فصل ۲

هندسه

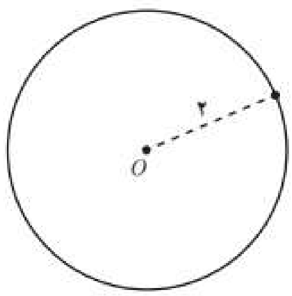
زیباترین قسمت ریاضیات برای بنده هندسه است. البته ریاضیات تماماً زیباست. اما هندسه جایگاه ویژه‌ای دارد. برای خلاق شدن ذهن و درک بهتر تمام قسمت‌های ریاضی، هندسه بهترین ابزار است. دراین فصل ابتدا ترسیم‌های هندسی و سپس قضیه تالس و در انتها تشابه را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲ ترسیم‌هاس هندسی

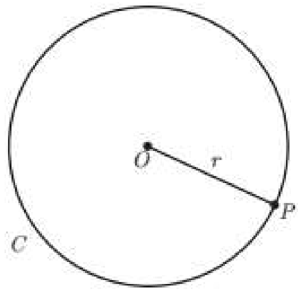
انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیمهای هندسی کمک گرفته است.فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه میتوان این کار را انجام داد؟ این و نمونه‌هایی دیگر از این مسئله، اهمیت ترسیمات هندسی را آشکار می‌کند. شاید مصریان باستان، اولین گروه از مردمانی باشند که هندسه را عملا در زندگی خود وارد و استفاده کردند. طغیان سالانه رودخانه نیل باعث بر هم خوردن نظم و مرز زمین‌های کشاورزی مردم می‌شد. بنابراین تهیه یک نقشه و ترسیم و مرزبندی زمین‌ها یکی از مهمترین کارهای آن‌دوره به حساب می‌آمد. اگرچه در فصل گذشته تلویحاً از مکان هندسی صحبت شده است، اما به دلیل استفاده زیاد تعریف آنرا بصورت دقیق در زیر آورده‌ایم.

تعریف ۱.۲. یک مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای یک ویژگی معین هستند. و هر نقطه‌ی دیگری که دارای این ویژگی باشد، در این مجموعه نقاط قرار دارد.

بسیاری از خطوط مهم و اشکال هندسی در هندسه، بصورت مکان هندسی بیان می‌شود. مکان هندسی در کل ریاضیات کاربرد دارد و فقط مختص هندسه نیست. با اینحال در هندسه، بیشتر به چشم می‌خورد. از مکان هندسی‌های مهم در این قسمت می توان به دایره، عمود منصف یک پاره‌خط و نیمساز یک زاویه را نام برد که به تفصیل مورد بحث قرار می گیرد.



به عنوان یک مثال ساده دایره‌ای که شعاعش ۲ سانتی‌متر و مرکزش O می‌باشد، در واقع مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی O برابر ۲ است و بغیر از نقاط این دایره، هیچ نقطه‌ی دیگری دارای این ویژگی نیست.



در حالت کلی دایره بصورت یک مکان هندسی تعریف می شود. یک دایره که اغلب با نماد $C(O,r)$ نمایش داده می‌شود، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی O برابر مقدار ثابت r است. آن مقدار ثابت را شعاع دایره و آن نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره گویند.

با اطلاعاتی که در فصل قبل فراگرفته‌اید می‌توان معادله‌ی یک دایره را بدست آورد. تصور کنید که $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و r شعاع دایره باشد. با توجه به تعریف دایره نقطه‌ی $M(x,y)$ روی دایره است هرگاه $OM=R$ و از اینجا داریم $\sqrt{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲}=r$ و لذا داریم:

$$\boxed{\text{معادله‌ی دایره‌ای به مرکز } O(\alpha,\beta) \text{ و شعاع } r \longrightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲}$$

به سوال زیر که در کنکور ۹۵ رشته‌ی ریاضی مطرح شده است نگاه کنید.

پرسش ۱.۲. دو دایره گذرا بر نقطه‌ی $(۲,-۹)$ بر هر دو محور مختصات مماسند. شعاع دایره بزرگتر کدامست؟

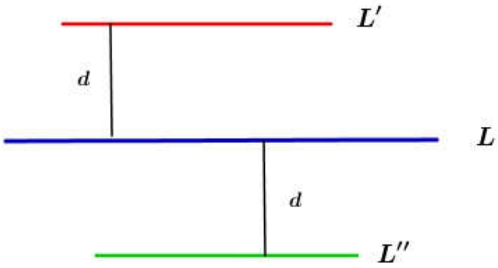
۱۴(۱　　　۱۵(۲　　　۱۷(۳　　　۱۹(۴

حل: با توجه به طول و عرض نقطه معلوم می‌شود که دوایر مذکور در ناحیه‌ی چهارم قرار دارند و چون بر هر دو محور مماس هستند، بناچار مرکزشان روی خط $y=-x$ قرار دارد و مرکز دایره بصورت $(a,-a)$ خواهد بود. از طرفی شعاع دایره اگرچه داده نشده است، اما با توجه به مماس بودن دایره بر محورها، طول مرکز دایره برابر همان شعاع دایره است. پس باید داشته باشیم:

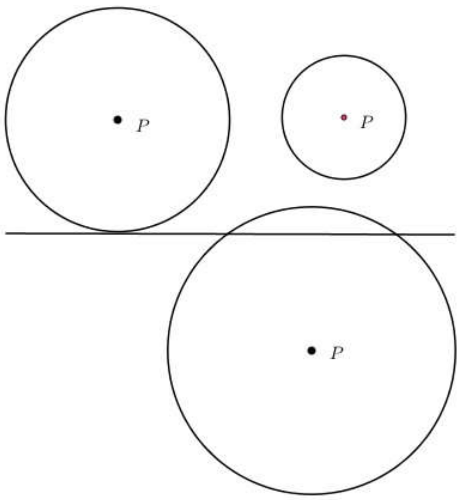
$$(۲-a)^۲+(-۹+a)^۲=a^۲ \Rightarrow a^۲-۲۲a+۸۵=۰ \Rightarrow a=۱۰,۱۷$$

اگرچه این مطالب در برنامه این فصل نیست، اما اشاره به کاربرد مطالب خوانده شده از فصل اول هم خالی از لطف نیست. دومین مکان هندسی مهم در این قسمت، خطوط موازیند. در زیر به این مکان هندسی اشاره شده است و کاربردهایی از آن ارائه شده است.

خط L را در نظر بگیرید. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصله‌ی d هستند، دو خط L', L'' هستند که با خط L موازیند و به فاصله‌ی d از خط L قرار دارند. d عددی مثبت است و واضح است که دو خط L' و L'' باهم موازیند.

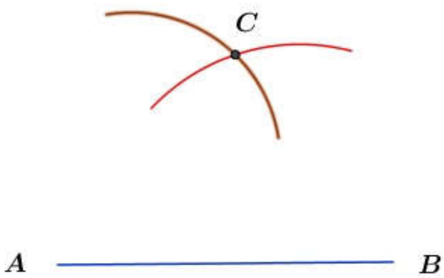


مثال ۱.۲. خط L و نقطه‌ی P به فاصله‌ی معلوم d از خط L قرار دارد. نقاطی از خط L بیابید که فاصله‌ی آنها تا نقطه‌ی P برابر عدد معلوم c باشد. مسئله چند جواب دارد؟



حل: بسته به حالات d, c جواب‌های متفاوتی داریم. مطابق شکل مقابل اگر $d = c$ باشد، مسئله تنها یک جواب دارد. چنانچه $d > c$ باشد مسئله جواب ندارد. و نهایتا اگر $c > d$ باشد مسئله دارای دو جواب خواهد بود. اگرچه این مسئله ساده به نظر می‌رسد، اما در بسیاری از ترسیمات هندسی مهم کاربرد دارد. بویژه در ترسیم مثلث در حالات گوناگون، این مسئله نقش خود را ایفا می‌کند.

مثال ۲.۲. مثلثی را با اضلاع معلوم ۴, ۵, ۷ واحد را ترسیم کنید.



حل: ابتداپاره‌خط AB به طول ۷ سانتیمتر رسم می‌کنیم. سپس سوزن پرگار را روی A گذاشته و دهانه‌ی آن را به اندازه‌ی ۵ واحد باز کرده و یک کمان می‌زنیم. مجددا همین کار را با نقطه‌ی B انجام می‌دهیم. محل برخورد دو کمان همان راس C است.

پرسش ۲.۲. چند مثلث با معلومات $a = ۴, \angle C = ۳۰^\circ, m_a = ۳$ می‌توان ترسیم کرد؟

۱) ۱		۲) ۲		۳) بیشتر از دو مثلث		۴) نمی‌توان ترسیم کرد

حل: ابتدا ضلع $BC = a = ۴$ را رسم می کنیم. در راس C یک زاویه‌ی ۳۰ درجه رسم نموده و سوزن پرگار را در M وسط BC قرار می‌دهیم و کمانی به شعاع ۳ واحد می‌زنیم تا امتداد ضلع زاویه‌ی C را قطع کند. نقطه‌ی حاصل همان راس A است و با این مشخصات تنها یک مثلث می توان ترسیم کرد.[۱]

[۱] یک نکته حائز اهمیت آنست که آیا همواره با داشتن دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی روبروی به یکی از آنها می‌توان مثلث یکتایی ترسیم نمود.پاسخ

چند تذکر مهم:

۱. میانه نظیر یک راس، پاره‌خطی است که ضلع مقابل به آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. میانه‌ی هر رأس از از نصف مجموع دو ضلع مجاور خود کوچکتر است.

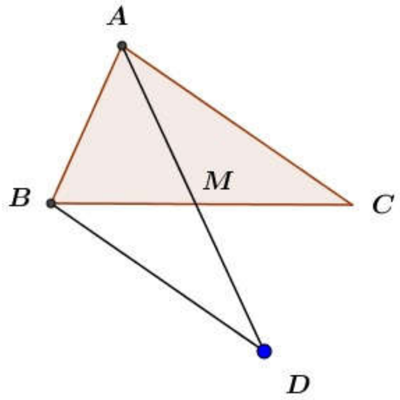
۲. در مسائل ترسیم هندسی ابتدا فرض می کنیم، مسئله حل و شکل ترسیم شده است و سپس به بررسی بیشتر داده‌ها به کمک شکل می‌پردازیم.

۳. با سه عدد a, b, c یک مثلث قابل رسم است، هرگاه مجموع هر دو عدد دلخواه از این سه عدد از دیگری بزرگتر باشد.

پرسش ۳.۲. در ترسیم مثلث ABC با معلوم بودن میانه‌ی $m_a = ۶$ و دو ضلع $c = ۷, b = ۴$ کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) سه جواب　　۲) فاقد جواب　　۳) یک جواب　　۴) دو جواب

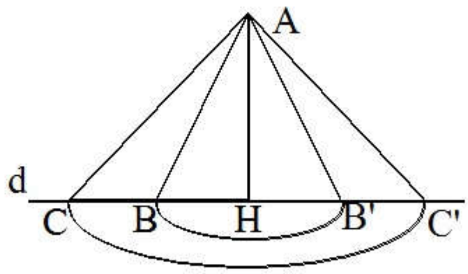
حل: فرض کنیم مسئله حل شده باشد. میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D حاصل شود. اگر از D به B وصل کنیم، مثلث ABD دارای اضلاع ۷, ۴, ۱۲ است که می دانیم نشدنی است، چراکه مجموع دوضلع، باید از ضلع سوم بیشتر باشد. پس عملا چنین مثلثی وجود ندارد و گزینه‌ی ۲ جواب درست است.



پرسش ۴.۲. با معلوم بودن $c = ۵, b = ۶$ و ارتفاع $h_a = ۴$ واحد از مثلث ABC چند مثلث قابل رسم است؟

۱) بیشمار　　۲) ۰　　۳) ۱　　۴) ۲

حل: خط d عمود بر $AH = ۴$ را رسم کرده و به مرکز A و شعاع ۵ کمانی رسم می کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی B, B' قطع کند. همین عمل را با شعاع ۶ انجام داده تا دو نقطه‌ی C, C' حاصل شود. مثلث‌های ABC, ABC' جواب مسئله‌اند.

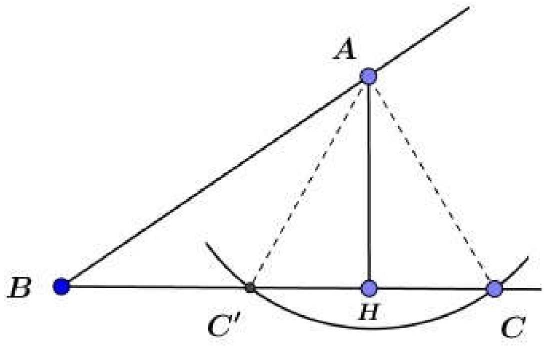


این پرسش کمی پیچیده است، اما با داشتن دو ضلع و زاویه‌ی روبرو به یکی از آنها،زمانی تنها یک جواب حاصل می‌شود که ضلع بزرگتر روبرو به زاویه‌ی داده شده باشد. برای اطلاعات و مطالعه بیشتر به کتاب مبانی هندسه، تالیف محمود نصیری چاپ انتشارات مبتکران مراجعه کنید.

پرسش ۵.۲. با اطلاعات $\angle B = ۴۵, AB = ۶, AC = ۵$ چند مثلث متمایز قابل رسم است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

حل: زاویه‌ی $B = ۴۵^\circ$ را رسم کرده و نقطه A را روی آن طوری انتخاب می کنیم که $AB = ۶$ باشد. به مرکز B و شعاع ۵ کمانی مزنیم تا ضلع دیگر زاویه را در نقاط C, C' قطع کند. با توجه به اطلاعات زیر شکل مسئله حتما دو جواب دارد و مثلث‌های $ABC.ABC'$ جواب مسئله هستند. توجه کنید چنانچه AH بزرگتر از شعاع کمان باشد مسئله جواب ندارد و اگر این‌دو برابر باشند، مسئله فاقد جواب است.



$AH = AB \sin 45^0 = 3\sqrt{2} < 5$

تذکر: برای اطلاعات بیشتر پانویس این صفحه را مطالعه کنید. [۲]

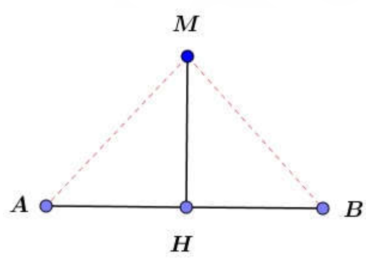
خواص عمودمنصف و ترسیم آن

تعریف ۲.۲. خط d را عمود منصف پاره‌خط AB گوییم، هرگاه اولا خط d بر پاره‌خط AB عمود باشد و ثانیا آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم کند.

خواص اصلی یک عمود منصف را بصورت مکان هندسی بیان می کنیم.

قضیه ۱.۲. عمود منصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دوسر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

اثبات: پاره خط AB مفروض است. اگر M روی عمود منصف باشد، با اثبات هم نهشتی دو مثلث ثابت می‌شود که $AM = BM$ و به عکس اگر M از B, A به یک فاصله باشد، با رسم ارتفاع MH ثابت می‌شود که دو مثلث هم نهشتند و $AH = BH$ و این یعنی MH عمود منصف است.



[۲] این مسئله اساس اثبات هم نهشتی دو مثلث در حالتی غیر از حالات اصلی است. یعنی چنانچه دو دو ضلع و زاویه‌ی غیر بین از مثلثی با اجزای نظیرش هم‌نهشت باشند، آیا دو مثلث هم نهشت‌اند. حکم کلی و اثبات آن را بصورت مفصل درکتاب مبانی هندسه محمود نصیری مطالعه نمایید.

حال ممکن است این سوال به ذهنتان خطور کند که چگونه می‌توان عمود منصف یک پاره‌خط را رسم کرد. فعالیت زیر برگرفته از کتاب درسی است و مراحل رسم را مرحله به مرحله توضیح داده است.

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده

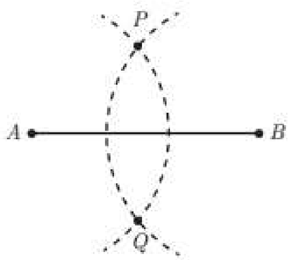
می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

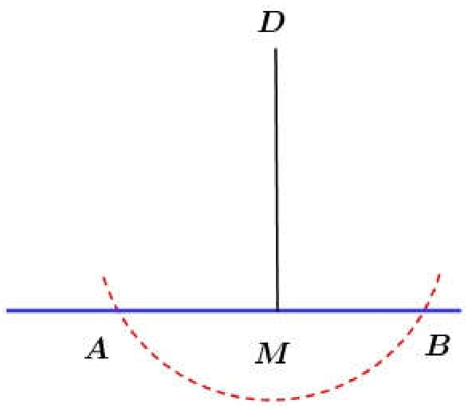
۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم کنید.



حال به حل دو مسئله مهم از کاربردهای عمود منصف می‌پردازیم.

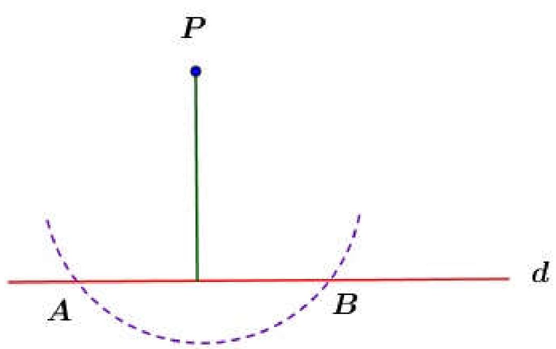
مثال ۳.۲. خط d و نقطه‌ی M روی آن مفروض است. از M عمودی بر خط d اخراج کنید.

حل: ابتدا سوزن پرگار را در نقطه‌ی M قرار داده و سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی مناسب باز کرده و کمانی می‌زنیم تا نقاط A ,B حاصل شود. واضح است که $MA = MB$ چراکه شعاع‌های دایره برابرند. حال عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و واضح است که این عمود منصف باید از M بگذرد چراکه نقطه‌ی M از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و لذا روی عمود منصف است. DM جواب مسئله است.

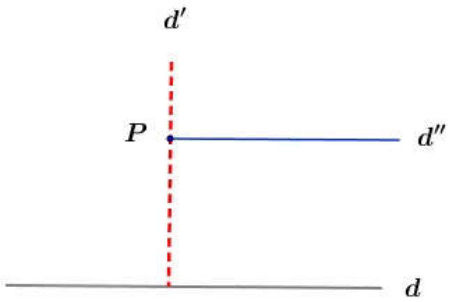


مثال ۴.۲. خط d و نقطه‌ی P خارج آن مفروضند. از این نقطه عمودی بر خط d رسم کنید.

حل: ابتدا سوزن پرگار را در نقطه‌ی P قرار داده و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی مناسب باز کرده، کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی A ,B قطع کند. حال نقطه‌ی P از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. با رسم عمودمنصف پاره‌خط AB این عمود منصف بناچار از P نیز می‌گذرد. بنابراین همین عمود منصف جواب مسئله است.

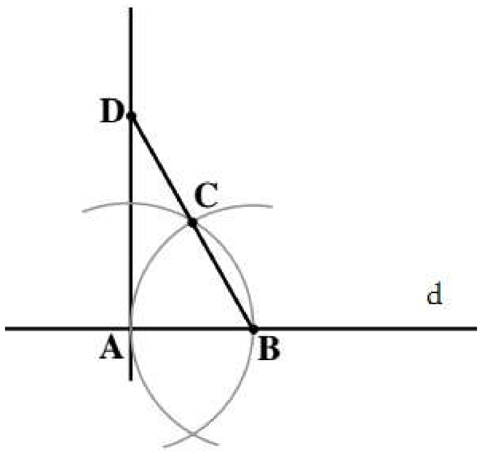


مثال ۵.۲. خط d و نقطه‌ی P خارج آن مفروضند. از این نقطه خطی به موازات خط d رسم کنید.



حل: ابتدا از نقطه‌ی P عمود d' را بر خط d رسم می‌کنیم. سپس از P روی خط d' عمود d'' را اخراج می‌کنیم. خط d'' جواب مسئله است، چراکه دو خط عمود بر یک خط خود موازیند. پس با این حساب خط d'' به موازات خط d است و از نقطه‌ی P نیز می‌گذرد.

مثال ۶.۲. در شکل مقابل روش اخراج عمودی از خط d در نقطه‌ی A واقع بر خط نشان داده شده است که منسوب به ریاضیدان شهیر قرن چهارم قمری، ابوالوفای بوزجانی است.. ابتدا یک نقطه‌ی دلخواه B روی خط درنظر گرفته و سپس به مرکز A و شعاع AB و مجددا به مرکز B و شعاع AB نیم دایره‌ای رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. C را به B وصل کرده و BC را از طرف C به اندازه‌ی BC امتداد داده تا نقطه‌ی D حاصل شود. D را به A وصل کرده و DA جواب مسئله است.



با بررسی نوع مثلث‌های ABC, DAC و محاسبه‌ی زوایا، درستی روش ابوالوفا[3] را توضیح دهید.

پرسش ۶.۲. دو پاره‌خط غیر موازی و غیرمتعامد MN و PQ مفروضند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از چهار نقطه‌ی M, N, P, Q به یک فاصله باشند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

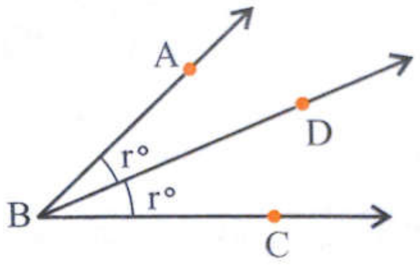
حل: بنا به خاصیت مکان هندسی عمود منصف، با ترسیم عمود منصف این دو پاره خط، این دو پاره خط در یک نقطه متقاطعند. این نقطه جواب مسئله است. حال به این سوال جواب دهید که اگر به مرکز این نقطه(که آنرا O می‌نامیم) و شعاع و شعاع OM دایره‌ای رسم کنیم، آیا این دایره از چهار نقطه‌ی M, N, P, Q می‌گذرد؟

---

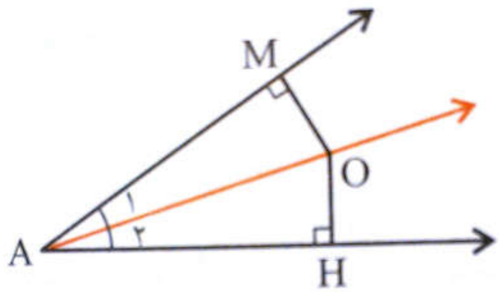
[3] ابوالوفا محمّد بوزجانی (۳۲۸–۳۸۸ هجری قمری) ریاضیدان و منجم بزرگ ایرانی است در دوران طلایی اسلام بوده است. وی در تاریخ ۲۱ خرداد ۳۱۹ هجری شمسی در بوژگان از توابع ولایت جام، ربع نیشابور به دنیا آمد. او تحصیلات ریاضی خود را نزد خانواده آموخت و به نیشابور رفت. سپس در سال ۳۴۸ به عراق که در آن زمان پایتخت خلافت شرقی بود، سفر کرد و تا پایان عمرش در آنجا زندگی کرد. در عراق بصورت آخرین نمایندهٔ برجستهٔ مکتب ریاضی–نجومی درآمد و به تألیف کتاب‌های مهم خود پرداخت و با همکارانش در رصدخانهٔ بغداد به رصد مشغول شد.

او روش‌های محاسبه‌ای را که بازرگانان، کارمندان دوایر مالیه و مساحان زمین در شرق اسلامی در کارهای روزمرهٔ خود بکار می‌بردند، به نحوه منظم مدون ساخت و همچنین روش‌های متداول را اصلاح کرد و بعضی از روش‌های ناصحیح را نیز مورد انتقاد قرار داد. بعنوان مثال، پس از بیان آنکه مساحان، مساحت هر نوع چهار ضلعی را با ضرب کردن نصف مجموع اضلاع مقابل در یکدیگر بدست می‌آورند، خاطرنشان می‌سازد که این نیز اشتباهی آشکار و غلطی مسلم است.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



تعریف ۳.۲. نیم خط BD را نیمساز زاویه‌ی $\angle ABC$ گوییم، هرگاه این نیم‌خط دو زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم کند. یعنی اندازه‌های دو زاویه‌ی $\angle ABD$ و $\angle DBC$ برابر باشند.

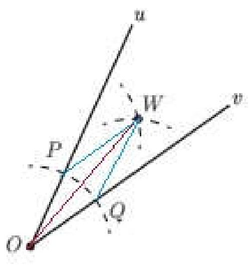


نیمساز یک زاویه در واقع مکان هندسی نقاطی در درون زاویه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. برای مشاهده این مطلب ابتدا فرض کنید که O روی نیمساز است و از O دو عمود بر اضلاع زاویه رسم کنید. اکنون دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOM, AOH بنا به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده هم‌نهشت‌اند. لذا $OH = OM$.

به عکس فرض کنید که نقطه‌ی O درون زاویه چنان است که $OM = OH$ حال از O به A وصل کرده و بنا به حالت وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه دو مثلث OAM, OAH هم نهشت‌اند و لذا $\angle A_1 = \angle A_2$ و این یعنی OA نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد.

فعالیت زیر که برگرفته از کتاب درسی است، نحوه‌ی ترسیم نیمساز را نشان می‌دهد.

ترسیم نیمساز یک زاویه



الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟ برابر ند

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟ برابرند.

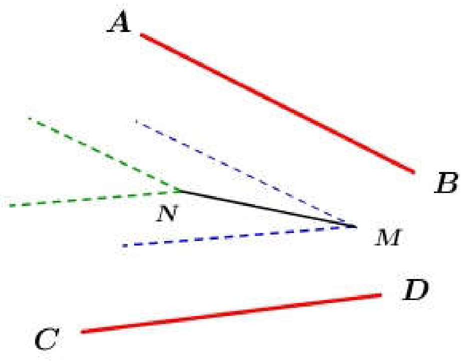
پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ به حالت ۳ ضلع هم‌نهشتند

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابرند.

ــ پاره‌خط OW ...... نیمساز ... زاویهٔ uOv است.

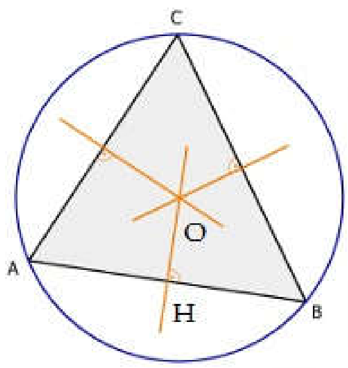
مثال ۷.۲. فرض کنید انتهای یک زاویه بریده شده باشد. یعنی رأس یک زاویه معلوم نباشد. چگونه می‌توانید نیمساز این زاویه را بدون رسم و یافتن رأس آن ترسیم کنید؟

حل: از خاصیت نیمساز و مکان هندسی خطوط موازی کمک می گیریم. می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. واضح است که با تغییر نقطه روی نیمساز این فواصل تا اضلاع، تغییر می‌کنند. ابتدا دو خط به فاصله یک واحد به موازات اضلاع زاویه رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. این نقطه روی نیمساز است چراکه فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یکسان است. سپس دو خط دیگر به فاصله دو واحد به موازات دو ضلع زاویه رسم کرده تا یکدیگر را در N قطع کنند. این نقطه نیز به دلیل مشابه روی نیمساز است. حال MN جواب مسئله است.



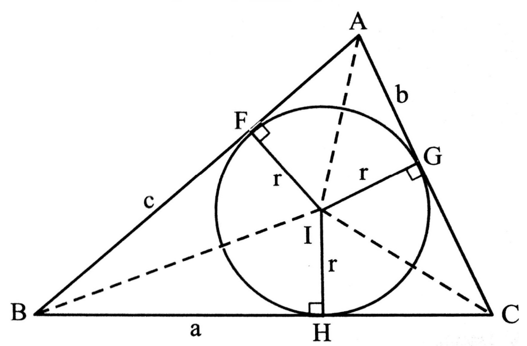
مثال ۸.۲. مثلث ABC مفروض است. عمودمنصف دو ضلع دلخواه را رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه ی O قطع کنند. به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنید. این دایره نسبت به رئوس دیگر مثلث چگونه است؟

حل: با رسم دو عمود منصف، محل تقاطع آنها نقطه‌ی O حاصل می‌شود. طبق خاصیت عمود منصف، فاصله‌ی نقطه‌ی O از سه رأس مثلث برابر است. پس اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از سه راس مثلث می‌گذرد. به این دایره دایره‌ی محیطی مثلث گوییم و از دوایر مهم وابسته به مثلث است.

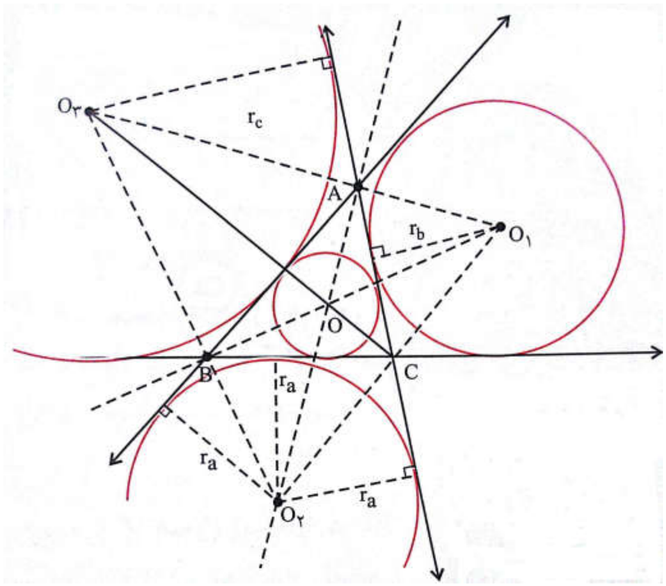


مثال ۹.۲. مثلث ABC مفروض است. نیمساز دو زاویه‌ی دلخواه را رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه ی I قطع کنند. از I عمود IH را رسم کنید. به مرکز O و شعاع OI دایره‌ای رسم کنید. این دایره نسبت به سه ضلع چه وضعیتی دارد؟

حل: با توجه به خاصیت نیمساز، محل برخورد دو نیمساز از سه ضلع به یک فاصله است یعنی $IH = IF = IG$ با این حساب دایره‌ای به مرکز O و شعاع IH باید بر هر سه ضلع مماس باشد. این دایره را دایره محاطی داخلی مثلث گوییم.



تذکر مهم : یک مثلث در حالت کلی یک دایره‌ی محیطی دارد که مرکزش محل برخورد سه عمود منصف اضلاع مثلث است. همچنین یک دایره محاطی داخلی دارد که مرکزش محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است. همچنین سه دایره محاطی خارجی نیز دارد که مرکزش محل برخورد نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز دو زاویه خارجی دو راس دیگر است. فرض کنید شعاع دایره محاطی داخلی را با r و شعاع‌های دوایر محاطی خارجی را مطابق شکل با r_a, r_b, r_c نمایش دهیم و P طبق معمول نصف محیط مثلث باشد.



به کمک مساحت‌ها می‌توان ثابت کرد که $r = \dfrac{S}{P}$ و همچنین می‌توان ثابت کرد:

$$r_a = \frac{S}{P-a}\ ,\ r_b = \frac{S}{P-b}\ ,\ r_c = \frac{S}{P-c}\ ,\ \frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$$

پرسش ۷.۲. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به محیط $\sqrt{۱۸}$ شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی به ترتیب عبارتند از؟

۱) $\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}, \sqrt{۶}$　　۲) $\sqrt{۳}, \dfrac{۱}{\sqrt{۶}}$　　۳) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۳}, \sqrt{۶}$　　۴) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۳}, \dfrac{۱}{\sqrt{۶}}$

حل: ابتدا از محیط استفاده کرده تا ضلع مثلث یعنی a حاصل شود. چون مثلث متساوی‌الاضلاع است پس $۳a = \sqrt{۱۸}$ و از اینجا $a = \sqrt{۲}$ و مساحت این مثلث یراپر است با $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ و با توجه به دستور $r = \dfrac{S}{P}$ داریم $r = \dfrac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۱۸}}{۲}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۶}}$ و سپس از دستور رابطه‌ی بین شعاع دوایر محاطی داخلی و خارجی و اینکه سه شعاع دایره محاطی خارجی برابرند، شعاع دایره محاطی خارجی برابر $\dfrac{\sqrt{۶}}{۳}$ حاصل می‌شود.

پرسش ۸.۲. شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی مثلثی با اضلاع $۱۷, ۱۵, ۸$ کدامند؟

۱) $۲۰, ۱۲, ۵, ۵$　　۲) $۱۷, ۱۲, ۵, ۳$　　۳) $۲۰, ۱۷, ۱۲, ۵$　　۴) $۲۰, ۱۲, ۵, ۳$

حل: فرض کنید P نصف محیط مثلثی با اضلاع c, b, a باشد. برای محاسبه مساحت این مثلث می‌توان دستور هرون را بکار برد که عبارتست از

$$\boxed{S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}$$

حال در این مثلث مساحت برابر است با:

$$S = \sqrt{۲۰(۲۰-۸)(۲۰-۱۵)(۲۰-۱۷)} = ۶۰ \implies r = \frac{S}{P} = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$$

به همین ترتیب از دستورهای بالا شعاع دوایر محاطی خارجی بدست می‌آیند.

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۶۰}{۲۰-۱۷} = ۲۰ \ , \ r_b = ۱۲ \ , \ r_c = ۵$$

تمرین ۱.۲. مثلثی با اضلاع ۳ و ۵و ۶ را رسم کنید.

تمرین ۲.۲. مثلثی قائم‌الزاویه است و دو ضلع قائمه‌ی آن ۳ و ۴ هستند. مثلث را رسم کنید.

تمرین ۳.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه،اندازه‌ی وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه معلوم است. مثلث را رسم کنید.

تمرین ۴.۲. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که ارتفاع آن قاعده‌ی آن ۴ واحد باشد و طول ساق آن ۶ واحد. اگر ارتفاع همان ۴ واحد باشد، اما مساحت مثلث ۸ واحد مربع باشد، چگونه می توان آن‌را ترسیم نمود؟

تمرین ۵.۲. در مثلث ABC که اضلاع آن c, b, a هستند، فرض کنید که c, b معلوم باشند و همچنین ارتفاع وارد بر ضلع BC یعنی h_a معلوم باشد. در ترسیم این مثلث و تعداد جواب‌ها بحث کنید.

تمرین ۶.۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه،اندازه‌ی وتر معلوم است. در حالات زیر چگونه می‌توان مثلث را رسم کرد.الف: اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر معلوم است.ب: اندازه‌ی یک زاویه‌ی حاده معلوم است.ج: طول نیمساز زاویه‌ی قائمه معلوم است.

تمرین ۷.۲. پاره‌خط AB مفروض است. مربعی رسم کنید که قطر آن پاره‌خط AB باشد.

۲.۲ استدلال و قضیه‌ی تالس

استدلال

استدلال یا طلب دلیل کردن، بیان گزاره‌هایی است که درستی یک ادعا را نشان دهد. در زندگی روزمره نیز ما انواع استدلال را بکار می‌بریم. فارغ از درستی یا نادرستی این استدلال‌ها،کلیت آنها را می‌توان در دو دسته‌ی استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی، طبقه بندی کرد.

استدلال استقرایی

تصور کنید در حال ایران‌گردی وارد یک روستای قدیمی می شوید و مشاهده می کنید که سقف اولین،دومین،سومین،... خانه ای را که مشاهده می کنید گنبدی شکل است و بنابراین تعداد مشاهده حکم می کنید که در این روستا تمام خانه ها دارای سقف گنبدی هستند. مشخص است که این نوع استدلال قابل اعتماد نیست و در حالت کلی ممکن است درست نباشد. چه بسا خانه ای نوساز دارای سقفی صاف باشد. جمله زیر از جورج پولیا[۴] درباره استقراء است:
استقراء عبارت است از فرآیند اکتشاف قوانین کلی از طریق ملاحضه و ترکیب کردن نمونه های جزئی ، و در همه علوم و حتی ریاضیات مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. در ریاضیات همچون در علوم فیزیکی از مشاهده و استنتاج منطقی برای اکتشاف قوانین کلی استفاده می‌شود، ولی در اینجا تفاوتی وجود دارد.در علوم فیزیکی ملاکی قدرتر از مشاهده و استنتاج وجود ندارد اما در ریاضیات چنین ملاک قدر و پراعتباری وجود دارد و آن اثبات دقیق است.

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلّی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

مثال ۲.۱۰. تابع $f(n) = n^{۲} + n + ۴۱$ مفروض است. مقادیر $f(۱), f(۲), f(۳), \cdots , f(۳۹)$ را محاسبه کنید. اعداد حاصل همگی اول هستند؟ آیا میتوان از این ۳۹ مورد مشاهده نتیجه گرفت که $f(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ عددی اول است؟ چرا؟

حل: با محاسبه‌ی مستقیم داریم:

$$f(۱) = ۴۳, f(۲) = ۴۷, f(۳) = ۵۳, \cdots f(۳۹) = ۱۶۰۱, f(۴۰) = ۱۶۸۱ = ۴۱ \times ۴۱$$

همانطور که ملاحضه می‌کنید در ۳۹ مورد حاصل عدی اول است، اما در مورد ۴۰ ام حاصل عددی غیر اول است و لذا نمی توان از ۳۹ مورد صحیح، صحت گزاره را در حالت کلی نتیجه گرفت.
البته این باعث کنارگذاشتن این نوع استدلال نیست. در واقع بیشتر دستاوردهای بزرگ علوم از همین طریق بوده است. در ریاضیات، ابتدا به کمک استدلال استقرایی حدسی زده می‌شودو سپس به کمک استدلال استنتاجی صحت آن ثابت می‌شود.

[۴] جرج پولیا در خانواده‌ای با اصلیت یهودی در شهر بوداپست، در مجارستان به دنیا آمد. از سال ۱۹۱۴ تا ۱۹۴۰ در دانشگاه صنعتی زوریخ در سوئیس و از سال ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۳ در دانشگاه استنفورد استاد ریاضی بود و بقیهٔ عمرش را به عنوان استاد بازنشسته‌ی استنفورد گذراند. او در زمینه‌های مختلف ریاضی از جمله سری‌ها، نظریه اعداد، آنالیز ریاضی، هندسه، جبر، ترکیبیات و احتمال فعالیت می‌کرد. در اواخر عمرش تلاش زیادی کرد تا شیوه‌هایی که مردم برای حل مسائل استفاده می‌کنند را توصیف کند و چگونگی آموزش حل مسئله را شرح دهد. درکتاب چگونه مسئله را حل کنیم به شیوه‌های آموزش ریاضی و حل مسائل می‌پردازد. درکتاب جبر و احتمال دبیرستان نقل قول‌هایی ازکتاب خلاقیت ریاضی او وجود دارد. از سال ۱۹۷۶ یک جایزه با عنوان جایزه ی جورج پولیا به نویسندگان مقالات برگزیده ی مجله ریاضی ویژه دبیرستان‌ها اهدا می شود.

استدلال استنتاجی

تعریف ۴.۲. استدلال استنتاجی استدلالی است که بر مبنای حقایقی بنا شده که درستی آنها را از قبل پذیرفته ایم.

استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم.

این حقایق پذیرفته شده چه چیزهایی هستند؟ در واقع همه آن چیزی که درکتب ریاضی در سال های گذشته خوانده اید و به صحت آن اطمینان داریم در رده ی این حقایق قرار دارند. اصول هندسه اقلیدسی ، قضیه تالس و فیثاغورس ، خواص اعداد و عملیات های تعریف شده بر آنها و ... . برای درک بهتر و استفاده از این نوع استدلال به مثال های گوناگون زیر دقت کنید.

مثال ۱۱.۲. ثابت کنید برای اعداد حقیقی و مثبت b, a با فرض $0 < a < b$ نتیجه می شود که : $a^2 < b^2$

حل: بنا به فرض $a < b$ است. طرفین این نامساوی را می توان در هر عدد مثبتی ضرب کرد(حقیقتی که از قبل می‌دانیم) پس داریم $a^2 < ab$ حال مجددا طرفین را در b ضرب کنید پس داریم $ab < b^2$ و از قیاس این دو نامساوی خواهیم داشت: $a^2 < b^2$ و حکم ثابت است.

مثال ۱۲.۲. ثابت کنید مربع هر عدد فرد بصورت $8k + 1$ است.

حل: می‌دانیم یک عدد فرد دلخواه بصورت $2m + 1$ است. پس داریم:

$$(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4\underbrace{m(m+1)}_{\text{دو عدد متوالی}} + 1 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$$

توجه داریم که ضرب دو عدد طبیعی متوالی زوج است و بصورت $2k$ نمایش داده‌ایم.

نتایج بدست امده از استدلال استنتاجی را اغلب قضیه می‌نامیم. اگر دقت کنید، بیشتر گزاره‌های ریاضی بصورت اگر و آنگاه بیان می شوند. مثلا اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد آنگاه مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است. چنین گزاره‌هایی را گزاره‌ی شرطی می‌نامیم و بصورت $p \Longrightarrow q$ نمایش می‌دهیم. p را فرض و q را حکم می‌نامیم. اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم به گزاره‌ی حاصل عکس گزاره‌ی قبلی گوییم که ممکن است درست باشد یا نباشد. اگر یک گزاره شرطی و عکسش درست باشد به آن یک گزاره دو شرطی گوییم و بصورت $p \Leftrightarrow q$ نشان می‌دهیم. نمونه‌ی معروف قضیه‌ی دو شرطی قضیه‌ی معروف فیثاغورس است که هم خودش و هم عکسش درست است.

برهان خلف

برهان خلف نوعی از برهان غیرمستقیم است؛ برای آنکه ثابت کنیم قضیه‌ای درست است می‌توانیم ثابت کنیم که خلاف آن قضیه ، نادرست است. به این ترتیب که از صورت قضیه قسمتی را بعنوان فرض و قسمت دوم را بعنوان حکم در نظر می‌گیریم، بعد در جهت اثبات خلاف حکم مورد نظر حرکت می‌کنیم. بعد از طی مراحلی به جایی می‌رسیم که با فرض قضیه (یا حقایقی که از قبل می دانیم) که در ابتدا آن را درست در نظر گرفته بودیم به تناقض می‌رسیم تناقض نشان می دهد که خلاف حکم که درست فرض کرده بودیم اتفاقا نادرست است و خود حکم اصلی درست است.

برهان خلف

برای استفاده از برهـان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می گیریم:

گام ۱: فرض می کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.

گام ۳: حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرضی که در گام اوّل کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجهٔ مطلوب باید درست باشد.

مثال ۱۳.۲. ثابت کنید که اگر $n^۲$ زوج باشد آنگاه n زوج است.

حل: فرض کنید $n^۲$ زوج باشد، باید ثابت کنیم که n نیز زوج است. فرض کنید که اتفاقا n زوج نباشد. (فرض خلف) پس بناچار n فرد است و باید بصورت $n = ۲k + ۱$ باشد. دراینصورت :

$$n^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲k(۲k + ۲) + ۱ = ۲m + ۱$$

که نشان می‌دهد $n^۲$ نیز فرد است که این با فرض در تناقض است.

پرسش ۹.۲. اثبات کدام قضیه‌ی زیر نیاز به روش برهان خلف ندارد؟

۱. عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.

۲. از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می توان رسم کرد.

۳. در یک صفحه از نقطه‌ای مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

۴. مربع عر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

حل: این سوال سراسری سال ۸۶ است. هدف طراح گزینه ۴ است. قبلا با استدلال استنتاجی آنرا اثبات کرده‌ایم. گزینه دو اصل اقلیدس است در واقع قضیه نیست.

مثال نقض

در قسمت قبل دیدیم چگونه به کمک استدلال استنتاجی می توان درستی گزاره ها را در حالت کلی ثابت کرد. حال سوال این است که اگر به گزاره ای شک کردیم و در ابتدا بخواهیم عدم کلیت آن گزاره را نشان دهیم باز باید اثباتی انجام دهیم؟ پاسخ منفی است. چنانچه گزاره ای در ریاضیات تنها در یک مورد درست نباشد صحت کلی آن نیز باطل می شود . یافتن مثال نقض همیشه کار ساده‌ای نیست. حتی در برخی موارد از حد و توان افراد معمولی خارج است. به عنوان یک نمونه نه چندان مشکل اما پرمحاسبه ارائه مثال نقض برای گزاره‌ی « عبارت $\sqrt{۹۹n^۲ + ۱}$ همیشه گنگ است» کار ساده‌ای نیست. واتسلاو سرپینسکی[۵] ریاضی‌دان توانای لهستانی مثال نقض آن را یافته است. با فرض اینکه n عدد زیر باشد:

$$n = ۱۲۰۵۵۷۳۵۷۹۰۳۳۱۳۵۹۴۴۷۴۴۲۵۳۸۷۳۷$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$۹۹n^۲ + ۱ = (۳۷۹۵۱۶۴۰۰۹۰۶۸۱۱۹۳۰۶۳۸۰۱۴۸۹۶۰۸۰)^۲$$

تعریف ۵.۲. به مثالی که کلیت یک حکم را باطل کند مثال نقض گوییم.

مثال ۱۴.۲. گزاره زیر را بررسی کنید و هر کدام که درست نیست با مثال نقض رد کنید.

۱ – حاصل ضرب هر عدد طبیعی در یک عدد فرد ، عددی فرد است.

۲– مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

۳ – در هر متوازی الاضلاع هر قطر نیم ساز هم هست.

۴ – اگر x و y گنگ باشند آنگاه $x + y$ هم گنگ است.

۵ – اگر x و y گنگ باشند آنگاه x^y هم گنگ است.

حل: واضح است که ۱ نادرست است چراکه از ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، حاصل زوج است و نه فرد. شماره ۲ درست است و باید با استدلال استنتاجی اثبات شود. فرض کنید $n.n + ۱, n + ۲$ سه عدد طبیعی متوالی باشند و داریم $n + n + ۱ + n + ۲ = ۳n + ۳ = ۳(n + ۱)$ که بوضوح مضرب ۳ است. بوضوح هر متوازی‌الضلاعی

[۵] پدر واتسلاو سرپینسکی که یک پزشک بود پسر را به یک مدرسه خوب در ورشو فرستاد. هوش و نبوغ واتسلاو جوان به زودی توسط معلم ریاضی‌اش شناسایی شد.در آن سال ها شوروی سابق به لهستان حمله کرده بود و مدرسه‌رفتن و تحصیل در پایتخت جنگ زده‌ی لهستان بسیار دشوار می نمود.مهاجمین قصد داشتند به زور قوانین حاکم بر مدارس و نظام آموزشی و فرهنگ عامه را تغییر دهند.با تمام این اوصاف و مشکلات واتسلاو جوان در سال ۱۸۹۹ وارد دانشگاه ورشو شد. در دانشگاه در یک مسابقه ریاضی در نظریه اعداد نفر اول شدو مدال طلا گرفت.وی پس از فارغ‌التحصیلی از دانشگاه مدتی معلم ریاضی دبیرستان ها در ورشو بود ولی خیلی زود به دلیل شرکت در یک حرکت اعتراضی دانش آموزی مجبور به ترک ورشو شد. وی بعد ها دوره دکتری دانشگاه کراکوو وارد شد و موفق به اخذ این مدرک شد و در سال ۱۹۱۸ به استادی دانشگاه ورشو رسید. از اینجا به بعد دوران تاثیرگذاری در ریاضیات لهستان شروع می‌شود که همگی تحت تاثیر واتسلاو بود. وی را بحق پدر ریاضیات نوین لهستان می‌دانند. وی در ۲۱ ام اکتبر سال ۱۹۶۹ در ورشو چشم از جهان فروبست.

که لوزی نباشد مثال نقض ۳ است. برای ۴ که تادرست است دو عدد گنگ $x = ۱ + \sqrt{۲}, y = ۱ - \sqrt{۲}$ را در نظر بگیرید. اما ۵ ساده نیست. در واقع اگر به دنبال اثبات دقیق باشیم، نیاز به مباحث پیشرفته‌تری داریم. با اینحال مثال نقض خلاقانه‌ای برای ۵ وجود دارد. اگر فرض کنیم $x = y = \sqrt{۲}$ آنگاه $x^y = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ دو حالت دارد. اگر گویا باشد که مثال نقض را یافته‌ایم. درغیراینصورت، یعنی اگر گنگ باشد قرار می‌دهیم $y = \sqrt{۲}$, $x = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و در این صورت هر دوی x, y گنگ هستند و $x^y = \left(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = ۲$ که گویاست.

پرسش ۱۰.۲. کدام عدد صحت گزاره‌ی «هر عدد طبیعی را می‌توان بصورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت » را نقض می‌کند؟

۱) ۴۰		۲) ۴۶		۳) ۵۶		۴) ۶۴

حل: گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. برای بررسی گزینه‌ها داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} ۴۰ = ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ \\ ۴۶ = ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ \\ ۵۶ = ۵ = ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ \end{array}\right. \Longrightarrow \text{گزینه‌ی ۴ جواب درست است}$$

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. میدانیم که هر دو نسبت مساوی یک تناسب تشکیل میدهند. میدانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار میماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی میتوان ثابت کرد.

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc$

۲) $ad = bc \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}\ ,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}\ ,\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

۶) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \longrightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

در واقع اثبات این روابط با طرفین-وسطین کردن انها بسیار ساده است.

پرسش ۱۱.۲. اگر بدانیم برای سه عدد t, n, m رابطه‌ی $۳m = ۵n = ۲t$ برقرار باشد، حاصل $\frac{۲m+n-t}{m-n}$ کدامست؟

۱) $\frac{۱۳}{۸}$　　۲) $\frac{۱۱}{۸}$　　۳) $\frac{۱۱}{۴}$　　۴) $\frac{۲۹}{۴}$

حل: اگر قرار دهیم $۳m = ۵n = ۲t = ۳۰z$ آنگاه همه‌ی مقادیر بر حسب z قابل محاسبه‌اند. پس داریم:

$$\frac{۲m+n-t}{m-n} = \frac{۲۰z+۶z-۱۵z}{۱۰z-۶z} = \frac{۱۱z}{۴z} = \frac{۱۱}{۴}$$

پرسش ۱۲.۲. با توجه به تناسب $\frac{۲}{۳} = \frac{x}{y}$ کدام گزینه نادرست است؟

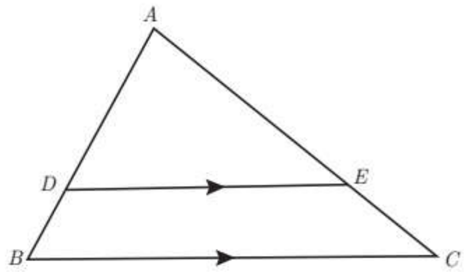
۱) $\frac{۵}{۲} = \frac{y+x}{x}$　　۲) $\frac{۲}{۳} = \frac{x-۲}{y-۳}$　　۳) $\frac{۳}{۲} = \frac{x+۱}{y+۱}$　　۴) $\frac{y}{x} = \frac{۲}{۳}$

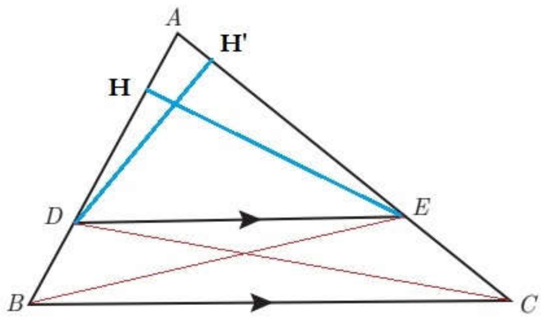
حل: تنها گزینه ۳ هست که از فرض بدست نمی‌آید. مابقی نتیجه‌ی مستقیم خواص تناسب است.

قضیه ۲.۲. قضیه‌ی تالس : مثلث ABC مفروض است.

اگر $DE \parallel BC$ باشد ثابت کنید :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$





اثبات: مطابق شکل از D به C و از E به B وصل کرده و مشاهده می‌کنیم که مساحت دو مثلث DEB , DEC برابر است، چراکه قاعده‌ی هر دو ضلع مشترک BC است و ارتفاع هر دو نیز در واقع فاصله‌ی دو پاره‌خط موازی DE, BC است. حال ارتفاع EH, DH' را رسم کرده و با محاسبه‌ی نسبت مساحت‌ها بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{۱}{۲}EH \times AD}{\frac{۱}{۲}EH \times DB} = \frac{AD}{DB}$$

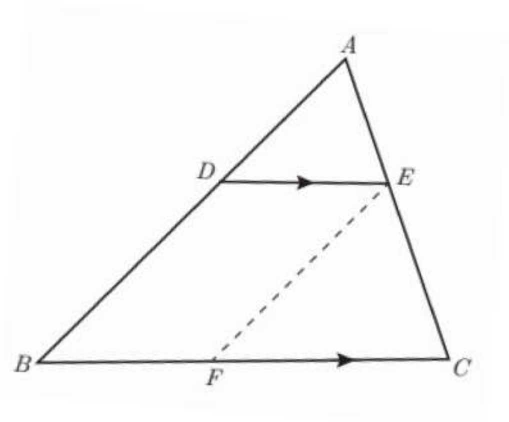
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AE}{\frac{۱}{۲}DH' \times EC} = \frac{AE}{EC}$$

با توجه به برابری طرف اول کسرهای فوق یعنی $\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}$ و $\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}$ باید طرف دوم آنها نیز برابر باشد یعنی :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه‌ی تالس [۶] تمام است.

تعمیم قضیه‌ی تالس



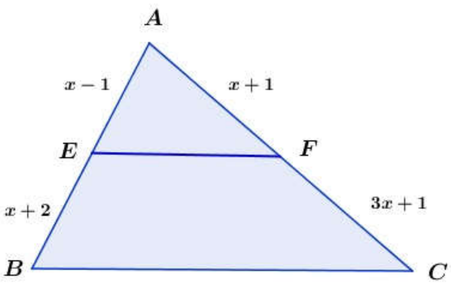
در شکل مقابل $EF \parallel AB$ است.بنابراین چهارضلعی $DEFB$ متوازی‌الاضلاع است و لذا $DE=BF$ و حال ابتدا صورت اصلی قضیه تالس را می‌نویسیم: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و با خواص تناسب و ترکیب در صورت داریم:$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$ و از اینجا با معکوس کردن طرفین تساوی داریم: $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ و این همان چیزی است که نیاز داریم. اگر از این نتیجه استفاده کرده و این‌بار قضیه‌ی تالس را با توجه به توازی $EF \parallel AB$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC} \xrightarrow[\text{DE=BF}]{\text{چون}} \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

بنابراین تعمیم قضیه‌ی تالس را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}}$$

برای روشن شدن مطلب و کاربردهای این قضیه‌ی مهم به چند مثال دقت کنید:



پرسش ۱۳.۲. در شکل مقابل $EF \parallel BC$ است. محیط مثلث AEF کدامست؟

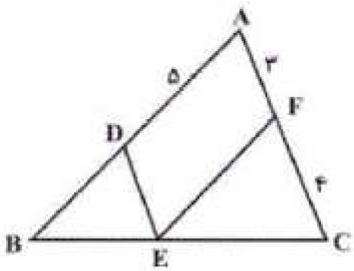
۱) ۵   ۲) $\frac{۲۵}{۴}$ ۳) ۴   ۴) $\frac{۱۵}{۴}$

حل: قضیه‌ی تالس را می‌نویسیم: $\frac{EF}{۵x-۱}=\frac{x+۱}{۴x+۲}=\frac{x-۱}{۲x+۱}$ و از برابری دو کسر اول داریم $x=۳$ و با

[۶] تالس ملطی در حدود سال ۶۲۴ پیش از میلاد در شهر میلیتوس در ایونیا (غرب ترکیهٔ امروزی) به دنیا آمد. برخی مورخان تالس را یک فینیقی می‌دانستند که به همراه پدرو مادرش از فینیقیه به میلتوس مهاجرت کرده بودند. پدرش اکسامیس و مادرش کلئوبولینه نام داشت. او بیشتر عمر خود را در سفر گذراند. مشهور است تالس در ۸۰ یا ۹۰ سالگی، هنگامی که نظارگر یک مسابقه ورزشی بوده‌است، از فرط گرما و تشنگی و ناتوانی جان سپرده‌است.

جایگذاری این مقدار از x داریم $EF = ۴$ و محیط مثلث خواسته شده برابر ۱۰ واحد است.

پرسش ۱۴.۲. در شکل مقابل $AC \parallel DE$ و $AB \parallel EF$ است.



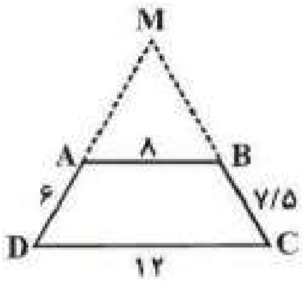
دراین صورت مقدار BD کدامست؟

۱) ۵　　۲) $\frac{۲۵}{۴}$　　۳) ۴　　۴) $\frac{۱۵}{۴}$

حل: چهارضلعی $ADEF$ متوازی‌الاضلاع است. پس $DE = AF = ۳, AD = EF = ۵$ و با توجه به توازی $AC \parallel DE$ قضیه تالس را بکار می‌گیریم:

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD = x}{AB} \Longrightarrow \frac{۳}{۳ + ۴} = \frac{x}{x + ۵} \Longrightarrow x = \frac{۱۵}{۴}$$

پرسش ۱۵.۲. مطابق شکل، امتداد ساق‌های ذوزنقه‌ی $ABCD$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند. با توجه به اندازه‌های روی شکل، مجموع طول پاره‌خط‌های MB, MA کدامست؟

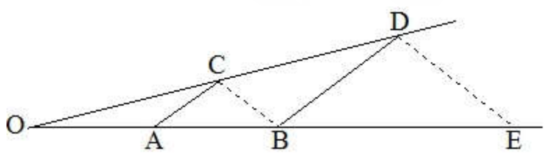


۱) ۱۵　　۲) ۱۸　　۳) ۲۷　　۴) ۳۰

حل: چون $AB \parallel DC$ است خواهیم داشت:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC} \Longrightarrow \frac{MA}{MA + ۶} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{MB}{MB + ۷/۵} \longrightarrow MA = ۸, MB = ۱۵$$

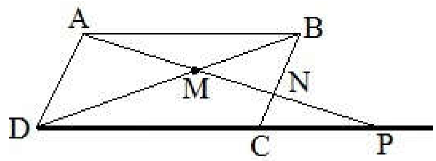
پرسش ۱۶.۲. در شکل روبرو دو جفت پاره‌خط موازیند و $OA = ۳$ و $AB = ۵$ است. اندازه‌ی BE کدامست؟ (سراسری ۹۴ تجربی)



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$　　۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$　　۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$　　۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

حل: از قضیه تالس دوبار استفاده کرده و داریم:

$$\begin{cases} AC \parallel BD \Longrightarrow \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OC}{CD} \\ BC \parallel DE \Longrightarrow \dfrac{OC}{CD} = \dfrac{OB}{BE} \end{cases} \Longrightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE} \Rightarrow BE = ۱۳\frac{۱}{۳}$$



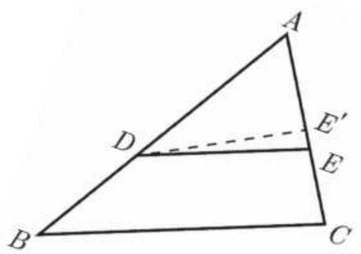
پرسش ۱۷.۲. در شکل روبرو، $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.
حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟(ریاضی خارج ۹۴)

۱) AB^2	۲) AD^2	۳) MD^2	۴) MA^2

حل: از قضیه‌ی تالس کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} BN \parallel AD \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ AB \parallel DP \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{cases} \Longrightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP} \Rightarrow AM^2 = MN \times MP$$

عکس قضیه‌ی تالس



قضیه ۳.۲. در مثلث ABC فرض کنید که $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$
، ثابت کنید دراین صورت : $DE \parallel BC$

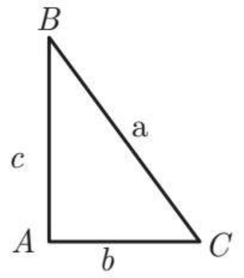
اثبات: به برهان خلف فرض کنید حکم برقرار نباشد. از D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در E' قطع کند. لذا بنا به قضیه تالس باید داشته باشیم: $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ و با قیاس با فرض خواهیم داشت : $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ و با استفاده از خواص تناسب $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$ و لذا $AE = AE'$ و این یعنی نقطه‌ی E بر E' منطبق است و در نتیجه DE' همان DE است که این یک تناقض است.

اکنون که عکس قضیه‌ی تالس ثابت شد، می توان ادعا کرد که قضیه‌ی تالس یک قضیه‌ی دو شرطی است. به عبارت بهتر در مثلث ABC اگر نقاط D, E روی اضلاع AB و AC باشند، آنگاه :

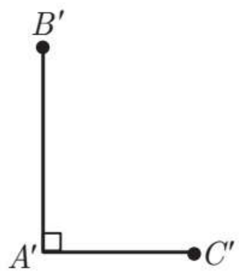
$$ED \parallel BC \iff \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$$

یکی دیگر از قضایایی که در هندسه اهمیتی، حتی بیش از قضیه‌ی تالس دارد، قضیه‌ی فیثاغورس است. این قضیه بیان می‌دارد که اگر مثلث ABC در راس A قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$. عکس این قضیه نیز درست است.

اثبات این مطلب را در ادامه خواهید دید.



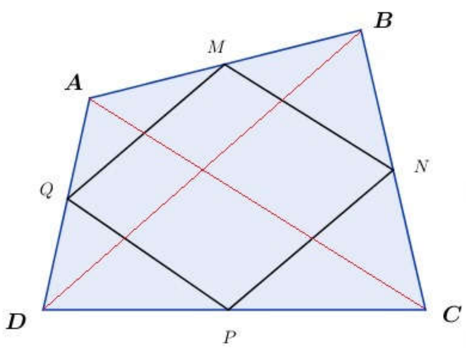
فرض کنید در مثلث ABC رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد. باید ثابت کنیم که $\angle A = 90^\circ$ است. ابتدا یک زاویه‌ی قائمه چون A' می سازیم. روی اضلاع این زاویه به اندازه‌ی b, c جدا کرده تا نقاط B' , C' حاصل شوند. اگر B' را به C' وصل کنیم، چون مثلث $A'B'C'$ قائم‌الزاویه است پس باید داشته باشیم : $B'C'^2 = b^2 + c^2 = a^2$ و این یعنی $B'C' = a$ و دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت هستند(ض‌ض‌ض) ولذا $\angle A = \angle A' = 90$ و اثبات تمام است.



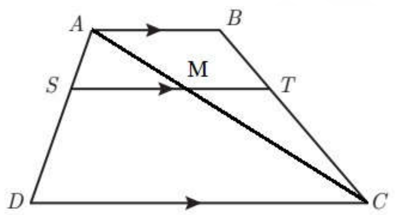
پس اکنون می‌توان قضیه‌ی فیثاغورس را بصورت دوشرطی بیان کرد. بدین ترتیب که مثلث ABC مفروض است دراینصورت:

$$\angle A = 90^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2$$

مثال ۱۵.۲. اوساط اضلاع یک چهارضلعی غیر مشخص $ABCD$ را متوالیا به هم وصل کرده تا چهارضلعی $MNPQ$ حاصل شود. این چهارضلعی را توصیف کنید.



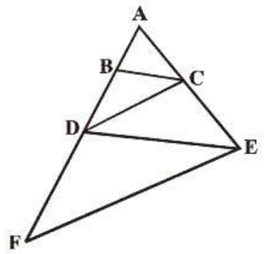
حل :با رسم قطرهای این چهارضلعی و استفاده از عکس قضیه تالس داریم: $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$ و لذا نتیجه می‌شود: $MN \parallel AC$ وهمچنین $MN = \frac{1}{2}AC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $PQ \parallel AC$ و همچنین $PQ = \frac{1}{2}AC$ و این یعنی دو ضلع مقابل این چهارضلعی هم برابرند و هم موازی. یعنی چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.



مثال ۱۶.۲. در ذوزنقه‌ی مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید : $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$. راهنمایی: یکی از اقطار را رسم کنید.

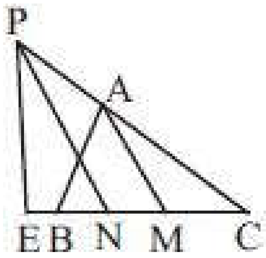
حل: با رسم قطر AC و استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:

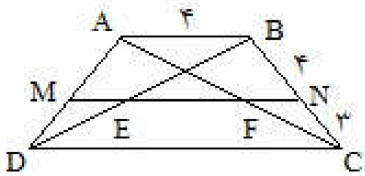
$$\begin{cases} \frac{AS}{SD} = \frac{AM}{MC} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{BT}{TC} \end{cases} \implies \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TS}$$



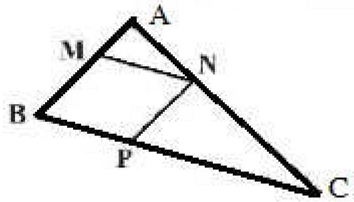
تمرین ۸.۲. در شکل مقابل داریم: $AB = ۲$ و $BD = ۳$ و همچنین می‌دانیم که CD با EF موازی است و BC هم با DE موازی است. طول پاره خط DF را بدست آورید. پاسخ: طول پاره خط ۷٫۵ است.

تمرین ۹.۲. در شکل زیر AM میانه ضلع BC از مثلث ABC است و N وسط BM است. از N خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا امتداد AC را در P قطع کند. سپس از P خطی موازی AN رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در E قطع کند. مقدار کسر $\frac{CN}{NE}$ را بیابید. **راهنمایی:** جواب برابر ۲ است. ابتدا قضیه‌ی تالس را در دو مثلث CPE, CPN بنویسید تا کسر حاصل برابر $\frac{CM}{MN}$ معادل گردد و سپس صورت و مخرج کسر اخیر را بر حسب ضلع BC بیابید.

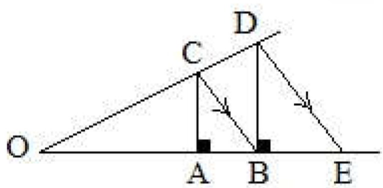




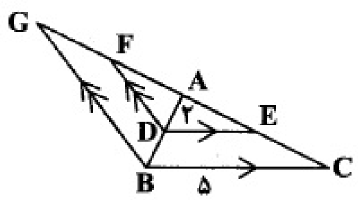
تمرین ۱۰.۲. در ذوزنقه‌ی مقابل می‌دانیم که پاره‌خط MN به موازات پاره‌خط EF رسم شده است. اندازه‌ی EF را محاسبه کنید. جواب برابر $\frac{۲۰}{۷}$ است. این تمرین مشابه تمرین کتاب درسی و یکی از مثال‌هایی است که در شرح درس حل شده است.قضیه‌ی تالس را در دو مثلث ABC, BCD بنویسید.



تمرین ۱۱.۲. در مثلث ABC مقابل می‌دانیم $AB = \frac{۱}{۲}BC$ و همچنین چهارضلعی $MNPB$ لوزی است. ثابت کنید طول ضلع BC ۳ برابر طول ضلع لوزی است. راهنمایی: قضیه‌ی تالس را با توجه به توازی $NP \parallel AB$ بنویسید و همزمان از اینکه ضلع BC دو برابر ضلع AB است استفاده کنید.



تمرین ۱۲.۲. در شکل مقابل می‌دانیم CB موازی DE است و پاره‌خط‌های CA, DB بر OE عمود می‌باشند. ثابت کنید $OB^۲ = OA \times OE$ برقرار است. راهنمایی: از اینکه $CB \parallel DE$ و $CA \parallel DB$ است استفاده کرده و قضیه‌ی تالس را بنویسید.



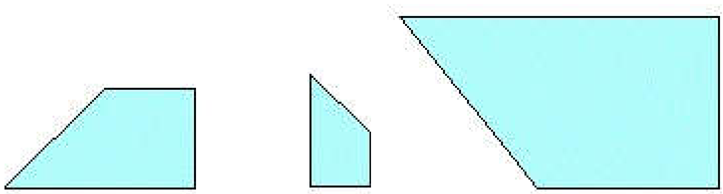
تمرین ۱۳.۲. در شکل مقابل می‌دانیم $DE \parallel BC$ و همچنین $FD \parallel BG$ است. اگر $DE = ۲$, $BC = ۵$ باشد، نسبت GF به AF را بیابید. جواب برابر ۱٫۵ است. از اولین فرض تساوی، قضیه‌ی تالس را بصورت جزء به کل، و از فرض توازی دوم قضیه‌ی تالس را بصورت جزء به جزء بنویسید.

۳.۲ تشابه مثلث‌ها

یکی دیگر از جنبه‌های پرکاربرد هندسه در زندگی روزمره تشابه است.نقشه هر مکان با آن مکان متشابه است. ماکت یک ساختمان با آن ساختمان متشابه است. مهندسین راه و ساختمان محاسبات لازم را برای ساختن یک مکان بر روی ماکت آن انجام می دهند و پس از مشخص شدن تمامی جزئیات اقدام به ساخت آن می کنند. امروزه متخصصان علم شبیه سازی علوم پزشکی، در کشور عزیزمان ایران به پیشرفتهای قابل توجهی دست یافته اند به طوریکه بعضی از اعضای بدن انسان را در محیط های شبیه سازی شده، تولید می کنند. در علوم کامپیوتر نرم افزارهای طراحی شده قادرند تصاویر قدیمی را بازسازی کرده و در اندازه های مختلف و به تعداد دلخواه تکثیر کنند.

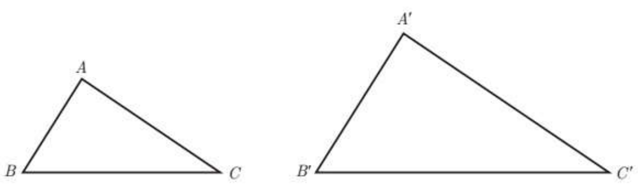
تعریف ۶.۲. دو چند ضلعی را متشابه گوییم، هرگاه اضلاع متناظر، متناسب باشند و زوایای داخلی متناظر نیز برابر باشند.

در شکل زیر سه چهارضلعی داده شده همگی متشابه هستند.



توجه کنید که در مورد چندضلعی‌ها (بغیر از مثلث) متناسب بودن اضلاع به تنهایی دلیلی برای تشابه نیست چراکه دراینصورت تمام لوزی‌ها باید متشابه باشند(که نیستند) و همچنین برابری نظیر به نظیر زوایا نیز به تنهایی، دلیلی بر تشابه نیست چراکه در اینصورت تمامی مستطیل‌ها باید متشابه باشند.(که نیستند)حال به سراغ بحث اصلی، یعنی تشابه مثلث‌ها می‌رویم.

تعریف ۷.۲. دو مثلث را متشابه گوییم، هرگاه اضلاع آنها نظیر به نظیر متشابه باشند و زوایای آنها نیز نظیر به نظیر برابر باشند. به زبان ریاضی یعنی :

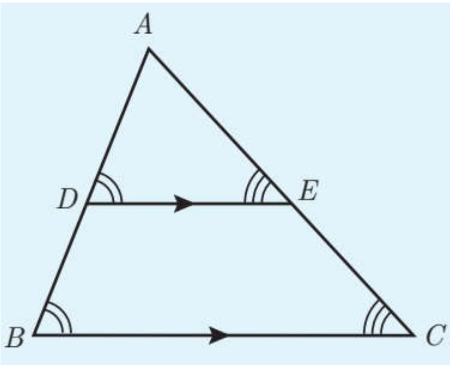


$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{C}=\hat{C}' \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

اغلب می‌نویسیم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ و عدد مثبت k را نسبت تشابه می‌نامیم. واضح است که در این حالت مثلث $A'B'C'$ نیز با مثلث ABC متشابه است و نسبت تشابه $\frac{1}{k}$ است.

حال به بیان و اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که نقشی اساسی در اثبات حالات تشابه نثلث‌ها دارد، و خود به تنهایی نیز از اهمیتی ویژه برخوردار است. نام این قضیه، **قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌هاست**. در زیر صورت قضیه و اثبات آن آمده است.

قضیه ۴.۲. قضیهٔ اساسی تشابه مثلثها : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در اینصورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات: فرض کنید مطابق شکل $DE \parallel BC$ باشد. بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و زوایای متبادل داریم: $\angle D = \angle B$ و همچنین $\angle E = \angle C$ و لذا زوایای دو مثلث ADE و ABC نظیر به نظیر برابرند. از طرفی بنا به قضیه‌ی تالس $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ و این یعنی اضلاع متناظر در این دو مثلث متناسب هستند. پس بنا به تعریف تشابه، این دو مثلث متشابه هستند و اثبات تمام است.

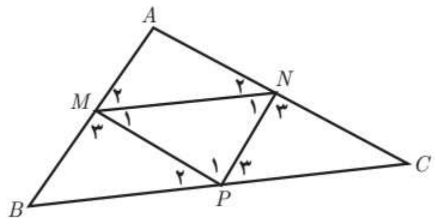
به کمک قضیه‌ی فوق حالات تشابه مثلث‌ها در ۳ مورد خلاصه می‌شوند که همگی براحتی قابل اثبات‌اند. با اینحال هدف مولفین محترم کتاب درسی، بیشتر معرفی و بیان قضایا بوده است تا اثبات آنها. ما نیز چنین می کنیم و فقط به بیان صورت قضایا بسنده می کنیم.

قضیه ۵.۲. قضایای تشابه:

۱. هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۲. هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه‌ی بین آنها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۳. هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

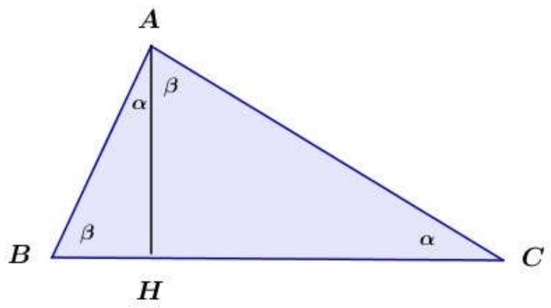


مثال ۱۷.۲. اوساط اضلاع مثلث دلخواه ABC را متوالیا به هم وصل می‌کنیم، تا مثلث MNP حاصل شود. ثابت کنید، دو مثلث ABC و MNP متشابه هستند.

حل: از اینکه $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ است، عکس قضیه‌ی تالس نتیجه می‌دهد که $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{1}{2}BC$ است. همین رابطه برای اضلاع دیگر نیز برقرار است. یعنی $PN = \frac{1}{2}AB$ و همچنین $MP = \frac{1}{2}AC$ است. یعنی سه ضلع این دو مثلث نظیر به نظیر متناسب هستند. البته از راه دو زاویه هم می‌توان به جواب رسید.

مثال بعدی یکی از مهمترین مثال‌های مبحث تشابه است و روابط جدیدی در مثلث قائم‌الزاویه بدست می‌دهد. بدون کوچکترین تردیدی این مثال و نتایج آن، بهترین گزینه برای طرح سوال در آزمون‌های داخلی و حتی سوالات کنکور بوده و هست. این مثال بصورت فعالیت در صفحه‌ی ۴۴ کتاب درسی آمده است.

مثال ۱۸.۲. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که در رأس A قائمه است، مفروض است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مثلث‌های کوچک پدیدآمده با مثلث اصلی متشابه‌اند و لذا خود نیز متشابه‌اند.



حل: مطابق شکل ارتفاع AH رسم شده است. برای راحتی کار زوایای حاده را نامگذاری کرده‌ایم. با توجه به اینکه زوایای $H_۱ = H_۲ = ۹۰^\circ$ است، دلیل اینکه چرا زاویه‌ی قسمت شده‌ی A برابر $\alpha\, ,\, \beta$ هستند، واضح است. پس خواهیم داشت: $AHB \sim ABC$ و $AHC \sim ABC$. پس می‌توان نتیجه گرفت که $AHB \sim AHC$.

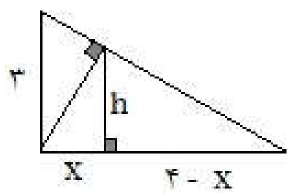
حال نسبت تشابه را می‌نویسیم. از تشابه $AHB \sim AHC$ داریم:

$$\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH} \Longrightarrow AH^۲ = BH \times HC \longleftarrow \text{ارتفاع واسطه‌ی هندسی است}$$

حال از تشابه $ABC \sim AHC$ و $ABC \sim AHB$ داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow AB^۲ = BH \times BC \; , \; AC^۲ = CH \times BC$$

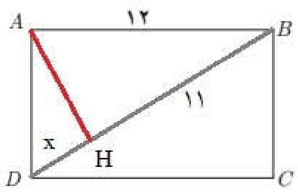
پرسش ۱۸.۲. در شکل مقابل ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه ترسیم شده است. اندازه‌ی x کدامست؟(سراسری ۸۹)



۱) ۱/۴۴ ۲) ۱/۵۶ ۳) ۱/۶۴ ۴) ۱/۹۶

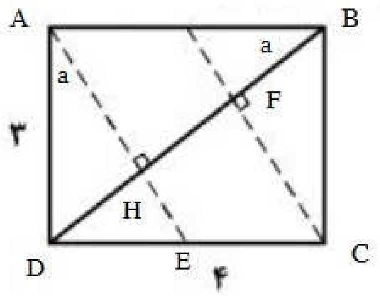
حل: از مثال قبل و قضیه‌ی تالس کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} h^۲ = x(۴ - x) \\ \dfrac{h}{۳} = \dfrac{۴ - x}{۴} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\sqrt{x(۴ - x)}}{۳} = \frac{۴ - x}{۴} \Rightarrow x = ۱/۴۴$$



مثال: شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.

حل: با توجه به شکل داریم: $AB^۲ = BH \times BD$ ویا معادلا $۱۴۴ = ۱۱(۱۱ + x)$ که از اینجا داریم $x = \frac{۲۳}{۱۱}$ و لذا طول قطر معین است. از طرفی داریم $AH^۲ = DH \times BH$ و یا معادلا $AH^۲ = \frac{۲۳}{۱۱} \times ۱۱ = ۲۳$ و از اینجا $AH = \sqrt{۲۳}$ است. بقیه‌ی موارد روشن است.



پرسش ۱۹.۲. در مستطیل به اضلاع ۳ و ۴ واحد از هر دو راس متقابل، عمودی بر قطر دیگر مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدامست؟ (سراسری ۹۶)

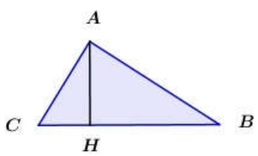
۱) ۷٫۵   ۲) ۶   ۳) ۵٫۷۵   ۴) ۵٫۲۵

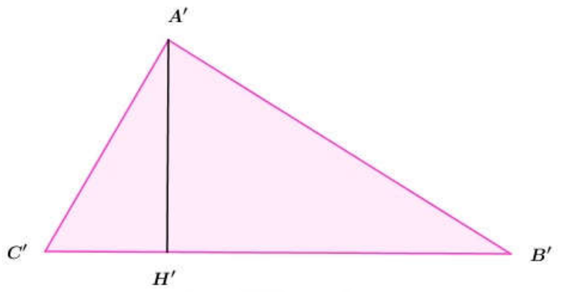
حل: یک راه حل ساده و مبتنی بر مثلثات به صورت زیر است. اگر ضلع EC معلوم باشد، با توجه به معلوم بودن ارتفاع این متوازی‌الاضلاع یعنی ضلع $AD = ۳$ بقیه‌ی کار ساده است. اما برای یافتن EC باید طول DE معین شود. برای این منظور داریم:

$$\tan a = \frac{۳}{۴} = \frac{DE}{۳} \Rightarrow DE = \frac{۹}{۴} \Rightarrow EC = ۴ - \frac{۹}{۴} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow S = \frac{۷}{۴} \times ۳ = \frac{۲۱}{۴} = ۵٫۲۵$$

اما روش دوم استفاده از خواص مثلث قائم‌الزاویه است. داریم $۵ \times DH = ۳^۲$ و از اینجا $DH = \frac{۹}{۵}$ پس طول FH برابر است با $۵ - \frac{۱۸}{۵} = \frac{۷}{۵}$ است.از طرفی $AH^۲ = DH \times HB$ که از اینجا $AH^۲ = \frac{۹}{۵} \times \frac{۱۶}{۵} = \frac{۱۴۴}{۲۵}$ و لذا $AH = \frac{۱۲}{۵}$. مابقی کار ساده است.

تذکر مهم: برای پایان دادن به این فصل به مطلب مهمی که در واقع تمرین ۶ صفحه‌ی ۴۶ کتاب درسی است، اشاره می کنیم. اگر دو مثلث متشابه باشند و نسبت تشابه آنها برابر k باشد، یعنی $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ دراینصورت نسبت میانه‌های، نیمسازها و ارتفاع‌های متناظر نیز برابر k است. برای مشاهده این مطلب در مورد ارتفاع‌ها به دو مثلث متشابه زیر که ارتفاع متناظرشان نیز رسم شده است دقت کنید. چون دو مثلث متشابه‌اند پس دو زاویه‌ی C و C' برابرند و لذا $AHC \sim A'H'C'$ است.

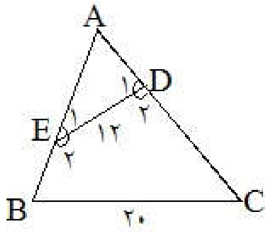




این بدان معنی است که $\frac{AH}{A'H'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ است. این مطلب نتایج بسیار جالبی در پی دارد. از جمله این‌که در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها همان نسبت تشابه است و نسبت مساحت‌ها مربع نسبت تشابه است.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AB + AC + BC}{A'C' + B'C' + A'B'} = \frac{P}{P'} = k$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{AH \times BC}{A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'} = k \times k = k^۲$$

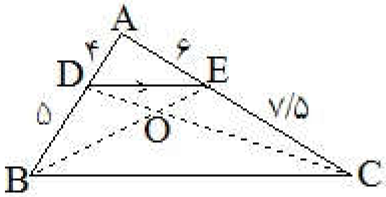


پرسش ۲۰.۲. درچهارضلعی $BCDE$ زاویه‌های روبرو مکمل‌اند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ باشد، آنگاه مساحت چارضلعی چندبرابر مساحت مثلث ABC است؟(تجربی ۸۷)

۱) ۰٫۵۶ ۲) ۰٫۶۴ ۳) ۰٫۷۲ ۴) ۰٫۸۰

حل: بنا به فرض $B + D_۲ = ۱۸۰ = D_۲ + D_۱$ پس باید $B = D_۱$ و زاویه‌ی A در هر دو مثلث مشترک است. پس داریم $AED \sim ABC$ و نسبت تشابه برابر $k = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$ است. پس می‌توان نوشت:

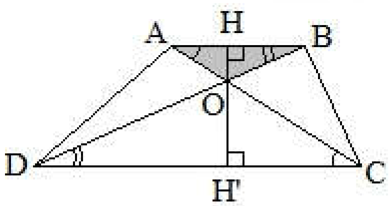
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{۲۵ - ۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}} = \frac{۱۶}{۲۵} = ۰٫۶۴$$



پرسش ۲۱.۲. در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدامست؟ (سراسری خارج تجربی ۸۷)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

حل: نسبت مساحت‌ها برابر یک است. اگر دقت کنید $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{۴}{۵} = \frac{۶}{۷٫۵} = ۰٫۸$ لذا با توجه به عکس قضیه‌ی تالس باید $DE \parallel BC$ باشد. پس چارضلعی $DECB$ ذوزنقه است و با رسم دو قط آن مثلث‌های چپ و راست همواره هم مساحت هستند. دلیل آن نیز واضح است. در واقع دو مثلث BDC, DEC دارای قاعده مشترک و ارتفاع برابرند. اگر مساحت مثلث OBC را از طرفین کم کنید، برابری مساحت دو مثلث ODB, OEC حاصل می‌شود.



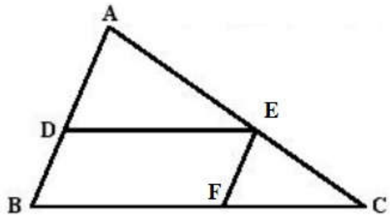
پرسش ۲۲.۲. قاعده‌ی بزرگ‌تر ذوزنقه، دوبرابر قاعده‌ی کوچک آن است. مساحت کل ذوزنقه، چندبرابر مثلث سایه‌زده است؟(ریاضی خارج ۸۷)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

حل: یکی از رایج‌ترین سوالات هندسه‌ی پایه در کنکور همین تیپ سوالات است. ابتدا توجه کنید که دو قاعده موازیند و قطرها در حکم خط مورب ولذا $A = C, B = D$ است. پس دو مثلث OAB, OCD متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{CD} = \frac{AB}{۲AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{OH}{OH + OH'} = \frac{OH}{HH'} = \frac{۱}{۳}$$

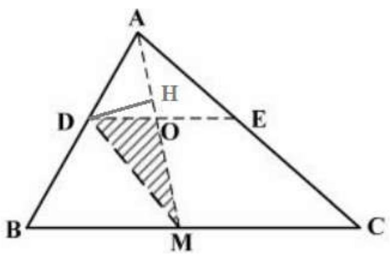
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OAB}} = \frac{(AB + ۲AB) \times ۳OH}{AB \times OH} = \frac{۹AB \times OH}{AB \times OH} = ۹$$



پرسش ۲۳.۲. در شکل روبرو $\frac{DA}{DB}=\frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ (سراسری ۹۵ ریاضی)

۱) ۳۶ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

حل: چنانچه درصد مساحت دو مثلث معین باشد، مابقی از آن متوازی‌الاضلاع است. از رابطه‌ی $\frac{DA}{DB}=\frac{۳}{۲}$ داریم $k=\frac{۳}{۵}=\frac{AD}{AB}$ و این یعنی درصد مساحت مثلث ADE نسبت به کل مثلث $\frac{۳۶}{۱۰۰}=\frac{۹}{۲۵}$ است. همچنین بنابه قضیه تالس $\frac{CE}{EA}=\frac{۲}{۳}$ است ولذا $k=\frac{۲}{۵}=\frac{CE}{AC}$ است و نسبت مساحت مثلث CEF به کل برابر $\frac{۱۶}{۱۰۰}=\frac{۴}{۲۵}$ است. پس مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $۴۸=(۱۶+۳۶)-۱۰۰$ درصد است.



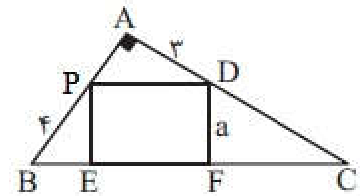
پرسش ۲۴.۲. در شکل زیر نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ است و $DE \parallel BC$ است. مساحت مثلث ODM چنددرصد مساحت مثلث ABC است؟(سراسری ۹۵ خارج)

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

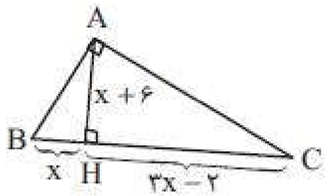
حل: چون $\frac{AD}{AB}=\frac{۲}{۵}$ است پس $S_{AOD}=\frac{۴}{۲۵}S_{ABM}=\frac{۴}{۵۰}S_{ABC}$ است. چرا که هر میانه مثلث را به دو مثلث معادل(هم مساحت) تقسیم می‌کند. از طرفی نسبت مساحت دو مثلث AOD و مثلث ODM برابر است با نسبت قاعده‌های AO به OM که این نیز برابر $\frac{۲}{۳}$ است.(ارتفاع رسم شده از D ارتفاع هر دو مثلث است)پس:

$$S_{ODM}=\frac{۳}{۲}S_{AOD}=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۲۵}S_{ABC}=\frac{۱۲}{۱۰۰}S_{ABC}$$

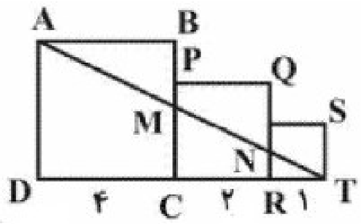
تمرین ۱۴.۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC یک مربع مانند شکل مقابل محاط شده است. محیط این مربع را بدست آورید. راهنمایی: جواب برابر $8\sqrt{3}$ است. ثابت کنید دو مثلث APD و PBE متشابه هستند.



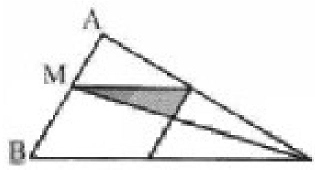
تمرین ۱۵.۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل طول ضلع AC چند برابر طول ضلع AB است. راهنمایی: جواب $\frac{5}{3}$ است. از خواصی که در مثلث قائم‌الزاویه اثبات کرده‌ایم استفاده کنید.



تمرین ۱۶.۲. در شکل مقابل سه مربع با اضلاع ۴ و ۲ و ۱ واحد می‌باشند. مساحت ذوزنقه‌ی $MCRN$ را محاسبه کنید. راهنمایی: جواب $\frac{16}{7}$ است. از تشابه‌های $AMB \sim MCT$ و $TRN \sim TAD$ استفاده کنید.

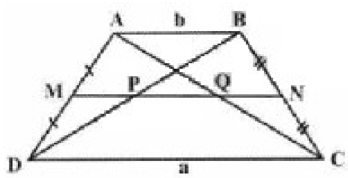


تمرین ۱۷.۲. در شکل روبرو $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ است. مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع درون شکل است؟ (راهنمایی: جواب ۲۰ درصد است. نسبت ارتفاع‌های دو شکل را با توجه به فرض و قضیه‌ی تالس بیابید.)

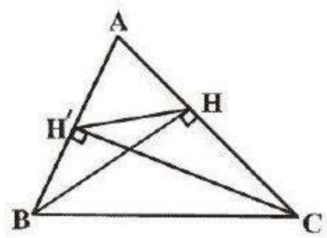


تمرین ۱۸.۲. مثلثی به اضلاع ۳, ۴, ۶ با مثلثی با اضلاع ۲, x, y متشابه است. حداقل مقدار برای عبارت $x + y$ را بیابید. (جواب $x = 1, y = \frac{4}{3}$ است)

تمرین ۱۹.۲. در ذوزنقه‌ی شکل مقابل ثابت کنید: $\frac{MN}{PQ} = \frac{a+b}{a-b}$ است. راهنمایی: قضیه‌ی تالس را در مثلث‌های ABD, BDC بکار ببرید.



تمرین ۲۰.۲. در مثلث ABC به اضلاع $AB = 6$ و $AC = AB$ دو ارتفاع BH, CH' رسم شده‌اند. ثابت کنید محیط مثلث AHH' برابر ۷/۵ واحد است. راهنمایی: توجه کنید که ارتفاع و میانه‌ی مثلث متساوی‌الساقین برابرند و سپس از تشابه‌های $AHB \sim AH'C$ و $ABC \sim AHH'$ استفاده کنید.



۴.۲ خودآزمایی

تست ۱.۲. مثلثی با اضلاع $۵, ۵, ۸$ با کدام مثلث متشابه است؟

۱. مثلثی با ارتفاع‌های $۳, ۲, ۲$.

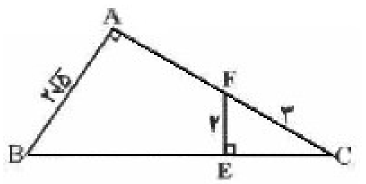
۲. مثلثی با ارتفاع‌های $۵, ۸, ۸$.

۳. مثلثی با ارتفاع‌های $۴, ۵, ۵$.

۴. مثلثی با ارتفاع‌های $۸, ۵, ۵$.

گزینه ۲ درست است. ارتفاع‌های مثلث صورت مسئله را بیابید.

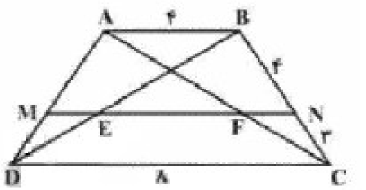
تست ۲.۲. در شکل مقابل اندازه‌ی AF کدامست؟



۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) ۵　　۴) ۲

گزینه ۴ درست است. از تشابه $ABC \sim EFC$ کمک بگیرید.

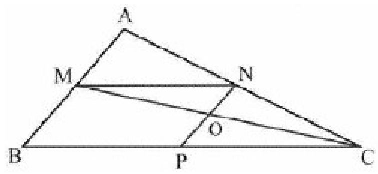
تست ۳.۲. در ذوزنقه‌ی روبرو $AB \parallel NM$ است. اندازه‌ی EF کدامست؟



۱) ۳　　۲) $\frac{۲۰}{۷}$　　۳) ۲　　۴) $\frac{۲۴}{۷}$

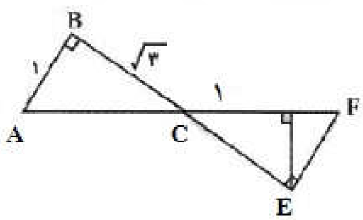
گزینه‌ی ۲ درست است.قضیه‌ی تالس را در BCD بکار ببرید.

تست ۴.۲. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۷}$ است. و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟ (جواب گزینه ۳ می‌باشد)



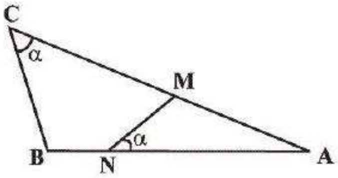
۱) ۳　　۲) $\frac{۲۰}{۷}$　　۳) ۲　　۴) $\frac{۲۴}{۷}$

تست ۵.۲. در شکل مقابل $EF \parallel AB$ و زوایای B, D, E قائمه‌اند. مساحت مثلث CEF کدامست؟ گزینه‌ی ۲ درست است. توجه کنید $ABC \sim CDE$



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$　　۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$　　۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$　　۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

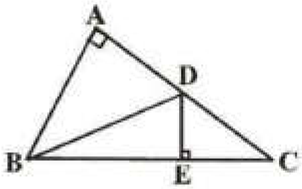
تست ۶.۲. در شکل مقابل $AN = ۶$ و $NB = ۲$ و $AC = ۱۰$ است.
طول پاره‌خط AM کدامست؟



۱) ۶٫۲   ۲) ۴٫۸   ۳) ۶٫۴   ۴) ۵٫۲

گزینه ۲ جواب درست است.

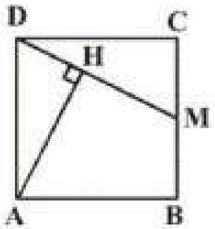
تست ۷.۲. در شکل زیر، اگر $CD = AB = \sqrt{۶}$ باشد، مساحت مثلث BCD کدامست؟



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) ۶   ۴) ۳

گزینه ۴ درست است. توجه کنید $ABC \sim EDC$ است.

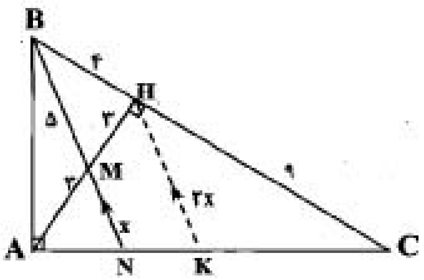
تست ۸.۲. مربع $ABCD$ به ضلع $\sqrt{۵}$ مفروض است. اگر نقطه‌ی M وسط ضلع BC باشد، فاصله‌ی راس A از پاره خط DM کدامست؟



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

گزینه ۴ درست است. از تشابه $HAD \sim CDM$ استفاده کنید.

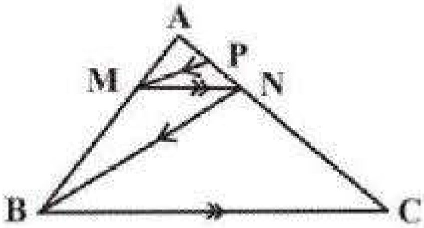
تست ۹.۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ارتفاع AH بر وتر رسم شده است و M وسط این ارتفاع است. اگر $BH = ۴, CH = ۹$ باشد و امتداد BM ضلع AC را در N قطع کند، طول پاره‌خط MN برابر است با :



۱) $\frac{۴۵}{۱۷}$ ۲) $\frac{۳۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳۶}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

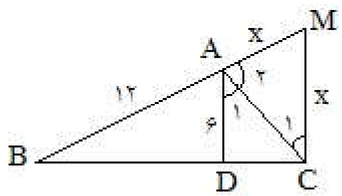
گزینه ۱ جواب درست است. راهنمایی در شکل وجود دارد.

تست ۱۰.۲. در شکل مقابل $MN \parallel BC\ ,\ MP \parallel BN$ است.
اگر بدانیم $BC = ۳MN$ و همچنین $NC = ۶$ دراینصورت طول AP کدامست؟



۱) $\frac{۴۵}{۱۷}$ ۲) $\frac{۳۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳۶}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

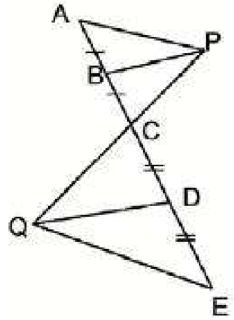
گزینه ۴ درست است.



تست ۱۱.۲. در شکل مقابل می‌دانیم $\angle A_۱ = \angle A_۲$ و همچنین $AD \parallel CM$ است. مقدار x کدامست؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۹　　۴) ۱۴

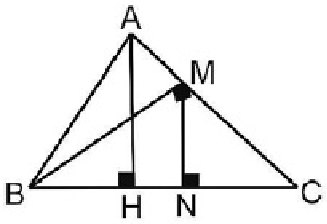
گزینه ۲ درست است. قضیه‌ی تالس را بکار ببرید.



تست ۱۲.۲. در شکل مقابل $\angle A = \angle E$ و DQ, BP میانه هستند. اگر بدانیم $BP = \frac{۲}{۳}DQ$ و همچنین $AE = ۱۲$ باشد، طول پاره‌خط AB کدامست؟

۱) ۲٫۴　　۲) ۲٫۲　　۳) ۲٫۶　　۴) ۴٫۸

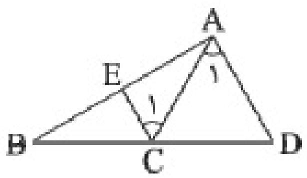
گزینه ۱ درست است. از تشابه $APC \sim EQC$ کمک بگیرید.



تست ۱۳.۲. در شکل مقابل $AB = AC$ و $AH = ۳, MN = ۲$ است. همچنین $BM \perp AC$ است. دراینصورت طول NC کدامست؟

۱) ۲　　۲) $\sqrt{۲}$　　۳) $\sqrt{۳}$　　۴) ۳

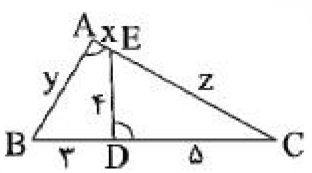
گزینه ۲ درست است. از روابط طولی مثلث قائم‌الزاویه و قضیه‌ی تالس استفاده کنید.



تست ۱۴.۲. در شکل مقابل $\angle A_۱ = \angle C_۱$ و $AC = AE$ و $AB = ۱۰$ و $AC = ۶$ و همچنین $CD = ۵$ است. طول BD کدامست؟

۱) $\frac{۱۳}{۲}$　　۲) $\frac{۱۷}{۳}$　　۳) $\frac{۲۵}{۳}$　　۴) $\frac{۱۷}{۲}$

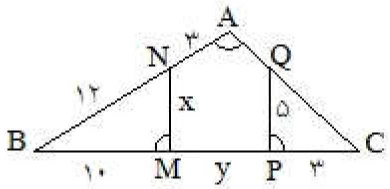
گزینه ۳ جواب درست است.



تست ۱۵.۲. در شکل روبرو $\angle A = \angle D$ است و $x + y = ۶$ است. مقدار z کدامست؟

۱) ۴٫۵　　۲) ۶　　۳) ۷٫۵　　۴) ۸

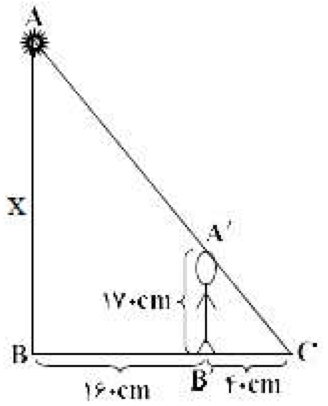
گزینه ۲ درست است. از تشابه $ABC \sim CDE$ استفاده کنید.



تست ۱۶.۲. در شکل مقابل $\angle A = \angle BMN = \angle CPQ$ است. دراین صورت حاصل عبارت $x + y$ کدامست؟

۱) ۸　　۲) ۱۱　　۳) ۱۲　　۴) ۱۴

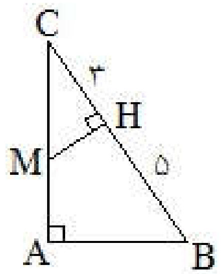
۲ درست است. توجه کنید $ABC \sim BMN \sim CPQ$.



تست ۱۷.۲. شخصی با طول قد ۱۷۰ سانتی‌متر در فاصله‌ی ۱۶۰ سانتی‌متری از یک تیر چراغ برق ایستاده است. اگر طول سایه‌ی این شخص که توسط نور چراغ در پشت آن ایجاد می‌شود برابر ۴۰ سانتیمتر باشد، ارتفاع تیر چراغ چند سانتی متر است؟

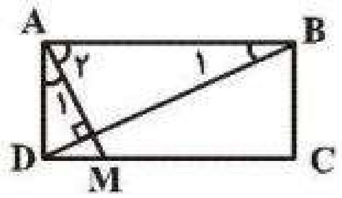
۱) ۳۴۰	۲) ۵۱۰	۳) ۶۸۰	۴) ۸۵۰

قضیه‌ی تالس را بکار ببرید و گزینه ۴ را بدست آورید.



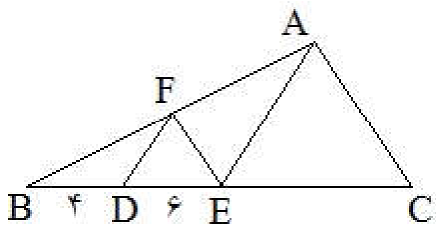
تست ۱۸.۲. در شکل مقابل $AM = 2MC$ است. اندازه‌ی AC چقدراست؟

۱) $2\sqrt{2}$	۲) ۳	۳) $6\sqrt{2}$	۴) ۴



تست ۱۹.۲. نسبت اضلاع مستطیلی ۱ به ۲ است. از یک رأس این مستطیل خطی عمود بر قطری که از آن رأس نمی‌گذرد رسم می‌کنیم تا طول مستطیل را در نقطه‌ی M قطع کند. نقطه‌ی M طول مستطیل را به کدام نسبت قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{5}$	۲) $\frac{1}{4}$	۳) $\frac{1}{3}$	۴) $\frac{2}{5}$



تست ۲۰.۲. در شکل مقابل $BD = 4, DE = 6, FE \parallel AC, AE \parallel DF$ است. طول EC چقدر است؟

۱) ۱۲	۲) ۱۵	۳) ۱۶	۴) ۱۸