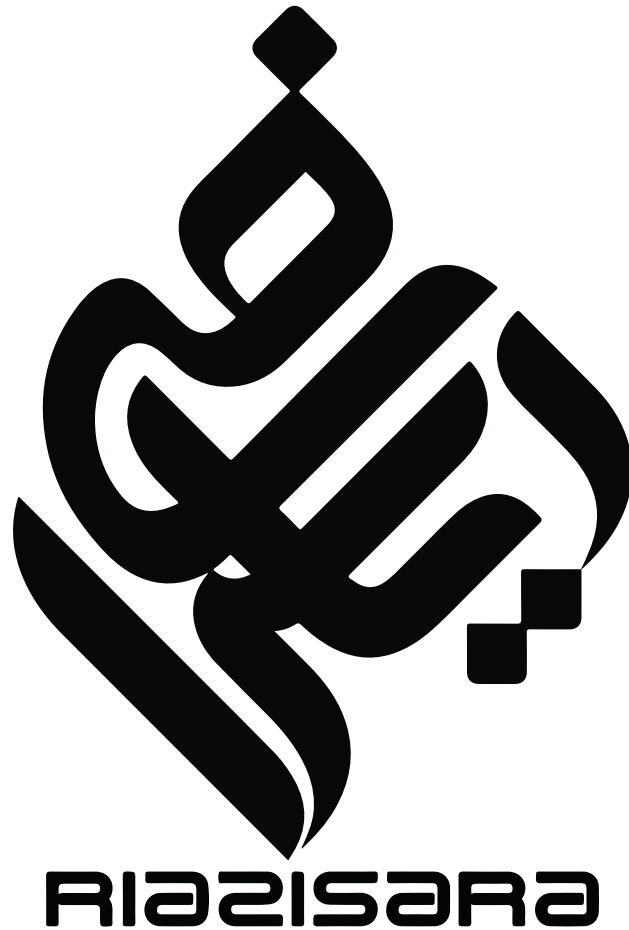




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:

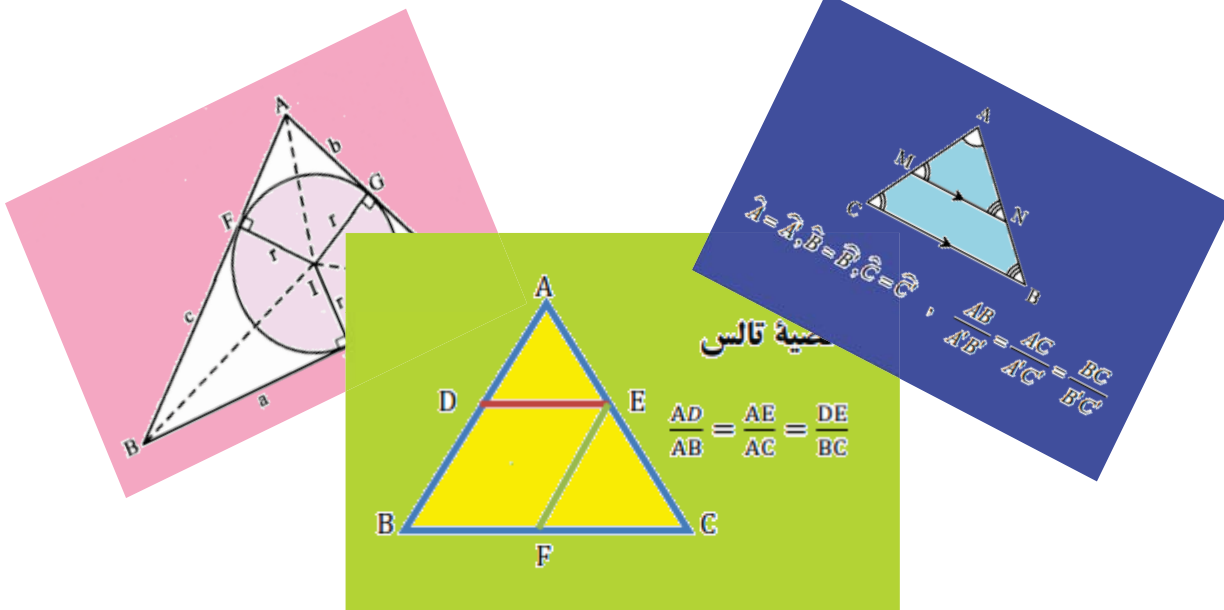


<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



درس اول

ترسیم‌های هندسی

درس دوم

استدلال و قضیه تالس

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

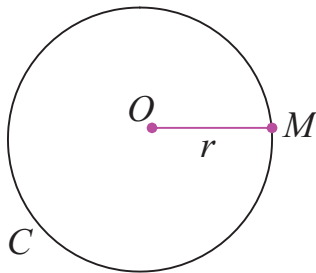
- پوشش کامل مطالب کتاب درسی و نکات و جزئیاتی فراتر از آن در درس‌نامه‌ها
- تقسیم مطالب، تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس بخش‌های کتاب درسی
- ۶۱ مثال و ۸۵ پرسش چهارگزینه‌ای

درس اول

ترسیم‌های هندسی

آشنایی با مفاهیم هندسه برای یادگیری و درک عمیق مفاهیم ریاضیات مؤثر است. در این فصل، برخی از مفاهیم مقدماتی هندسه را بررسی می‌کنیم.

دایره



دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به یک فاصله باشند. نقطه ثابت را مرکز و فاصله ثابت را شعاع می‌نامند.

دایره به مرکز O و شعاع r را بصورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱: دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی متر را رسم کنید. سپس

الف) نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله آن تا مرکز دایره ۳ سانتی متر باشد.

ب) نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله آن تا مرکز دایره $1/5$ سانتی متر باشد.

پ) نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله آن تا مرکز دایره ۲ سانتی متر باشد.

مثال ۲: خطی مانند d را در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند را مشخص کنید.

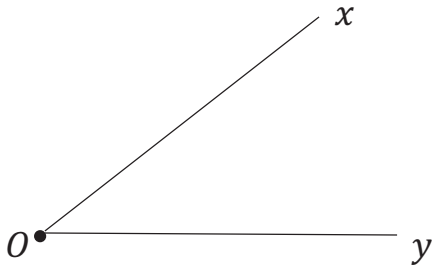
این نقاط چه شکلی یا چه شکلهایی را تشکیل می‌دهد؟

d _____

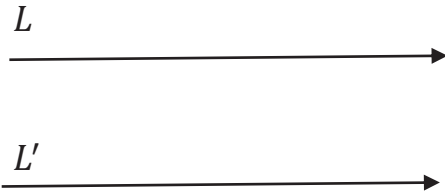
مثال ۳: نقاطی را در صفحه پیدا کنید که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشند.



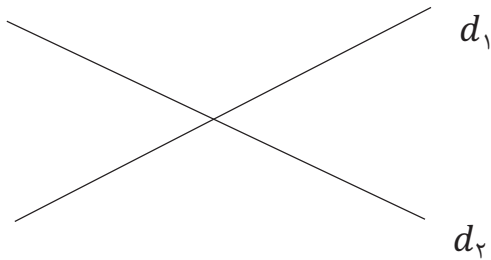
شکل ۴: تمام نقاطی از صفحه را بیابید که از دو ضلع زاویه xOy به یک فاصله باشد.



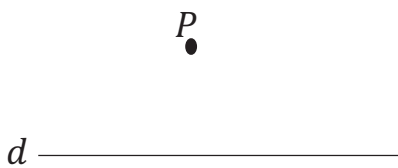
شکل ۵: خطوط L و L' موازی هستند. تمام نقاطی از صفحه را مشخص کنید که از این دو خط به یک فاصله باشد.



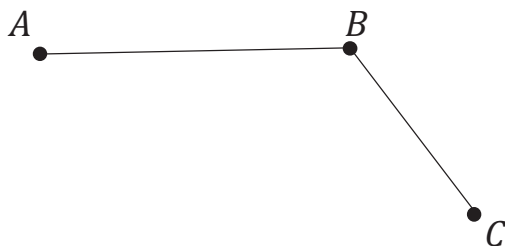
شکل ۶: تمام نقاطی از صفحه را بیابید که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله باشند.



شکل ۷: نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از خط d قرار دارد. تمام نقاطی از خط d را مشخص کنید که به فاصله‌ی ۳ سانتی متری از نقطه P هستند.



شکل ۸: تمام نقاطی از صفحه را بیابید که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشند.



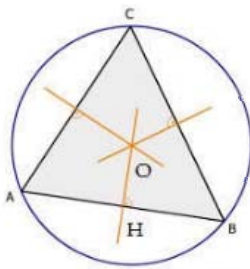
شماره ۹: تمام نقاطی از صفحه را بیابید که از نقطه A به فاصله ۲ و از نقطه B به فاصله ۳ باشد.

$A \bullet \text{-----} \bullet B$

دو نقطه بسیار مهم در مثلث

برای هر مثلث دو نقطه داریم که ویژگی جالبی دارند:

۱- نقطه‌ای که از هر سه رأس به یک فاصله است.



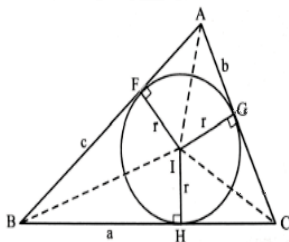
برای پیدا کردن این نقطه کافی است

.....

.....

.....

۲- نقطه‌ای که از هر سه ضلع به یک فاصله است.



برای پیدا کردن این نقطه کافی است

.....

.....

.....

رسم اشکال هندسی

حالا که یاد گرفتیم یک سری نقطه با ویژگی های خاصی را پیدا کنیم، آماده‌ایم تا با مسائلی روبرو شویم. در مسائل

رسم از ما می‌خواهند تا یک شکل با ویژگی مشخص رسم کنیم.

شماره ۱۰: عمود منصف یک پاره خط را رسم کنید. (با توضیح مراحل رسم آن)

شماره ۱۱: از نقطه‌ای روی یک خط، خطی عمود بر آن رسم کنید. (با توضیح مراحل رسم آن)

شماره ۱۲: از نقطه‌ای غیر واقع بر یک خط، خطی عمود بر آن رسم کنید. (با توضیح مراحل رسم آن)

شماره ۱۳: از نقطه‌ای غیر واقع بر یک خط، خطی موازی با آن رسم کنید. (با توضیح مراحل رسم آن)

شماره ۱۴: نیمساز یک زاویه را رسم کنید. (با توضیح مراحل رسم آن)

شماره ۱۵: یک مثلث را با داشتن طول سه ضلع آن رسم کنید. (با توضیح مراحل رسم آن)

شماره ۱۶: نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d ، مانند شکل مقابل مفروض است:

A •

الف) مثلث متساوی الساقینی را رسم کنید که یک رأس آن نقطه‌ی A و یک ضلع آن

بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ باشد.

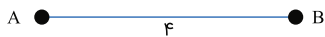
پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن ۸ باشد.

مثال ۱۷: از مثلث ABC ، $AH = 3$ (ارتفاع مثلث)، $AB = 4$ و $AC = 6$ داده شده است. مراحل رسم مثلث را توضیح دهید.

مثال ۱۸: از مثلث ABC ، $AB = 2$ ، $AC = 3$ و $AM = 2$ (میانۀ مثلث) داده شده‌اند، مثلث را رسم کنید.

تستهای آموزشی درس ۱

۱ ضلع $AB = 4$ از مثلث ABC در صفحه رسم شده است. اگر طول میانه و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب ۳ و ۲ واحد باشد، چند نقطه متمایز برای رأس C می‌توان یافت؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۲ دو نقطه A و B به فاصله ۶ از یکدیگر قرار دارند. از A و B کمان‌هایی به شعاع x رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط P و Q قطع کنند. خطی که از P و Q می‌گذرد، عمودمنصف AB است. مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

۳ فاصله نقطه A از خط d ، برابر با ۱ سانتی‌متر است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که فاصله‌اش از نقطه A ، برابر با ۲ سانتی‌متر باشد؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) صفر

(۳) ۳

درس دوم

استدلال و قضیه تالی

استدلال

استدلال استقرایی: نتیجه گیری کلی بر پایه تعداد محدودی مشاهده. (از جزء به کل رسیدن)

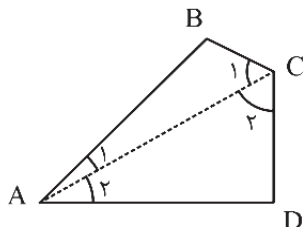
مثال: مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی 360° درجه است.

استدلال استقرایی: در چهار ضلعی های مربع، مستطیل، متوازی الاضلاع و لوزی زاویه های مجاور مکمل هم هستند پس به راحتی می توان نشان داد مجموع زاویه های داخلی آنها 360° درجه است. پس مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب 360° درجه است.

استدلال استنتاجی: نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم.

مثال: مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی 360° درجه است.

استدلال استنتاجی: می دانیم مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° درجه است با رسم یک چهار ضلعی محدب دلخواه و یک قطر از آن داریم:



$$\left. \begin{array}{l} A_1 + C_1 + B = 180^\circ \\ A_2 + C_2 + D = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{+} (A_1 + A_2) + (C_1 + C_2) + B + D = 360^\circ$$

$$\Rightarrow A + C + B + D = 360^\circ$$

قضیه: نتایج کاملاً درستی که از استدلال استنتاجی بدست می آیند را قضیه می نامند.

قضیه شرطی: هر قضیه را می توان به صورت شرطی نوشت: اگر «فرض» آنگاه «حکم»

مثال: مجموع زوایای داخلی مثلث 180° درجه است.

به صورت شرطی: اگر مثلث داشته باشیم آنگاه مجموع زاویه داخلی آن 180° درجه است.

عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس قضیه بدست می آید.

مثال: مجموع زوایای داخلی مثلث 180° درجه است.

عکس قضیه: اگر مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی 180° درجه باشد آنگاه آن چند ضلعی مثلث است.

قضیه دو شرطی: اگر عکس یک قضیه نیز درست باشد، آن قضیه را دو شرطی می نامند و معمولاً به صورت زیر بیان می کنند:

«فرض» اگر و تنها اگر «حکم»

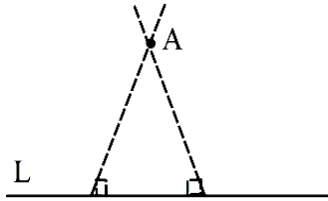
برهان خلف: نوعی استدلال در هندسه و ریاضیات که به جای شروع از فرض و رسیدن به حکم، ابتدا فرض می کنیم حکم درست نباشد و به یک تناقض با فرض و یا به یک امر غیر ممکن می ریم. بنابر این می پذیریم که حکم درست بوده است.

مثال: از هر نقطه خارج یک خط، نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

فرض می کنیم حکم غلط باشد یعنی بتوان دو عمود از A بر خط L رسم کرد

در این صورت مثلثی پدید می آید که مجموع زاویه های داخلی آن بیش از ۱۸۰

درجه است و چنین چیزی ممکن نیست. پس حکم نمی تواند غلط باشد.



مثال نقض: مثالی که درستی یک حکم کلی را رد می کند.

مثال: برای حکم «تمام اعداد اول فرد هستند» می توان ۲ را یک مثال نقض دانست زیرا اول است ولی فرد نیست.

مثال ۱: برای عبارت های زیر مثال نقض بیاورید.

(الف) حاصل ضرب دو عدد گنگ عددی گنگ است.

(ب) به ازای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 + n + 41$ عدد اول است.

(ج) ارتفاع هر مثلث درون آن است.

(د) هر چهار ضلعی که همه اضلاع آن برابر باشند مربع است.

مثال ۲: قضیه های زیر را به صورت شرطی نوشته سپس عکس آنها را بیان کنید.

(الف) مساحت دو مثلث همنهشت با هم برابر هستند.

شرطی:

عکس قضیه:

(ب) دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.

شرطی:

عکس قضیه:

(ج) در مثلث متساوی الاضلاع زاویه مقابل به ساقها با هم برابرند.

شرطی:

عکس قضیه:

شماره ۳:

عکس قضیه های زیر را نوشته و قضیه های زیر را به صورت دو شرطی بیان کنید .

الف) در مثلث متساوی الاضلاع زاویه مقابل به ساقها با هم برابرند .

ب) در هر متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف می کنند .

شماره ۴:

با برهان خلف ثابت کنید ، خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند ، دیگری را نیز قطع خواهد کرد .

شماره ۵:

با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

نسبت و تناسب

نسبت بین دو عدد a و $b \neq 0$ عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$

تناسب: برابری دو نسبت را تناسب گویند؛ مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ یک تناسب است.

ویژگی های تناسب:

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$	b و $d \neq 0$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$	a و b و c و $d \neq 0$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$	a و b و c و $d \neq 0$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$	$\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$	b و $d \neq 0$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	

مثال: در هر مورد مقدار مجهول را بیابید

الف) $\frac{x}{3} = \frac{9}{10}$

ب) $\frac{y}{y+2} = \frac{3}{4}$

ج) $\frac{z+1}{z} = \frac{4}{z}$

د) $\frac{2a+1}{18} = \frac{25}{b} = \frac{5}{2}$

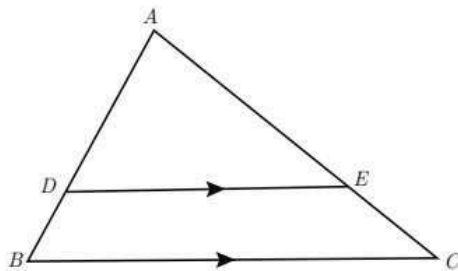
قضیه تالس:

اگر خطی با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر آن مثلث را قطع کند، نسبت پاره‌هایی که روی

این دو ضلع پدید می‌آیند، با هم برابر است؛ یعنی اگر در مثلث ABC، خطی موازی ضلع BC ضلع AB را در

نقطه D و ضلع AC را در نقطه E قطع کند، آن‌گاه داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



تعمیم قضیه تالس:

نتیجه ۱. رابطه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ را می‌توانیم ترکیب نسبت در مخرج کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

همچنین رابطه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ را می‌توانیم ترکیب نسبت در صورت کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

بنابراین می‌توان گفت: اگر خط DE موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

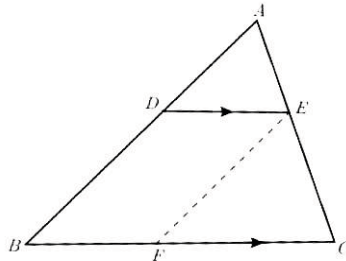
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

از هر یک از رابطه های بالا در صورت لزوم، می توانیم استفاده کنیم.

نتیجه ۲: اگر در مثلث ABC خطی موازی ضلع BC دو ضلع AB و AC را به ترتیب در نقطه های D و E قطع

کند، داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$

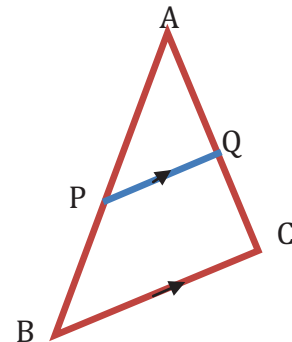
ب) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AC}$

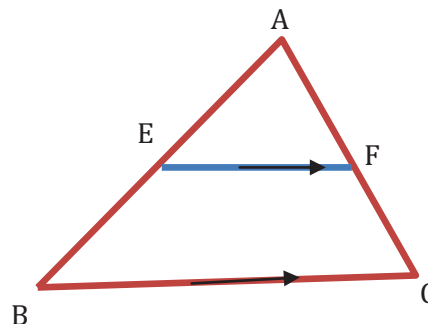
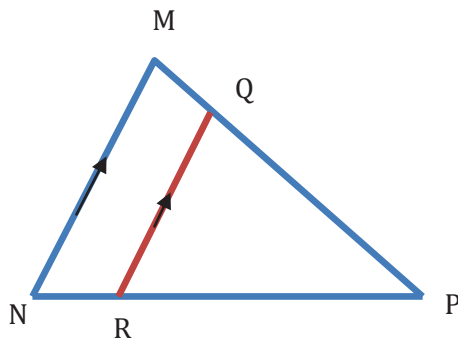
ت) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$



با توجه به شکل ها، در هر کدام از موارد زیر جای خالی را پر کنید.



در مثلث ABC پاره خط EF، با ضلع BC موازی است.

ب) $\square = \frac{FC}{AC}$

ب. $\frac{AE}{AB} = \square$

الف. $\frac{AE}{EB} = \frac{\square}{FC}$

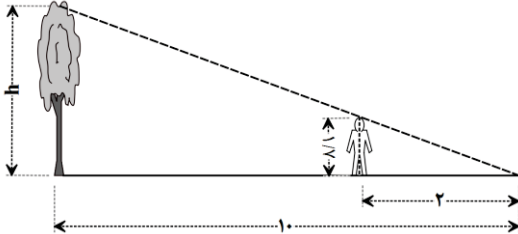
در مثلث MNP پاره خط QR با ضلع MN موازی است.

پ. $\frac{PQ}{PM} = \square = \square$

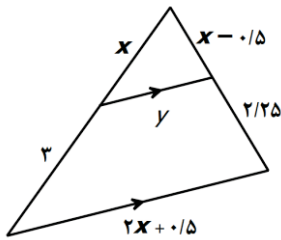
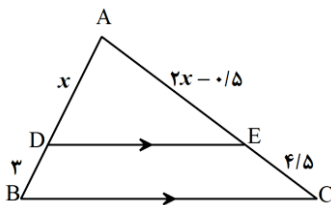
ب. $\square = \frac{PR}{PN}$

الف. $\frac{PQ}{QM} = \square$

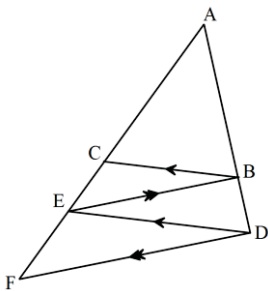
مسئله ۹: در یک زمان مشخص از ظهر سایه درختی ۱۰ متر و سایه شخصی ۲ متر است. اگر قد شخص ۱۷۰ سانتی متر باشد، ارتفاع درخت چقدر است؟ (شخص می‌تواند به اندازه‌ای به درخت نزدیک شود که انتهای سایه‌اش با انتهای سایه درخت منطبق شود).



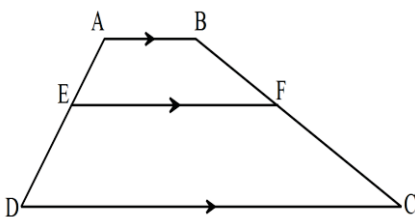
مسئله ۱۰: مقدار x, y را در شکل‌های زیر بیابید.



مسئله ۱۱: در شکل زیر ثابت کنید $AE^2 = AC \cdot AF$



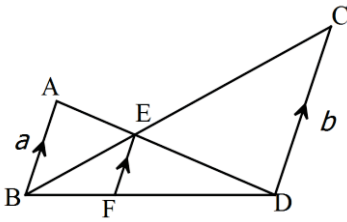
مسئله ۱۲: ثابت کنید اگر خطی موازی قاعده‌های دوزنقه دو ضلع دیگر را قطع کند روی آنها پاره‌های متناسب ایجاد می‌کند (قضیه تالس در دوزنقه)



شماره ۱۳:

اگر سه خط مشخص شده موازی باشند. فرمولی بیابید که طول پاره خط EF را بر حسب طول دو پاره خط موازی آن بدهد.

(راهنمایی: دوبر رابطه تالس و مجموع این دو تناسب)



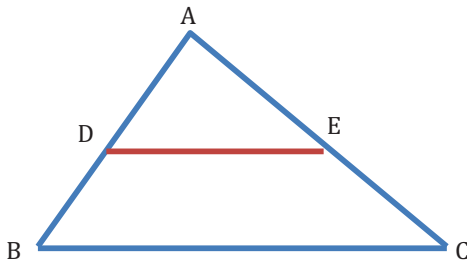
عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلث را طوری قطع کند که روی آنها پاره های متناسب ایجاد کند، این خط با ضلع سوم مثلث موازی است.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

شماره ۱۴:

در شکل روبه رو داریم:

$AC = 44$ و $AE = 33$, $AB = 32$, $AD = 24$ است، آیا DE موازی BC است.



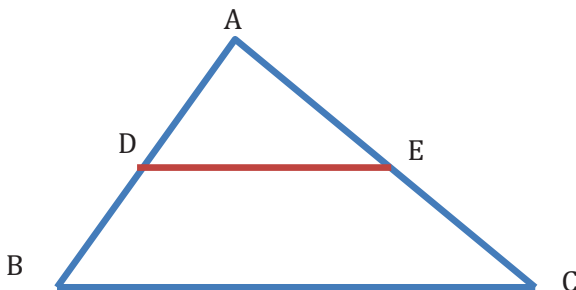
شماره ۱۵:

با توجه به شکل روبه رو در کدام یک از حالت های زیر FE موازی BC است؟

الف. $AE = 6$, $AC = 14$, $AF = 12$, $AB = 28$

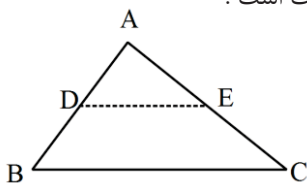
ب. $AE = 18$, $AC = 24$, $FB = 9$, $AB = 36$

پ. $CE = 8$, $AE = 9$, $FB = 5$, $AF = 6$



شماره ۱۶:

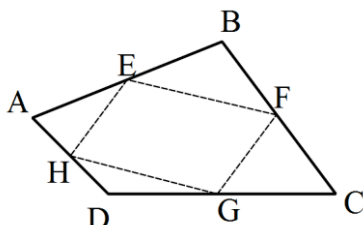
ثابت کنید اگر وسط دو ضلع از مثلثی را به هم وصل کنیم پاره خط حاصل موازی ضلع سوم مثلث است.



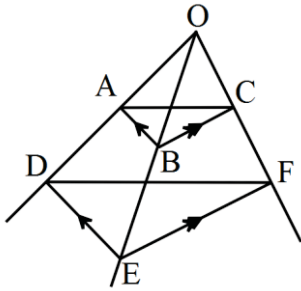
شماره ۱۷:

ثابت کنید در هر چهار ضلعی دلخواه، دو پاره خطی که وسط اضلاع مقابل را به هم وصل می کنند، همدیگر را نصف می کنند

(راهنمایی: نشان چهار ضلعی EFGH متوازی الاضلاع است)



شماره ۱۸:

در شکل مقابل ثابت کنید $AC \parallel DF$.

تستهای آموزشی درس ۲

۱ اگر $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{\lambda+b}$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{4}{5}$

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

۲ استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم، نامیده می‌شود.

(۲) قضیه

(۱) استدلال استنتاجی

(۴) استدلال استقرایی

(۳) برهان خلف

۳ کدام گزینه نادرست است؟

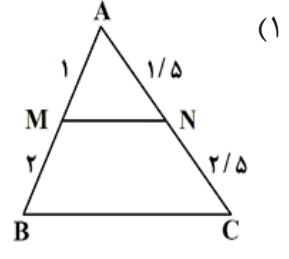
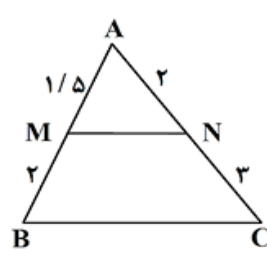
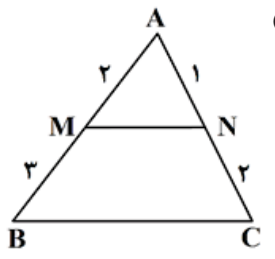
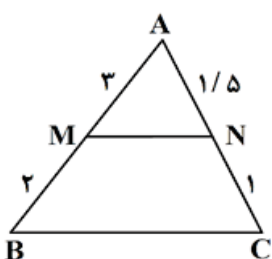
(۱) اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود "عکس قضیه" است.

(۲) اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، به آن "قضیه دوشروطی" می‌گوییم.

(۳) در برهان خلف، فرض را نادرست در نظر می‌گیریم و به نادرست بودن حکم می‌رسیم.

(۴) عکس یک قضیه، ممکن است درست یا نادرست باشد.

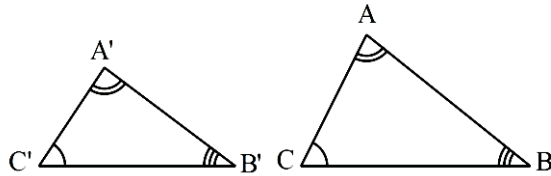
۴ در کدام گزینه MN با BC موازی است؟



درس سوم

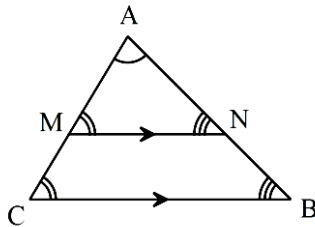
تشابه مثلث ها

دو مثلث متشابه : دو مثلث متشابه هستند اگر و تنها اگر زاویه های آنها برابر و اضلاع آنها متناسب باشند .



$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'} \quad , \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

قضیه اساسی تشابه : اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند ، مثلث بوجود آمده با مثلث اصلی متشابه است .

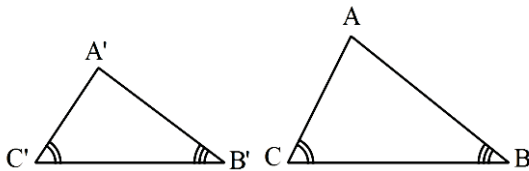


اثبات : زاویه A مشترک و زاویه های دیگر نیز طبق قضیه خطوط موازی برابرند .

از طرفی طبق رابطه تعمیم قضیه تالس نسبت اضلاع نیز برابرند .

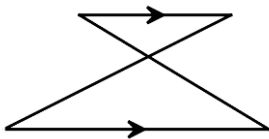
حالت های تشابه دو مثلث :

قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند ، دو مثلث متشابه هستند .

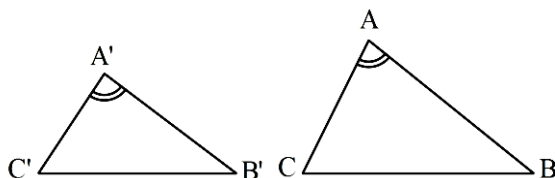


$$\hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

نتیجه : در شکلی به صورت مقابل همیشه دو مثلث متشابه هستند .

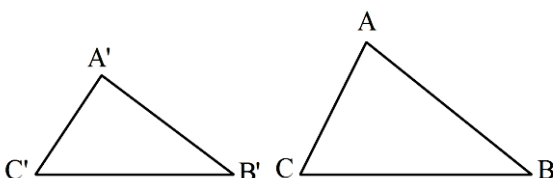


قضیه ۲ : هرگاه دوضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آنها برابر باشند ، دو مثلث همنهشتند .



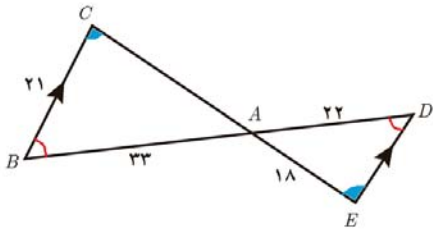
$$\hat{A} = \hat{A'}, \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

قضیه ۳ : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد ، دو مثلث متشابه هستند .

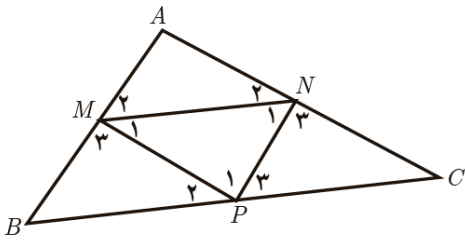


$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

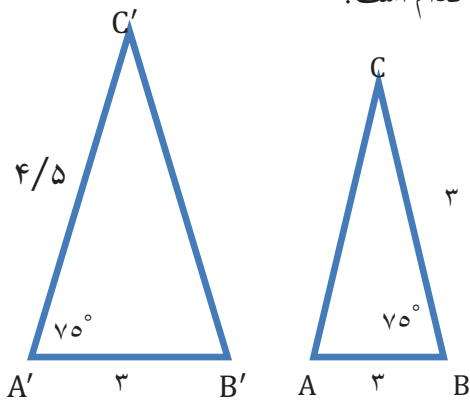
مثلاً: در شکل مقابل $BC \parallel DE$. اندازه پاره های CA و DE را به دست آورید.



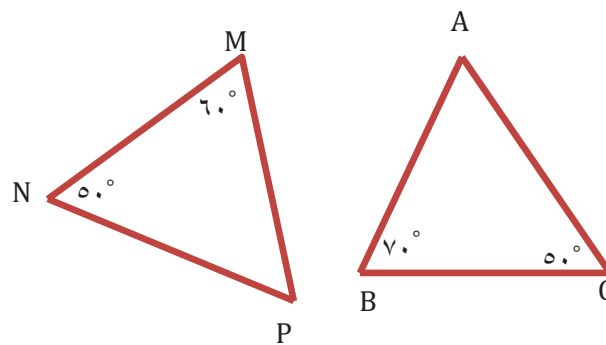
مثلاً: اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث های ABC و MNP متشابه اند.



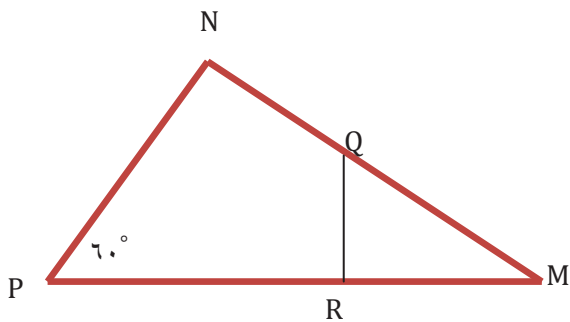
مثلاً: در کدام یک از موارد زیر دو مثلث متشابه اند؟ حالت تشابه دو مثلث کدام است؟



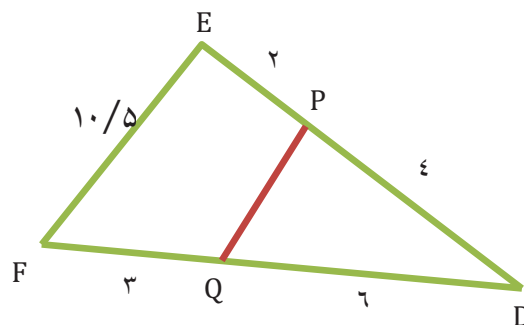
(ب)



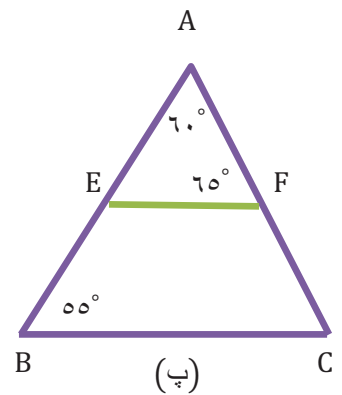
(الف)



(ث)



(ت)

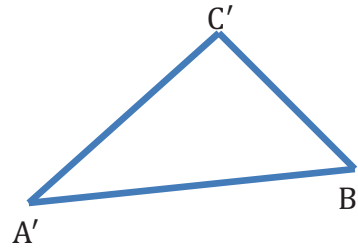
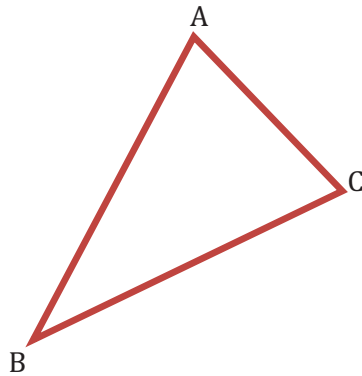


(پ)

شماره ۴:

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند و $\hat{A} = \hat{B}'$ و $\hat{B} = \hat{A}'$ است. در هر یک از عبارت های زیر، جای

خالی را با مقدار مناسب پر کنید.



پ. $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{AC} = \frac{A'C'}{\square}$

ب. $\frac{\square}{A'B'} = \frac{BC}{A'C'}$

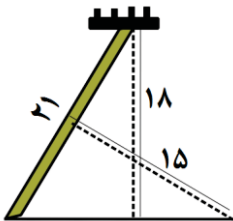
الف. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{\square}$

ث. $\hat{C} = \square$

ت. $\frac{B'C'}{AC} = \square$

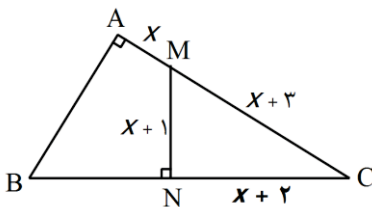
شماره ۵:

در شکل زیر با عمود کردن الواری به طول ۱۵ متر می خواهیم تیرک در حال سقوط را ثابت کنیم. پای این الوار را در چه فاصله ای از پای تیرک قرار دهیم؟



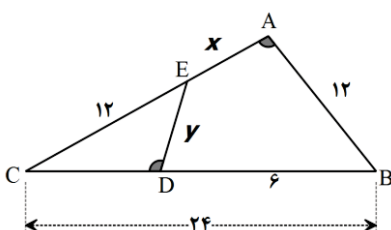
شماره ۶:

مقدار x را بیابید.



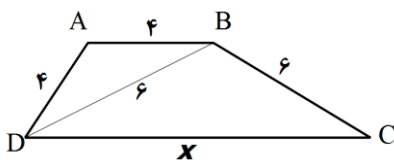
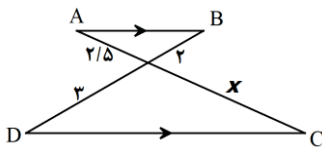
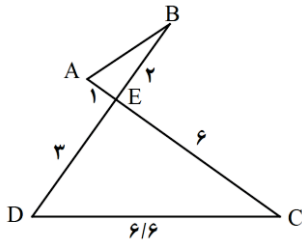
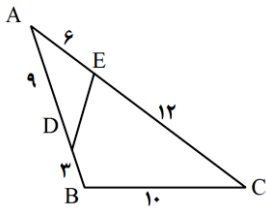
شماره ۷:

در شکل زیر زاویه های مشخص شده برابرند. مقدار x و y را بیابید.



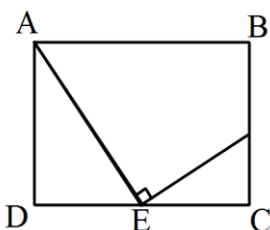
شکل ۸:

در شکل های زیر مقدار x را بیابید .



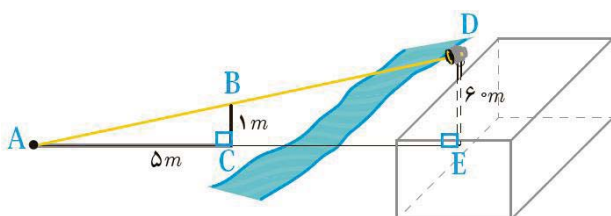
شکل ۹:

در مستطیل زیر E و F نقاط وسط اضلاع هستند . نسبت طول به عرض مستطیل را بیابید .
(راهنمایی : دو مثلث متشابه است ، اندازه اضلاع مستطیل را a و b گذاشته و نسبت تشابه را بنویسید)



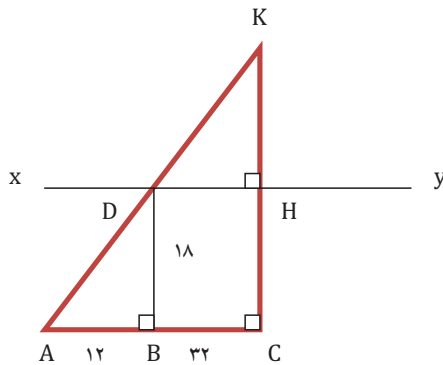
شکل ۱۰:

بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله خود را تا پایه نور افکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نور افکن چقدر است؟



مثال ۱۱:

فاصله کشتی از ساحل، در شکل داده شده، K یک کشتی و XY خط ساحل است. با توجه به شکل، فاصله ی این کشتی تا ساحل یعنی طول پاره خط KH را تعیین کنید.



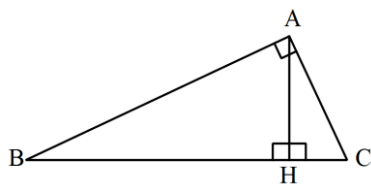
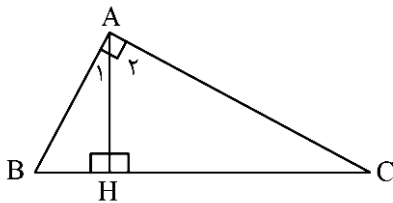
برخی روابط طولی در مثلث قائم الزویه:

اگر در مثلث قائم الزویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم روابط زیر حاکم است .

$$\text{الف) } AH^2 = BH \times CH$$

$$\text{ب) } AB^2 = BH \times BC \quad (\text{همینطور } AC^2 = CH \times BC)$$

$$\text{ج) } AH \times BC = AB \times AC$$



مثال ۱۲:

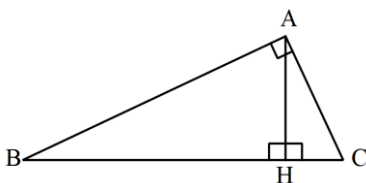
در شکل مقابل با فرض های داده شده ، طول ضلع خواسته شده را بیابید .

$$\text{الف) } BH = 9, CH = 4, AH = ?$$

$$\text{ب) } AB = 8, AC = 6, BH = ?$$

مثال ۱۳:

قضیه فیثاغورس را با استفاده از قضایای ارتفاع وارد بر وتر ثابت کنید .



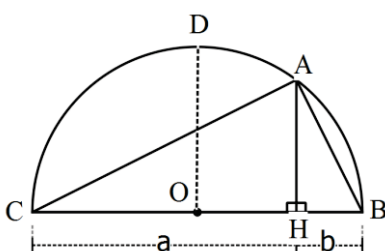
مثال ۱۴:

در یک مثلث قائم الزویه ارتفاع وارد بر وتر پاره خط هایی به طول ۶/۴ و ۳/۶ روی وتر ایجاد می کند . محیط مثلث را بیابید .

مثال ۱۵:

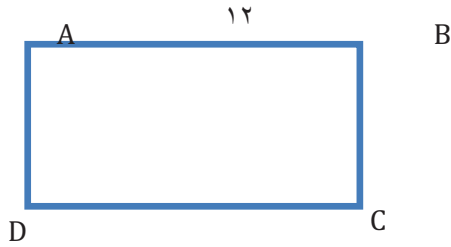
با توجه به شکل داده شده ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a, b واسطه هندسی همواره کوچکتر یا مساوی واسطه

$$\text{حسابی است . یعنی همواره } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} . (\text{راهنمایی : زاویه A قائمه است . چرا ؟})$$

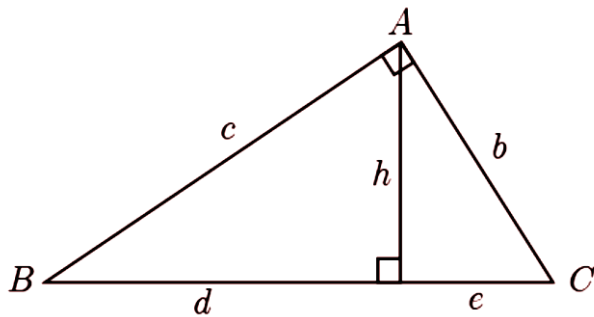




شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.



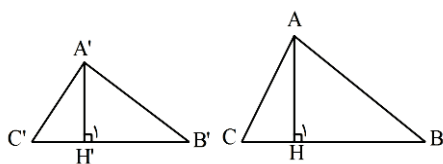
در مثلث قائم الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



نسبت اجزای فرعی، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه :

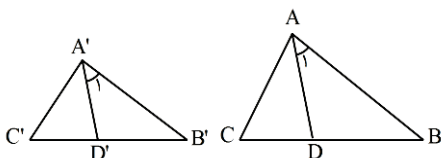
قضیه : در دو مثلث متشابه نسبت اجزای فرعی متناظر (ارتفاع، نیمساز، میانه) برابر با نسبت تشابه است .

الف) ارتفاع ها :



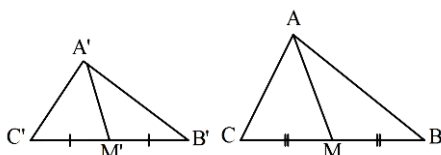
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

ب) نیمساز ها :



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AD}{A'D'} = k$$

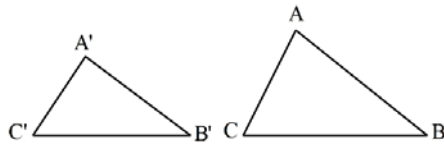
ج) میانه ها :



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$$

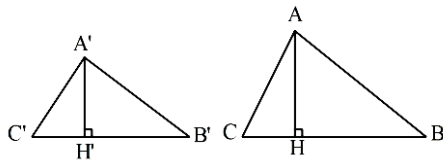
قضیه: در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر با مجذور نسبت تشابه است.

الف) محیط ها:

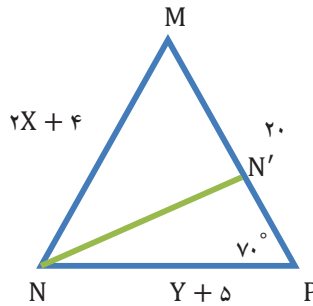
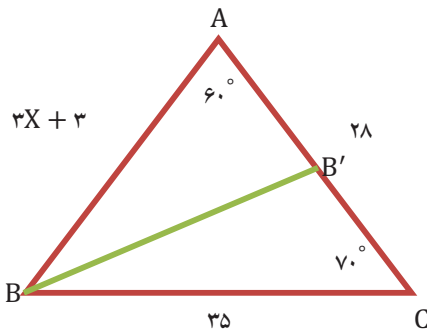


$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$

ب) مساحت ها:



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$



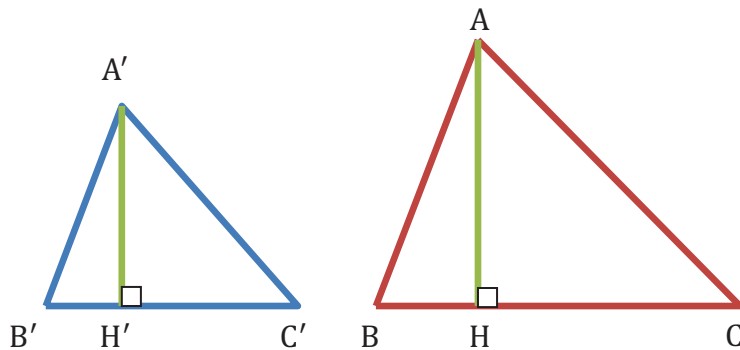
شکل ۱۶: دو مثلث ABC و MNP داده شده اند.

الف. اندازه X و Y را تعیین کنید.

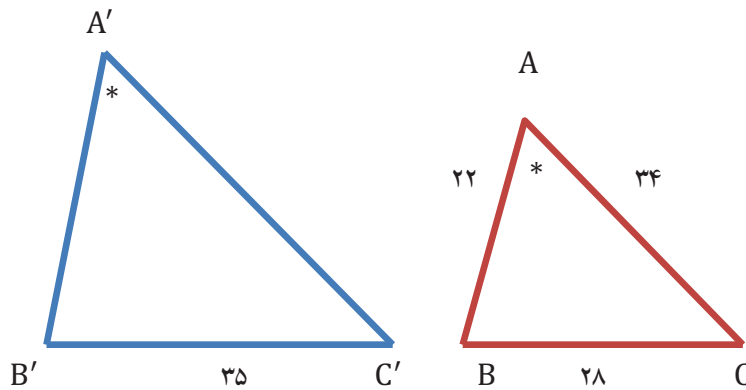
ب. نسبت ارتفاع های BB' و NN' را بیابید.

شکل ۱۷: دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه اند و $4B'H' = 3BH$ است، (شکل). اگر $A'H' = 15$ باشد، اندازه ی

ارتفاع AH را تعیین کنید.



مثال ۱۸: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند. با توجه به شکل اندازه ی محیط مثلث $A'B'C'$ را تعیین کنید.



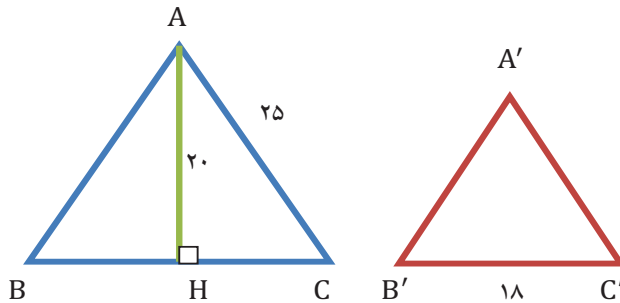
مثال ۱۹: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند. ضلع های مثلث ABC برابر ۶ و ۸ و ۱۲ سانتی متر و محیط مثلث

$A'B'C'$ برابر ۷۸ سانتی متر است. اندازه ضلع های مثلث $A'B'C'$ را تعیین کنید.

مثال ۲۰: دو مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) و $A'B'C'$ ($A'B' = A'C'$) متشابه اند. اندازه ی قاعده یک

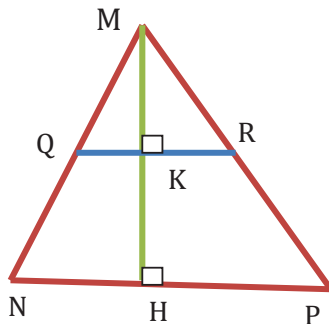
مثلث ۱۸ و اندازه ی یک ساق و ارتفاع وارد بر قاعده از دیگری به ترتیب ۲۵ و ۲۰ است. نسبت محیط های این

دو مثلث را تعیین کنید.



مثال ۲۱: در شکل روبه رو، QR موازی NP و MH عمود بر NP است. اگر $HK = 3$ و $MK = 2$ باشد، نسبت

مساحت مثلث MQR به مساحت مثلث MNP را تعیین کنید.

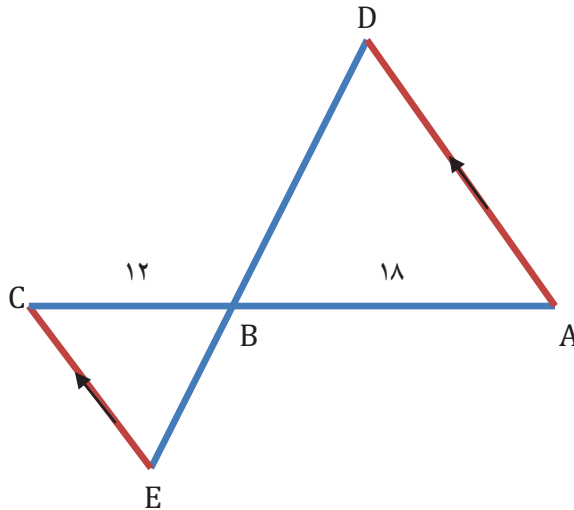


مثال ۲۲: محیط های دو مثلث متشابه ۳۶ و ۴۸ سانتی متر است. اگر مساحت مثلث بزرگتر ۶۴ سانتی متر مربع باشد،

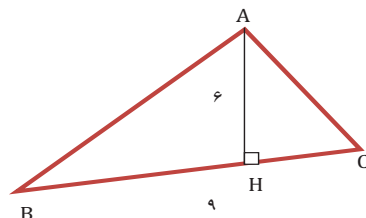
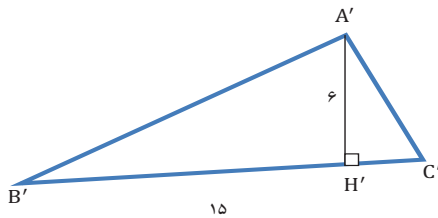
مساحت مثلث کوچک تر را بیابید.

شماره ۲۳: نسبت مساحت های دو مثلث متشابه برابر $\frac{9}{4}$ است. اگر یک ضلع از مثلث بزرگ تر ۶ سانتی متر باشد، ضلع نظیرش از مثلث کوچک تر را تعیین کنید.

شماره ۲۴: در شکل زیر، AD موازی CE است. نسبت مساحت های دو مثلث ABD و BCE را تعیین کنید.



شماره ۲۵: دو مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) و $A'B'C'$ ($\hat{A}' = 90^\circ$) متشابه اند، اگر $AH = 6$, $BH = 9$ و $H'B' = 15$ باشد:



الف. نسبت محیط های این دو مثلث را تعیین کنید.

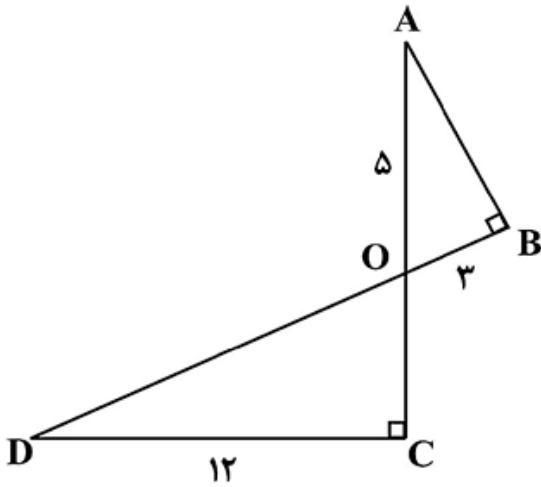
ب. اندازه ی محیط های این دو مثلث را به دست آورید.

پ. نسبت مساحت های این دو مثلث را تعیین کنید.

ت. اندازه ی مساحت های این دو مثلث را تعیین کنید.

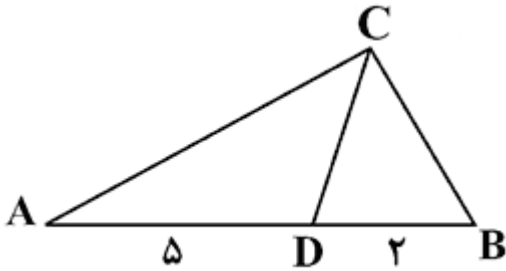
تستهای آموزشی درس ۳

۱ در شکل زیر مساحت مثلث COD چند برابر مساحت مثلث AOB است؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۹
(۴) ۱۴

۲ در شکل زیر $AB = AC$ و $BC = DC$. حاصل عبارت DC^2 کدام است؟

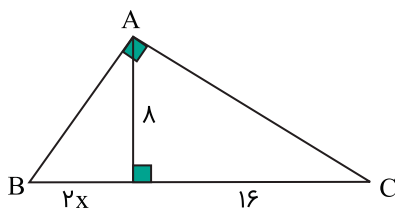


- (۱) ۴۹
(۲) ۱۴
(۳) ۱۰
(۴) ۳۵

۳ در دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه، وتر یکی ۴ برابر وتر دیگری است. اگر مساحت مثلث کوچکتر برابر با ۵ باشد، واسطه هندسی مثبت اضلاع قائمه در مثلث بزرگتر کدام است؟

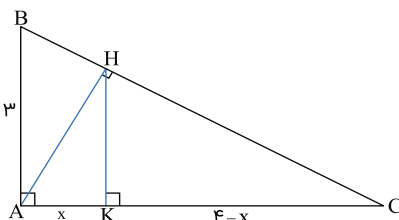
- (۱) $16\sqrt{5}$
(۲) $4\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{10}$
(۴) $8\sqrt{5}$

۴ در شکل زیر زاویه A قائمه است و ارتفاع وارد بر وتر است. در این صورت طول AB کدام است؟



- (۱) ۹
(۲) $5\sqrt{3}$
(۳) $8/2$
(۴) $4\sqrt{5}$

۵ در شکل زیر، اندازه x کدام است؟



- (۱) $2/88$
(۲) $1/44$
(۳) $1/2$
(۴) $1/4$

تستهای پایانی فصل ۲

۱ فاصله نقطه A از خط d، برابر با ۱ سانتی متر است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که فاصله اش از نقطه A، برابر با ۲ سانتی متر باشد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۲ حداکثر چند نقطه روی محیط مثلث متساوی الاضلاع وجود دارد که از محل برخورد عمود منصف اضلاع آن به یک فاصله باشد؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

۳ دو نقطه A و B به فاصله ۶ از یکدیگر قرار دارند. از A و B کمان هایی به شعاع x رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقاط P و Q قطع کنند. خطی که از P و Q می گذرد، عمود منصف AB است. مقدار x کدام می تواند باشد؟

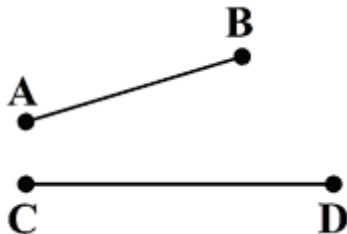
- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۴ چه تعداد از موارد زیر نادرست است؟

- (الف) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
(ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، بر روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.
(پ) مثلی وجود دارد که طول ضلع های آن ۳، ۴ و ۸ است.

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۵ دو پاره خط AB و CD در شکل زیر را در نظر بگیرید. چند نقطه مانند O روی صفحه وجود دارد که تساوی های $OC = OD$ و $OA = OB$ برقرار باشند؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) صفر
(۴) بی شمار

۶ در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ ، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعده BC را در M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۲۰

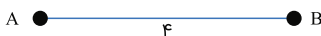
(۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۷ در مثلث ABC ، نیمساز رأس B و عمودمنصف ضلع BC روی ضلع AC متقاطع‌اند. اگر $\hat{A} = 54^\circ$ باشد، آنگاه اندازه زاویه B کدام است؟

(۱) 78° (۲) 82°

(۳) 84° (۴) 86°

۸ ضلع $AB = 4$ از مثلث ABC در صفحه رسم شده است. اگر طول میانه و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب ۳ و ۲ واحد باشد، چند نقطه متمایز برای رأس C می‌توان یافت؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۴

۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $(\hat{A} = 90^\circ)$ با اضلاع قائم به طول‌های ۳ و ۴، AD نیمساز رأس A است. فاصله نقطه D از ضلع AC کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{12}{7}$

(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۱۰ مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) مفروض است. چند نقطه روی محیط مثلث می‌توان یافت که فاصله آن از نقطه A و از ضلع BC برابر باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۱ اگر $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{\lambda+b}$ ، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۲ اگر $\frac{3a+8}{12+2a} = \frac{3b+4}{2b+6}$ ، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۳ اگر $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6}$ ، در این صورت $\frac{a+b+c+d+e}{d}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵
(۳) ۶ (۴) ۷

۱۴ استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم، نامیده می‌شود.

- (۱) استدلال استنتاجی (۲) قضیه
(۳) برهان خلف (۴) استدلال استقرایی

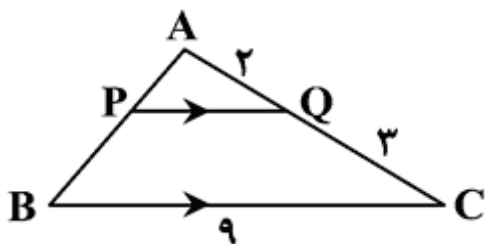
۱۵ فاصله دو نقطه A و B از یکدیگر برابر با ۵ است. به مرکز A و به شعاع ۴ یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B به شعاع ۳ کمانی دیگر رسم می‌کنیم. اگر دو کمان یکدیگر را در نقاط M و N قطع کنند، محیط چهار ضلعی AMBN چقدر است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۶
(۳) ۱۴ (۴) ۱۲

۱۶ از به هم وصل کردن اوساط چهار ضلعی ABCD یک لوزی ساخته شده است. چهار ضلعی ABCD همواره چگونه است؟

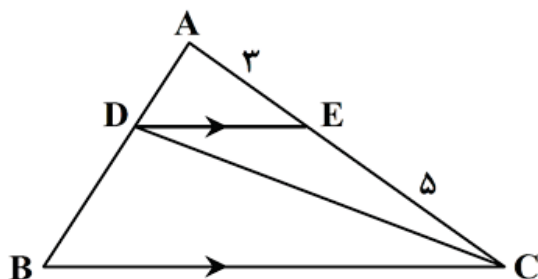
- (۱) متوازی‌الاضلاع (۲) لوزی
(۳) دوزنقه (۴) دارای دو قطر برابر است.

۱۷ در شکل زیر، $PQ \parallel BC$. طول پاره‌خط PQ کدام است؟



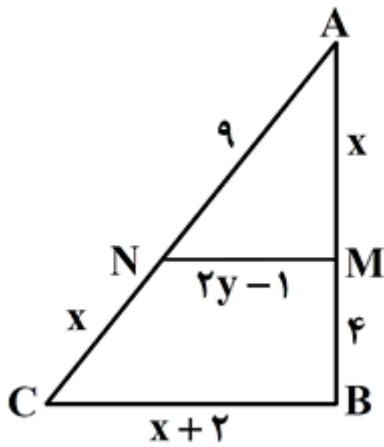
- (۱) $3/6$ (۲) $4/2$
(۳) $4/5$ (۴) ۶

۱۸ در شکل زیر، CD نیمساز زاویه C است. اگر $DE \parallel BC$ ، حاصل $2DE + 3BC$ چقدر است؟



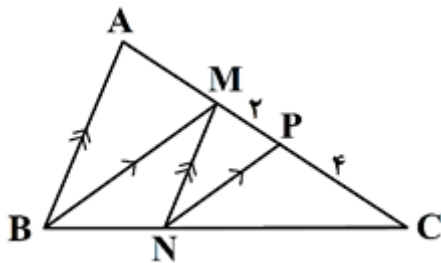
- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵
(۳) ۵۰ (۴) ۵۵

۱۹ در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، مقدار y کدام است؟



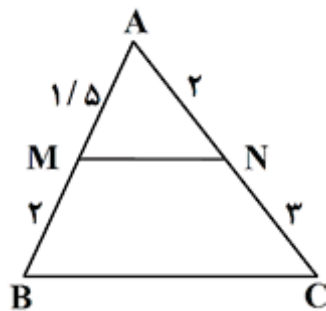
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{2}{9}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

۲۰ در مثلث ABC ، داریم $MN \parallel AB$ و $NP \parallel MB$. طول AM چقدر است؟

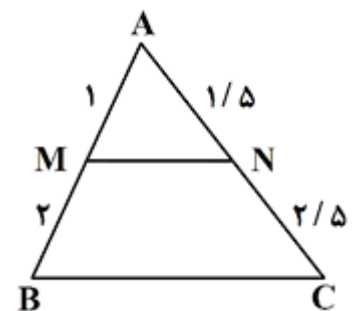


- (۱) $\frac{7}{3}$
- (۲) $\frac{5}{3}$
- (۳) ۳
- (۴) ۴

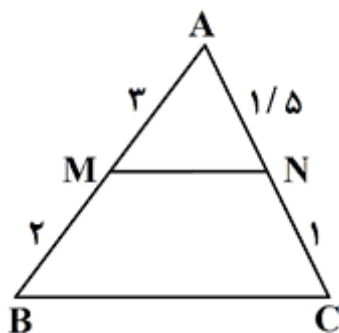
۲۱ در کدام گزینه MN با BC موازی است؟



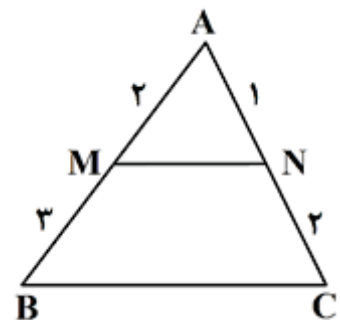
(۲)



(۱)

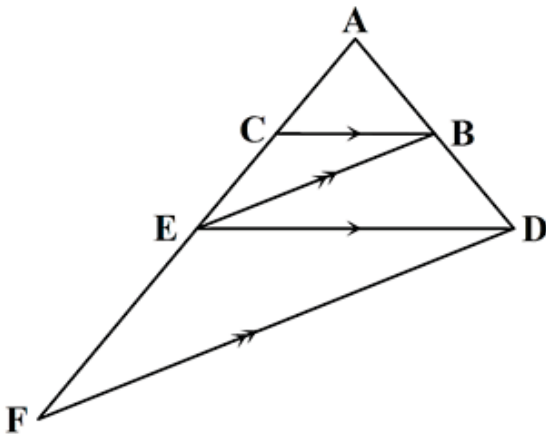


(۴)



(۳)

۲۲ در شکل زیر، $BC \parallel ED$ و $BE \parallel FD$. اگر $AC = CE = ۲$ ، طول EF کدام است؟



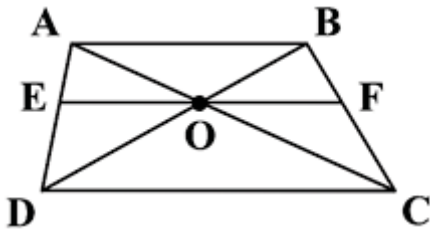
(۱) $\sqrt{۶}$

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۳ در دوزنقه $ABCD$ (شکل زیر) داریم $AB = ۶$ و $DC = ۹$. اگر $AB \parallel EF$ ، حاصل $\frac{OE}{OF}$ کدام است؟



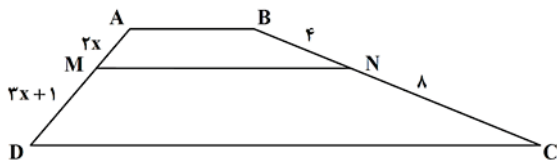
(۱) ۱

(۲) $\frac{۳}{۲}$

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۴ در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط MN با قاعده‌های AB و CD موازی است. مقدار x کدام است؟



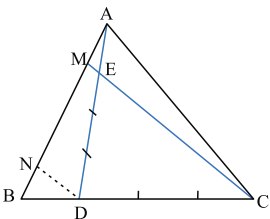
(۱) ۱

(۲) $\frac{۱}{۳}$

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۵ در شکل زیر، $BD = \frac{۱}{۴}BC$ و $AE = \frac{۱}{۴}AD$ و $DN \parallel CM$. اندازه AB چند برابر AM است؟



(۱) ۴

(۲) $\frac{۴}{۵}$

(۳) ۵

(۴) ۶

۲۶ در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگتر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC کدام است؟

(۲) بیشتر از ۱

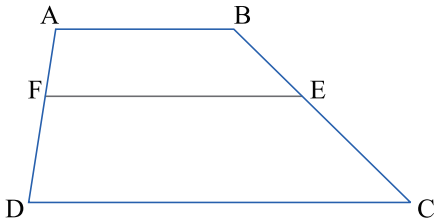
(۱) کمتر از ۱

(۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

(۳) مساوی ۱

۲۷

در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{11}{20}$
- (۲) $\frac{7}{15}$
- (۳) $\frac{8}{15}$
- (۴) $\frac{3}{5}$

۲۸

در دوزنقه‌ای اندازه قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

(۲) $11/6$

(۱) $11/4$

(۴) $12/8$

(۳) $12/2$

۲۹

در یک دوزنقه قائم‌الزاویه، اگر از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود، ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ چگونه است؟

(۲) مساوی ۱

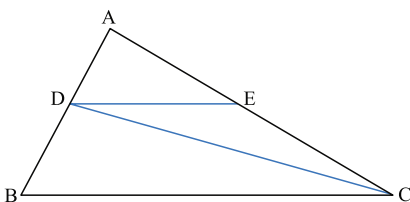
(۱) کوچک‌تر از ۱

(۴) متغیر نسبت به اضلاع

(۳) بزرگ‌تر از ۱

۳۰

در شکل زیر $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$ و $DE \parallel BC$ است. اگر مساحت مثلث ADE برابر با ۶۰ واحد مربع باشد، مساحت مثلث DEC کدام است؟



(۱) ۱۸۰

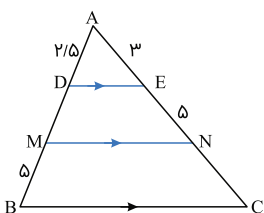
(۲) ۹۰

(۳) ۱۵۰

(۴) ۷۵

۳۱

در شکل زیر طول پاره‌خط NC کدام است؟



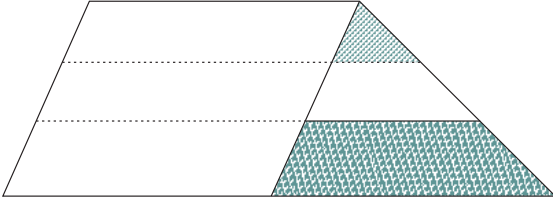
(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۸

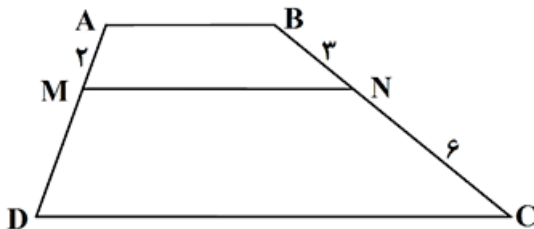
(۴) ۱۰

یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



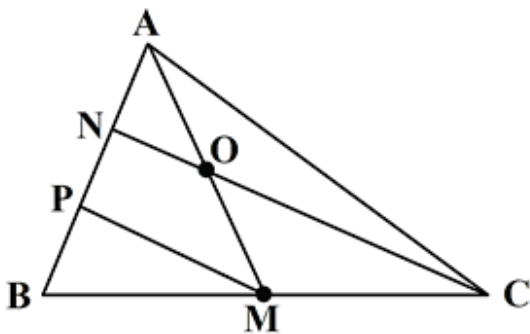
- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{5}$
(۳) $\frac{2}{9}$
(۴) $\frac{1}{4}$

در شکل زیر داریم: $MN \parallel AB \parallel CD$ ؛ باتوجه به اندازه‌های داده‌شده طول پاره‌خط MD چقدر است؟



- (۱) $\frac{5}{2}$
(۲) $\frac{9}{2}$
(۳) ۵
(۴) ۴

در مثلث ABC شکل زیر، AM میانه است. $OA = OM$ و $NC \parallel PM$ ؛ حاصل $\frac{AN}{PB}$ کدام است؟



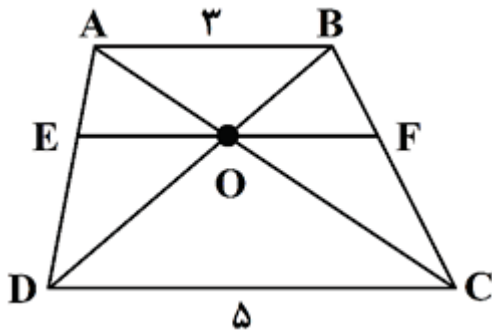
- (۱) ۱
(۲) $\frac{3}{7}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{5}{4}$

چه تعداد از موارد زیر را می‌توان به صورت قضیه‌ای دوشرطی بیان کرد؟
(الف) اگر یک چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.
(ب) اگر $x = y$ ، آنگاه $x^2 = y^2$.
(پ) اگر n عددی زوج باشد، آنگاه n^2 نیز عددی زوج است.

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

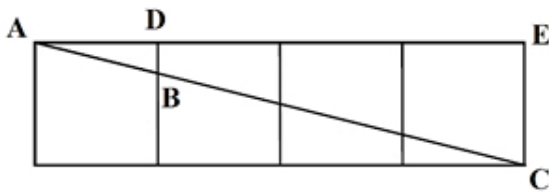
در دوزنقه ABCD شکل زیر داریم: $EF \parallel AB$. حاصل $\frac{OE}{OF}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{3}{8}$
(۳) $\frac{3}{5}$
(۴) $\frac{5}{8}$



در شکل زیر، ۴ مربع به ضلع واحد در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. طول BD چقدر است؟

۴۲



(۱) ۰/۲۵

(۲) ۰/۲

(۳) ۰/۳

(۴) ۰/۳۵

در شکل زیر، از نقطه دلخواه N بر روی میانه AM، پاره خط NP را به موازات AB و پاره خط NQ را به موازات AC رسم می‌کنیم.

۴۳

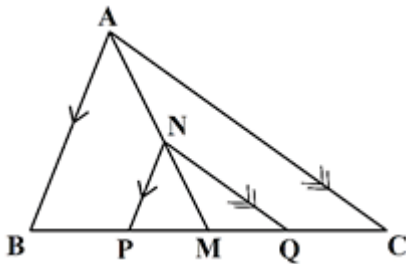
حاصل $\frac{BM}{CM} + \frac{MP}{MQ}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

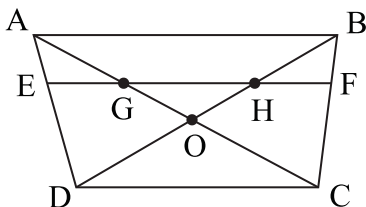
(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) $\frac{۴}{۳}$



در دوزنقه ABCD داریم: $EF \parallel AB$. اگر $\frac{AE}{ED} = \frac{۲}{۳}$ ، $AB = ۱۰$ و $DC = ۸$ ، طول GH چقدر است؟

۴۴



(۱) $\frac{۱۶}{۵}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{۱۴}{۵}$

(۴) $\frac{۱۲}{۵}$

کدامیک از حکم‌های کلی زیر، درست است؟

۴۵

(۱) اگر مربع عددی فرد باشد، خود آن عدد زوج است.

(۲) به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار $n^2 + n + ۴۱$ ، عددی اول است.

(۳) در هر مستطیل، اندازه قطرهای باهم برابر است.

(۴) همه اعداد اول، فرد هستند.

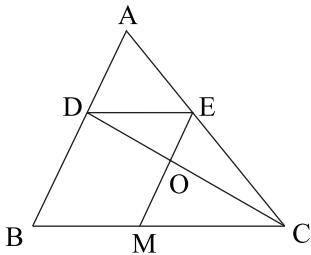
۴۶ در یک دوزنقه، خطی که وسط ساقها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های دوزنقه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۴۷ اندازه دو قاعده یک دوزنقه ۸ و ۱۲ واحد است و ارتفاع دوزنقه ۱۵ واحد است. فاصله محل تلاقی قطرها از قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟

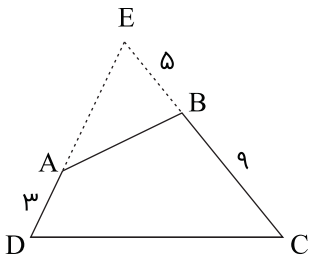
- (۱) ۹ (۲) ۱۲
(۳) ۶ (۴) ۱۰

۴۸ در شکل زیر $S_{ODE} = \frac{9}{16} S_{OMC}$ و چهار ضلعی DEMB متوازی الاضلاع است. مساحت دوزنقه DECB چند برابر مساحت ADE است؟



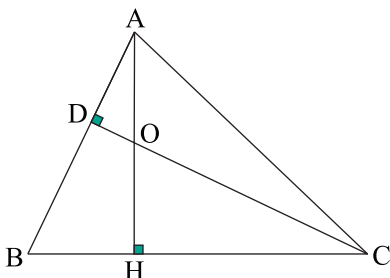
- (۱) ۳ (۲) $\frac{40}{9}$
(۳) $\frac{49}{9}$ (۴) $\frac{41}{9}$

۴۹ در چهار ضلعی ABCD زوایای B و D مکمل هم هستند و امتداد اضلاع AD و BC در E متقاطع‌اند. مساحت EDC چند برابر مساحت چهار ضلعی است؟



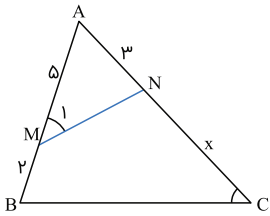
- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{6}{5}$
(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{7}{5}$

۵۰ در شکل زیر $OA = OH = \sqrt{33}$ و $CD = ۱۴$ است. اندازه ضلع AC کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{55}$ (۲) $2\sqrt{57}$
(۳) $2\sqrt{51}$ (۴) $2\sqrt{53}$

۵۱ در شکل زیر مقدار x کدام است؟ ($\hat{C} = \hat{M}_1$)



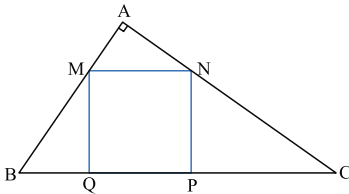
(۱) $\frac{25}{3}$

(۲) $\frac{26}{3}$

(۳) $\frac{27}{7}$

(۴) $\frac{30}{7}$

۵۲ مثلث ABC قائم‌الزاویه و چهار ضلعی MNPQ مربع است. اگر $PC = 16$ و $MQ = 8$ باشد، اندازه ضلع BC کدام است؟



(۱) ۱۸

(۲) ۲۸

(۳) ۲۰

(۴) ۳۲

۵۳ در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۴ و ۶ واحد و ارتفاع ۵ واحد قطرهای را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجادشده کدام است؟

(۲) $\frac{9}{4}$

(۴) $\frac{11}{3}$

(۱) ۴

(۳) $\frac{10}{3}$

۵۴ مثلث ABC با زاویه‌های $\hat{A} = 45^\circ$ و $\hat{B} = 65^\circ$ با مثلث MNP که در آن $\hat{P} = 70^\circ$ متشابه است. اگر $MN = 12$ و

باشد، کدام گزینه صحیح است؟ $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4}$

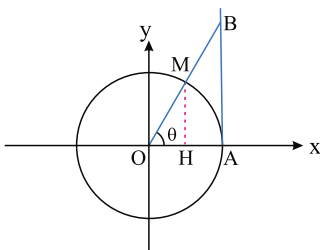
(۲) $AC = 16$

(۴) $AC = 8\sqrt{3}$

(۱) $AB = 16$

(۳) $AB = 8\sqrt{3}$

۵۵ شکل زیر یک دایره مثلثاتی را نشان می‌دهد. در این شکل $\frac{1}{\cos \theta}$ برابر است با:



(۱) AH

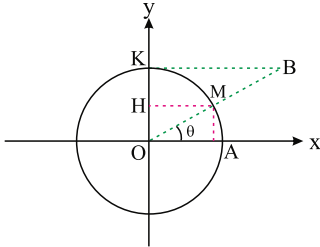
(۲) BM

(۳) OB

(۴) OM

۵۶

شکل زیر یک دایرهٔ مثلثاتی را نشان می‌دهد. $\frac{1}{\sin \theta}$ برابر است با:



(۱) BM

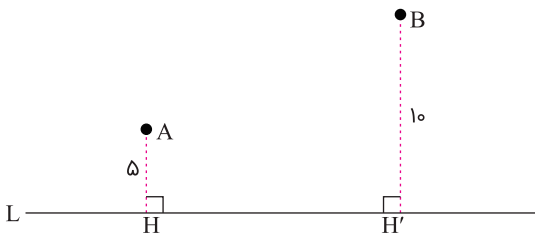
(۲) OB

(۳) HM

(۴) OM

۵۷

در شکل زیر، فاصلهٔ نقاط A و B از خط L به ترتیب ۵ و ۱۰ است. نقطهٔ M را روی خط L چنان انتخاب می‌کنیم که مجموع فواصل آن از A و B حداقل باشد. اگر $AB = 13$ ، طول MH کدام است؟



(۱) $\frac{3}{8}$

(۲) $\frac{4}{2}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۴) ۴

۵۸

در یک دوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه کدام است؟

(۲) $\frac{1}{5}$

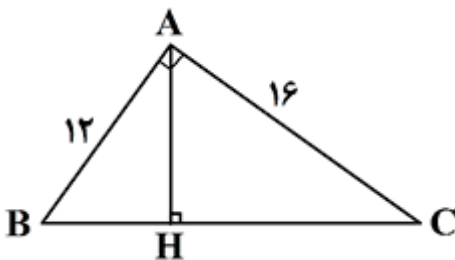
(۴) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{4}$

۵۹

در شکل زیر، طول ارتفاع AH چقدر است؟



(۱) $\frac{4}{8}$

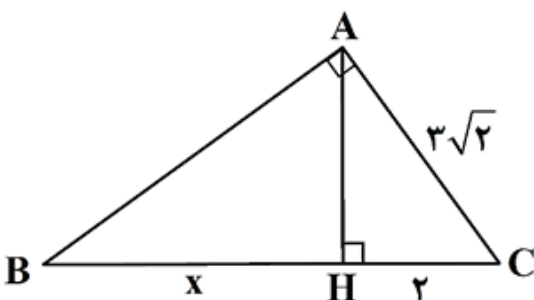
(۲) $\frac{9}{6}$

(۳) ۱۰

(۴) $\frac{10}{4}$

۶۰

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. باتوجه به اندازه‌های داده‌شده، اندازهٔ BH کدام است؟



(۱) ۷

(۲) ۹

(۳) $6\sqrt{2}$

(۴) $4\sqrt{2}$

۶۱ در مثلثی با اضلاع $a = ۲$ و b و c اگر محیط برابر با ۱۸ باشد، حاصل $h_a(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})$ کدام است؟ h_a و h_b و h_c ارتفاع‌های نظیر اضلاع a ، b و c هستند)

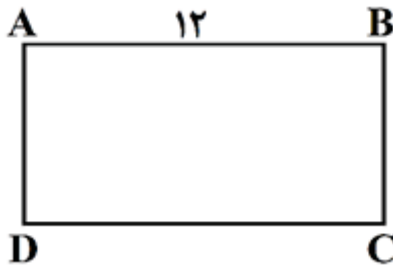
(۲) ۸

(۱) ۹

(۴) ۶

(۳) ۷

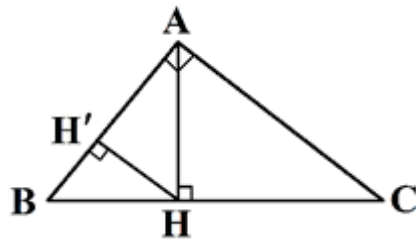
۶۲ شکل زیر مستطیلی به طول ۱۲ است. از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم و پای این عمود را H می‌نامیم. اگر طول BH برابر با ۱۱ باشد، اندازه DH چقدر است؟

(۱) $\frac{20}{11}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{21}{11}$ (۴) $\frac{23}{11}$

۶۳ در شکل زیر داریم $AC = ۸$ و $AB = ۶$. مقدار BH' چقدر است؟

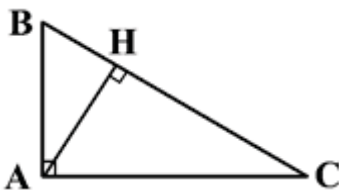
(۱) $3/6$

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $2/16$

۶۴ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اگر $AC = ۱۲$ و $AB = ۴$ ، حاصل $\frac{CH}{BH}$ کدام است؟



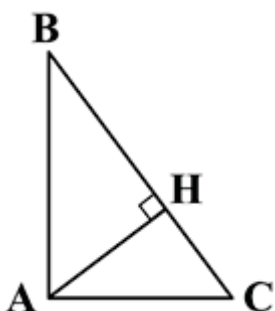
(۱) ۸

(۲) ۹

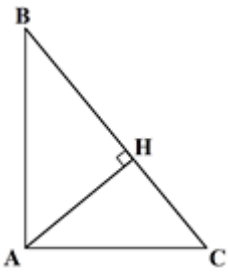
(۳) ۳

(۴) $\sqrt{3}$

۶۵ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، داریم: $\frac{BC}{AC} = \frac{5}{3}$. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، حاصل $\frac{BH}{CH}$ کدام است؟

(۱) $\frac{25}{16}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۶۶ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر $2BH = 3CH = 12$ ، طول AC کدام است؟



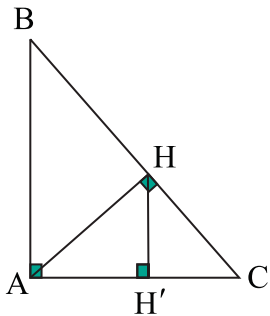
(۱) $4\sqrt{6}$

(۲) $4\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{15}$

(۴) $2\sqrt{10}$

۶۷ مطابق شکل، در مثلث قائم‌الزاویه ABC از نقطه H (پای ارتفاع وارد بر وتر) عمود HH' را بر ضلع AC وارد می‌کنیم. اگر $AH' = 4$ و $CH' = 3$ ، طول وتر مثلث ABC کدام است؟



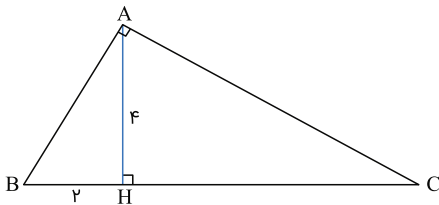
(۱) $\frac{49}{\sqrt{21}}$

(۲) $\frac{48}{\sqrt{21}}$

(۳) $\frac{49}{\sqrt{22}}$

(۴) $\frac{49}{2\sqrt{7}}$

۶۸ در شکل زیر اندازه ارتفاع وارد بر وتر در مثلث AHC کدام است؟



(۱) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

(۲) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

(۳) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

(۴) $2\sqrt{5}$

۶۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اضلاع قائم $AB = 3\sqrt{5}$ و $AC = 6$ ، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC ، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

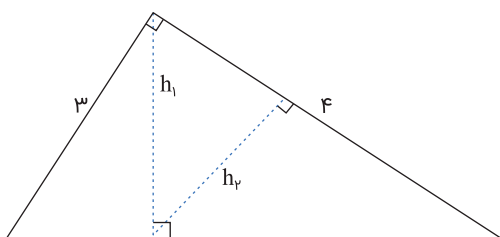
(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

(۴) ۱۸

(۳) ۱۵

۷۰ در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟



(۱) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{4}$

در مستطیل ABCD به طول $AB = ۱۷$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

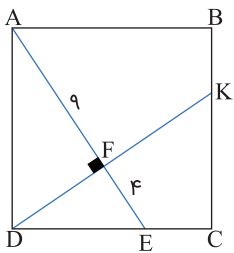
۷۱

(۲) $\frac{۱}{۳}$
(۴) $\frac{۳}{۵}$

(۱) $\frac{۴}{۱۵}$
(۳) $\frac{۷}{۱۵}$

در شکل زیر، ABCD مربع است. طول پاره خط DE کدام است؟

۷۲



(۱) $\sqrt{۵۶}$

(۲) $\sqrt{۵۵}$

(۳) $\sqrt{۵۴}$

(۴) $\sqrt{۵۲}$

نسبت فواصل پای ارتفاع وارد بر وتر از دو ضلع قائم در مثلث قائم الزاویه ای برابر $\frac{۱}{۳}$ است. اگر ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به ۲ ناحیه تقسیم کند، نسبت مساحت مثلث کوچکتر به مساحت مثلث اولیه کدام است؟

۷۳

(۲) $\frac{۱}{۸}$
(۴) $\frac{۱}{۳}$

(۱) $\frac{۱}{۱۰}$
(۳) $\frac{۱}{۴}$

پاسخنامه کلیدی

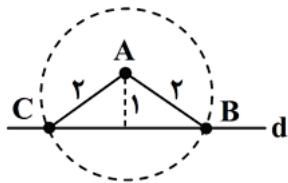
۱		۱۱		۲۱		۳۱		۴۱	
۲		۱۲		۲۲		۳۲		۴۲	
۳		۱۳		۲۳		۳۳		۴۳	
۴		۱۴		۲۴		۳۴		۴۴	
۵		۱۵		۲۵		۳۵		۴۵	
۶		۱۶		۲۶		۳۶		۴۶	
۷		۱۷		۲۷		۳۷		۴۷	
۸		۱۸		۲۸		۳۸		۴۸	
۹		۱۹		۲۹		۳۹		۴۹	
۱۰		۲۰		۳۰		۴۰		۵۰	
۵۱		۶۱		۷۱					
۵۲		۶۲		۷۲					
۵۳		۶۳		۷۳					
۵۴		۶۴							
۵۵		۶۵							
۵۶		۶۶							
۵۷		۶۷							
۵۸		۶۸							
۵۹		۶۹							
۶۰		۷۰							

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۲

۱

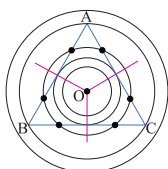
مجموعه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه A برابر با ۲ سانتی‌متر است، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است. باتوجه به اینکه فاصله نقطه A از خط d برابر با ۱ سانتی‌متر است، نتیجه می‌گیریم این دایره، خط d را در دو نقطه B و C قطع می‌کند، پس دو نقطه روی خط d وجود دارد که فاصله‌شان از نقطه A برابر با ۲ سانتی‌متر است.



گزینه ۴

۲

مطابق شکل در مثلث ABC نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌ها است. دایره‌هایی به مرکز O و شعاع‌های متفاوت رسم کرده‌ایم. این دایره‌ها نهایتاً مثلث را در ۶ نقطه قطع می‌کنند.



گزینه ۴

۳

نکته: برای رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، باید کمان‌هایی با شعاع بیشتر از نصف طول پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط رسم کنیم. باتوجه به نکته بالا، باید $x = 3$ از $\frac{x}{3} = 6$ بزرگتر باشد. باتوجه به گزینه‌ها، گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه ۱

۴

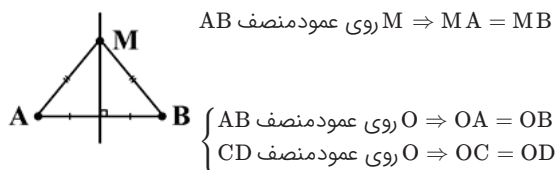
نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.
نکته: در هر مثلث مجموعه طول‌های هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگتر است.
باتوجه به نکات بالا، موارد "الف" و "ب" درست است، ولی مورد "پ" نادرست است؛ زیرا $3 + 4 < 8$ ، پس مثلثی با این طول ضلع‌ها وجود ندارد.

گزینه ۱

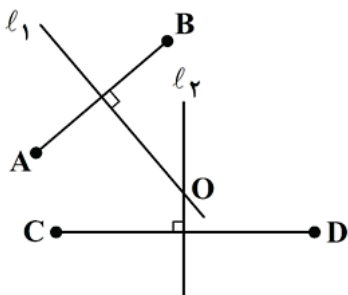
۵

نکته: هر نقطه بر روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

عمودمنصف‌های دو پاره‌خط را رسم می‌کنیم تا در نقطه O یکدیگر را قطع کنند. این نقطه همان نقطه موردنظر است؛ زیرا:



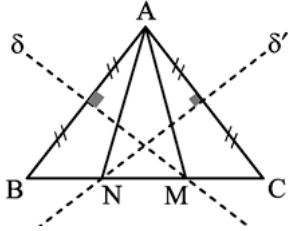
باتوجه به اینکه ℓ_1 و ℓ_2 تنها در یک نقطه متقاطع‌اند، نتیجه می‌شود تنها یک نقطه با شرایط موردنظر وجود دارد.



گزینه ۲

۶

$$\hat{A} = 100^\circ, AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 50^\circ$$



هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \hat{BAM} = \hat{B} = 50^\circ \Rightarrow \hat{AMB} = 100^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \Rightarrow \hat{CAN} = \hat{C} = 50^\circ \Rightarrow \hat{ANC} = 100^\circ \end{cases}$$

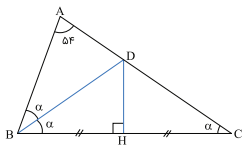
$$\Rightarrow \hat{MAN} = 180^\circ - (\hat{AMB} + \hat{ANC}) = 20^\circ$$

بنابراین، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN، زاویهٔ $\hat{MAN} = 20^\circ$ است.

گزینه ۳

۷

مطابق شکل عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ B، در نقطهٔ D روی ضلع AC متقاطع‌اند. نقطهٔ D از ۲ سر پاره‌خط BC به یک فاصله است، پس مثلث BDC متساوی‌الساقین و با فرض $\hat{C} = \alpha$ اندازهٔ زوایا مطابق شکل خواهند بود و داریم:

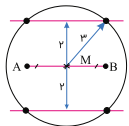


$$2\alpha + \alpha + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 130^\circ \Rightarrow \alpha = 43.3^\circ \Rightarrow \hat{B} = 2\alpha = 86.6^\circ$$

گزینه ۴

۸

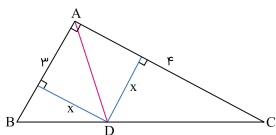
از وسط ضلع AB (نقطهٔ M) دایره‌ای به شعاع ۳ واحد رسم کرده و دو خط موازی ضلع AB و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن رسم می‌کنیم تا رأس C به دست بیاید. همان‌طور که می‌بینید چهار نقطهٔ متمایز برای رأس C قابل یافتن است.



گزینه ۲

۹

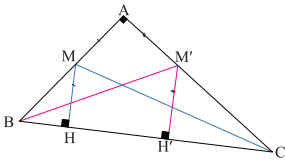
فاصلهٔ نقطهٔ D از اضلاع AB و AC باهم برابر است.



اگر $AB = 3$ و $AC = 4$ ، طبق رابطهٔ فیثاغورس $BC = 5$ است.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} \Rightarrow \frac{3 \times 4}{2} = \frac{x \times 3}{2} + \frac{x \times 4}{2} \Rightarrow 12 = 7x \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

گزینه ۳



فرض می‌کنیم M نقطه‌ای روی محیط مثلث $\triangle ABC$ باشد که از رأس A و ضلع BC به یک فاصله باشد. در این صورت طبق شکل، $MH = MA$ و در نتیجه نقطه M از دو ضلع زاویه C به یک فاصله است. یعنی نقطه M باید روی نیمساز زاویه C قرار داشته باشد. به همین ترتیب نقطه M' روی نیمساز زاویه B قرار خواهد داشت. پس دو نقطه با این ویژگی وجود دارد که این دو نقطه پای نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ هستند.

گزینه ۴

راحل اول:

نکته (طرفین وسطین): اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آنگاه: $ad = bc$

$$\frac{a}{10+a} = \frac{b}{\lambda+b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \lambda a + ab = 10b + ab \Rightarrow \lambda a = 10b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{\lambda} = \frac{5}{4}$$

راحل دوم:

نکته (تفصیل در مخرج): اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آنگاه: $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

$$\frac{a}{10+a} = \frac{b}{\lambda+b} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{a}{10+a-a} = \frac{b}{\lambda+b-b} \\ \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{\lambda} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{\lambda} = \frac{5}{4}$$

گزینه ۲

نکته: از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان نتیجه گرفت: $ad = bc$ با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\frac{3a+\lambda}{12+2a} = \frac{3b+4}{2b+6} \Rightarrow (3a+\lambda)(2b+6) = (3b+4)(12+2a) \\ \Rightarrow 6ab + 18a + 16b + 4\lambda = 6ab + 12a + 36b + 4\lambda \\ \Rightarrow 10a = 20b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6} = \frac{a+b+c+d+e}{2+3+4+5+6} \\ \Rightarrow \frac{a+b+c+d+e}{20} = \frac{d}{5} \Rightarrow \frac{a+b+c+d+e}{d} = \frac{20}{5} = 4$$

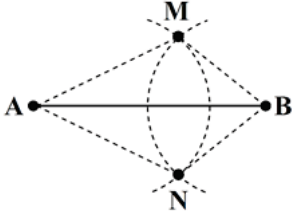
گزینه ۴

نکته: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی گرفته می‌شود؛ یعنی از جزء به کل می‌رسیم، استدلال استقرایی نامیده می‌شود. باتوجه به نکته بالا، گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه ۳

۱۵

به مرکز A و به شعاع ۴ کمانی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب به مرکز B و به شعاع ۳ کمان دیگری رسم می‌کنیم.



باتوجه به اینکه نقاط M و N روی کمانی به مرکز A و شعاع ۴ قرار دارند، نتیجه می‌شود $AM = AN = 4$. به همین ترتیب چون نقاط M و N روی کمانی به مرکز B و شعاع ۳ قرار دارند، نتیجه می‌شود:

$$BM = BN = 3$$

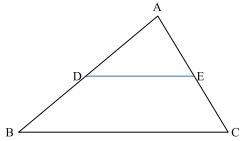
بنابراین محیط چهار ضلعی AMBN برابر است با:

$$AM + AN + BM + BN = 14$$

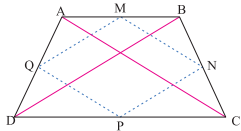
گزینه ۴

۱۶

می‌دانیم اگر اواسط اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به هم وصل کنیم پاره‌خط به‌دست‌آمده، موازی ضلع سوم و اندازه آن نصف طول ضلع سوم است؛ یعنی اگر E و D وسط‌های اضلاع AC و AB باشند، آنگاه $DE = \frac{1}{2}BC$ و $DE \parallel BC$. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که اگر اواسط اضلاع یک چهار ضلعی را متوالیاً به هم وصل کنیم، شکل حاصل همواره متوازی‌الاضلاع خواهد بود.



بنابراین در مثال بالا چهار ضلعی به‌دست‌آمده یک متوازی‌الاضلاع است. حال برای آنکه لوزی شود، لازم است دو ضلع مجاور آن برابر باشند؛ یعنی $MN = NP$ و چون $MN = \frac{1}{2}AC$ و $NP = \frac{1}{2}BD$ ، بنابراین لازم است شرط $AC = BD$ برقرار باشد.

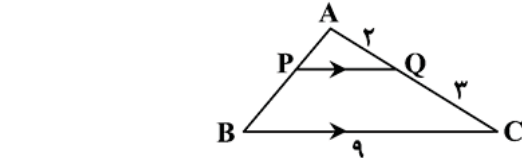


گزینه ۱

۱۷

نکته (تعمیم قضیه تالس): در شکل زیر، اگر $PQ \parallel BC$ ، آنگاه:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$



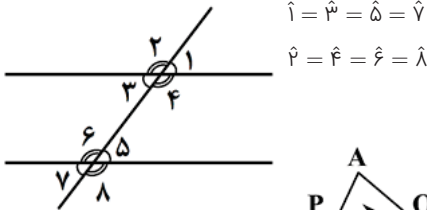
با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{PQ}{9} \Rightarrow PQ = \frac{18}{6} = 3$$

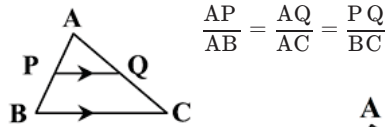
گزینه ۳

۱۸

نکته (قضیه خطوط موازی و مورب): اگر خطی، دو خط موازی را قطع کند، روی آن‌ها هشت زاویه به وجود می‌آورد که چهار به چهار باهم برابرند.



نکته (تعمیم قضیه تالس): در شکل زیر، اگر $PQ \parallel BC$ ، آنگاه:



$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب}} \hat{D}_1 = \hat{C}_1 \quad (1)$$

از طرفی طبق فرض CD نیمساز $\hat{C}$ است، پس:

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\hat{D}_1 = \hat{C}_2$: پس مثلث DEC متساوی‌الساقین است و خواهیم داشت:

$$DE = EC = 5$$

اکنون با استفاده از تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC خواهیم داشت:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{5}{BC} = \frac{3}{8} \Rightarrow BC = \frac{40}{3}$$

$$2DE + 3BC = 2(5) + 3\left(\frac{40}{3}\right) = 50$$

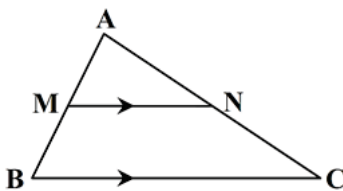
بنابراین:

گزینه ۳

۱۹

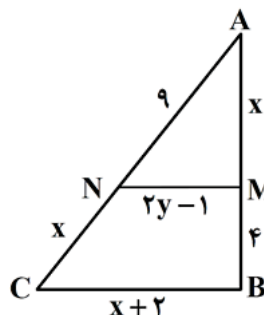
نکته (قضیه تالس و تعمیم آن): اگر در یک مثلث، خطی موازی با یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}, \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



$$\begin{aligned} \triangle ABC : MN \parallel BC &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \\ \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{6} &\Rightarrow x^2 = 36 \xrightarrow{x>0} x = 6 \end{aligned}$$

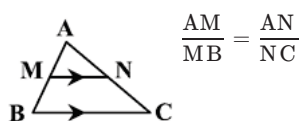
$$\begin{aligned} \triangle ABC : MN \parallel BC &\xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{2y-1}{9+x} = \frac{9}{9+y} \\ \xrightarrow{x=6} \frac{2y-1}{15} &= \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow 2y-1 = 9 \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5} \\ \Rightarrow 2y &= \frac{29}{5} \Rightarrow y = \frac{29}{10} = 2\frac{9}{10} \end{aligned}$$



گزینه ۳

۲۰

نکته (قضیه تالس): در مثلث ABC ، اگر $MN \parallel BC$ ، آنگاه:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

در مثلث BMC دو پاره‌خط PN و MB موازی‌اند، پس طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{PC}{PM} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{NC}{NB} \Rightarrow \frac{NC}{NB} = 2$$

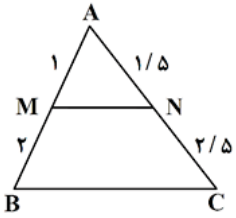
از طرفی در مثلث ABC نیز دو پاره‌خط MN و AB موازی‌اند، پس طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{NC}{NB} \xrightarrow{\frac{NC}{NB}=2} \frac{6}{MA} = 2 \Rightarrow MA = 3$$

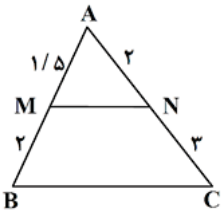
گزینه ۴

۲۱

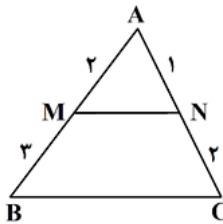
نکته (عکس قضیه تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسباً متناسب جدا کند، آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است. باتوجه به نکته بالا، گزینه‌ای که در آن تناسب $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ برقرار باشد، پاسخ است.



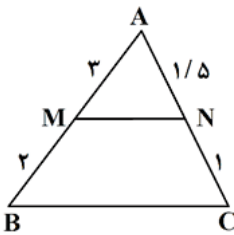
$$\text{گزینه ۱: } \frac{1}{2} \neq \frac{1/5}{2/5} \Rightarrow MN \not\parallel BC \quad \times$$



$$\text{گزینه ۲: } \frac{1/5}{2} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow MN \not\parallel BC \quad \times$$



$$\text{گزینه ۳: } \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow MN \not\parallel BC \quad \times$$



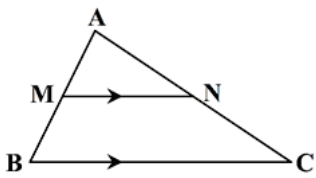
$$\text{گزینه ۴: } \frac{3}{2} = \frac{1/5}{1} \Rightarrow MN \parallel BC \quad \checkmark$$

گزینه ۴

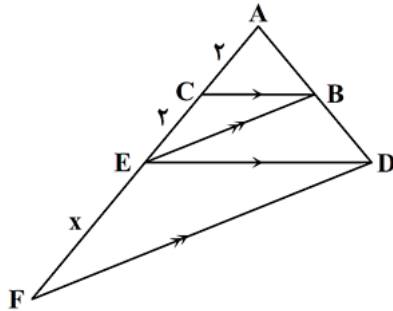
۲۲

راه حل اول:

نکته (تعمیم قضیه تالس): اگر در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، آنگاه:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



$$\begin{cases} \triangle AED : BC \parallel ED \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} & (1) \\ \triangle AFD : BE \parallel FD \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} & (2) \end{cases}$$

سمت راست تناسب‌های (۱) و (۲) باهم برابر است، پس:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{AE} &= \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \times AF \Rightarrow (2+2)^2 = 2(2+2+x) \\ \Rightarrow 4^2 &= 2(4+x) \Rightarrow 16 = 8 + 2x \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

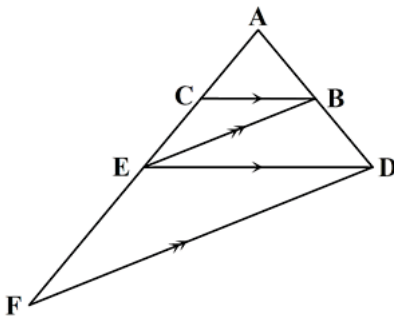
راه حل دوم:

نکته: در شکل زیر، اگر $BE \parallel FD$ و $BC \parallel ED$ ، آنگاه AE واسطه هندسی AC و AF است؛ یعنی:

$$AE^2 = AC \times AF$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

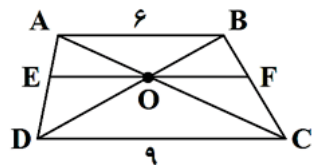
$$\begin{aligned} AE^2 &= AC \times AF \Rightarrow (2+2)^2 = 2 \times (2+2+x) \\ \Rightarrow 16 &= 2(4+x) \Rightarrow 16 = 8 + 2x \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$



گزینه ۱

۲۳

ابتدا باتوجه به اینکه $AB \parallel EF \parallel DC$ نتیجه می‌شود:



$$\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} \quad (*)$$

از طرفی در مثلث ADC باتوجه به اینکه $OE \parallel CD$ ، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{OE}{CD} \quad (1)$$

به همین ترتیب در مثلث BDC باتوجه به اینکه $OF \parallel CD$ ، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{OF}{CD} \quad (2)$$

اکنون باتوجه به (*) از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{OE}{CD} = \frac{OF}{CD} \Rightarrow OE = OF$$

$$\frac{OE}{OF} = 1 \text{ بنابراین}$$

گزینه ۱

۲۴

نکته: اگر در دوزنقه ABCD پاره خط MN به موازات قاعده‌ها باشد، داریم:

طبق نکته بالا می‌توان نوشت:

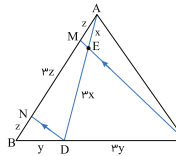
$$\frac{2x}{3x+1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 3x+1 \Rightarrow x = 1$$



گزینه ۳

۲۵

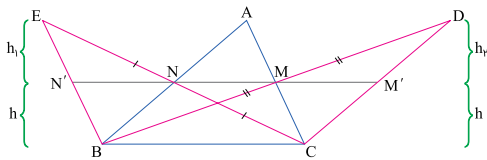
فرض کنیم $DC = ۳y$ و $BD = y$, $ED = ۳x$, $AE = x$ داریم:



$$\begin{aligned} \triangle AND : ME \parallel DN &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{۱}{۳} \\ \Rightarrow AM = z \text{ و } MN = ۳z \\ \triangle BCM : DN \parallel CM &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{BN}{۳z} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BN = z \\ \Rightarrow \frac{AB}{AM} &= \frac{z + ۳z + z}{z} = \frac{۵z}{z} = ۵ \end{aligned}$$

گزینه ۳

۲۶



مثلث‌های DBC و EBC دارای قاعده‌های یکسان BC هستند.

پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌ها است. پاره‌خط NM را از طرفین امتداد می‌دهیم تا ضلع‌های DC و EB را قطع کند.

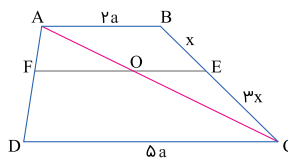
$$\begin{aligned} \triangle BDC : \frac{EN}{EC} = \frac{NN'}{BC} &\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h_1}{h + h_1} \Rightarrow ۲h_1 = h + h_1 \Rightarrow h_1 = h \\ \triangle EBC : \frac{DM}{DB} = \frac{MM'}{BC} &\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{h_2}{h + h_2} \Rightarrow ۲h_2 = h + h_2 \Rightarrow h_2 = h \\ \Rightarrow h_1 &= h_2 \end{aligned}$$

پس این دو مثلث ارتفاع‌های برابری دارند و مساحت آن‌ها باهم برابر است.

گزینه ۱

۲۷

رأس A را به C وصل می‌کنیم:

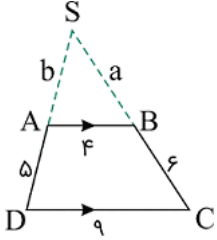


$$\begin{aligned} \triangle ADC : \frac{AF}{AD} = \frac{OF}{CD} &\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{OF}{۵a} \Rightarrow OF = \frac{۵}{۲}a \\ \triangle ACD : \frac{CE}{CB} = \frac{OE}{CA} &\Rightarrow \frac{۳x}{۲a} = \frac{OE}{۲a} \Rightarrow OE = \frac{۳}{۲}a \\ EF = OF + OE &= \frac{۵}{۲}a + \frac{۳}{۲}a = \frac{۸}{۲}a = ۴a \\ \frac{EF}{CD} &= \frac{۴a}{۵a} = \frac{۴}{۵} \end{aligned}$$

گزینه ۴

۲۸

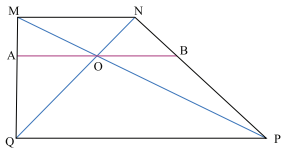
مطابق شکل، ساق‌های دوزنقه ABCD به طول اضلاع $AB = ۴$ ، $CD = ۹$ ، $AD = ۵$ و $BC = ۶$ را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در S قطع کنند.



$$\begin{aligned}
 AB \parallel CD &\xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{SA}{SD} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} \\
 \Rightarrow \frac{b}{b+5} &= \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20 \Rightarrow b = 4 \\ \frac{a}{a+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9a = 4a + 24 \Rightarrow a = 4/8 \end{cases} \\
 \Rightarrow \text{محیط مثلث SAB} &= 4 + 4/8 + 4 = 12/8
 \end{aligned}$$

گزینه ۲

۲۹



باتوجه به قضیه تالس در دو مثلث QMN و PMN داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA}{MN} &= \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} &= \frac{BP}{PN} \end{aligned} \right\} \div \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_1 \Rightarrow \frac{OA}{OB} = 1$$

نکته: قضیه تالس در دوزنقه: $\frac{AQ}{QM} = \frac{BP}{PN}$

گزینه ۲

۳۰

اولاً دقت شود که مثلث ADE و DEC دارای ارتفاع مشترک هستند؛ یعنی اگر از نقطه D، عمود بر ضلع AC وارد کنیم ارتفاع مشترک هر دو مثلث ADE و DEC خواهد بود؛ بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها با نسبت قاعده‌های آن‌ها برابر است؛ یعنی:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{AE}{EC}$$

ازطرفی بنا به قضیه تالس داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$$

گزینه ۲

۳۱

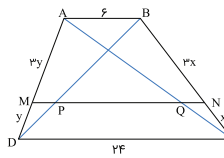
با تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{MB}{NC} \Rightarrow \frac{AD}{MB} = \frac{AE}{NC} \Rightarrow \frac{2/5}{5} = \frac{3}{NC} \Rightarrow NC = \frac{3 \times 5}{2/5} = 6$$

گزینه ۳

۳۲

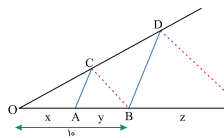
باتوجه به فرض سؤال نتیجه می‌گیریم که $MN \parallel AB \parallel CD$ ، بنابراین داریم:



$$\begin{aligned} \triangle BDC : PN \parallel DC &\Rightarrow \frac{PN}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{PN}{18} = \frac{3}{4} \Rightarrow PN = 18 \\ \triangle ABC : QN \parallel AB &\Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{QN}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow QN = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow PQ &= PN - QN = 18 - \frac{3}{2} = \frac{33}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۴

۳۳



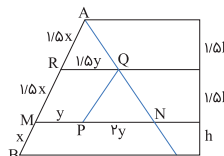
$$\begin{aligned} (OB)^2 &= OA \times OE \Rightarrow 10^2 = x \times (x+1) \Rightarrow 100 = x^2 + 1x \\ x^2 + 1x - 100 &= 0 \Rightarrow (x+12)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \checkmark \\ x = -12 & \times \end{cases} \end{aligned}$$

اگر $x = 4$ باشد در این صورت $AB = 10 - 4 = 6$ می‌شود.

گزینه ۱

۳۴

از Q خطی موازی MN رسم می‌کنیم تا AM را در R قطع کند. حال باتوجه به نسبت‌های تالس در دو مثلث AMN و ABC، می‌توان ابعاد را به‌طور نسبی مشخص کرد.



$$\begin{aligned} \frac{AR}{AM} &= \frac{RQ}{MN} = \frac{1}{5} \\ \frac{AR}{AB} &= \frac{RQ}{BC} = \frac{1/5}{4} \end{aligned}$$

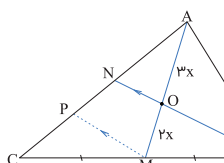
حال نسبت خواسته‌شده را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{\triangle PQN}}{S_{MNCB}} = \frac{\frac{1}{2} \times 1/5h \times 1a}{\frac{1}{2} \times 4y \times h} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۲

۳۵

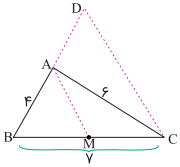
باتوجه به فرض، $\frac{OA}{OM} = \frac{3}{2}$. حال خطی از M به موازات BN رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند، بنابراین:



$$\left. \begin{aligned} \triangle APM : ON \parallel MP &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ON}{MP} = \frac{AO}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow ON = \frac{3}{5}MP \\ \triangle CBN : MP \parallel BN &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MP}{BN} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow BN = 2MP \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{ON}{BN} = \frac{\frac{3}{5}MP}{2MP} = \frac{3}{10}$$

گزینه ۲

۳۶



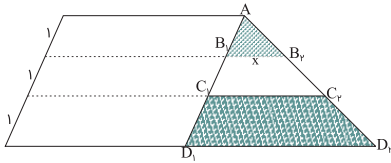
در مثلث BDC می‌دانیم $AM \parallel CD$ است. به کمک رابطه تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{f}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = 2f$$

گزینه ۲

۳۷

سؤال را در حالت خاص حل می‌کنیم. فرض کنید $B_1B_2 = x$ باشد. در این صورت داریم:



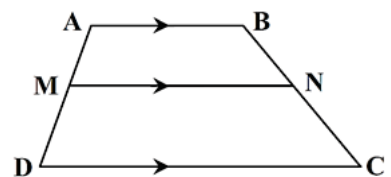
$$\begin{aligned} \Delta AC_1C_2 : \frac{AB_1}{AC_1} &= \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{C_1C_2} \Rightarrow C_1C_2 = 2x \\ \Delta AD_1D_2 : \frac{AB_1}{AD_1} &= \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{D_1D_2} \Rightarrow D_1D_2 = 3x \end{aligned}$$

$$\frac{S_{AB_1B_2}}{S_{C_1C_2D_1D_2}} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times h}{\frac{1}{2} (2x + 3x)h} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۴

۳۸

نکته (قضیه تالس در دوزنقه): در دوزنقه ABCD، اگر $MN \parallel AB \parallel CD$ ، آنگاه:



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

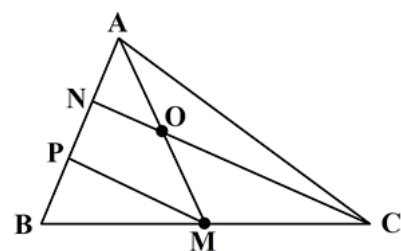
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow{AM=2, BN=3, NC=6} \frac{2}{MD} = \frac{3}{6} \Rightarrow MD = 4$$

گزینه ۱

۳۹

طبق فرض AM میانه است، بنابراین داریم:

$$BM = MC \quad (*)$$



$$\begin{cases} \Delta BNC : PM \parallel NC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{PB}{PN} = \frac{BM}{MC} \xrightarrow{(*)} \frac{PB}{PN} = 1 \Rightarrow PB = PN & \text{(I)} \\ \Delta APM : ON \parallel PM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{PN} = \frac{OA}{OM} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{AN}{PN} = 1 \Rightarrow AN = PN & \text{(II)} \end{cases}$$

حال از تساوی‌های (I) و (II) نتیجه می‌شود $AN = PB$ پس داریم:

$$\frac{AN}{PB} = 1$$

گزینه ۲

۴۰

نکته: یک چهار ضلعی، متوازی‌الاضلاع است؛ اگر و تنها اگر قطرهاش یکدیگر را نصف کنند.

نکته: n عددی زوج (فرد) است، اگر و تنها اگر n^2 عدد زوج (فرد) باشد.

باتوجه به نکات بالا، موارد "الف" و "پ" درست هستند. مورد "ب" نادرست است؛ زیرا از $x^2 = y^2$ نتیجه می‌شود: $x = \pm y$

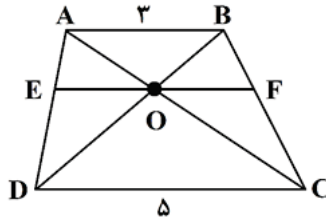
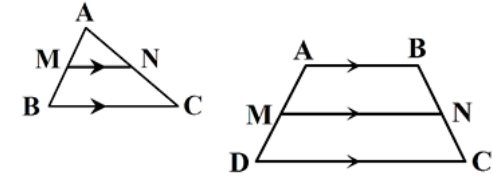
گزینه ۱

۴۱

نکته (تعمیم قضیه تالس): در مثلث ABC ، اگر $MN \parallel BC$ ، آنگاه: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
 نکته (قضیه تالس در دوزنقه): در دوزنقه $ABCD$ ، اگر $MN \parallel AB$ ، آنگاه: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$
 طبق فرض $EF \parallel AB$ ، با استفاده از قضیه تالس در دوزنقه داریم: $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$
 حال با استفاده از ترکیب در مخرج، نتیجه می‌شود: $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$
 اکنون با استفاده از قضیه تالس در مثلث‌های ADC و BCD داریم:

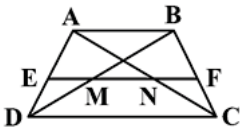
$$\begin{cases} \triangle ADC : OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AE}{AD} & (۱) \\ \triangle BCD : OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{DC} = \frac{BF}{BC} & (۲) \end{cases}$$

حال باتوجه به اینکه $\frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC}$ ، از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:



$$\frac{OE}{DC} = \frac{OF}{DC} \Rightarrow OE = OF \Rightarrow \frac{OE}{OF} = ۱$$

تذکر: در دوزنقه شکل زیر اگر $EF \parallel AB$ ، آنگاه: $EM = NF$

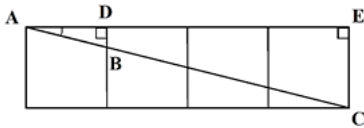


گزینه ۱

۴۲

در مثلث ACE داریم $BD \parallel CE$ ، پس با استفاده از تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{۱} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow BD = ۰/۲۵$$



گزینه ۲

۴۳

ابتدا توجه کنید که طبق فرض AM میانه است، بنابراین $BM = CM$ ، پس:

$$\frac{BM}{CM} = ۱ \quad (*)$$

ازطرفی در مثلث AMC داریم:

$$NQ \parallel AC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{MQ}{MC} \quad (۱)$$

به همین ترتیب در مثلث AMB داریم:

$$NP \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{MP}{BM} \quad (۲)$$

اکنون از (۱) و (۲) داریم $\frac{MQ}{MC} = \frac{MP}{BM}$ که از $MC = BM$ نتیجه می‌شود $MQ = MP$ ، پس:

$$\frac{MP}{MQ} = ۱ \quad (**)$$

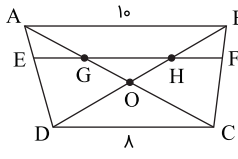
از (*) و (**) داریم:

$$\frac{BM}{CM} + \frac{MP}{MQ} = ۱ + ۱ = ۲$$

گزینه ۳

۴۴

ابتدا در مثلث DAC باتوجه به اینکه $EG \parallel DC$ ، طبق تعمیم قضیه تالس می توان نوشت:



$$\frac{AE}{AD} = \frac{EG}{DC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{EG}{8} \Rightarrow EG = \frac{16}{5}$$

$$\frac{DE}{DA} = \frac{EH}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{EH}{10} \Rightarrow EH = 6$$

به همین ترتیب در مثلث DAB باتوجه به اینکه $EH \parallel AB$ ، طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

اکنون می توان نتیجه گرفت:

$$GH = EH - EG = 6 - \frac{16}{5} = \frac{14}{5}$$

گزینه ۳

۴۵

نکته: در مستطیل، قطر ها باهم برابرند.

گزینه ۱: درست نیست؛ به عنوان مثال مربع ۵، یعنی ۲۵ عددی فرد است ولی خود ۵ زوج نیست.

گزینه ۲: درست نیست؛ به عنوان مثال به ازای $n = 41$ مقدار عبارت مورد نظر عدد اول نیست:

$$41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43$$

گزینه ۳: درست است. (به نکته مراجعه شود)

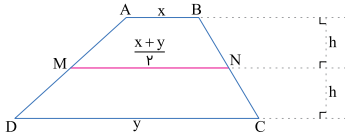
گزینه ۴: درست نیست؛ به عنوان مثال ۲ عددی اول است، ولی فرد نیست.

گزینه ۲

۴۶

می دانیم در دوزنقه طول خط واصل وسط های دو ساق، میانگین دو قاعده است.

باتوجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



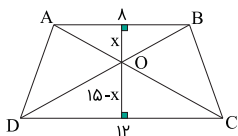
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \left(x + \frac{x+y}{2} \right) (h)}{\frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{2} + y \right) (h)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 15x + 5y = 3x + 9y \Rightarrow 12x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱

۴۷

باتوجه به مفروضات صورت سؤال می توانیم شکل زیر را رسم کنیم:



باتوجه به اینکه $AB \parallel CD$ است، دو مثلث OAB و ODC بنابر حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند:

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15-x} = \frac{1}{12} \xrightarrow{\text{ترکیب صورت در مخرج}} \frac{x}{15} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = 6 \xrightarrow{\text{فاصله تا قاعده بزرگ}} 15 - 6 = 9$$

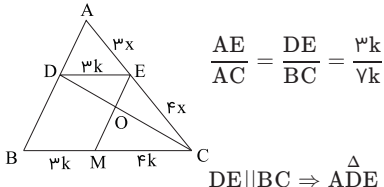
گزینه ۲

۴۸

باتوجه به اینکه $DE \parallel MC$ ، بنابراین دو مثلث ODE و OMC به حالت تساوی دو زاویه باهم متشابه‌اند:

$$\triangle ODE \sim \triangle OMC \Rightarrow \frac{S_{ODE}}{S_{OMC}} = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{DE}{MC}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{DE}{MC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} DE = 3k \\ MC = 4k \end{cases}$$

طبق قضیه تالس داریم:



$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3k}{8k}$$

یعنی $AE = 3x$ و $AC = 8x$ ، پس داریم: $EC = 5x$

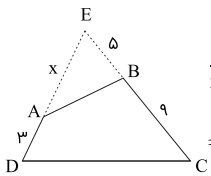
$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3x}{8x}\right)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DECB}} = \frac{9}{64-9}$$

پس مساحت دوزنقه $\frac{40}{9}$ مساحت ADE است.

گزینه ۳

۴۹

$B + D = 180^\circ$ ، پس زاویه خارجی رأس B با D برابر است و زاویه E در هر دو مثلث EAB و EDC مشترک است، پس دو مثلث متشابه‌اند.



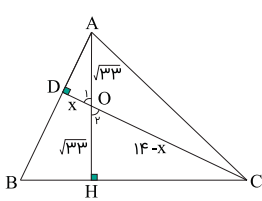
$$\frac{5}{x+3} = \frac{x}{14} \Rightarrow x^2 + 3x = 70 \Rightarrow x^2 + 3x - 70 = 0$$

$$\Rightarrow (x+10)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -10 & \times \\ x = 7 & \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{S_{EAB}}{S_{EDC}} = \left(\frac{5}{7+3}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{EDC}} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{EDC}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۱

۵۰



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{H} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \triangle OAD \sim \triangle OHC$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{13 \cdot 13}} = \frac{\sqrt{13 \cdot 13}}{14-x} \Rightarrow 14x - x^2 = 13 \cdot 13 \Rightarrow x^2 - 14x + 13 \cdot 13 = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x-13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 11 & \times \\ x = 13 & \checkmark \end{cases}$$

توجه کنید چون در مثلث OAD، (OA) وتر است، پس $OD = x$ باید کمتر از $\sqrt{13 \cdot 13}$ باشد.

$$\triangle OAD : AD^2 = OA^2 - OD^2 = 13^2 - 9 = 124$$

$$\triangle ADC : AC^2 = AD^2 + CD^2 = 124 + 196 = 320 \Rightarrow AC = 2\sqrt{80}$$

گزینه ۲

۵۱

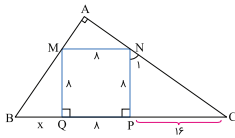
مثلث‌های AMN و ABC دارای ۲ زاویه برابر هستند و متشابه‌اند.

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{5}{3+x} \Rightarrow 9 + 3x = 25 \Rightarrow 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

گزینه ۲

۵۲

چون $MQ = ۸$ پس تمام اضلاع مربع MNPQ برابر با ۸ هستند و داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC : \hat{B} + \hat{C} &= 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{N}_1 \\ \triangle NPC : \hat{C} + \hat{N}_1 &= 90^\circ \end{aligned}$$

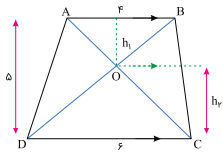
$$\triangle PNC \sim \triangle BMQ \Rightarrow \frac{BQ}{NP} = \frac{MQ}{PC} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{8}{16} \Rightarrow x = ۴$$

$$BC = ۱۶ + ۸ + ۴ = ۲۸$$

گزینه ۱

۵۳

مثلث‌های OAB و ODC متشابه هستند.



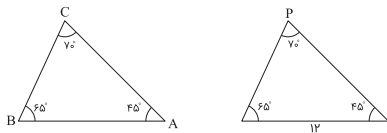
$$\frac{AB}{DC} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_2 = \frac{۳}{۲}h_1$$

$$h_1 + h_2 = \delta \xrightarrow{h_2 = \frac{۳}{۲}h_1} h_1 + \frac{۳}{۲}h_1 = \frac{\delta}{۲}h_1 = \delta \Rightarrow h_1 = ۲$$

$$S_{AOB} = \frac{AB \times h_1}{۲} = \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۴$$

گزینه ۳

۵۴



سؤال گفته نسبت مساحت‌ها $K^۲ = \frac{۳}{۴}$ است، یعنی نسبت تشابه برابر با $K = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

$$\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AB = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۴\sqrt{۳}}{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

گزینه ۳

۵۵

باتوجه به شکل دو مثلث $\triangle OMH \sim \triangle OAB$ نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{MH}{AB} = \frac{OH}{OA} = \frac{\cos \theta}{۱} = \frac{OM}{OB} = \frac{۱}{OB} \Rightarrow \frac{۱}{\cos \theta} = OB$$

گزینه ۲

۵۶

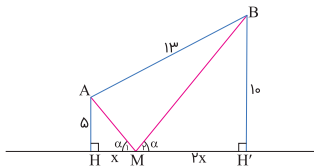
دو مثلث $\triangle OKB \sim \triangle OHM$ متشابه‌اند. نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\underbrace{\frac{OH}{OK} = \frac{\sin \theta}{۱} = \frac{OM}{OB} = \frac{۱}{OB}}_{\text{}} = \frac{HM}{BK} \Rightarrow \frac{۱}{OB} = \sin \theta \Rightarrow \frac{۱}{\sin \theta} = OB$$

گزینه ۴

۵۷

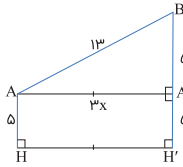
فرض کنیم M نقطهٔ مورد نظر است. می‌دانیم در این صورت $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ، در نتیجه دو مثلث MAH و MBH' متشابه‌اند و داریم:



$$\frac{MH}{MH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{MH}{MH'} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow MH = x, MH' = 2x$$

حال در دوزنقه $ABH'H$ ، ارتفاع AA' را رسم می‌کنیم.

بنابراین:

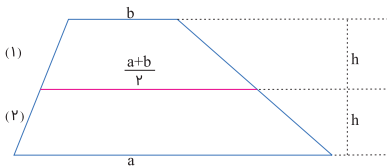


$$\Delta AA'B : \hat{A}' = 90^\circ \Rightarrow (2x)^2 + 2^2 = 1^2 \\ \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲

۵۸

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک دوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{2}$ است.



$$S_2 = 2S_1 \Rightarrow \frac{1}{2}h(a + \frac{a+b}{2}) = 2 \times \frac{1}{2}h(b + \frac{a+b}{2}) \\ \Rightarrow \frac{3a+b}{2} = 3b+a \Rightarrow 3a+b = 6b+2a \Rightarrow a = 5b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۲

۵۹

نکته (قضیهٔ فیثاغورس): در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.

ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس، ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$BC^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Rightarrow BC = 20$$

حال مساحت مثلث را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}(12)(16) = 96 \\ S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AH(20) = 10AH \end{cases} \Rightarrow 10AH = 96 \Rightarrow AH = 9.6$$

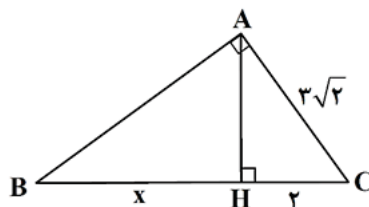
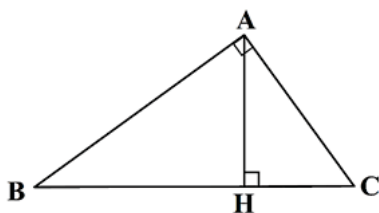
گزینه ۱

۶۰

نکته (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه): در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} ۱) AB^2 &= BH \cdot BC, \quad ۲) AC^2 = CH \cdot BC, \quad ۳) AB^2 + AC^2 = BC^2 \\ ۴) AH^2 &= BH \cdot CH, \quad ۵) AH \cdot BC = AC \cdot AB \end{aligned}$$

با استفاده از رابطهٔ شمارهٔ ۲ داریم:



$$AC^2 = CH \times BC \xrightarrow{AC=3\sqrt{2}, CH=2} (3\sqrt{2})^2 = 2 \times (x+2) \\ \Rightarrow 18 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

گزینه ۲

۶۱

نکته: در یک مثلث نسبت ارتفاعها با عکس نسبت اضلاع نظیر برابر است. (به عنوان مثال $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$)
از آنجا که $a = ۲$ و محیط مثلث ۱۸ است، خواهیم داشت:

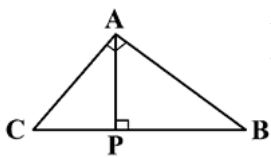
$$a + b + c = ۱۸ \Rightarrow ۲ + b + c = ۱۸ \Rightarrow b + c = ۱۶ \quad (*)$$

$$h_a \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} \xrightarrow{\text{نکته}} \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} \xrightarrow{(*)} \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

گزینه ۴

۶۲

نکته: در مثلث قائم الزاویه زیر، اگر AP ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:



$$AC^2 = PC \times BC$$

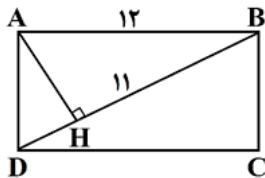
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$AB^2 = PB \times BC$$

$$AP^2 = PC \times PB$$

$$AB \times AC = AP \times BC$$

با استفاده از نکته بالا، در مثلث ABD داریم:



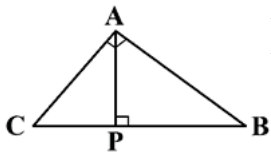
$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow ۱۴۴ = ۱۱ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۴۴}{۱۱}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{۱۴۴}{۱۱} - ۱۱ = \frac{۲۳}{۱۱}$$

گزینه ۴

۶۳

نکته: در مثلث قائم الزاویه زیر، اگر AP ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:



$$AC^2 = PC \times BC$$

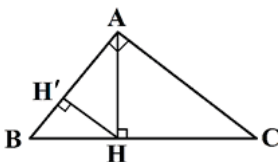
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$AB^2 = PB \times BC$$

$$AP^2 = PC \times PB$$

$$AB \times AC = AP \times BC$$

با استفاده از نکته بالا، در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = ۱۰$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow ۳۶ = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = ۳/۶$$

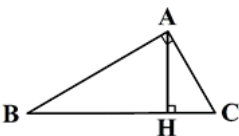
حال با استفاده از نکته بالا، در مثلث قائم الزاویه ABH داریم:

$$BH^2 = BH' \times AB \Rightarrow (۳/۶)^2 = BH' \times ۶ \Rightarrow BH' = \frac{(۳/۶)^2}{۶} = \frac{۳/۶ \times ۳/۶}{۶} = ۰/۶ \times ۳/۶ = ۲/۱۶$$

گزینه ۲

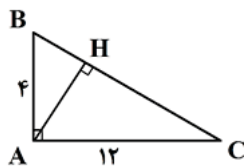
۶۴

نکته (روابط طولی در مثلث قائم الزاویه):



$$AB^2 = BH \times BC, \quad AC^2 = CH \times BC, \quad AB \times AC = AH \times BC$$

$$AH^2 = BH \times CH, \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$$

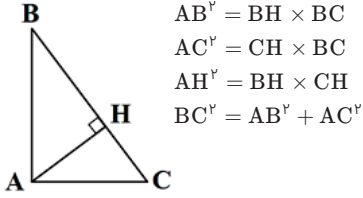


$$\begin{cases} AC^2 = CH \times BC \\ AB^2 = BH \times BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CH \times BC}{BH \times BC} \Rightarrow \left(\frac{AC}{AB} \right)^2 = \frac{CH}{BH} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \left(\frac{۱۲}{۴} \right)^2 = ۹$$

گزینه ۲

۶۵

نکته: در مثلث قائم الزاویه ABC ، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:

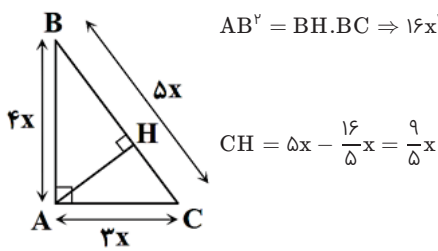


$$\begin{aligned} AB^2 &= BH \times BC \\ AC^2 &= CH \times BC \\ AH^2 &= BH \times CH \\ BC^2 &= AB^2 + AC^2 \end{aligned}$$

ابتدا از شرط $\frac{BC}{AC} = \frac{5}{3}$ می‌توان نتیجه گرفت $BC = 5x$ و $AC = 3x$. پس طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 4x$$

اکنون می‌توان نوشت:



$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 16x^2 = (BH)(5x) \Rightarrow BH = \frac{16}{5}x$$

$$CH = 5x - \frac{16}{5}x = \frac{9}{5}x$$

پس نتیجه می‌شود:

$$\frac{BH}{CH} = \frac{16}{9}$$

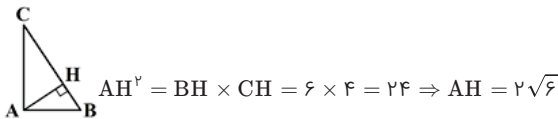
گزینه ۴

۶۶

نکته: در مثلث قائم الزاویه ABC ، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:

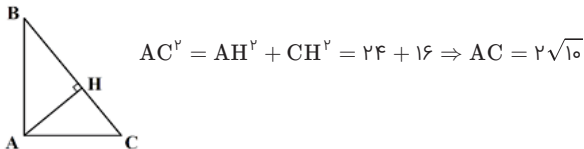
$$AB^2 = BH \times BC, \quad AC^2 = CH \times BC, \quad AH^2 = BH \times CH$$

ابتدا از شرط‌های $2BH = 12$ و $3CH = 12$ نتیجه می‌شود: $BH = 6$ و $CH = 4$ اکنون با استفاده از نکته بالا داریم:



$$AH^2 = BH \times CH = 6 \times 4 = 24 \Rightarrow AH = 2\sqrt{6}$$

اکنون در مثلث ACH طبق قضیه فیثاغورس داریم:

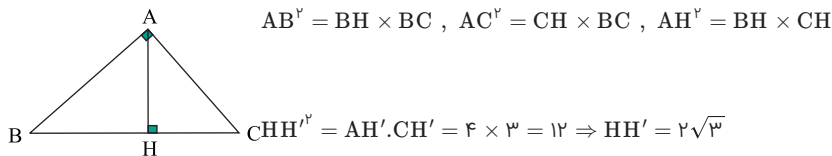


$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 24 + 16 \Rightarrow AC = 2\sqrt{10}$$

گزینه ۱

۶۷

نکته: در مثلث قائم الزاویه ABC ، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، روابط طولی زیر برقرار است:



$$AB^2 = BH \times BC, \quad AC^2 = CH \times BC, \quad AH^2 = BH \times CH$$

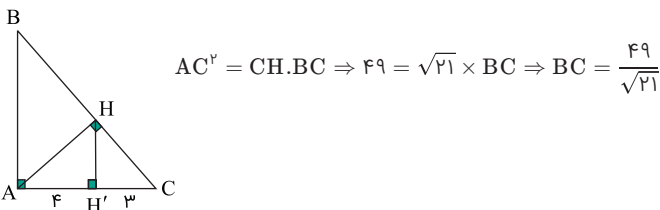
ابتدا در مثلث قائم الزاویه AHC می‌توان نوشت:

$$CH \cdot HH' = AH' \cdot CH' = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow HH' = 2\sqrt{3}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه $HH'C$ طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$CH^2 = HH'^2 + CH'^2 = 12 + 9 = 21 \Rightarrow CH = \sqrt{21}$$

اکنون در مثلث قائم الزاویه ABC می‌توان نوشت:



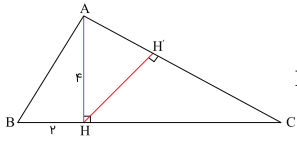
$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow 49 = \sqrt{21} \times BC \Rightarrow BC = \frac{49}{\sqrt{21}}$$

گزینه ۱

۶۸

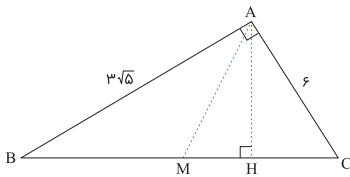
می‌دانیم $AH^2 = BH \cdot HC$ پس $HC = ۸$ و از آن $AC = \sqrt{۴^2 + ۸^2} = ۴\sqrt{۵}$ و از آن $HH' = \frac{AH \times HC}{AC}$ پس:

$$HH' = \frac{۳۲}{۴\sqrt{۵}} = \frac{۸\sqrt{۵}}{۵}$$



گزینه ۴

۶۹



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{۶^2 + (۳\sqrt{۵})^2} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$$

$$\triangle ABC : AB^2 = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$$

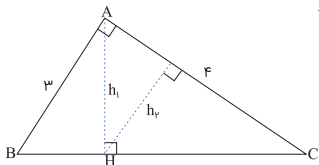
$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = ۵ - ۴/۵ = ۹/۵$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AHM}} = \frac{\frac{AH \times ۹}{۲}}{\frac{AH \times \frac{۹}{۵}}{۲}} = ۱۸$$

گزینه ۲

۷۰

$$BC = \sqrt{۳^2 + ۴^2} = ۵$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مشتک } \hat{C} \\ \angle AHC = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

راحل اول:

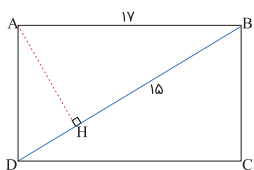
راحل دوم:

$$\triangle ABC : \left\{ \begin{array}{l} h_1 \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_1 = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_1 = \frac{۱۲}{۵} \\ AC^2 = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \frac{۱۶}{۵} \end{array} \right.$$

$$\triangle AHC : h_2 \times AC = h_1 \times HC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۴}{۵}$$

گزینه ۱

۷۱



$$AB^2 = BH \times BD$$

$$۱۷^2 = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^2}{۱۵}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{۱۷^2}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷^2 - ۱۵ \times ۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

گزینه ۴

۷۲

بنابر رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ADE$ داریم:

$$DF^2 = FE \times FA \Rightarrow DF^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow DF = 6$$

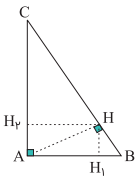
حال قضیه فیثاغورس را در مثلث $\triangle DFE$ می‌نویسیم:

$$DE^2 = DF^2 + FE^2 \Rightarrow DE^2 = 36 + 16 = 52 \Rightarrow DE = \sqrt{52}$$

گزینه ۱

۷۳

وقتی ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه را رسم می‌کنیم، مثلث‌های پدیدآمده با همدیگر و با مثلث اولیه متشابه هستند. طبق گفته سؤال، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم برابر $\frac{1}{3}$ است.



$$\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{1}{3} = k$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle HH_1B}}{S_{\triangle HH_2C}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت ارتفاع‌ها یعنی $\frac{1}{9}$ است. پس مساحت مثلث کوچکتر $\frac{1}{10}$ مساحت مثلث اولیه است.