



www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کanal سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

توابع نمایی و لگاریتمی



فصل

تابع نمایی و ویژگی های آن

درس اول

تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

درس دوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس سوم

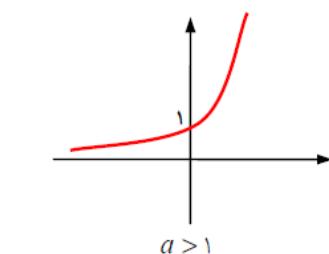
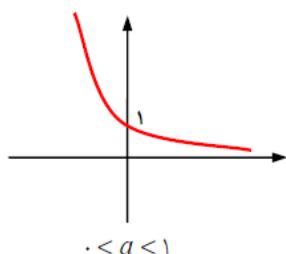
تابع نمایی و ویژگی‌های آن

تابع نمایی : فرض کنید a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$). تابعی که ضابطه آن

به صورت $y = a^x$ باشد، تابع نمایی با پایه a نامیده می‌شود.

مثال. نمودار تابع $f(x) = 2^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

نکته. نمودار تابع نمایی $y = a^x$ در حالت کلی برحسب این که $1 < a < 0$ یا $a < 1$ همواره به یکی از



دو صورت زیر است :

تذکر. تابع نمایی $y = a^x$ برای $1 > a > 0$ صعودی است :

$s < t \Leftrightarrow a^s < a^t$ ۱) $a > 1$ نزولی است :

نکته. با استفاده از نمودارهای بالا، موارد مهم ذیل فهمیده می‌شود :

الف) دامنه تابع نمایی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} و برد آن اعداد مثبت $(0, +\infty)$ است. یعنی :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$y = a^x$$

ب) چون $1 = a$ ، نمودار تابع نمایی همواره از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

پرسش. اگر تعداد باکتری‌های موجود در نمونه، از رابطه $Q(t) = 250 \times \frac{t}{3^4}$ بدست آید، که t نشان

دهنده زمان برحسب روز است) مطلوبست :

الف) تعداد اولیه باکتری‌ها را

ب) تعداد آنها را بعد از گذشت ۴ روز

پ) تعداد آنها بعد از گذشت ۱۴ روز

پرسش. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ مفروض است. مقادیر (۱) $f(0)$ و (۲) $f(-2)$ را بیابید.

پرسش. محدوده m را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $y = \left(\frac{1-2m}{m+1}\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

تذکر. تمام ویژگی‌های تابع نمایی را میتوان از روی نمودار کلی گفته شده استخراج کرد. بنابر این نمودار این تابع را باید در ذهن داشت.

نکته. همواره داریم : $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. مثلا تابع $y = 3^{-x}$ همان تابع نمایی $y = 2^x$ می‌باشد. صورت، تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ همان تابع نمایی $y = 3^x$ می‌باشد.

مثال. نمودار توابع زیر را توسط انتقال نمودارها رسم کنید :

$$\text{الف) } y = 2^x + 1$$

$$\text{ب) } y = 3^{x-2} - 2$$

$$\text{پ) } y = \frac{(\sqrt[3]{y})^x}{3-x}$$

$$\text{ت) } y = 2 \times \left(\frac{3}{\sqrt[3]{y}}\right)^x$$

نکته. فقط توابعی رفتار نمایی دارند که ضابطه آنها بصورت توانی باشد و متغیر در توان قرار داشته باشد.

البته ممکن است این عبارت توان دار با عددی جمع و تفریق یا در عددی ضرب شده باشد.

مثال. کدام یک از توابع زیر رفتار نمایی دارند؟

$$\text{ب) } y = 3 \times 2^x + 5 \quad \text{الف) } y = 3x^3 + 5$$

$$y = (2 - x^2)^3 \quad (ت) \quad y = \frac{4^x}{2 \times 5^{x-1}} \quad (پ)$$

پرسش. مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع $y = 4 - m^2 x^2 + 3^{(1-m)x}$ یک تابع نمایی نزولی باشد.

معادلات و نامعادلات نمایی:

معادله نمایی: اگر b یک عدد مثبت باشد و $x = y$, آنگاه $b^x = b^y$ و به عکس. مثلا از تساوی $3^x = 3^y$

نتیجه می‌شود که $x = y$.

مثال. معادلات زیر را حل کنید.

$$(الف) 3^{2x-3} = 81$$

$$(ب) 9^{3y-3} = 27^{2y+1}$$

$$(پ) 9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$$

$$(ت) \frac{16^{2x-3}}{16^{x+3}} = 4^x - 1$$

$$(ث) 125^{1-3x} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^{2x}$$

$$(ج) 2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 208$$

نامعادله نمایی: اگر $1 < b$, آنگاه $b^x \geq b^y$ اگر و تنها اگر $x \geq y$ مثلا اگر $5^x > 5^y$ آنگاه $x > y$.

همچنین اگر $1 < b < 0$, آنگاه $b^x \geq b^y$ اگر و تنها اگر $y \leq x$. مثلا اگر $(\frac{1}{3})^x \geq (\frac{1}{2})^y$ آنگاه $y \leq x$.

نکته. مانند معادلات نمایی، در حل نامعادلات نمایی نیز در ابتدا باید پایه‌ها یکسان کرد.

مثال. نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 2^{x-2} \leq \frac{1}{2^2}$$

$$\text{ب) } 3^{3x+2} > 27^{2x-1}$$

$$\text{پ) } 49^{2x-1} \geq (\sqrt{7})^{-4x+4}$$

$$\text{ت) } (\sqrt{3} - \sqrt{8})^{1-x} < (\sqrt{3} + \sqrt{8})^{2-3x}$$

پرسش. نمودار هر یک از توابع زیر رارسم کنید.

$$\text{الف) } y = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$$

$$\text{ب) } y = 2 \times 3^x - 4$$

$$\text{پ) } y = -3^{x+2} + 1$$

$$\text{ت) } y = |3^x - 2|$$

$$\text{ث) } y = \frac{3^x - 3^{2x}}{12^x - 2^{2x}}$$

پرسش. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 9^{x-1} = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} = 64^{\frac{2x+4}{12}}$$

$$\text{پ) } \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}\right)^x = 3^{-x+2}$$

$$\text{ت) } 8^{1-x} - 4 \times 2^{7+2x} + 41 = -23$$

$$\text{ث) } 3^{6x-5} > 81$$

$$\text{ج) } (4 - \sqrt{3})^{x^2} \leq (4 + \sqrt{3})^x$$

پرسش. دامنه تابع زیر را به صورت بازه مشخص کنید.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 5^x}$$

تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع لگاریتمی :

همانطور که در بخش قبل دیدیم تابع نمایی $y = a^x$ که $(a > 0, a \neq 1)$ تابعی یک به یک است و در نتیجه این تابع معکوس پذیر خواهد بود. معکوس این تابع را تابع لگاریتمی گویند و به صورت زیر تعریف

$$y = \log_a x, \quad (a > 0, a \neq 1) \quad \text{میشود :}$$

در این تابع، عدد a مبنا یا پایه لگاریتم است که همواره مثبت و مخالف ۱ می‌باشد. نکته. با توجه به مطالب فوق، تابع لگاریتمی و خصوصیات آن و ارتباطش با تابع نمایی را میتوان به صورت

زیر بیان کرد :

$$\log_a: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

در واقع، دامنه تابع لگاریتمی تمام اعداد مثبت و برد آن تمام اعداد حقیقی \mathbb{R} است. مثال. در هر یک از موارد زیر، تساوی داده شده را به زبان لگاریتم یا نمایی بنویسید.

$$1) \quad 32 = 2^5$$

$$2) \quad 8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$$

$$3) \quad \log_5 125 = 3$$

$$4) \quad \log_{10} 0.001 = -3$$

مثال. با استفاده از نمودار تابع $y = \log_{10} x$ ، نمودار تابع $y = \log_{10} (-x)$ را رسم کنید.

حل) چون تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ معکوس تابع نمایی $y = (\frac{1}{2})^x$ است، کافی است نمودار این تابع را رسم کرده و سپس قرینه آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y = x$) رسم کنیم :

نکته. با توجه به مثال بالا و در کل، ارتباط بین نمودار یک تابع و نمودار معکوس آن، نمودار تابع لگاریتمی

$y = \log_a x$ به توجه به پایه آن همواره به یکی از دو صورت زیر است :



توجه داشته باشید که نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ همواره از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

مثال. نمودار هر یک از توابع زیر را توسط انتقال نمودارها رسم کنید.

$$\text{الف) } y = \log_2 x - 2$$

$$\text{ب) } y = \log_2(x - 2)$$

$$\text{پ) } y = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$$

نمادهای استاندارد:

الف) اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، به آن لگاریتم اعشاری گویند و عموماً برای راحتی از نوشتن مبنای

$$10 \text{ خود داری میشود : } \log x = \log_{10} x$$

ب) اگر مبنای لگاریتم عدد شناخته شده $e \approx 2.718$ باشد، به آن لگاریتم طبیعی گویند و آن را با \ln

$$\ln x = \log_e x \quad \text{نشان میدهند :}$$

تذکر. لگاریتم عدد ۱ در هر مبنایی برابر صفر است :

مثال. حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$1) \log_2 81 =$$

$$2) \log_2 \frac{1}{8} =$$

$$3) \log_{10} 1000 =$$

$$4) \log 100 =$$

$$5) \log_8 \sqrt[3]{64} =$$

$$6) \log_5 125^{\frac{1}{3}} =$$

پرسش. اگر $f(x) = 3 - 2 \log_2 (\frac{x}{2} - 5)$ ، مقدار $f(42)$ را بدست آورید.

پرسش. از رابطه زیر مقدار t را بیابید.

$$\log_{64} 256 = 1 - 2t$$

ویژگی‌های لگاریتم :

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ همواره داریم :

$$1) \log_a 1 = 0$$

$$2) \log_a a = 1$$

$$3) \log_a (\frac{1}{a}) = -1$$

$$4) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$5) \log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$$

$$6) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$7) \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$8) \log_a^n x^m = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$9) \log_a \frac{1}{x} = \log_a \frac{1}{a} x = -\log_a x$$

$$10) \log_a a^x = x \quad 11) a^{\log_a x} = x$$

$$12) \log_c b \times \log_a c = \log_a b$$

$$13) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

مثال. با استفاده از قوانین لگاریتمی، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$1) \log_2 \sqrt[3]{32} =$$

$$2) \log_7 \sqrt[4]{49} + \log_7 \sqrt[5]{16} =$$

$$3) 5 \log_7 \sqrt[5]{81} - 2 \log_7 \frac{1}{49} + 3 \log_7 \dots / \dots$$

$$4) \log \sqrt{1000} =$$

$$5) \log 5 + \log 20 =$$

$$6) (\log_7 \sqrt[4]{8}) \log_7 \sqrt[3]{9} =$$

$$7) 2 \log_5 \sqrt{125} - \log_{\sqrt{5}} 8 + 5^{1+\log_5 6} =$$

$$8) \log_5 \sqrt[5]{125} + \log_{\frac{1}{4}} \sqrt[5]{4} - \log_2 \frac{1}{3} =$$

$$9) \log_2 \log_5 25 =$$

تذکر. یکی از کاربردهای مهم ویژگی‌های ذکر شده، محاسبه لگاریتم اعداد مختلف است. برای این منظور،

معمولًا مراحل زیر انجام می‌شود :

۱) پایه عدد یا عدهای داده شده را تجزیه می‌کنید.

۲) با استفاده از خواص اعداد توان دار، آن را به صورت ضرب یا تقسیم اعداد توانی بنویسید.

۳) خواص لگاریتم را در مورد آن بکار ببرید.

۴) مقادیر داده شده را جایگزین کنید تا عدد خواسته شده بدست آید.

پرسش. فرض کنید $\log_2 m = n$ و $\log_3 n = p$. توسط آن $\log_2 \log_3 n$ را بحسب m و n بیان کنید.

پرسش. مقدار عددی $\log_{\frac{1}{3}} 32 + \log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{27}$ را تعیین کنید.

پرسش. اگر $\log_b a^m b = m$ باشد، $\log_b a = ?$ را بحسب m بیان کنید.

پرسش. اگر $\log_2 0.5 \approx 0.3$ و $\log_3 0.5 \approx 0.1$ باشد، حاصل $\log_2 0.3$ را بدست آورید.

پرسش. اگر لگاریتم عدد $\sqrt[3]{0.25}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(1 - \frac{1}{A})$ در پایه ۴ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- $\frac{3}{2} (4)$ $\frac{2}{3} (3)$ $\frac{1}{3} (2)$ $-3 (1)$

پرسش. اگر $A^3 = 3^a$ باشد، آنگاه $\log_3 9A^3$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

- $3 + a^3 (4)$ $2 + a^3 (3)$ $3 + 2a (2)$ $2 + 2a (1)$

پرسش. اگر $\log_2 k = 6 - 2\sqrt{5}$ باشد، حاصل $\log_2 (1 + \sqrt{5}) + 2\log_2 (6 - 2\sqrt{5})$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

- $2 + 2k (4)$ $1 + k (3)$ $4k (2)$ $2k (1)$

پرسش. اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a + 1)$ در پایه ۴ کدام است؟ (تجربی ۸۸)

- $\frac{3}{2} (4)$ $2 (3)$ $\sqrt{2} (2)$ $1 (1)$

پرسش. اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر باشد، آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۸ کدام است؟ (تجربی ۸۷)

$$\frac{3}{2} \quad (\text{۴}) \quad \sqrt{2} \quad (\text{۳}) \quad \frac{4}{3} \quad (\text{۲}) \quad \frac{2}{3} \quad (\text{۱})$$

معادله لگاریتمی :

در بخش اول دیدیم که نمودار تابع لگاریتمی یا صعودی ($a > 1$) و یا نزولی ($0 < a < 1$) است.

در نتیجه این تابع یک به یک است. بنابراین خاصیت مهم زیر در مورد لگاریتم همواره برقرار است :

$$\log_a P = \log_a Q \Rightarrow P = Q$$

نکته. در حل معادلات لگاریتمی چنین عمل می‌کنیم :

الف) با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، طرفین تساوی را به دو لگاریتم بدون ضریب تبدیل می‌کنیم.

ب) با استفاده از مطلب بالا، لگاریتم‌ها حذف می‌شوند.

پ) جواب‌های بدست آمده را در معادله جای x قرار می‌دهیم. شرط قابل قبول بودن یک جواب این

است که : جلوی هیچ لگاریتمی عدد منفی قرار نگیرد.

مثال. معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$1) \log_5 x = 3$$

$$2) \log_3(x - 1) = 4$$

$$3) \log_4(x + 2) = \log_4 8$$

$$4) 3\log_2 x = -\log_2 27$$

$$5) \log_3(x^2 - 15) = \log_3 2x$$

پرسش. حاصل معادلات لگاریتمی زیر را بدست آورید.

$$۱) \log(x+2) - \log(x-2) = \log 5$$

$$۲) \log(2x-1) + \frac{1}{r} \log x^r = \log 3$$

$$۳) \log_5(x+2) + \log_5(x-2) = \log_5 32$$

$$۴) \log_8(x-1) + \log_8(x+1) = 1$$

$$۵) \log x = \log \sqrt{2} + \frac{1}{r} \log \frac{2}{5}$$

$$۶) \log_r(\delta x - 2) = 1 + \log_{\sqrt{r}} x$$

$$۷) \log_r x + \log_r(x+1) = 2$$

$$۸) 2 \log_y x = \log_y 81$$

$$۹) \log_5 x + \log_5(x+1) = 2 \log_5 2 + 1$$

$$۱۰) \log(3x+1) = \log 5 + 3 \log 2$$

$$۱۱) \log_4 \frac{x}{x-1} - \log_4 \sqrt{4-x} = .$$

$$۱۲) \log_{\frac{1}{5}}(\log \sqrt{5x}) = .$$

$$۱۳) \log_{99}(2x-1) + \log_{99}(2x+1) = 1$$

$$۱۴) \log_r(x+1) + \log_r(x^r - x + 1) = 2$$

$$۱۵) 4 \log \frac{x}{r} + 3 \log \frac{x}{r} = 5 \log x - \log 27$$

$$۱۶) \log_2[1 + \log_r(2x+1)] = 2$$

$$۱۷) \log x = \log(x+3) + \log(x-3) - 3 \log 2$$

$$۱۸) \log(x^r - 4) = 2 \log(x+3)$$

$$۱۹) x^{1-\log x} = . / .$$

$$۲۰) \sqrt{\log_x \sqrt{x}} = 1.$$

پرسش. اگر $1 = \log_5(2x - 1) + \log_5(3x - 1)$ باشد، آنگاه مقدار $(2x - 1)(3x - 1)$ را محاسبه کنید.

پرسش. اگر $2 = \log_7 x^2 + y^2 - 7$ باشند، مقدار $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ را بدست آورید.

پرسش. اگر b, a ریشه‌های معادله $x^2 - 10x + 21 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a + b)$ است؟

- ۱) ۴ ۰) ۳ -۱) ۲ -۲) ۱ کدام است؟ (تجربی ۸۸ خارج)

پرسش. از معادله $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ در مبنای ۴ کدام است؟

- ۱) ۴ ۱) ۳ -۱) ۲ ۳) ۱ است؟ (ریاضی ۸۸)

پرسش. از دو معادله $2 = \log_3 x + \log_3 y$ و $x^2 + y^2 = 46$ در پایه ۴ کدام است؟

- ۳) ۴ ۲/۵) ۳ ۲) ۲ ۱/۵) ۱ (تجربی ۸۹)

پرسش. اگر $k = \log 2$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ است؟ (تجربی ۹۰)

- ۲ + ۲k) ۴ ۱ + k) ۳ ۴k) ۲ ۲k) ۱

پرسش. نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_2 x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ (تجربی ۹۱ خارج)

- ۴) متقاطع اند ۳) منطبق اند ۲) g(x) بالاتر ۱) f(x) بالاتر

پرسش. از دو معادله $\log(x+1) + \log(2y+x^3) = 2 - 4x + 2^x = 72$ و $y = 4^x$ ، مقدار y را بیابید.

۹) ۴ ۸) ۳ ۷) ۲ ۶) ۱ (تجربی ۹۲ خارج)

پرسش. از تساوی $(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

۲) ۴ $\frac{3}{2}$) ۳ $\frac{2}{3}$) ۲ $\frac{1}{2}$) ۱ (تجربی ۹۳ خارج)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی :

الف) مقیاس ریشر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر بدست می آید :

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5M$$

مثال. در سال ۱۳۸۲ زلزله ای به شدت ۶/۶ ریشر، شهر بم استان کرمان را لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله مصیبت بار چقدر بوده است؟

پرسش. در سال ۱۳۶۹ زلزله ای به بزرگی ۷/۴ ریشر در روobar و منجیل رخ داده است. مقدار انرژی این زلزله مرگبار را محاسبه کنید.

ب) یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبه PH یک محلول است. PH، معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه زیر بدست می آید :

$$PH = -\log_{10} [H^+]$$

که $[H^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را بر حسب واحد mol/lit نشان می دهد.