to ۱} f(x) \begin{cases} ۱^+ : & -\infty \\ ۱^- : & +\infty \end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to ۲} f(x) \begin{cases} ۲^+ : & ۱ \\ ۲^- : & -۱ \end{cases}$$

مثال. برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟



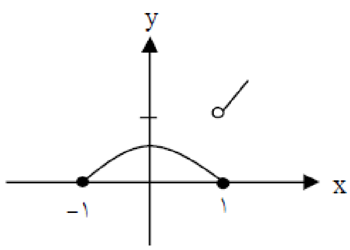
الف) $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۲$ ب) $f(۱) = ۲$

پ) $f(۲) = ۱$ ت) $\lim_{x\to -۲^+} f(x) = ۰$

ث) $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۲$ ج) $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$

چ) $\lim_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

پرسش. با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$، مقادیر خواسته شده را بدست آورید.



۱) $\lim_{x\to -۱} f(x)$

۲) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$

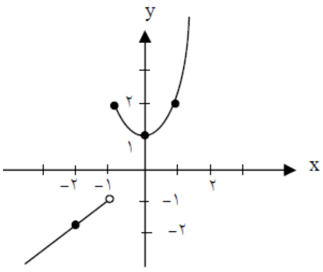
۳) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$

۴) $\lim_{x\to ۱} f(x)$

پرسش. با رسم نمودار $y = \sqrt{x-۲} + ۱$ مقدار حد در اطراف نقطهٔ $x = ۲$ را بررسی کنید.

پرسش. نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی ۲- تعریف شده باشد و در این نقطه، حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۲- باشد.

پرسش. با استفاده از نمودار زیر، وجود حد تابع را در نقطهٔ $x = -1$ بررسی کنید.



پرسش. نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید و با استفاده از آن وجود حد راست و حد چپ در نقطهٔ ۱ را مشخص کنید.

پرسش. نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد، ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

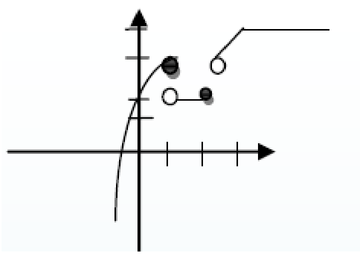
پرسش. با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{۱ - x} + ۱$ ، مقدار حد را در اطراف نقطهٔ $a = ۱$ بررسی کنید.

پرسش. نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد.

پرسش. نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۲- تعریف شده باشد، در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در عدد ۲- باشد.

پرسش. با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$۳\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x) + ۲f(۳) =$$



پرسش. با استفاده از نمودار وجود حد تابع زیر را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x \geq ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$$

قضایای حد:

۱) حد تابع ثابت $f(\mathrm{k}) = \mathrm{k}$ (k عددی است حقیقی و ثابت) در هر عدد دلخواه a، برابر همان مقدار ثابت k است. یعنی : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = \mathrm{k}$

۲) حد تابع $f(x) = x$ (تابع همانی) در هر نقطهٔ a برابر با a است. یعنی :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

مثال. حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۵} ۳ =$

۲) $\lim_{x\to ۵} x =$

۳) اگر دو تابع f و g دامنهٔ یکسانی داشته باشند و در نقطهٔ a دارای حد باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{l}$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{k}$ آنگاه :

الف) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{l} + \mathrm{k}$

ب) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{l} - \mathrm{k}$

پ) $\lim_{x\to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \,.\, \lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{l} \,.\, \mathrm{k}$

ت) $\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{k} \quad , \quad \mathrm{k} \neq ۰$

نکته. قسمت‌های الف و ج از قضیهٔ (۳) را میتوان به تعدادی متناهی از توابع تعمیم داد. یعنی :

۱- حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آنها

۲- حد حاصل‌ضرب چند تابع برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آنها

از قضیه‌های بالا نتیجه‌های زیر بدست می‌آید :

۱) اگر حد تابع f در نقطهٔ a برابر l و k عدد ثابتی باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\ \lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{k}\ .\ \mathrm{l}$$

۲) حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در a برابر است با :

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

۳) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = l^n$$

۴) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{l} & \text{فرد باشد } n \\ \sqrt[n]{l}\ \ \ l \geq ۰ & \text{زوج باشد } n \end{cases}$$

۵) اگر $\lim_{x\to a} f(x) = l$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)| = |\ l\ |$$

تذکر. تمام قوانینی که در این درس مطرح شد، برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

مثال. حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید.

۱) $\lim_{x\to ۳}(-\sqrt{۷}) =$

۲) $\lim_{x\to -۱}(۳x^۲ - ۴x + ۵) =$

۳) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}} =$

۴) $\lim_{x\to ۵} \sqrt{۲x - ۶} =$

۵) $\lim_{x\to ۰^-} \sqrt{x} =$

۶) $\lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x} =$

۷) $\lim_{x\to ۲}(x - ۲) \tan(\frac{\pi}{۸} \times x) =$

۸) $\lim_{x\to ۰} \sin\sqrt{x + ۱} =$

۹) $\lim_{x\to ۳^+}(x - [x]) =$

۱۰) $\lim_{x\to ۳^+} \frac{[x]-۳}{x^۲-۹} =$

۱۱) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{۱}{[x]-۳} =$

۱۲) $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x+۱}{\cos x} =$

۱۳) $\lim_{x\to ۱} \frac{\cos(x-۱)}{x-۲} =$

نکته. در موارد زیر حتما باید حد چپ و حد راست تابع را جداگانه حساب کرد و در صورت برابری حدهای چپ و راست باهم، تابع حد دارد و حد تابع برابر است با مقدار مشترک حدهای چپ و راست :

الف) تابع جزءصحیح که نقطهٔ حدی، عبارت داخل براکت (نماد جزءصحیح) را عددی صحیح کند.

ب) تابع قدر مطلق که نقطهٔ حدی، ریشهٔ سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق باشد.

پ) تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج که نقطهٔ حدی، ریشهٔ ساده زیر رادیکال باشد.

ت) تابع چند ضابطه‌ای که نقطهٔ حدی، نقطهٔ شکست تابع باشد.

مثال. تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟

ب) آیا $f(۰)$ موجود است؟

پرسش. آیا حد تابع مقابل در $x = ۲$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x+۲ & x > ۲ \\ -۲ & x = ۲ \\ x-۳ & x < ۲ \end{cases}$$

پرسش. در مورد تابع $h(x) = \frac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(x) = ۱$

ب) $D_h = \mathbb{R} - \{۰\}$

پ) $\lim_{x\to ۰^+} h(x) = ۱$

ت) $h(۰) = ۰$

ث) $\lim_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد.

پرسش. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\lim_{x\to ۰} \frac{[x]+|x|}{x+۱} =$

۲) $\lim_{x\to ۱} \frac{[x-۱]}{x-۱} =$

۳) $\lim_{x\to ۰/۱} (\frac{۱}{[x]}) =$

۴) $\lim_{x\to ۱^-} (\sqrt{x^۲ - x}) =$

پرسش. تابع f با ضابطهٔ $f(x) = a[x] + [x + ۱]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x\to ۱} f(x)$ موجود باشد.

پرسش. مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} |x+۲| - a & x \geq ۲ \\ x^۲ + ۳ & x < ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ ۲ دارای حد باشد.

پرسش. مقدار m را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} [x] - ۲x & x \geq ۲ \\ \frac{mx^۲+۲}{x-۳} & x < ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ حد داشته باشد.

پرسش. اگر $f(x+۲) = \frac{x-۲}{x+۲}$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ $\lim_{x\to ۲} f(x)$.

مفهوم ابهام در حد :

حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ را در نظر می‌گیریم. اگر حد صورت و مخرج کسر در $x = a$ برابر صفر حدی باشد، یعنی $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ ، به این وضعیت حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌گوییم.

مثال : $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x} = \frac{۰}{۰}$

توابعی که حد آنها بعد از جایگذاری $x = a$ حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ دارند : الف) توابع کسری شامل عبارات چند جمله‌ای ب) توابع کسری شامل عبارات رادیکالی پ) توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی

رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$:

۱) **توابع کسری شامل عبارت رادیکالی :** برای رفع ابهام این گونه توابع می‌توان از موارد زیر در جای مناسب استفاده کرد : الف) بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x - a$

ب) فاکتور گیری پ) اتحادهای جبری

وقتی که $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰}$ باشد معلوم است که عامل صفر کننده در صورت و مخرج کسر وجود دارد. پس صورت و مخرج کسر را با روش‌های ذکر شده تجزیه می‌کنیم و عامل صفر کنندهٔ صورت و مخرج را که $(x - a)$ می‌باشد حذف می‌کنیم. و بعد با جایگذاری حد تابع را در نقطهٔ a بدست می‌آوریم.

اگر با روش تجزیه نتوانستیم عامل مشترک صفر کننده را حذف کنیم، باید صورت و مخرج را بر $(x - a)$ تقسیم نماییم.

نکته. اتحادهای جبری مهم :

$a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$

$x^۲ + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

$a^۳ \mp b^۳ = (a \mp b)(a^۲ \pm ab + b^۲)$

$a^n - ۱ = (a - ۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + ... + a + ۱)$

۲) **توابع کسری شامل عبارات رادیکالی** : اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\cdot}{\cdot}$ و تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، یکی یا هر دو اصم (گنگ) باشند آنگاه برای رفع ابهام محاسبهٔ حد باید صورت یا مخرج یا هر دو را گویا کنیم.

مثال. حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=$

۲) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۱}{x^۲-۳x+۲}=$

۳) $\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=$

۴) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{x}=$

پرسش. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{x+۲}-۱}{۲x^۲+۲x}=$

۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\sin x-\cos x}=$

۳) $\lim_{x\to ۱}\frac{۲x^۲+۳x-۵}{x^۲-۱}=$

۴) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲-x-۶}=$

۵) $\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}=$

۶) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{۳x^۲-۱۲}=$

۷) $\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}=$

۸) $\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^۲-۵x-۲۴}=$

۹) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۵-۱}{x-۱}=$

۱۰) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-\sqrt{x}}=$

۱۱) $\lim_{x\to -۱}\frac{۱-x^۲}{x^۲-۶x+۵}=$

۱۲) $\lim_{x\to ۱}\frac{۵x^۲+x-۶}{۹x^۲+۳x-۱۲}=$

۱۳) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+x-۲}{x-۱}=$

۱۴) $\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}=$

۱۵) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۲x}{x^۲-۳x+۲}=$

۱۶) $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}=$

۱۷) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۲x}{۳-\sqrt{x+۷}}=$

۱۸) $\lim_{x\to -۱}\frac{x^۵+۱}{x^۲+۳x+۲}=$

۱۹) $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x+۱۶}-۲}{\sqrt{x+۱۴}-۴}=$

۲۰) $\lim_{x\to \pi}\frac{|\sin x|}{x-\pi}=$

پرسش. a را طوری بیابید که $\lim_{x\to ۲a}\frac{x-۲a}{x^۲-۴a^۲}=\frac{۱}{۸}$ باشد.

پرسش. اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+ax+b}{x-۱}=۴$ باشد، مقدار a و b چقدر است ؟

پرسش. اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه b کدام است؟ (تجربی ۹۵ خارج)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پرسش. حاصل $\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}$ کدام است؟ (تجربی ۹۳ خارج)

۱) $-\frac{۱}{۶}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پرسش. حاصل $\lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟ (تجربی ۸۸ خارج)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

پیوستگی

تعریف : تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطهٔ a از دامنه آن پیوسته گویند هرگاه :

الف) تابع در $x = a$ حد داشته باشد. (حد چپ با حد راست برابر باشد)

ب) حد تابع در $x = a$ با مقدار تابع در a برابر باشد. یعنی : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

بنابر این هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن، دست کم یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه پیوسته نیست.

پیوستگی راست : هرگاه حد راست تابع با مقدار تابع برابر باشد، تابع پیوستگی راست دارد. یعنی :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

پیوستگی چپ : هرگاه حد چپ تابع با مقدار تابع برابر باشد، تابع پیوستگی چپ دارد. یعنی :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

نکته. ۱: تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در این نقاط پیوستگی راست دارد.

۲: تابع $f(x) = [kx]$، $(k \neq ۰)$ فقط در نقاطی که داخل جزءصحیح را عددی صحیح می‌کند ناپیوسته است.

مثال. کدام یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x = ۱$ ناپیوسته هستند؟

۱) $f(x) = (x-۳)^۲$

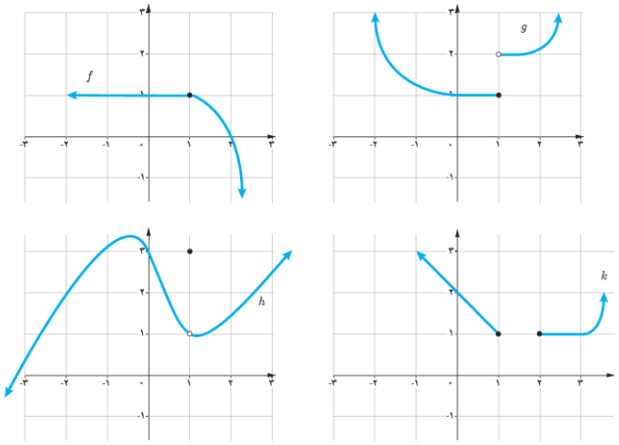
۲) $g(x) = \frac{|x-۱|}{x-۱}$

۳) $h(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ -x+۲ & x < ۱ \end{cases}$

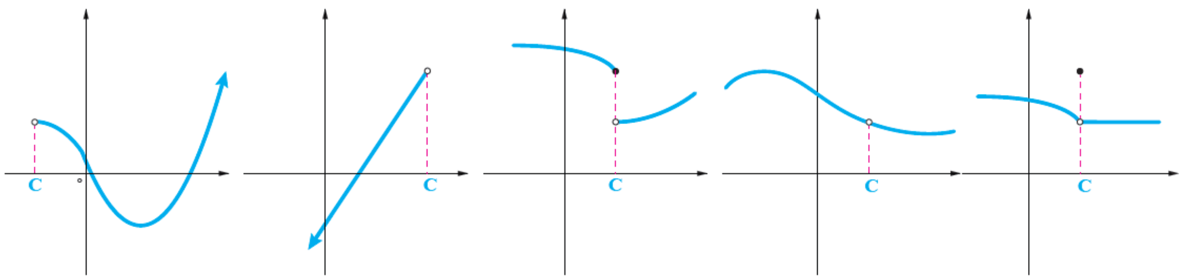
پیوستگی از روی نمودار :

هرگاه بتوان نمودار یک تابع را بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد، تابع پیوسته است.

مثال. کدام یک از توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته است؟



پرسش. علت ناپیوستگی توابع زیر را بنویسید.



پرسش. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-۳ & x < ۲ \\ -۲ & x = ۲ \\ -x+۲ & x > ۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

پیوستگی روی یک بازه :

تابع f روی بازهٔ (a, b) پیوسته است هرگاه، در هر نقطهٔ آن بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

تذکر. اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد گوییم f روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

مثال. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری وجـود دارد. یکی از روش‌ها استفاده از از تابع $f(t) = \begin{cases} ۶t + ۴ & ۰ \leq t < ۱ \\ ۲t + ۱۰ & ۲ \leq t \leq ۱۰ \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است.

الف) $f(\frac{۱}{۲})$ و $f(۲)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازه $[۰, ۱۰]$ پیوسته است؟

پرسش. پیوستگی توابع زیر را در نقطهٔ $a = ۱$ بررسی کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x-۱} & x \neq ۱ \\ ۱ & x = ۱ \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} ۴ - ۳x & x \leq ۱ \\ ۲x^۲ + ۱ & x > ۱ \end{cases}$

پرسش. در تابع زیر مقدار a را طوری پیدا کنید که تابع پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^۲-۲x}{x-۲} & x < ۲ \\ ax + ۱ & x \geq ۲ \end{cases}$$

پرسش. مقدار m را چنان بیابید که تابع زیر در نقطهٔ $a = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-۱|}{۱-x} & x < ۱ \\ mx + ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$$

پرسش. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [x] + bx & x > ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ \frac{|x-۱|}{x^۲-۱} & x < ۱ \end{cases}$$

پرسش. پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-۴}$ را در نقطهٔ $x = ۴$ بررسی کنید.

پرسش. مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a - |x-۱| & x \geq ۱ \\ \frac{x^۲-۱}{x-۱} & x < ۱ \end{cases}$$

پرسش. آیا تابع $f(x) = \frac{x^۲-۴}{x-۲}$ در ۲ پیوسته است؟ چرا؟

پرسش. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۰ \\ x+۱ & x > ۰ \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $x = ۰$ بررسی کنید.

پرسش. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x = ۰$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin^۲x}{۱-\cos x} & x > ۰ \\ a + ۱ & x = ۰ \\ [x+۲] + b & x < ۰ \end{cases}$$

پرسش. تابع f به معادلهٔ زیر در نقطه $x = ۳$ پیوسته است. a + b را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^۲-۹|}{x-۳} + ax + ۵ & x < ۳ \\ ۲ & x = ۳ \\ \frac{۲x-۶}{x^۲-۵x+۶} + bx & x > ۳ \end{cases}$$

پرسش. مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰ \le x < ۱ \\ [x] + a & x \ge ۱ \end{cases}$$

پرسش. پیوستگی تابع زیر را در $x = -۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{|x|} & x \le -۱ \\ ۲x + ۱ & x > -۱ \end{cases}$$

پرسش. حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} ۲a + x^۲ & x \ge ۲ \\ x^۳ - x & x < ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ پیوسته نباشد.

پرسش. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲ax^۲ + bx + ۱ & x < ۱ \\ |x| & x = ۱ \\ a\sin(x-۱) + ۲b & x > ۱ \end{cases}$$

پرسش. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| \ge ۱ \\ x[x] & |x| < ۱ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = ۳$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۴

پرسش. تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}[x]$ از نظر پیوستگی در $x = ۰$ چگونه است؟ (ریاضی ۹۱ خارج)

۱) پیوسته است ۲) فقط از چپ پیوسته است ۳) فقط از راست پیوسته است ۴) ناپیوسته است

پرسش. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x} & x > ۲ \\ x - a & x \le ۲ \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

(ریاضی ۹۴) ۱) ۱/۲ ۲) ۱/۶ ۳) ۲/۴ ۴) ۳/۲

پرسش. به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & x \ne ۰ \\ a & x = ۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a