

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فصل سوم

تابع

❖ درس اول:

آشنایی با برخی از انواع تابع

❖ درس دوم:

وارون یک تابع و تابع یک به یک

❖ درس سوم:

اعمال جبری روی توابع

بازم فصل ۳:

شهریوردی	نوبت دوم	نوبت اول
۳	۲/۵	۶

فصل ۳ درس ۱: آشنایی با برخی از انواع تابع

پیش نیازهای درس ۱:

- تشخیص جمله عمومی یک الگو
- شناخت مفهوم تابع و بازنمایی های آن
- ارتباط بین بازنمایی های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر
- شناخت مفهوم دامنه و برد یک تابع از روی نمودار
- حل نامعادلات درجه اول
- شناخت توابع چندجمله ای
- شناخت عملگر رادیکال

اهداف درس ۱:

- آشنایی با توابع گویا و تعیین دامنه آن
- رسم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$
- درک تساوی دو تابع از روی نمودار و همچنین از روی ضابطه و دامنه
- آشنایی با توابع رادیکالی
- رسم تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$
- رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$
- آشنایی با توابع پله ای
- آشنایی با عملگر جزء صحیح
- شناخت و رسم تابع جزء صحیح

توابع:

یک رابطه هنگامی تابع است که بتوانیم به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهیم.

ضابطه و دامنه تابع:

به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع می‌گوییم.

$$y = f(x)$$

یک تابع با ضابطه و دامنه آن مشخص می‌شود، اگر دامنه تابع ذکر نشود، بزرگترین دامنه ممکن را برای آن تابع در نظر می‌گیریم.

دامنه تابع چند جمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی (R) است

انواع توابع:

- | | |
|------------------|---------------|
| (۱) چند جمله‌ای | (۲) ثابت |
| (۳) چند ضابطه‌ای | (۴) همانی |
| (۵) قدر مطلق | (۶) گویا |
| (۷) رادیکالی | (۸) پله‌ای |
| (۹) جزء صحیح | (۱۰) یک به یک |
| (۱۱) مثلثاتی | (۱۲) لگاریتمی |
| (۱۳) نمایی | |
- با توابع ۱ تا ۵ در سال دهم آشنا شده‌اید.

توابع گویا:

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم

که صورت و مخرج، چند جمله‌ای هستند و مخرج صفر نیست.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ مثل:}$$

(فعالیت ص ۴۹)

توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند:

$$f(x) = \frac{x}{x+5}, \quad f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}, \quad f(x) = 2$$

دامنه توابع گویا:

توابع گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند تعریف نمی‌شود چون کسری که مخرجش صفر است وجود ندارد. بنابراین دامنه آن به صورت:

$$D_f = R - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم.

مثل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x = 0 \rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{5}{x-2} \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_f = R - \{2\}$$

(گارد در کلاسی ص ۵۰)

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \rightarrow x+5=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow D_f = R - \{-5\}$$

$$g(x) = \frac{3}{x-4} \rightarrow x-4=0 \rightarrow x=4 \rightarrow D_g = R - \{4\}$$

تمرین ۲ و ۳ (ص ۵۶): Homework

② دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به دست آورید.

④ تابعی گویا بنویسید که دامنه آن $D_g = R - \{-1\}$ شود.

تساوی دو تابع:

شرط تساوی دو تابع:

(۱) تساوی دامنه ها

(۲) تساوی ضابطه ها

✓ نکته: اگر دو تابع برابر باشند، نمودار آنها کاملاً بر هم

منطبقند

✓ در تشخیص تساوی دو تابع ابتدا تساوی دامنه را

چک می کنیم

(مثال ص ۵۱)

آیا دو تابع با ضابطه $g(x) = 2$ ، $f(x) = \frac{2x}{x}$ مساویند؟

چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

(گارد رگلاسی ۱ ص ۵۱)

① آیا دو تابع با ضابطه $g(x) = x$ ، $f(x) = \frac{x^2}{x}$ مساویند؟ چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

تمرین ۳ ص ۵۶: Homework

③ در هر مورد آیا دو تابع مساویند؟

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{|x|}{x}$$

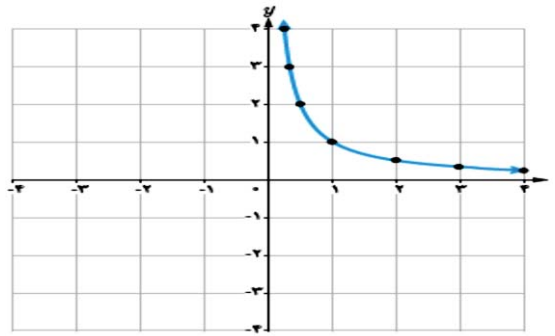
$$\text{ب) } f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

رسم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$:

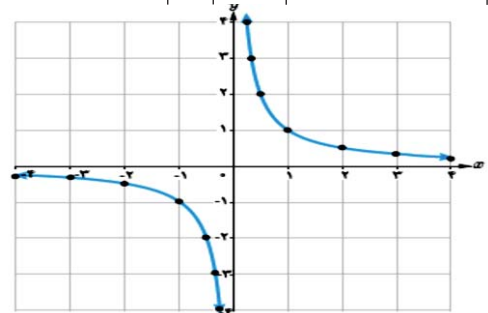
(فعالیت ص ۴۹)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را با هر یک از دامنه های $D_f = R - \{0\}$ و $D_f = (0, +\infty)$ رسم کنید. حل:

$$D_f = (0, +\infty) \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{x} & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$



$$D_f = R - \{0\} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & \dots & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \dots \\ \hline y & \dots & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \dots \end{array}$$

**تمرین ۴ ص ۵۶: Homework**① نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ رسم کنید.

توابع رادیکالی:

هر تابع به شکل $f(x) = \sqrt{g(x)}$ را یک تابع رادیکالی می‌نامیم که در آن $g(x)$ منفی نیست (یعنی صفر یا مثبت است). مثل: $f(x) = \sqrt{x}$.

دامنه توابع رادیکالی:

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$D_f = g(x) \geq 0$$

مثل:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

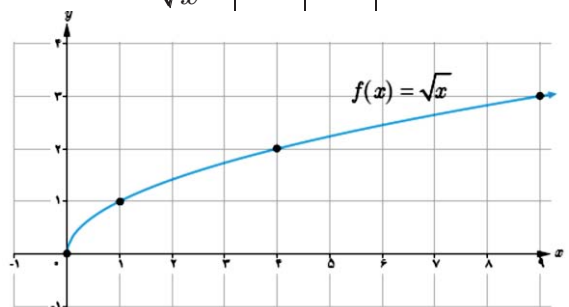
رسم تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x}$

ابتدا دامنه را مشخص و سپس از طریق نقطه یابی نمودار را رسم می‌کنیم.

(مثال ص ۵۲)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

x	۰	۱	۴
\sqrt{x}	۰	۱	۲

یادآوری:

مراحل رسم رسم توابع به کمک انتقال:

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af(bx + c) + d$$

- روی عرض نقاط (y) تاثیر مستقیم دارند و انتقال به صورت آسانسوری است
- روی طول نقاط (x) تاثیر معکوس دارند و انتقال قطاری است.

اولویت:

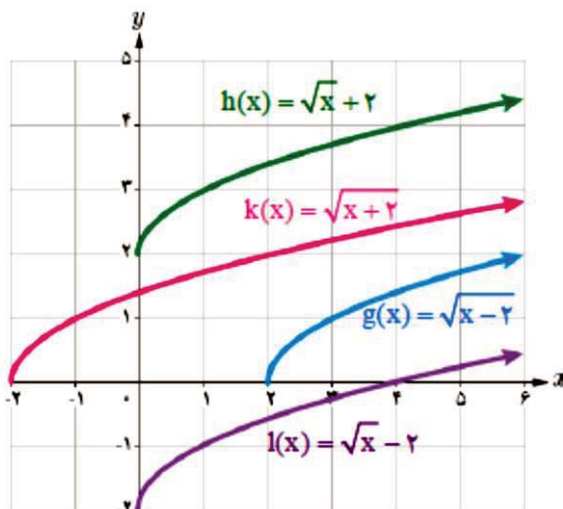
اول (x) یا (y) فرقی ندارد ولی:

- در (x) ها اول c سپس b
- در (y) ها اول a سپس d

رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x}$:

(فعالیت او ۲ و او ۳ ص ۵۳)

- ① مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است . سپس دامنه آنها را تعیین کنید. حل:



$$g(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

توابع پله ای:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{را تابع پله ای می نامیم. مثل:}$$

(فعالیت ص ۵۴)

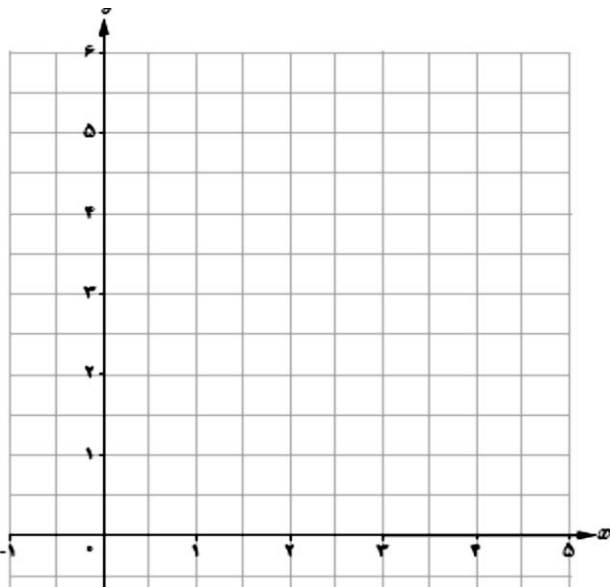
در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود:

هزینه (هزار تومان)	زمان	
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟ حل:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2/5 \\ 5 & 2/5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



$$h(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_h = [0, +\infty)$$

$$k(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_k = [-2, +\infty)$$

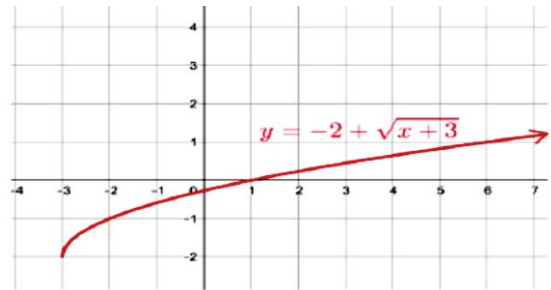
$$l(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_l = [0, +\infty)$$

② نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

حل: برای رسم $y = \sqrt{x+3} - 2$ نمودار $y = \sqrt{x}$ را

را ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل می کنیم

$$y = -2 + \sqrt{x+3} \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow D = [-3, +\infty)$$



③ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم

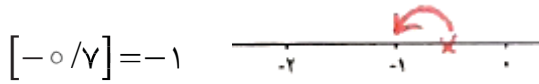
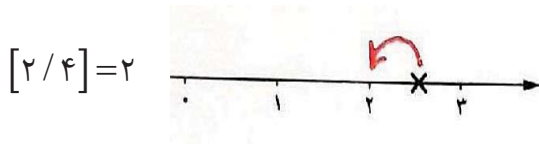
کنید. سپس دامنه آن را بیابید.

تمرین ۵ ص ۵۶: Homework

⑤ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم

کنید.

مثل:



✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می برد و در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار، یک واحد هم کم می کند. مثل:

$$\lceil 2/7 \rceil = 2 \quad \lfloor -2/7 \rfloor = -2 - 1 = -3$$

(مثال ص ۵۴ و کاربرد کلاسی او ۲ ص ۵۵ و تمرین ۶ ص ۵۶)

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\lceil 4 \rceil = 4 \quad \lceil 6/1 \rceil = 6 \quad \lfloor 0 \rfloor = 0$$

$$\lfloor -4/3 \rfloor = -5 \quad \lfloor -3 \rfloor = -3 \quad \lfloor -3/4 \rfloor = -4$$

$$\lfloor -2 \rfloor = \quad \lfloor -1/9 \rfloor = \quad \lfloor 0/4 \rfloor =$$

$$\lfloor -0/4 \rfloor = \quad \lceil 4/25 \rceil = \quad \lceil 3 \rceil =$$

$$\lceil 2/3 \rceil = \quad \lceil 1/7 \rceil = \quad \lceil 1/2 \rceil =$$

$$\lceil \frac{41}{37} \rceil = \quad \lfloor -\frac{13}{51} \rfloor =$$

$$\lceil 300/4002 \rceil =$$

$$\lfloor -103/003 \rfloor =$$

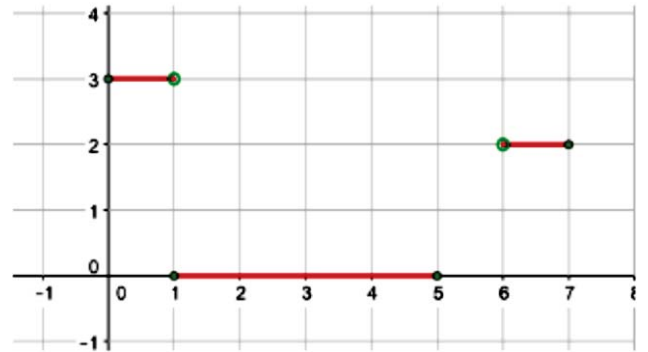
$$\lfloor -2309/54 \rfloor =$$

(تمرین ۷ ص ۵۶)

⑦ تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

حل:



توابع جزء صحیح:

توابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به

صورت $f(x) = [x]$ می باشد که می خوانیم جزء صحیح x

یا براکت x . مثل $f(x) = [2]$

دامنه توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازیه و هر عددی که وارد تابع شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد. بنابراین:

$$D_f = R$$

✓ نکته: جزء صحیح (براکت) هر عدد صحیح، برابر

است با خود آن عدد

$$\begin{cases} \lceil x \rceil = x \rightarrow [2] = 2 \\ \lfloor -2 \rfloor = -2 \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z}$$

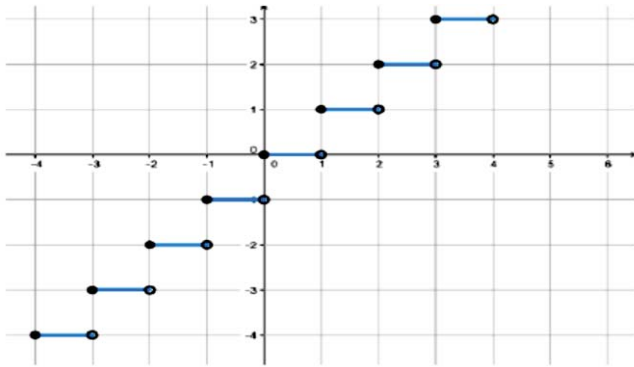
✓ جزء صحیح (براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است

با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

$$\begin{cases} \lceil x \rceil \\ \lfloor \downarrow \end{cases} \xrightarrow{n < x < n+1} n \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ n \quad x \quad n+1 \end{array}$$

$$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$

$x \notin \mathbb{Z}$



تمرین ۸ ص ۵۶: Homework

⑧ تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3)$ را رسم کنید.

✓ نکته: اگر x عدد حقیقی و n عددی صحیح باشد:

$$[x \pm k] = [x] \pm k$$

$$[x + 2] = [x] + 2$$

$$[x - 5] = [x] - 5$$

(فعالیت ۱ ص ۵۵)

① اگر $[x] = 2$ آن گاه x برابر چه اعدادی می تواند باشد؟

حل:

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow [2, 3)$$

مرآل رسم تابع جزء صحیح:

۱) بازه داده شده را به چند زیر بازه تقسیم می کنیم.

۲) براکت هر بازه را به دست می آوریم

۳) نقاط را روی محور پیدا کرده و نمودار را رسم می کنیم

(فعالیت ۲ ص ۵۵)

② تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ و دامنه $D_f = [-4, 4)$ را رسم کنید. حل:

x	$y = [x]$
$[-4, -3)$	-4
$[-3, -2)$	-3
$[-2, -1)$	-2
$[-1, 0)$	-1
$[0, 1)$	0
$[1, 2)$	1
$[2, 3)$	2
$[3, 4)$	3

فصل ۳ درس ۲: وارون یک تابع و تابع یک به یک

پیش نیازهای درس ۲:

- شناخت مؤلفه های اول و دوم در زوج مرتب
- شناخت نیمساز ربع اول و سوم $y = x$
- درک مفهوم دامنه و برد از روی نمودار

اهداف درس ۲:

- محاسبه وارون یک تابع در نمایش زوج مرتب
- رسم وارون یک تابع از روی نمودار
- آشنایی با تعریف و مفهوم تابع یک به یک
- به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت
- محدود کردن دامنه یک تابع غیر یک به یک و تبدیل آن به تابع یک به یک

وارون (معکوس) یک تابع در نمایش زوج مرتب:

در نمایش زوج مرتبی یک تابع، اگر جای مولفه های اول و دوم را عوض کنیم، دو حالت به وجود می آید:
 (۱) جواب، تابع است. در این صورت می گوئیم تابع وارون پذیر است

(مثال ص ۵۷)

$$f = \{(6, 4), (5, 3), (2, 1)\} \rightarrow f^{-1} = \{(4, 6), (3, 5), (1, 2)\}$$

(۲) جواب، تابع نیست. در این صورت می گوئیم تابع وارون پذیر نیست

(گارد در کلاسی ص ۵۷)

$$t = \{(5, 1), (1, 4), (4, 3), (2, 3)\} \rightarrow t^{-1} = \{(1, 5), (4, 1), (3, 4), (3, 2)\}$$

اگر تابع وارون پذیر باشد وارون آن را با f^{-1} نشان می دهیم.

(گارد در کلاسی ص ۵۷ و تمرین ۱ ص ۶۳)

وارون تابع های داده شده را حساب کنید.

$$s = \{(4, 1), (1, 4), (3, 3), (2, 5)\} \rightarrow s^{-1} =$$

$$u = \{(2, 3), (5, 2), (4, 1), (3, 4)\} \rightarrow u^{-1} =$$

$$f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\} \rightarrow f^{-1} =$$

- نکته: وارون هر تابع یک به یک، خود یک تابع است به عبارتی شرط وارون پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است.

- دامنه و برد f, f^{-1} عکس هم هستند:

$$D_f = R_{f^{-1}} \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

رسم وارون یک تابع از روی نمودار:

نمودار تابع (f) و تابع وارون آن (f^{-1}) نسبت به خط

$y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه اند.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است مختصات نقاطی

را که روی (f) مشخص است پیدا کنیم و جای x, y را

عوض کنیم و تابع وارون را رسم کنیم یعنی:

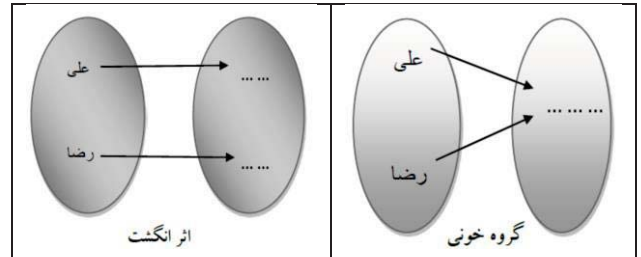
$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

تابع یک بر یک (یکتا):

❖ در نمایش پیکانی تابع یک به یک، به هر عضو از مجموعه دوم، یک پیکان وارد می شود.

(فعالیت ۲ ص ۵۹)

② کدامیک از دو تابع زیر یک به یک هستند؟



حل: تابع اثر انگشت تابع یک به یک است چون به هر عضو از

مجموعه دوم، یک پیکان وارد شده است

❖ در نمایش زوج مرتبی تابع یک به یک، مؤلفه های

دوم تکراری نداریم.

(فعالیت ۱ ص ۵۹)

ت) آیا تابع $f = \{(1, 2), (-2, 4), (2, -1), (-1, 2)\}$ یک به

یک است؟ حل: خیر زیرا مؤلفه های دوم تکراری دارد.

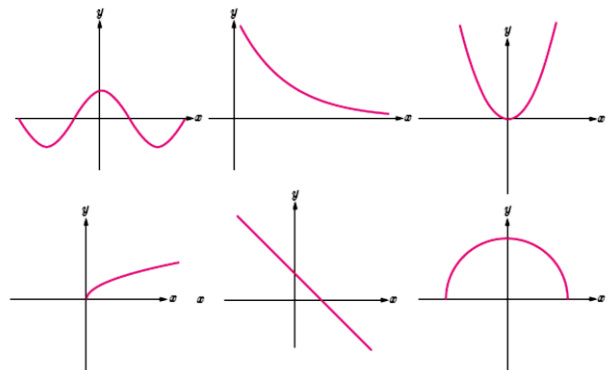
• در نمایش مختصاتی تابع یک به یک، هر خط

افقی (موازی محور x ها)، نمودار را حداکثر در یک

نقطه قطع می کند

(فعالیت ۲ ص ۶۰)

② کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



• نکته: توابع خطی غیر ثابت $(y = ax + b)$

$a \neq 0$

توابع رادیکالی و توابع گویا، تابع یک به یک هستند.

• توابع خطی ثابت $(y = ax + b)$ ، توابع سهمی

$a = 0$

و توابع قدر مطلق، تابع یک به یک نیستند.

(کاردرگلاسی اسی ۶۲)

① ضابطه وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = x + 5$

ب) $g(x) = 4x$

پ) $u(x) = 2x + 3$

ت) $v(x) = \frac{2}{3}x - 4$

تمرین ۳ (۶۴): Homework

③ ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

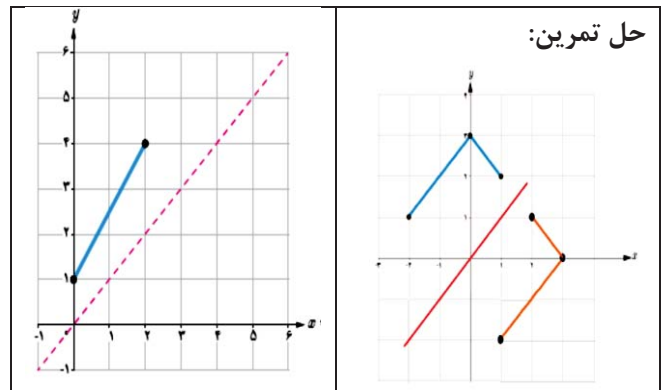
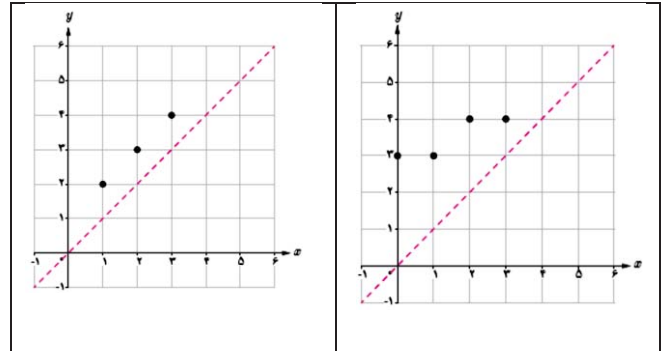
الف) $f(x) = 5x - 2$

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

پ) $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$

(فعالیت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۵ و ۲۶ و ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳ و ۳۴ و ۳۵ و ۳۶ و ۳۷ و ۳۸ و ۳۹ و ۴۰ و ۴۱ و ۴۲ و ۴۳ و ۴۴ و ۴۵ و ۴۶ و ۴۷ و ۴۸ و ۴۹ و ۵۰ و ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ و ۵۴ و ۵۵ و ۵۶ و ۵۷ و ۵۸ و ۵۹ و ۶۰ و ۶۱ و ۶۲ و ۶۳ و ۶۴ و ۶۵ و ۶۶ و ۶۷ و ۶۸ و ۶۹ و ۷۰ و ۷۱ و ۷۲ و ۷۳ و ۷۴ و ۷۵ و ۷۶ و ۷۷ و ۷۸ و ۷۹ و ۸۰ و ۸۱ و ۸۲ و ۸۳ و ۸۴ و ۸۵ و ۸۶ و ۸۷ و ۸۸ و ۸۹ و ۹۰ و ۹۱ و ۹۲ و ۹۳ و ۹۴ و ۹۵ و ۹۶ و ۹۷ و ۹۸ و ۹۹ و ۱۰۰)

نمودار وارون توابع داده شده را رسم کنید.



حل تمرین:

به دست آوردن ضابطه تابع وارون:

اگر تابع یک به یک باشد برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون ابتدا x را بر حسب y محاسبه می کنیم (یعنی x را تنها می کنیم) سپس جای x, y را عوض می کنیم و ضابطه $f^{-1}(x)$ را می یابیم. و دامنه و برد تابع و وارون تابع را مشخص می کنیم.

• توجه: در این کتاب فقط ضابطه تابع وارون توابع خطی غیر ثابت را به دست می آوریم (فعالیت ص ۶۲)

ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x + 1$ را بیابید.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$\underbrace{D_{f^{-1}}=R, R_{f^{-1}}=R}$$

$$y = 2x + 1 \rightarrow y - 1 = 2x \rightarrow x = \frac{y-1}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-1}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$\underbrace{D_{f^{-1}}=R, R_{f^{-1}}=R}$$

با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه های زیر می

توان یک تابع یک به یک ساخت؟ $[0, 2]$ $[1, 4]$

حل: بازه $[0, 2]$

ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک به یک است؟ چرا؟

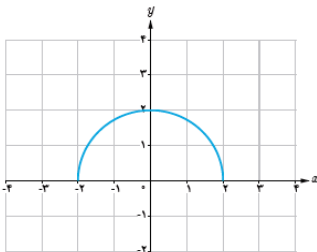
حل: خیر زیرا زیرا در حالت کلی هر خط افقی نمودار را در دو

نقطه قطع می کند

(تعمیری ۶۴ هجری ۶۴)

⑥ با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک

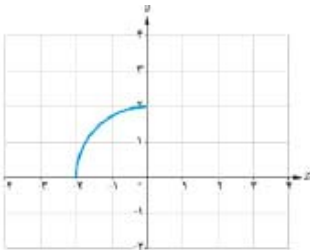
تابع یک به یک رامشخص کنید.



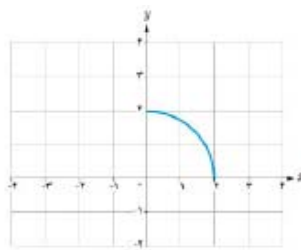
حل: قسمتی از نمودار را به گونه ای حذف می کنیم که هر خط

افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند بنابراین دامنه نیم

دایره را به بازه های زیر محدود می کنیم.



$[-2, 0]$



$[0, 2]$

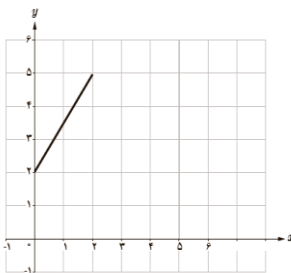
(تعمیری ۵۵ هجری ۶۴)

⑤ نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:

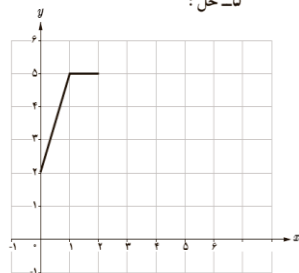
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

۵- حل:



(الف)



(ب)

بی شمار تابع خطی یا غیر خطی می توان در هر دو قسمت

(الف) و (ب) رسم کرد.

محدود کردن دامنه یک تابع غیریک بریک و تبدیل آن به تابع یک بریک:

اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد.

(گاردوگلاسی ۲ هجری ۶۳)

② الف) چرا نمودار داده شده، نموداری یک تابع یک به یک

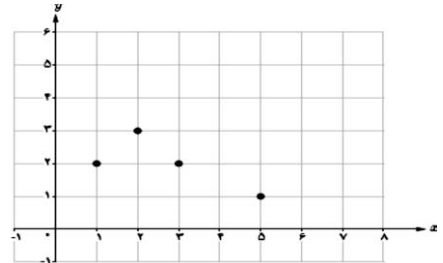
نیست؟ حل: زیرا اگر خط افقی $(y = 2)$ را رسم کنیم نمودار

را در دو نقطه قطع می کند

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک

به یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟ حل: یکی از نقاط

$(1, 2)$, $(3, 2)$ را حذف می کنیم. مسئله ۲ جواب دارد.

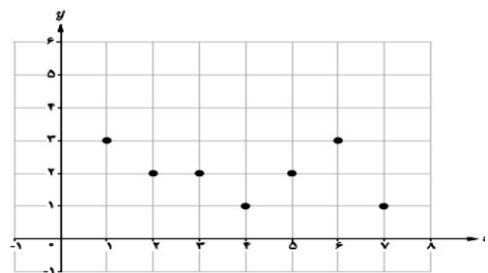


تمرین ۴ ص ۶۴: Homework

④ می خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را

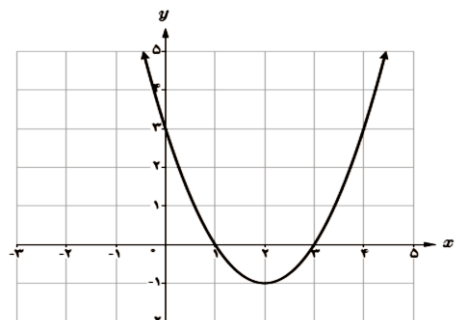
به یک تابع یک به یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می

تواند باقی بماند؟



(گاردوگلاسی ۳ هجری ۶۳)

الف) به نمودار $f(x) = x^2 - 4x + 3$ دقت کنید



فصل ۳ درس ۳: اعمال جبری روی توابع

پیش نیازهای درس ۳:

- شناخت فرمول معادله خط از روی دو نقطه از نمودار
- انتقال عمودی و افقی نمودار توابعی با ضابطه

$$f(x) = x^2, f(x) = |x|$$

اهداف درس ۳:

- آشنایی با چهار عمل اصلی روی نمایش جبری توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)
- رسم نمودار تابع با ضابطه های $f + g$ و $f - g$ با استفاده از نمودار f, g
- رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ از روی نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$

(کاردر کلاسی او ۲ ص ۶۷)

① برای دو تابع $f(x) = x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = x - 3$ جدول داده شده ی زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$		
$f - g$		
$f \times g$		
$\frac{f}{g}$		

② برای دو تابع $u(x) = \sqrt{x} + 1$ و $v(x) = x - 1$ جدول داده شده ی زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u + v$		
$u - v$		
$u \times v$		
$\frac{u}{v}$		

تمرین ۲ ص ۶۹: Homework

② در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = |x|$ و $g(x) = \frac{1}{x}$

اعمال جبری روی توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم):

اگر f, g به ترتیب دو تابع با دامنه های D_f, D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x)$	$D_f \cap D_g$
$f - g$	$(f - g)(x)$	$D_f \cap D_g$
$f \times g$	$(f \times g)(x)$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\}$

✓ نکته: همواره دامنه را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می کنیم

- ✓ جمع و تفریق دو تابع خطی، تابعی خطی است
- ✓ ضرب دو تابع خطی، تابعی سهمی است
- ✓ تقسیم دو تابع خطی، تابعی گویا است

۱) اعمال جبری روی نمایش جبری توابع:

(فعالیت ص ۶۵)

برای دو تابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x - 2$ جدول داده شده ی زیر را کامل کنید. حل:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R \\ D_g = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} R$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$2x - 1 + x - 2 = 3x - 3$	R
$f - g$	$2x - 1 - x + 2 = x + 1$	R
$f \times g$	$(2x - 1) \times (x + 2) = 2x^2 - 5x + 2$	R
$\frac{f}{g}$	$\frac{2x - 1}{x - 2}$ ↓ $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$	$R - \{2\}$

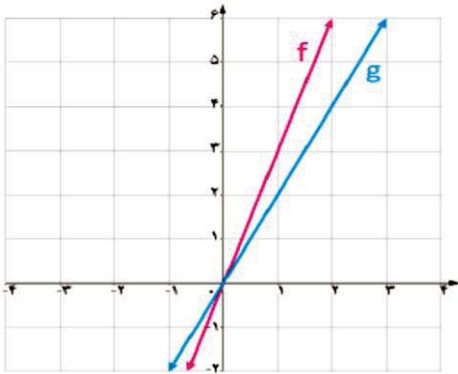
$$\left. \begin{array}{l} D_f = \{0, 2, 3\} \\ D_g = \{0, 2, 3, -1\} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} \{0, 2, 3\}$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$\left\{ \left(0, \underbrace{-2+3}_{+1} \right), \left(2, \underbrace{5+4}_9 \right), \left(3, \underbrace{4+0}_4 \right) \right\}$	$\{0, 2, 3\}$
$f - g$	$\left\{ \left(0, \underbrace{-2-3}_{-5} \right), \left(2, \underbrace{5-4}_1 \right), \left(3, \underbrace{4-0}_4 \right) \right\}$	$\{0, 2, 3\}$
$f \times g$	$\left\{ \left(0, \underbrace{-2 \times 3}_{-6} \right), \left(2, \underbrace{5 \times 4}_{20} \right), \left(3, \underbrace{4 \times 0}_0 \right) \right\}$	$\{0, 2, 3\}$
$\frac{f}{g}$	$\left\{ \left(0, \frac{-2}{3} \right), \left(2, \frac{5}{4} \right), \left(3, \frac{4}{0} \right) \right\}$	$\{0, 2\}$

۳) اعمال جبری روی نمودار توابع:

(فعالیت ص ۶۷)

مطابق شکل:

الف) ضابطه ی دو تابع f, g را به دست آورید: حل:

$$f(x) = 3x \qquad g(x) = 2x$$

ب) ضابطه ی دو تابع $f + g$ و $f - g$ را به دست آورید و نمودار آنها را رسم کنید:

$$(f + g)(x) = 3x + 2x = 5x$$

$$(f - g)(x) = 3x - 2x = x$$

x	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱

ب) $g(x) = x + 2$ و $f(x) = x^2 - 4$

پ) $g(x) = -\sqrt{x}$ و $f(x) = \sqrt{x}$

ت) $g(x) = x^2 + 3x - 10$ و $f(x) = \frac{x-2}{x+5}$

۲) اعمال جبری روی زوج مرتب توابع:

(تمرین ۲ ص ۶۹)

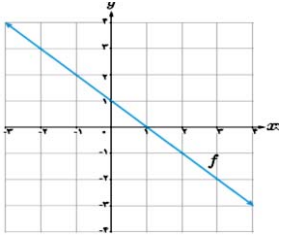
② دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

ث) $g = \left\{ (-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0) \right\}$ و $f = \left\{ (2, 5), (3, 4), (0, -2) \right\}$

حل: ابتدا دامنه هر تابع سپس اشتراک آنها را نوشته و اعمال جبری را روی مولفه دوم (y) انجام می دهیم

(کاردرگلاسی ۱ ص ۶۸)

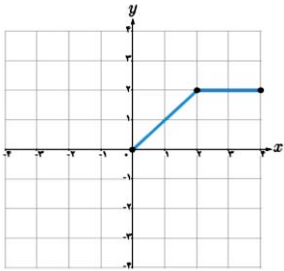
① با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل، نمودار تابع $y = -f(x)$ را رسم کنید. حل: عرض هر نقطه را قرینه یا در ۱- ضرب می کنیم.



x	۰	۴	-۳
$-f(x)$	-۱	۳	-۴

(کاردرگلاسی ۳ ص ۶۹)

③ با توجه به شکل نمودار تابع با ضابطه $y = -2f(x)$ رسم کنید. حل: عرض هر نقطه را در ۲- ضرب می کنیم



x	۰	۲	۴
$-2f(x)$	۰	-۴	-۴

(تمرین ۱ ص ۶۹)

① با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

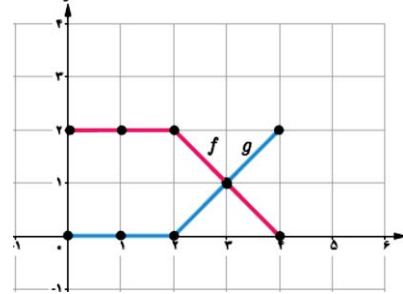
الف) $g(x) = -|x|$

ب) $h(x) = -|x - 3|$

پ) $l(x) = 2|x - 2|$

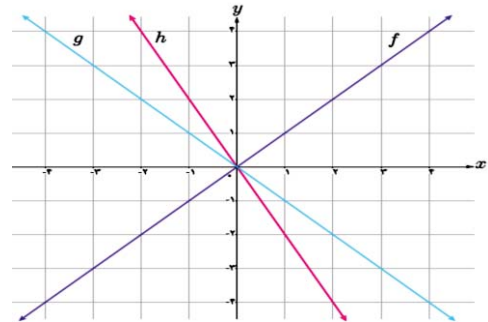
(تمرین ۴ ص ۶۹)

④ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f, g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید



(تمرین ۵ ص ۷۰)

⑤ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



حل:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ h(1) = -2 \\ g(1) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow 1 + (-2) = -1 = g(1)$$

رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$:

از رسم تابع به کمک انتقال که در درس های قبلی گفته شده کمک می گیریم

• اگر k عددی مثبت باشد برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

(کاردرگلاسی ۲ ص ۶۸)

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم به عبارتی عرض هر نقطه را قرینه یا در ۱- ضرب کنیم.

(تمرین ۳ ص ۶۹)

③ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار توابع زیر را

رسم کنید.

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$

ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$