



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

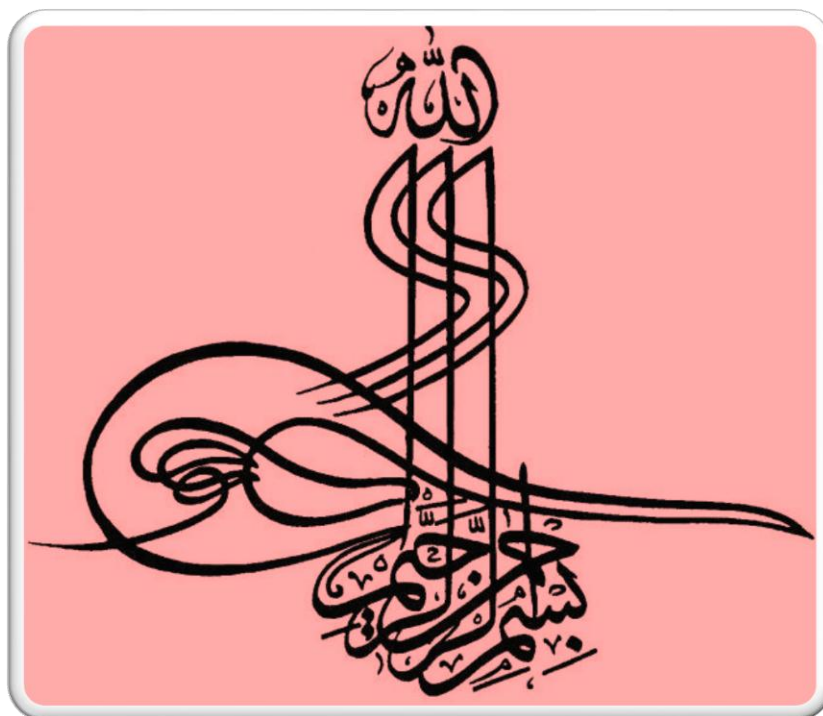
و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مثلثات

(فصل چهارم ریاضی پایه یازدهم تجربی)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی

پاسخ کاملا تشریحی

حل تمامی فعالیت ها و کاردر کلاس ها و تمرینات

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل چهارم کتاب درسی پایه یازدهم تجربی، مبحث «مثلاث» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

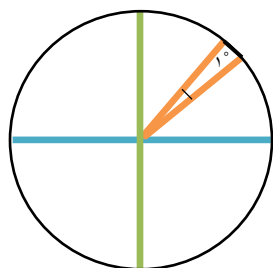
حبیب هاشمی

درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه

یاد آوری

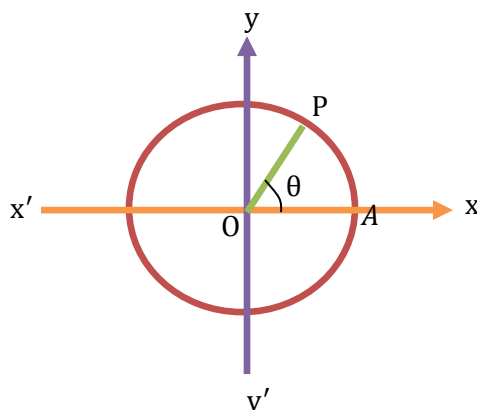
تعریف درجه :

اگر محیط دایره ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روی هر کدام از این کمان ها ۱ درجه است.
نکته: اندازه هر کمان با زاویه مرکزی روبروی آن کمان بر حسب درجه برابر است.



دایره مثلثاتی

دایره ی زیر که دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوئیم.



۱- مرکز دایره در مبدأ مختصات قرار دارد

۲- شعاع دایره ۱ است

۳- نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

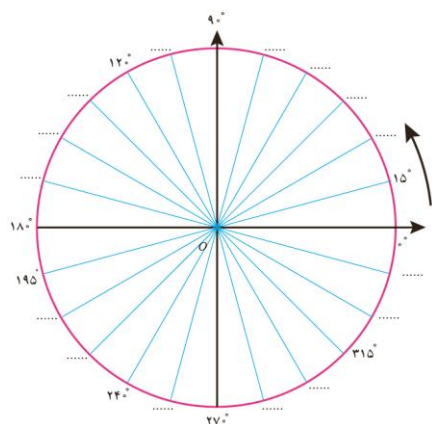
قرار داد: گر نقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و

اگر حرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.

تذکر: منظور از جهت مثلثاتی همان جهت مثبت است.

شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نمایش می دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی

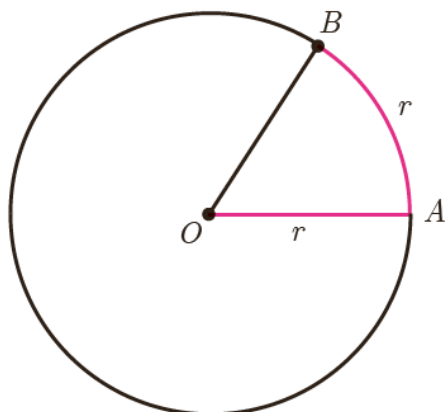
زاویه مناسب را روی شکل مشخص کنید.



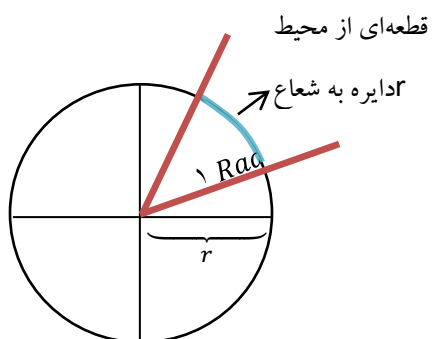
برای اندازه گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می شوید.

تعریف رادیان :

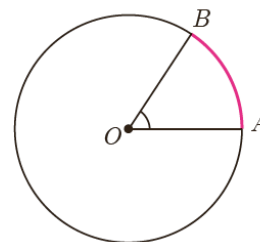
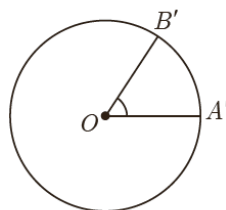
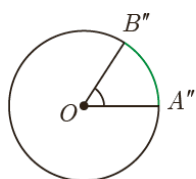
اگر قطعه نخى را به اندازه شعاع يك دایره برش دهیم و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه AOB را یک رادیان گوئیم



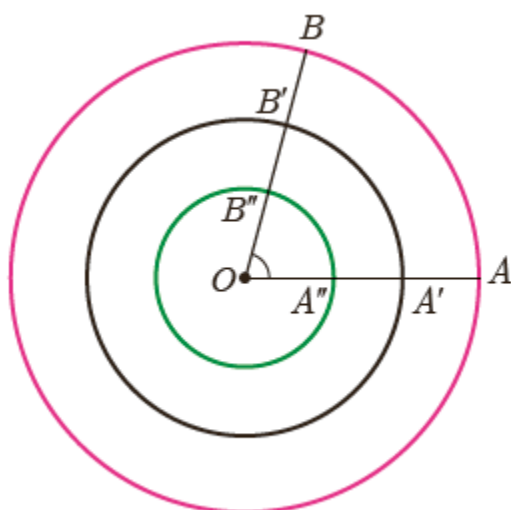
۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان رو به روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.



در تمام دایره های زیر اندازه زاویه مشخص شده ۱ رادیان است



به عبارت دیگر اگر اندازه AOB ، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم :



$$OA = AB$$

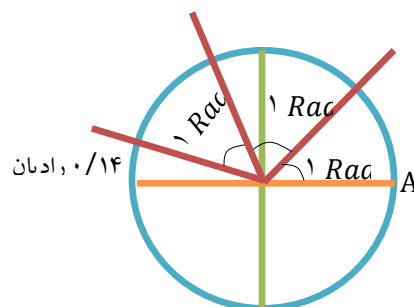
$$OA' = A'B'$$

$$OA'' = A''B''$$

تذکره: می دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می دهند و به آن

عدد پی می گویند . مقدار تقریبی این عدد $3/14$ است.

اگر قطعه نخ‌ری را به اندازه شعاع یک دایره برش دهیم و آن را از نقطه A روی محیط دایره قرار دهیم و این کار را تکرار کنیم همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌کنیم زاویه مرکزی روبروی کمان نیم دایره تقریباً برابر $\frac{3}{14}\pi$ رادیان یا همان π رادیان است.



نکته: اندازه زاویه مرکزی رو به رو کمان نیم دایره برابر است با 180° درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم صفحه برابر است با π رادیان

180° درجه برابر π رادیان است یعنی اگر π رادیان از محیط دایره را طی کنیم مانند این است که 180° درجه را طی کرده‌ایم)

تذکر: π با 180° برابر نیست بلکه π تقریباً $\frac{3}{14}\pi$ است (π رادیان برابر 180° درجه است)

رابطه بین درجه و رادیان:

اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

مثال: زاویه ۲۰° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\frac{۲۰}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۲۰\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۹}$$

تمرین: هریک از زاویه های ۳۰° ، ۱۲۰° ، ۲۲۵° و ۳۳۰° را به رادیان تبدیل کنید

مثال: زاویه $\frac{\pi}{6}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۶} \Rightarrow D = ۳۰^\circ$$

مثال: زاویه D بر حسب درجه برابر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow D = ۹۰^\circ$$

مثال: یک رادیان تقریباً چند درجه است؟

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱}{\pi} \rightarrow D = \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۱۸۰}{۳.۱۴} = ۵۷.۳$$

نکته: یک رادیان تقریباً ۵۷ درجه است.

مثال: جدول زیر را با استفاده از رابطه $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$ کامل کنید.

D (درجه)	۵°		۲۴°	۷۲°	۱۲۰°	
R (رادیان)	$\frac{\pi}{۳۶}$	$\frac{\pi}{۷}$		$\frac{۲\pi}{۵}$		$\frac{۵\pi}{۴}$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{180^\circ} = \frac{N \quad l \quad \text{رادیان} \frac{\pi}{7}}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow D = 25.71^\circ \\ \frac{24^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow R = N \quad l \quad \text{رادیان} \frac{2\pi}{15} \\ \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{N \quad l \quad \text{رادیان} \frac{2\pi}{5}}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow D = \frac{2 \times 180^\circ}{5} \Rightarrow D = 72^\circ \\ \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow R = N \quad l \quad \text{رادیان} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{D}{180^\circ} = \frac{N \quad l \quad \text{رادیان} \frac{5\pi}{4}}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \Rightarrow D = \frac{5 \times 180^\circ}{4} \Rightarrow D = 225^\circ \end{array} \right.$$

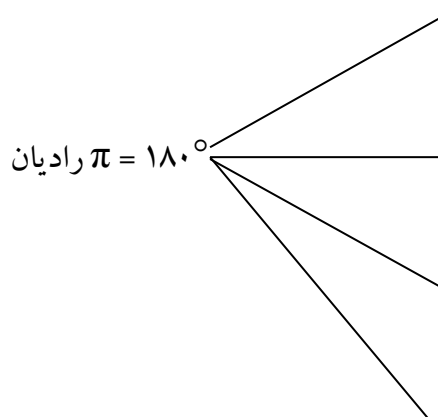
تبدیل رادیان به درجه به روش سریع:

برای تبدیل رادیان به درجه ۲ حالت داریم:

حالت اول: زاویه داده شده بر حسب π داده شده باشد که در این صورت کافیت به جای π رادیان مقدار 180° را قرار دهیم تا به درجه تبدیل شود.

مثال: زاویه D بر حسب درجه برابر $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

$$\frac{\pi}{20} = \frac{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi = 180^\circ}{N \quad l \quad \text{رادیان} \pi} \rightarrow \frac{180^\circ}{20} = 9 \text{ رادیان}$$



$$\xrightarrow{\div 2} \text{رادیان } \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 3} \text{رادیان } \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 4} \text{رادیان } \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 6} \text{رادیان } \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

مثال: هر يك از زاويه های $\frac{4\pi}{5}, \frac{5\pi}{9}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{7\pi}{12}$ را به درجه تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان

دهید.

(حل) کافیت به جای π رادیان مقدار 180° را قرار دهیم

$$\text{رادیان } \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \times 180^\circ}{5} = 144^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{5\pi}{9} = \frac{5 \times 180^\circ}{9} = 100^\circ$$

$$\text{رادیان } -\frac{3\pi}{8} \rightarrow D = -\frac{3 \times 180^\circ}{8} = -67.5^\circ$$

$$-\frac{7\pi}{12} \rightarrow D = -\frac{7 \times 180^\circ}{12} = -105^\circ$$

تمرین: هر يك از زاویه های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{7\pi}{4}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به

درجه تبدیل کنید و به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

مثال: تفاضل دو زاویه بر حسب رادیان برابر $\frac{2\pi}{9}$ است. اگر اندازه یکی از زوایا سه برابر اندازه زاویه

دیگری باشد اندازه دو زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

$$\frac{2\pi}{9} \text{ رادیان بر حسب درجه برابر است با:}$$

$$D = \frac{2\pi}{9} = \frac{2 \times 180^\circ}{9} = 40^\circ$$

اگر اندازه دو زاویه α و β باشد آنگاه طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 40^\circ \\ \alpha = 3\beta \end{cases} \Rightarrow 3\beta - \beta = 40^\circ \Rightarrow 2\beta = 40^\circ \Rightarrow \beta = 20^\circ$$

$$\alpha = 3\beta = 60^\circ$$

علامت نسبت های مثلثاتی

در شکل مقابل، یک دایره مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می دهد.



هستک



مثال: علامت هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را مشخص کنید.

پ) $\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)$

ب) $\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)$

الف) $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

ج) $\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

ث) $\tan\left(-\frac{11\pi}{7}\right)$

ت) $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

ح) $\cot\left(\frac{12\pi}{11}\right)$

چ) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

حل) باید ناحیه ای را که انتهای زاویه در آن قرار می گیرد مشخص کنیم و سپس علامت نسبت مثلثاتی را مشخص کنیم ، ابتدا زاویه های داده شده را بر حسب درجه به دست می آوریم و سپس ناحیه مورد نظر را مشخص می کنیم.

$$\text{ناحیه دوم } ۱۱۲/۵ = \frac{۵ \times ۱۸۰}{۸} = \text{اندازه} = \frac{۵\pi}{۸} \text{ بر حسب درجه}$$

$$۹۰^\circ < ۱۱۲/۵^\circ < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۱۲/۵^\circ > ۰.$$

$$\text{ناحیه دوم} \quad \text{ب)} \quad -\frac{۷\pi}{۵} = \frac{-۷ \times ۱۸۰^\circ}{۵} = -۲۵۲^\circ \quad \text{رادیان}$$

$$\sin\left(\frac{-۷\pi}{۵}\right) > ۰.$$

پ)

$$\text{ناحیه سوم } ۲۲۰^\circ = \frac{۱۱ \times ۱۸۰}{۹} = D \rightarrow \frac{۱۱\pi}{۹} \text{ رادیان}$$

در ناحیه سوم سینوس منفی است

ت)

$$\text{رادیان} \quad \frac{۱۹\pi}{۱۲} = \frac{۱۹ \times ۱۸۰^\circ}{۱۲} = ۲۸۵^\circ = ۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \cos \frac{19\pi}{12} > 0.$$

(ث)

$$\text{رادیان} \quad \frac{-11\pi}{7} = \frac{-11 \times 180^\circ}{7} \approx -283^\circ = -270^\circ - 13^\circ$$

انتهای زاویه در ناحیه اول قرار می گیرد و در نتیجه :

$$\tan \left(-\frac{11\pi}{7} \right) > 0.$$

(ج)

$$\text{ربع سوم} \quad \frac{5\pi}{4} \rightarrow D = \frac{5 \times 180^\circ}{4} = 225^\circ$$

در ناحیه سوم کتانژانت مثبت است

(چ)

$$\text{رادیان} \quad -\frac{\pi}{3} = -60^\circ \longrightarrow \cot \left(-\frac{\pi}{3} \right) < 0.$$

در ناحیه چهارم کتانژانت منفی است

(ح)

$$\frac{13\pi}{11} \rightarrow D = \frac{13 \times 180^\circ}{11} = 212 / 7^\circ$$

ربع سوم

در ناحیه سوم کتانژانت مثبت است

مثال:

علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه روی α	زاویه α
$\tan \alpha < 0$	ربع اول	$\frac{3\pi}{4}$ رادیان
$\sin \alpha > 0$	ربع دوم	$\frac{4\pi}{5}$ رادیان
$\cos \alpha < 0$	ربع چهارم	$\frac{5\pi}{3}$ رادیان
$\cot \alpha > 0$	ربع اول	$\frac{5\pi}{12}$ رادیان
$\tan \alpha < 0$	ربع سوم	$\frac{5\pi}{4}$ رادیان

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi + \pi - \pi}{4} = \frac{(3\pi + \pi) - \pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

پس در ربع دوم قرار دارد. (می توان ابتدا به درجه تبدیل کرد سپس علامت را مشخص کرد)

$$\frac{4\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{4\pi}{5} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{5} \text{ رادیان از } \pi \text{ رادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار}$$

دارد.

$$\frac{5\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{5\pi}{3} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{3} \text{ رادیان از } 2\pi \text{ رادیان کم تر است پس در ربع چهارم}$$

قرار دارد.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{5\pi}{12} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{12} \text{ رادیان از } \frac{\pi}{2} \text{ رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار}$$

دارد.

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{5\pi}{4} \text{ رادیان به اندازه } \frac{\pi}{4} \text{ رادیان از } \pi \text{ رادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار}$$

دارد.

زاویه α نسبت	$0^\circ = 0$ رادیان	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$ رادیان	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$ رادیان	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$ رادیان	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ رادیان	$180^\circ = \pi$ رادیان	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ رادیان	$360^\circ = 2\pi$ رادیان
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\text{الف)} \cot \frac{\pi}{6} - \tan \alpha \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9} \quad \text{ب)}$$

مثال: مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4} \quad \text{ب) } \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} + 3 \sin \frac{2\pi}{3} - \tan \pi$$

$$\text{پ) } \cos^3 \frac{\pi}{3} + \sin^3 \frac{\pi}{4} - \cos^2 2\pi \quad \text{ت) } \frac{\tan^3 \frac{\pi}{3} + \cos^3 \frac{\pi}{6}}{\tan^3 \frac{\pi}{4} - \cot^3 \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ث) } \frac{\tan \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8} - \tan^3 \frac{\pi}{3}}{2 \sin^3 \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{6}} \quad \text{ج) } \sin^3 \frac{\pi}{6} - \cot^3 \frac{\pi}{3} + \cos^3 \frac{\pi}{8} + \sin^3 \frac{\pi}{8}$$

$$\text{حل آ) } \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

ب)

$$\sqrt{3} \tan \frac{\pi}{3} + 3 \sin \frac{2\pi}{3} - \tan \pi = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3(-1) - 0$$

$$= 3 - 3 - 0 = 0$$

پ)

$$\cos^3 \frac{\pi}{3} + \sin^3 \frac{\pi}{4} - \cos^2 2\pi = \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)^3 + \left(\sin \frac{\pi}{4} \right)^3 - (\cos 2\pi)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - (1)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$$

(ت)

$$\frac{\tan^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6}}{\tan^2 \frac{\pi}{6} - \cot^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{3 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{8}{9}} = \frac{9 \times 15}{4 \times 8} = \frac{135}{32}$$

ث) به ازای هر مقدار $x \left(x \neq \frac{k\pi}{2} \right)$ حاصل $\cot x$. $\tan x$ برابر یک است، بنابراین:

$$\tan \frac{\pi}{8} \cot \frac{\pi}{8} = 1, \quad \tan^2 \frac{\pi}{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{1-3}{2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-2}{1+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

ج) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ مقدار $\sin^2 x + \cos^2 x$ برابر یک است بنابراین

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)^2 - \left(\cot \frac{\pi}{3} \right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{3 - 1 + 12}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

حالت دوم: زاویه داده شده به صورت عدد باشد کافیت عدد داده شده را در ۵۷ ضرب کنیم تا به درجه تبدیل شود.

مثال: ۵ رادیان معادل چند درجه است؟

$$5 \times 57 = 285$$

مثال: ۰/۵ رادیان معادل چند درجه است؟

$$0.5 \times 57 = 28.5$$

مثال:

زاویه بر حسب رادیان	۰/۵ رادیان	۱ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۳/۱۴ رادیان	π رادیان
زاویه بر حسب درجه	تقریباً 28.5°	تقریباً 57°	تقریباً 114°	تقریباً 171°	تقریباً 179°	دقیقاً 180°
	$57^\circ \times 0.5 = 28.5^\circ$	$57^\circ \times 1 = 57^\circ$	$57^\circ \times 2 = 114^\circ$	$57^\circ \times 3 = 171^\circ$	$57^\circ \times 3.14 = 179^\circ$	

تبدیل درجه به رادیان به روش سریع :

کافیت عدد داده شده را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم**مثال:** هر یک از زاویه های 120° ، -20° ، 225° و -330° را به رادیان تبدیل کنید.

$$D = 120^\circ \rightarrow R = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$D = -20^\circ \rightarrow R = -20 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{9}$$

$$D = 225^\circ \rightarrow R = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

$$D = -330^\circ \rightarrow R = -330 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{11\pi}{6}$$

مثال: هر یک از زاویه ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید.

$$30^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{6}$$

$$36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{5}$$

$$45^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{4}$$

$$60^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{3}$$

$$90^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \frac{\pi}{2}$$

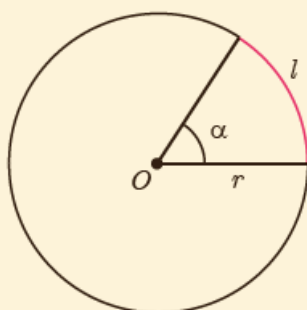
$$180^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} \text{رادیان } \pi$$

تمرین: هر یک از زاویه های 12° ، 36° ، 72° ، 105° ، 315° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره

مثلثاتی نشان دهید.

نکته : در حالت کلی با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازه زاویه مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به دست می آید به عبارت دیگر:

$$\text{طول کمان روبه روی زاویه} = \frac{\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان}}{\text{شعاع دایره}}$$



اگر l طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه رابطه بالا را به صورت زیر می توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطه بالا l و r هم واحدند.

مثال: با استفاده از رابطه بالا جدول زیر را کامل کنید.

l		۵۰۰ سانتی متر		۲۰۰ سانتی متر	۹۰ سانتی متر	۵۰ متر	۱۰ متر	
r	۵ سانتی متر	۵ متر	۵/۰ متر	۱ متر		۱۰ متر		۲۰ سانتی متر
α	۱ رادیان		۱/۵ رادیان		۳ رادیان		۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

$$r = 5 \text{ cm}, \alpha = 1 \text{ رادیان}, l = ? , \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{5} \Rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

$$r = 5 \text{ m}, l = 500 \text{ cm} \Rightarrow l = 5 \text{ m}, \alpha = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{5} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ رادیان}$$

$$r = 0.5 \text{ m}, \alpha = 1/5 \text{ رادیان}, l = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1/5 = \frac{l}{0.5} \Rightarrow l = 0.1 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ m}, l = 200 \text{ cm} \Rightarrow l = 2 \text{ m}, \alpha = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ رادیان}$$

$$l = 90 \text{ cm}, \alpha = 3 \text{ رادیان}, r = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 3 = \frac{90}{r} \Rightarrow r = 30 \text{ cm}$$

$$r = 10 \text{ m}, l = 50 \text{ m}, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{50}{10} \Rightarrow \alpha = 5 \text{ رادیان}$$

$$l = 10 \text{ m}, \alpha = 10 \text{ رادیان}, r = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 10 = \frac{10}{r} \Rightarrow r = 1 \text{ m}$$

$$r = 20 \text{ cm}, \alpha = 20 \text{ رادیان}, l = ?, \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 20 = \frac{l}{20} \Rightarrow l = 400 \text{ cm}$$

مثال: در هر قسمت، شعاع دایره، α اندازه زاویه مرکزی و l طول کمان رو به روی زاویه مرکزی α می

باشد. مقدار مجهول را به دست آورید.

الف) $\alpha = ?, r = 50 \text{ cm}, l = 2 \text{ m}$ ب) $r = ?, l = 20 \text{ cm}, \alpha = 4$

پ) $l = ?, r = 4 \text{ m}, \alpha = 60^\circ$

حل) از تساوی $\alpha = \frac{l}{r}$ مقدار هر یک از مجهولات را به دست می آوریم:

الف) l بر حسب متر و r بر حسب سانتی متر است برای هم واحد کردن کافی است l را بر حسب سانتی متر

بنویسیم:

$$l = 2m = 2 \times 100 = 200 \text{ cm} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{r} = \frac{200}{50} = 4$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow r = \frac{l}{\alpha} = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm} \quad (\text{ب})$$

پ) ابتدا α را بر حسب رادیان به دست می آوریم:

$$R = \frac{\pi D}{180} = \frac{\pi \times \cancel{180}}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} = \frac{l}{r}$$

$$\Rightarrow l - r\alpha = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ m}$$

مثال: نقطه دلخواه A روی دایره به مرکز O و شعاع ۳ متر قرار دارد. نقطه A را به اندازه 80° در خلاف

جهت حرکت عقربه های ساعت به مرکز O دوران می دهیم تا به نقطه B برسیم و سپس نقطه B را به اندازه

50° در جهت حرکت عقربه های ساعت و به مرکز O دوران می دهیم تا به نقطه C برسیم. طول کمان

AC را به دست آورید.

حل) در شکل زیر و با توجه به فرض، نقاط B و C مشخص شده است؛ با توجه به شکل داریم:

$$\angle AOC = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \xrightarrow[\text{رادیان}]{\text{ن}} \frac{\pi}{6}$$

$$r = 3, AC = l, \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow l = r\alpha = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان به طول ۸ سانتیمتر

از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

نکته: l و r هم واحد هستند و α بر حسب رادیان به دست می آید.

مثال: درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقین ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هر یک از ساق های آن است.

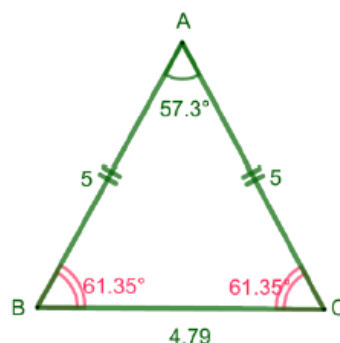
همانطور که قبلا دیده ایم ۱ رادیان تقریبا برابر $57/3^\circ$ درجه است. بنابر این باتوجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است؛ بنا براین اندازه هر یک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به دست آورد:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - 57/3^\circ}{2} = 61/35^\circ$$

همچنین می دانیم در هر مثلث ضلع رو به رو به زاویه بزرگ تر،

بزرگ تر از ضلع رو به رو زاویه کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود

پس عبارت فوق درست است.



ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان رو به روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با $۳/۱۴$ سانتی متر است.

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \Rightarrow l = 1 \times \pi = \pi = ۳/۱۴ \text{ cm}$$

این عبارت درست است زیرا

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: $\frac{۶\pi}{۵} = \pi + \frac{\pi}{۵}$ بنابراین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد؛ زیرا بیش تر از π رادیان است.

راه دوم: انتهای کمان زاویه ۲۱۶° درجه در ربع سوم است.

$$\text{رادیان } \frac{۶\pi}{۵} \xrightarrow[\pi = ۱۸۰^\circ]{\text{رادیان}} \frac{۱۰۸۰^\circ}{۵} = ۲۱۶^\circ$$

ت) زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند.

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: می دانیم که مجموعه زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس

$$\text{رادیان } \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow[\pi = ۱۸۰^\circ]{\text{رادیان}} \frac{۳۶۰^\circ}{۳} = ۱۲۰^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{۷\pi}{۳۶} \xrightarrow[\pi = ۱۸۰^\circ]{\text{رادیان}} \frac{۱۲۶۰^\circ}{۳۶} = ۳۵^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{9} \xrightarrow{\text{ن}} \xrightarrow{\text{ل}} \xrightarrow{\text{رادی } \pi = 180^\circ} \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

$$120^\circ + 20^\circ + 35^\circ = 175^\circ < 180^\circ$$

راه دوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° یا همان π رادیان است پس:

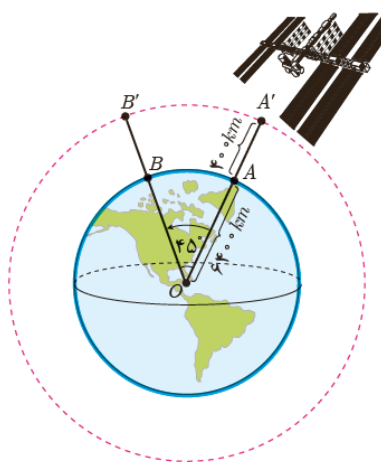
$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \Rightarrow \text{ن} \quad \text{ل} \quad \xrightarrow{\text{رادی } \pi = 180^\circ} \frac{35\pi}{36} \xrightarrow{\text{ن}} \xrightarrow{\text{ل}}$$

$$\frac{6300^\circ}{36} = 175^\circ < 180^\circ$$

راه سوم: می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° یا همان π رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$

مثال: ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی ۴۰۰ کیلومتر بالای کره زمین B تا نقطه A سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه پوشش می دهد؟ B و A زاویه ° ۴۵ می سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از شعاع تقریبی کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



الف) ابتدا زاویه مرکزی ° ۴۵ را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان} = \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

اندازه زاویه مرکزی $\hat{AOB}$ بر حسب رادیان

ب) شعاع مدار دایره ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r = 6800 \text{ km}$

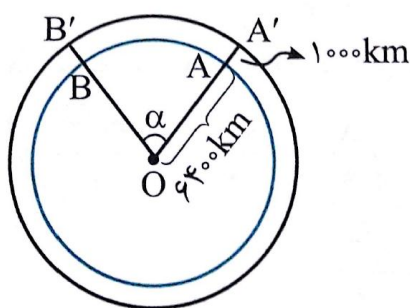
$$r = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

پ) طول کمان روبه روی $A'OB'$ با فرض $\pi = 3/14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی

برابر است با:

$$= l = \frac{\pi}{4} \times 6800 \Rightarrow l = \frac{3/14}{4} \times 6800 = 5338 \text{ km} \text{ طول کمان } A'B'$$

مثال: یک ماهواره مخابراتی را در نظر بگیرید که در فاصله ۱۰۰۰ کیلومتری سطح کره زمین به دور آن در حال حرکت است. اگر این ماهواره در دو نقطه A و B روی سطح زمین که با مرکز زمین زاویه α می سازد رصد شود، مسافتی را در مدار خود از A' به B' به طول ۸۰۰۰ کیلومتر طی می کند. اگر شعاع کره زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد، مقدار تقریبی α را بر حسب درجه به دست آورید.



حل) با توجه به شکل و رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ داریم:

$$\begin{cases} l = A'B' = 8000 \\ r = AA' + OA = 1000 + 6400 = 7400 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{8000}{7400} = 1/0.81 \text{ (راندی } l \text{)}$$

$$D = 1/0.81 \times 57 \approx 61/6 \text{ درجه} \rightarrow \alpha \approx 61/6 \text{ درجه}$$