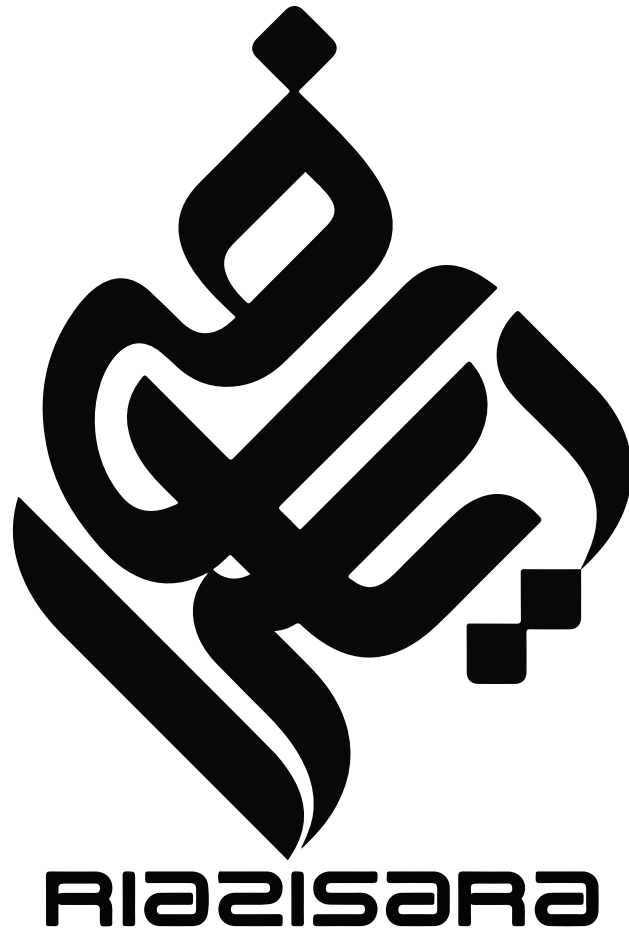




سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات  
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

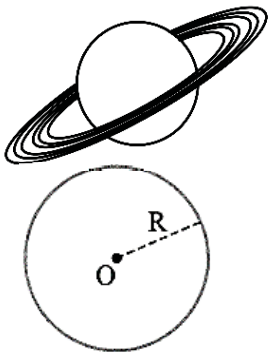
# ریاضی 2

فصل دوم : هندسه



نقاط متساوی الفاصله از یک نقطه: کتاب درسی اولین تعریفی که از هندسه داشته به دایره تعلق گرفته : تمام نقاطی که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به یک فاصله ثابت (شعاع دایره) هستند روی محیط یک دایره قرار دارند و یک دایره را می سازند .

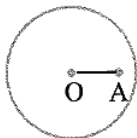
به سیاره زحل خیره شوید ... چه شباهتی با دایره دارد ؟!



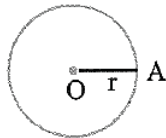
نقطه ثابت O را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم نقاطی از صفحه را بیابیم که فاصله آنها از O برابر R باشد، باید دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم کنیم.

\* بنابراین هر زمان شنیدیم (( از یک نقطه ثابت به فاصله ثابت )) یاد دایره می‌وفتیم ...

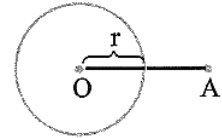
بطور کلی برای بررسی وضعیت یک نقطه و یک دایره فاصله آن نقطه تا مرکز دایره (d) را با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم :  
اگر d با شعاع دایره برابر باشد نقطه روی دایره قرار دارد ، اگر d بزرگتر از شعاع دایره باشد نقطه خارج از دایره قرار دارد ، و اگر d کوچکتر از شعاع باشد نقطه داخل دایره قرار دارد.



$A \Rightarrow OA < r$  درون دایره قرار دارد.

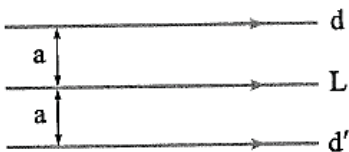


$A \Rightarrow OA = r$  روی دایره قرار دارد.



$A \Rightarrow OA > r$  خارج دایره واقع است.

نقاط متساوی الفاصله از یک خط : می‌دانیم که فاصله ی بین دو خط موازی همواره برابر و مقدار ثابتی است ، بنابراین اگر قرار باشد نقطه ای از یک خط به فاصله ثابت باید روی خطی موازی با آن خط قرار داشته باشد ، بنابراین :



اگر دنبال نقاطی باشیم که از خط L به فاصله معلوم a باشند، این نقاط روی دو خط موازی L هستند که در طرفین L قرار دارند و باید آنها را رسم کنیم.

نقطه A به فاصله ۳ متری از خط d در یک صفحه قرار دارد. چند نقطه به فاصله ۴ متری از A و ۲ متری از خط d در

۴ (۴)

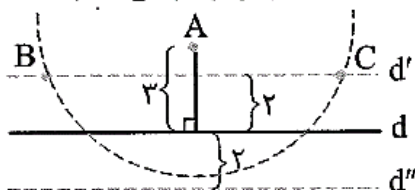
۲ (۳)

۱ (۲)

۱ صفر

این صفحه وجود دارد؟

به مرکز A و به شعاع ۴ متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. هم‌چنین دو خط به موازات d و به فاصله ۲ متر از آن رسم می‌کنیم:



دایره خط d' را در دو نقطه B و C قطع می‌کند (دایره خط d'' را قطع نمی‌کند، زیرا فاصله نقطه A تا خط d'' برابر ۵ است ولی اندازه شعاع دایره برابر ۴ می‌باشد)، پس دو نقطه مطلوب وجود دارد و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

نقطه O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه O به فاصله ۳ و از خط L به فاصله ۲ باشند؟

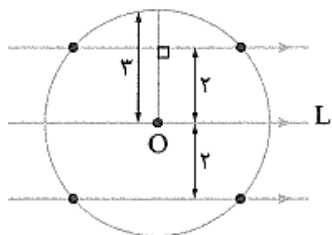
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

خُب نقاطی که از نقطه O به فاصله ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است و نقاطی که از خط L به فاصله ۲ هستند، دو خط موازی خط L خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، هر دو ویژگی موردنظر را دارند. پس چهار نقطه با این ویژگی‌ها وجود دارد.



دو نقطه A و B به فاصله ۴ از هم هستند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۲ و از نقطه B به فاصله ۳ باشد؟

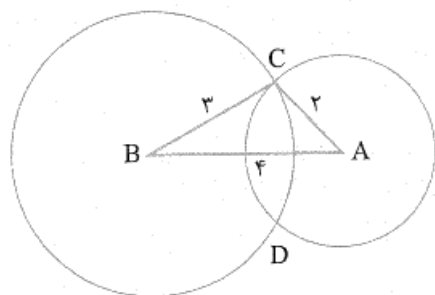
۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱) صفر

ابتدا دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ رسم می‌کنیم، چرا که تمام نقاطی که از B به فاصله ۳ هستند روی این دایره قرار دارند. همین‌طور دایره‌ای هم به مرکز A و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. همین‌طور که می‌بینید، این دو دایره یکدیگر را در نقاط C و D قطع می‌کنند. این دو نقطه هر دو ویژگی موردنظر را دارند. دقت کنید که چون  $2 + 3 > 4$  است، دو تا نقطه با این ویژگی داشتیم یعنی دو دایره توانستند یکدیگر را قطع کنند.



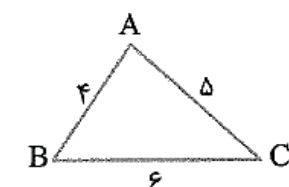
اگر مجموع شعاع دایره‌ها برابر با ۴ می‌شد، دایره‌ها بر هم مماس می‌شدند و یک نقطه به وجود می‌آمد و اگر مجموع شعاع دایره‌ها از ۴ کمتر بود، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کردند و نقطه‌ای با این ویژگی پیدا نمی‌شد.

قبول دارید که در این تست در واقع مثلی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ رسم کردیم؟

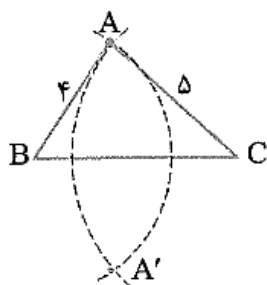
**رسم مثلی که طول سه ضلع آن معلوم باشد.**

**مثال:** مثلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴، ۵ و ۶ باشد.

فرض کنیم شکل مثلث با اندازه‌های داده‌شده به صورت مقابل باشد:



ابتدا پاره خط BC را به طول ۶ رسم می‌کنیم. اگر نقطه A را به فاصله ۴ از B و به فاصله ۵ از C مشخص کنیم، آن‌گاه مثلث ABC با طول اضلاع ۴، ۵ و ۶ رسم می‌شود. برای پیدا کردن نقطه A، به مرکز B و شعاع ۴ و هم‌چنین به مرکز C و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دو دایره همدیگر را در نقطه A قطع می‌کنند:



با توجه به شکل، نقطه‌ای مانند A' نیز پیدا شده است که اگر آن را به B و C وصل کنیم، جواب مسئله است ولی چون دو مثلث ABC و A'BC یکسان هستند، پس مسئله یک جواب دارد.

اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند، آیا مثلی وجود دارد که طول اضلاع آن a، b و c باشد؟ اگر رسم مثال قبل را در نظر بگیریم، شرط داشتن جواب آن است که دو کمان همدیگر را قطع کنند و این هنگامی امکان‌پذیر است که مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگ‌تر باشد:

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b$$

سه پاره خط به طول های  $4x-4$ ،  $x+7$  و  $6x$  اضلاع مثلثی هستند. تمام مقادیر  $x$  به کدام صورت است؟

$$\frac{11}{9} < x < 4 \quad (4)$$

$$2 < x < 3 \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} < x < 3 \quad (2)$$

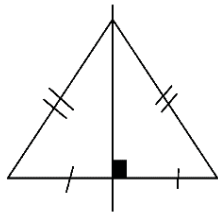
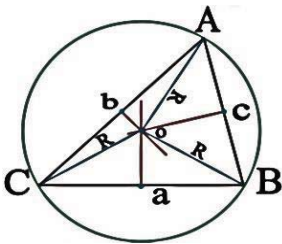
$$\frac{11}{9} < x < 3 \quad (1)$$

برای آن که سه عدد، طول اضلاع یک مثلث باشند، باید مجموع هر دو عدد از عدد سوم بزرگتر باشد. پس:

$$\begin{cases} 4x-4 < (x+7)+6x \\ x+7 < (4x-4)+6x \\ 6x < (4x-4)+(x+7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4-7 < 7x-4x \\ 7+4 < 10x-x \\ 6x-5x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > -11 \\ 9x > 11 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{11}{3} \\ x > \frac{11}{9} \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{11}{9} \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{9} < x < 3 \Rightarrow \text{گزینه (1)}$$

**عمودمنصف و خواص و ترسیم آن :** همانطور که از نامش مشخص است خطی است که در وسط پاره خط بر آن عمود است. حال به ویژگی هایش توجه کنید :

1. هر نقطه روی عمود منصف از دوسر پاره خط به یک فاصله است و بالعکس
2. عمود منصف های هر مثلث هم رأسند، یعنی عمود منصف های ضلع های مثلث در یک نقطه مشترکند.
3. محل برخورد عمودمنصف های اضلاع یک مثلث مرکز دایره محیطی آن مثلث است
4. با توجه به شکل نکته قبلی براحتی می توان متوجه شد که فاصله ی محل برخورد عمود منصف ها تا سه راس مثلث یکسان است و برابر است با شعاع دایره محیطی.



بنابراین هر کجا شنیدیم (( فاصله از دو نقطه A , B برابر است )) مکان هندسی می شود عمود منصف پاره خط AB

طریقه رسم عمودمنصف که در سال های گذشته به شما آموزش داده شده برای یادآوری هم میتوانید به صفحه ۲۶ کتاب درسی مراجعه کنید ...

حال برویم سراغ کاربرد های رسم عمودمنصف در حل دیگر مسائل ...

- رسم عمودمنصف بر یک خط از یک نقطه روی آن :  
میخواهیم روی نقطه M واقع بر خط d عمود منصف را رسم کنیم . ابتدا از نقطه M روی خط به شعاع دلخواه کمائی رسم می کنیم که خط را در نقاط A , B قطع کند سپس عمود منصف AB را رسم می کنیم
- رسم عمود بر یک خط از نقطه ای بیرون از آن :  
فرض کنید از نقطه N بیرون از خط d میخواهیم عمودی بر این خط رسم کنیم . به مرکز N یک کمان طوری رسم می کنیم که خط d را در دو نقطه A , B قطع کند ، عمودمنصف AB را رسم میکنیم
- ترسیم خطی موازی با یک خط از نقطه ای بیرون آن  
فرض کنید از نقطه p بیرون خط d میخواهیم خطی موازی با d رسم کنیم . ابتدا به روش ۲ خطی عمود بر خط d رسم میکنیم (d<sub>1</sub>) و سپس به روش ۱ از نقطه p واقه بر خط d<sub>1</sub> خطی عمود بر آن رسم می کنیم (d<sub>2</sub>) حال d<sub>2</sub> و d موازی اند.



**سوال :** نقاط متمایز  $A, B, C$  روی یک خط قرار دارند چند نقطه در صفحه وجود دارد که از این سه نقطه به یک فاصله هستند؟



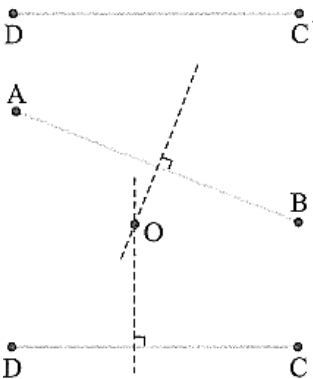
دو پاره خط  $AB$  و  $DC$  مطابق شکل در نظر گرفته شده اند. چند نقطه وجود دارد که از نقاط  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از نقاط  $C$  و  $D$  هم به یک فاصله باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

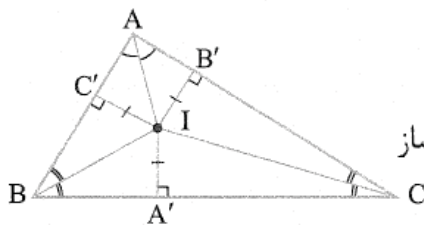
(۳) ۲

(۴) ۳



نقطاتی که از دو سر پاره خط  $AB$  فاصله های مساوی دارند، همگی روی عمودمنصف این پاره خط قرار دارند و نقطاتی هم که از دو سر پاره خط  $DC$  به یک فاصله اند، روی عمودمنصف پاره خط  $DC$  قرار دارند؛ پس نقطه ای را می خواهیم که هم روی عمودمنصف  $AB$  باشد، هم روی عمودمنصف  $DC$  باشد.

تنها نقطه این جوری، محل برخورد عمودمنصف هاست! پس فقط یک نقطه با این ویژگی وجود دارد.



چند نقطه درون مثلث وجود دارد که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد؟

نیمسازهای مثلث همیشه در یک نقطه به هم می رسند! این نقطه چون روی نیمساز زاویه

$A$  است، پس فاصله اش از اضلاع این زاویه مساوی است؛ یعنی:  $IB' = IC'$  و چون روی نیمساز

زاویه  $B$  است، پس  $IC' = IA'$  پس این نقطه فاصله اش از سه ضلع مثلث برابر است.

عمودمنصف های مثلث قائم الزاویه، همدیگر را در وسط وتر قطع می کنند. بنابراین طول شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزاویه برابر  $R = \frac{a}{2}$  است که  $a$  طول وتر مثلث می باشد.

طول شعاع دایره محیطی مثلث با اضلاع ۲، ۴ و  $2\sqrt{5}$  کدام است؟

(۴) ۳

(۳)  $\sqrt{5}$

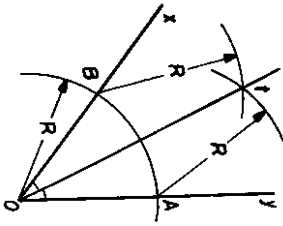
(۲) ۲

(۱) ۱

اعداد ۲، ۴ و  $2\sqrt{5}$ ، اعداد فیثاغورسی هستند، یعنی در تساوی  $a^2 = b^2 + c^2$  صدق می کنند  $((2\sqrt{5})^2 = 4^2 + 2^2)$ ، پس

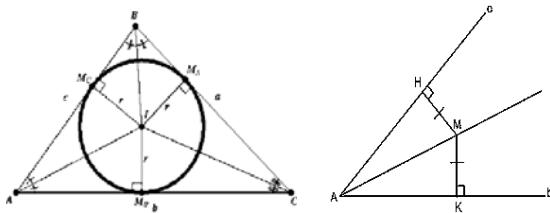
مثلث قائم الزاویه است و در نتیجه طول شعاع دایره محیطی مثلث برابر  $\frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$  است و در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

**نیمساز ، خواص و ترسیم آن :** پاره خطی است که یک زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند و همواره بین دو ضلع زاویه قرار دارد.

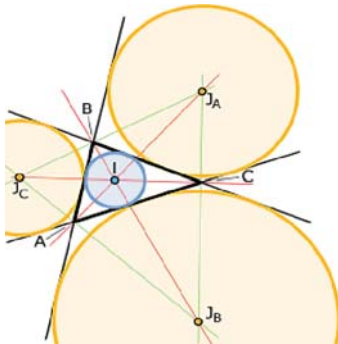


مهمترین ویژگی نیمساز عبارتند از :

1. هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس
2. محل برخورد نیمساز های داخلی یک مثلث مرکز دایه محاطی آن مثلث می باشد
3. با توجه به نکته بالا براحتی می توان فهمید که نقطه برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است



بنابراین هر کجا شنیدیم (( فاصله از دو ضلع زاویه برابر است)) مکان هندسی می شود نیمساز زاویه بین آن دو ضلع



**سوال :** به نظر شما در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که از سه ضلع یا امتداد سه ضلع مثلث به یک فاصله باشد؟! به شکل زیر توجه کنید

**سوال :** در مثلث ABC طول دو ضلع AC , AB بترتیب ۶ و ۴ سانتی متر و مساحت آن ۱۰ سانتی متر مربع میباشد اگر نیمساز داخلی زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع کند فاصله نقطه D از ضلع AB کدام است؟ راهنمایی : ابتدا شکل را رسم کنید و بعد از رسم نیمساز مربوطه مساحت های دو مثلث جدید ساخته شده را مقایسه کنید ، آیا از این مقایسه می توان نتیجه گرفت که فاصله نقطه D از دو ضلع دیگر برابر است؟

**سوال :** خط موربی دو خط موازی D و D' را بترتیب در نقاط B و C قطع می کند اگر نقطه O از هر سه خط به یک فاصله باشد زاویه BOC چند درجه است؟

راهنمایی : طبق معمول ابتدا شکل را بدرستی رسم می کنیم سپس از عکس قضیه نیمساز ها و قضیه خطوط موازی و مورب استفاده می کنیم



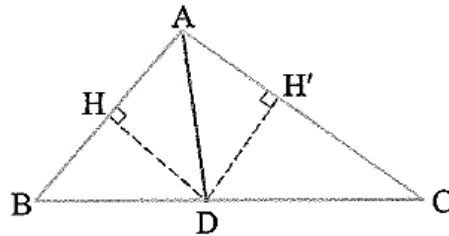
در مثلث  $ABC$ ،  $AB = 4$  و  $AC = 5$  می باشد. نیمساز داخلی زاویه  $A$ ، ضلع  $BC$  را در  $D$  قطع می کند. مساحت مثلث  $ABD$ ، چند برابر مساحت مثلث  $ACD$  است؟

(۴)  $\frac{5}{9}$

(۳)  $\frac{4}{9}$

(۲)  $\frac{4}{5}$

(۱)  $\frac{5}{4}$



از نقطه  $D$ ، دو عمود  $DH$  و  $DH'$  را به ترتیب بر  $AB$  و  $AC$  رسم می کنیم:

چون نقطه  $D$  روی نیمساز زاویه  $A$  قرار دارد، پس فاصله  $D$  از  $AB$  و  $AC$  یکسان است.

گزینه (۲) صحیح است.  $\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}DH \times AB}{\frac{1}{2}DH' \times AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow$  روی نیمساز زاویه  $A$  قرار دارد.  $D \Rightarrow DH = DH' \Rightarrow$

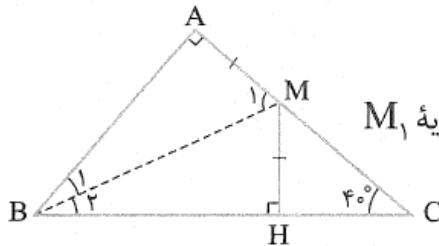
در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $\hat{C} = 40^\circ$ )، نقطه  $M$  روی ضلع  $AC$  قرار دارد. از  $M$  عمودی بر  $BC$  رسم می کنیم تا آن را در  $H$  قطع کند. اگر  $MH = AM$  باشد، زاویه  $AMB$  چند درجه است؟

(۴)  $70^\circ$

(۳)  $115^\circ$

(۲)  $100^\circ$

(۱)  $65^\circ$



در واقع فاصله نقطه  $M$  از ضلع های  $AB$  و  $BC$  برابر

است، پس  $M$  روی نیمساز زاویه  $B$  قرار دارد، بنابراین  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$ ، پس زاویه  $M_1$   $\Delta ABM : \hat{M}_1 = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$  برابر است با:

در مبحث هندسه مهمترین بخش یادگیری دیدن تست های متفاوت و آشنا شدن با کاربرد مفاهیم گفته شده در درسنامه در خلال حل تست های متعدد است، از این رو برای رسیدن به تسلط بالا در این مبحث ضرورت دارد که تست های پیش رو را تمرین کنید ....



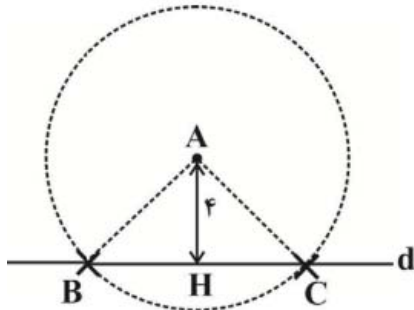
نقطه A به فاصله ۴ سانتیمتر از خط d قرار دارد. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقین ABC ( $AB = AC$ ) را طوری رسم کنیم که مساحت آن ۱۲ سانتیمتر مربع باشد و دو رأس آن روی خط d باشد. برای یافتن دو رأس مثلث، دایره‌ای به مرکز A و به چه شعاعی بزنیم؟

$4\sqrt{2}$  cm (۴)

۶ cm (۳)

۵ cm (۲)

۴/۵ cm (۱)



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} (BC)(4)$$

$$\Rightarrow 12 = 2BC \Rightarrow BC = 6 \text{ cm} \Rightarrow BH = HC = 3 \text{ cm}$$

$\Delta AHC \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + (3)^2 \Rightarrow AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5 \text{ cm}$

مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید. اگر O محل برخورد عمود منصف‌های اضلاع AB و BC باشد، به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای می‌زنیم. این دایره کدام ویژگی را دارد؟

(۱) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در چهار نقطه دیگر قطع می‌کند.

(۲) این دایره از رأس A عبور کرده و مثلث را در نقطه دیگری قطع نمی‌کند.

(۳) در این دایره مرکز O همواره در خارج از مثلث قرار می‌گیرد.

(۴) این دایره از هر سه رأس مثلث یعنی A، B و C عبور می‌کند.

چون محل برخورد عمود منصف‌ها یک‌تاست، بنابراین نقطه‌ی O محل برخورد هر سه عمود منصف است. همچنین اگر O

روی عمود منصف AB باشد  $OA = OB$  است و نیز O روی عمود منصف BC است پس  $OB = OC$

است و همین‌طور O روی عمود منصف AC است پس  $OA = OC$  خواهد بود. بنابراین

$OA = OB = OC = r$  می‌باشد، یعنی اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع  $OA = r$  بزنیم از سه رأس A، B و C

عبور می‌کند که اصطلاحاً می‌گوئیم این دایره محیط بر مثلث است. در ضمن اگر مثلث یک زاویه بیشتر از ۹۰ درجه

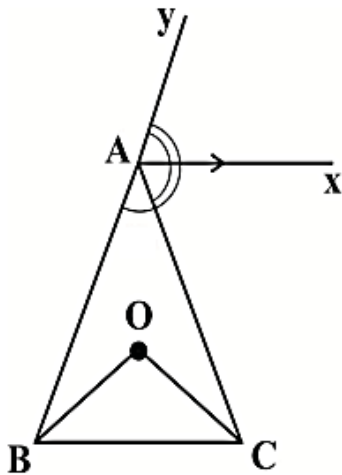
داشته باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها خارج مثلث است و اگر یک زاویه ۹۰° داشته باشد، محل برخورد

عمود منصف‌ها روی وتر است و اگر هر سه زاویه مثلث حاده باشد، محل برخورد عمود منصف‌ها داخل مثلث است.

بنابراین گزینه‌ی «۳» نیز غلط است و فقط گزینه‌ی «۴» صحیح می‌باشد.



شکل زیر  $Ax$  نیمساز زاویه  $CAY$  و  $Ax \parallel BC$  است. اگر  $BO$  و  $CO$  نیمساز زوایای  $B$  و  $C$  باشند و  $\hat{B} = 75^\circ$ ، اندازه  $\hat{BOC}$  چند درجه است؟ (  $Ay$  در امتداد  $BA$  است.)



(۱)  $95^\circ$

(۲)  $100^\circ$

(۳)  $105^\circ$

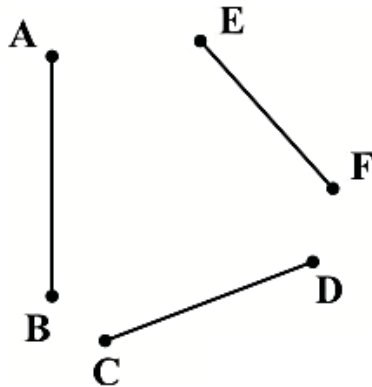
(۴)  $110^\circ$

$$\hat{CAy} \text{ نیمساز } Ax \Rightarrow \hat{yAx} = \hat{xAC}$$

از طرفی زاویه‌ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش، پس:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = \hat{yAC} = 2\hat{xAC} \\ Ax \parallel BC, AC \text{ مورب} \Rightarrow \hat{C} = \hat{xAC} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

در شکل زیر نقطه‌ای وجود دارد که فاصله آن از  $A$  و  $B$  یکسان، از  $C$  و  $D$  یکسان و از  $E$  و  $F$  نیز یکسان است. چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟



(الف) محل برخورد عمودمنصف‌های  $AB$  و  $EF$  روی عمودمنصف  $CD$  قرار دارد.

(ب) محل برخورد عمودمنصف‌های سه پاره خط  $AB$ ،  $CD$  و  $EF$  از شش نقطه  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  و  $F$  به یک فاصله است.

(پ) از امتداد سه پاره خط  $AB$ ،  $CD$  و  $EF$  مثلثی به دست می‌آید که عمودمنصف‌های آن مثلث همان عمودمنصف‌های سه پاره خط داده شده است.

(۴) هیچ

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

چون نقطه‌ای وجود دارد که از دو سر پاره خط  $AB$  به یک فاصله و از دو سر پاره خط  $EF$  به یک فاصله است پس روی عمودمنصف‌های  $AB$  و  $EF$  قرار دارد همچنین از دو سر پاره خط  $CD$  به یک فاصله است، پس روی عمود منصف  $CD$  قرار دارد. پس مورد (الف) درست است. اما لزوماً موارد (ب) و (پ) درست نیست.



- نقطه C از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است و روی AB قرار ندارد. آن گاه کدام گزینه می تواند نادرست باشد؟

(۱) وسط پاره خط AB روی نیمساز زاویه  $\widehat{ACB}$  قرار دارد.

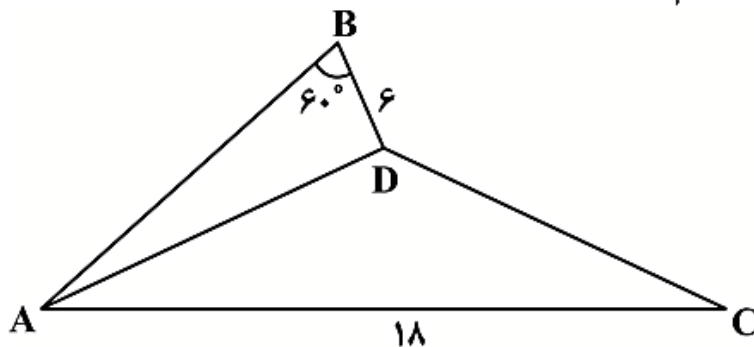
(۲) وسط پاره خط AC از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است.

(۳) C روی عمود منصف AB قرار دارد.

(۴) مثلث ABC متساوی الساقین است.

نقطه‌ی C از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است، پس باید روی عمودمنصف پاره خط AB باشد. از طرفی چون  $AC = BC$  پس مثلث ABC متساوی الساقین است. نیمساز زاویه رأس (C) و عمودمنصف بر هم منطبق‌اند. پس تنها گزینه‌ی «۲» می تواند نادرست باشد.

- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A است. مساحت مثلث ACD کدام است؟



(۱)  $9\sqrt{3}$

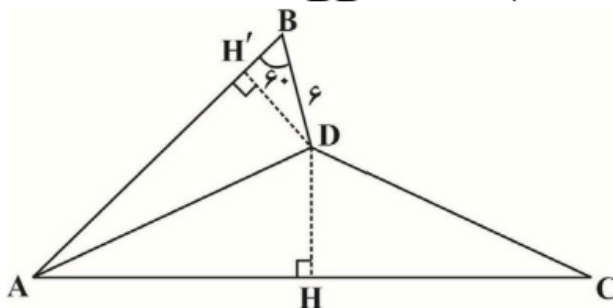
(۲)  $3\sqrt{3}$

(۳)  $27\sqrt{3}$

(۴)  $6\sqrt{3}$

چون D روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یکسان است. از D به هر دو ضلع عمود رسم می کنیم:

$$\triangle BDH' : \sin 60^\circ = \frac{DH'}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DH'}{6} \Rightarrow DH' = 3\sqrt{3} \Rightarrow DH = 3\sqrt{3}$$



بنابراین مساحت مثلث ACD برابر می شود با:

$$S_{\triangle ACD} = \frac{DH \times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 18}{2} = 27\sqrt{3}$$

محل برخورد قطرهای یک مربع، مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ است. اگر طول قطر مربع ۸ واحد باشد، دایره و مربع در چند

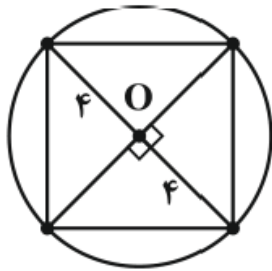
نقطه با یکدیگر برخورد دارند؟

(۴) صفر

(۳) ۲

(۲) ۴

(۱) ۸



می‌دانیم در مربع، قطرهای عمود منصف یکدیگرند. حال با توجه به اینکه شعاع دایره دقیقاً برابر نصف قطر مربع است ( $\frac{1}{2} = 4$ )، لذا دایره مذکور، مربع را در رأس‌هایش، یعنی در 4 نقطه قطع می‌کند.

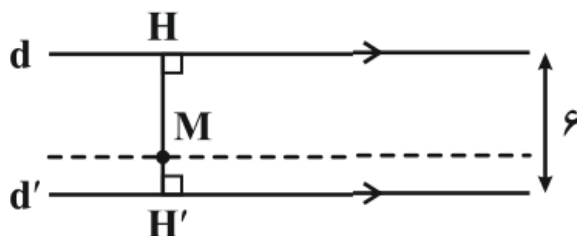
اگر فاصله دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر 6 باشد، در این صورت کدام گزینه نشانگر همه نقاطی است که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر 2 باشد؟

(1) یک خط موازی با  $d$  و  $d'$  و بین این دو

(2) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  و بین این دو

(3) دو خط موازی با  $d$  و  $d'$  و خارج این دو

(4) چهار خط موازی  $d$  و  $d'$



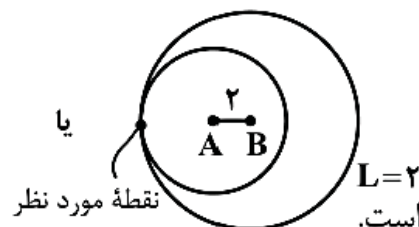
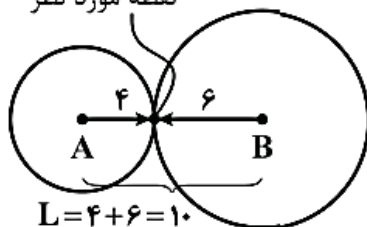
با فرض اینکه نقطه  $M$  بین دو خط و نزدیک به خط  $d'$  باشد، داریم:

$$\begin{aligned} MH + MH' &= 6 \\ MH - MH' &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} MH = 4 \\ MH' = 2 \end{cases}$$

بنابراین نقاطی که روی خطی موازی دو خط  $d$  و  $d'$  و به فاصله 2 از خط  $d'$  باشند، ویژگی‌های مسئله را دارا می‌باشند. مشابه همین حالت برای زمانی رخ می‌دهد که نقطه  $M$  بین دو خط و این بار نزدیک خط  $d$  باشد.

پاره خط  $AB$  به طول  $L$  مفروض است. اگر با توجه به مقدار  $L$ ، فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از  $A$  به فاصله 4 و از  $B$  به فاصله 6 باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای  $L$  کدام است؟

(1) 6 (2) 12 (3) 10 (4) 9  
در صورتی که  $L$  یکی از دو مقدار 2 یا 10 را داشته باشد، نقطه مورد نظر تنها یک نقطه در صفحه می‌باشد که از  $A$  به فاصله 4 و از  $B$  به فاصله 6 است.



پس 2 یا  $L = 10$  بوده که جمع آن‌ها  $10 + 2 = 12$  است.

مربعی به ضلع 4 مفروض است. اگر  $A$ ، ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطه درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رأس‌های مربع بیشتر از یک باشد، بیشترین مساحت ناحیه  $A$  کدام است؟

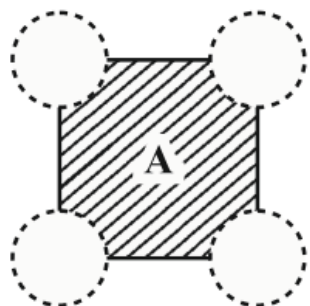
(4)  $\frac{\pi}{4}$

(3)  $\pi$

(2)  $16 - 2\pi$

(1)  $16 - \pi$

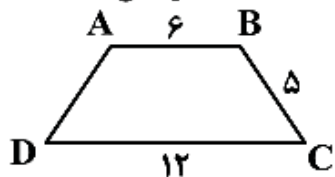
۴ دایره به مرکز رئوس مربع و به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. ناحیه A، ناحیه هاشورخورده مطابق شکل است که برای محاسبه مساحت آن کافی است از مساحت مربع، ۴ تا مساحت ربع دایره (یا مساحت ۱ دایره کامل) را حذف کنیم:



$$(مساحت ربع دایره \times 4) - مساحت مربع = مساحت ناحیه A$$

$$= 16 - 4 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} = 16 - \pi$$

در ذوزنقه متساوی الساقین زیر، نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C هم‌دیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. فاصله O از ضلع BC کدام است؟



(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۲/۵

(۳) ۳/۵

اگر در یک مثلث، مجموع دو زاویه برابر با زاویه سوم باشد، آنگاه محل تلاقی عمود منصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

(۲) روی رأس بزرگ‌ترین زاویه

(۱) درون مثلث

(۴) روی بزرگ‌ترین ضلع

(۳) بیرون مثلث





داخل مثلث  $ABC$  دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر هر سه ضلع آن مماس باشد. اگر  $O$  مرکز این دایره باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) قطر دایره برابر ضلع کوچکتر مثلث است.

(۲) نقطه‌ی  $O$  محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث است.

(۳) قطر دایره برابر ضلع بزرگ‌تر مثلث است.

(۴) نقطه‌ی  $O$  محل برخورد سه عمودمنصف اضلاع مثلث است.



## درس دوم : نسبت و تناسب

**تعریف:**  $\frac{a}{b}$  را یک نسبت و به تساوی  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  یک تناسب می گوئیم .

بچه ها نسبت ها نه تنها در ریاضیات بلکه در اکثر علوم دیگر یکی از پر کاربردترین ابزارها محسوب می شوند . لذا برای استفاده درست از این ابزار پر کاربرد به فنون زیر نیازمندیم:

|   |                                                                                                          |                                                                                     |                                                   |                              |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------|
| ۱ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$                                                      | $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$               | $b \neq 0$ و $d \neq 0$                           | (طرفین وسطین کردن)           |
| ۲ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$                                        | $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$                 | $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$ | (معکوس کردن طرفین تناسب)     |
| ۳ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$         | $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$                   | $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$ | (تعویض جای طرفین یا وسطین)   |
| ۴ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ | $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$                  | $b \neq 0$ و $d \neq 0$                           | (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج) |
| ۵ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ | $\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$             | $b \neq 0$ و $d \neq 0$                           | (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج) |
| ۶ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$                      | $\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$ | $b \neq 0$ و $d \neq 0$                           |                              |

### انواع استدلال : ۱- استدلال استقرایی ۲- استدلال استنتاجی

**استدلال استقرایی :** نتیجه گیری کلی ای که بر اساس مجموعه محدودی از مشاهدات بدست می آید.

استدلال استقرایی همواره نتیجه درست به همراه ندارد ، گاهی اوقات می توان با یک مثال این نتیجه گیری کلی را رد کرد ، که به آن مثال نقض می گوئیم . پر واضح است که در این روش ما از جزء به کل می رسم

**استدلال استنتاجی :** نتیجه گیری کلی که بر اساس حکم های پذیرفته شده از قبل بدست می آید .

استدلال استنتاجی همواره درست است و به آن **قضیه** می گوئیم . هر قضیه از دو قسمت فرض  $P$  و حکم  $Q$  تشکیل شده است که آن را بصورت شرطی می توان بیان کرد : ( اگر  $P$  آنگاه  $Q$  )

**عکس قضیه :** اگر جای فرض و حکم را در قضیه عوض کنیم ، عکس قضیه ساخته می شود که اگر عکس قضیه هم درست باشد آن قضیه را **قضیه دو شرطی** می گوئیم و آن را بصورت (  $P$  اگر و تنها اگر  $Q$  ) می نویسیم .

**قضیه :** در مثلث همواره مجموع زوایای داخلی  $180^\circ$  درجه می باشد

**شکل شرطی قضیه :** اگر یک چند ضلعی مثلث باشد آنگاه مجموع زوایای داخلی آن  $180^\circ$  درجه است

**عکس قضیه :** اگر مجموع زوایای یک چند ضلعی  $180^\circ$  درجه باشد آن چند ضلعی مثلث است

**شکل دوشروطی قضیه :** یک چند ضلعی مثلث است اگر و تنها اگر مجموع زوایای داخلی آن  $180^\circ$  درجه باشد



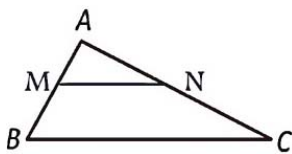
مثال نقضی برای گزاره ی زیر بنویسید ، این گزاره از کدام استدلال نتیجه گیری شده؟

گزاره : حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

**برهان خلف (اثبات غیر مستقیم) :** گاهی اوقات اثبات خود مسئله به صورت مستقیم بسیار سخت یا امکان پذیر نمی باشد. در این موارد از روش غیر مستقیم استفاده می کنیم که شامل مراحل زیر می باشد:

- فرض می کنیم حکم درست نباشد
- نشان می دهیم که درست نبودن حکم با حقایق بدیهی و پذیرفته شده از قبل تناقض دارد
- با اثبات اینکه حکم نمیتواند نادرست باشد نتیجه می گیریم که حکم درست است

**قضیه تالس :** هرگاه در یک مثلث خطی موازی یک ضلع دو ضلع دیگر را قطع کند نسبت پاره های متناظر ایجاد شده روی آن دو ضلع برابرند ، توجه کنید :



$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

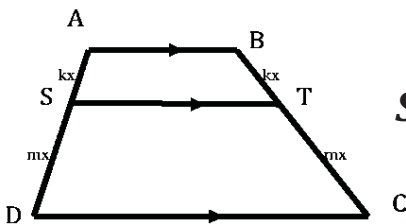
نسبت جزء به جزء

\* نتیجه بسیار مهم : بکمک ترکیب در مخرج و اضافه کردن پاره خطی موازی AB از N به ضلع BC ثابت می شود :

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

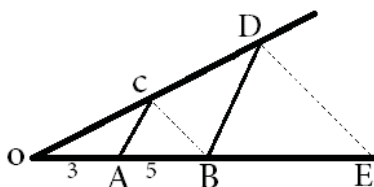
توجه داشته باشید که عکس قضیه تالس نیز برقرار است .

**نکته مهم :** قضیه تالس در ذوزنقه : در ذوزنقه زیر اگر ST موازی با قاعده باشد داریم  $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$  همچنین



$$ST = \frac{mAB + kDC}{m + k}$$

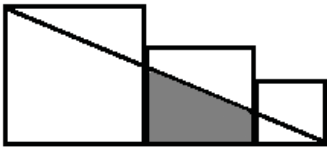
در صورتی که پاره خط ST وسط های دو ساق را به هم وصل کند اندازه اش برابر میانگین اندازه دو قاعده می باشد.



**تمرین ۱ :** در شکل زیر دو جفت پاره خط موازی اند ، اندازه BE کدام است؟  
**راهنمایی :** برای هر دو جفت خطوط موازی قضیه تالس را بنویسید ... آیا طرفین اولشان برابر نیستند؟!

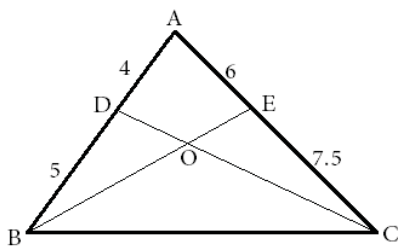
جواب انتهایی :  $\frac{16}{7}$

**تمرین ۲:** در شکل زیر سه مربع به طول اضلاع ۱ و ۲ و ۴ واحد کنار هم قرار گرفته اند ، مساحت دوزنقه ی سایه زده شده کدام است؟



**راهنمایی :** بکمک قضیه تالس در مثلث بزرگ و با موازی قرار دادن اضلاع مربع وسط با قاعده مثلث بزرگ آیا قاعده های دوزنقه بدست نمی آید؟!...

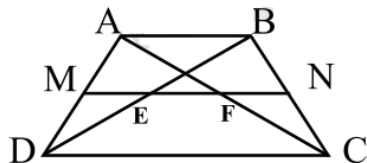
جواب انتهایی :  $\frac{16}{7}$



**تمرین ۳:** در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟  
**راهنمایی :** نسبت قسمت های جدا شده روی مثلث شما را یاد چه قضیه ای می اندازد؟!...

جواب انتهایی : 1

**تمرین ۴:** در دوزنقه شکل زیر  $AM=MD$  ,  $BN=NC$  اگر  $CD = 3AB$  باشد اندازه EF را بر حسب DC محاسبه کنید.



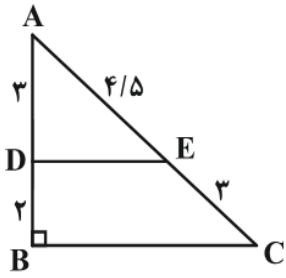
**راهنمایی :** با کم کردن اندازه ME , FN از مقدار مورد نظر مسئله بدست می آید ... از قضیه تالس در مثلث های DAB , CAB مقادیر ME , FN بدست می آید ...

جواب انتهایی :  $EF = \frac{DC}{3}$

در این مبحث نیز همچون مبحث قبل مهمترین بخش یادگیری دیدن تست های متفاوت و آشنا شدن با کاربرد مفاهیم گفته شده در درسنامه در خلال حل تست های متعدد است ، از این رو برای رسیدن به تسلط بالا در این مبحث ضرورت دارد که تست های پیش رو را تمرین کنید ....



در شکل مقابل، مثلث ABC قائم‌الزاویه است. طول پاره خط DE کدام است؟



$$\frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{7} \quad (4)$$

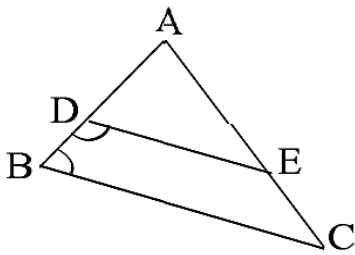
$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

پس  $DE \parallel BC$  است.  $\frac{3}{2} = \frac{4/5}{3}$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow 5^2 + BC^2 = 7^2 \Rightarrow BC^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 5^2 = \frac{225}{4} - 25 = \frac{125}{4}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{DE}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow DE = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{2} \times 3}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$



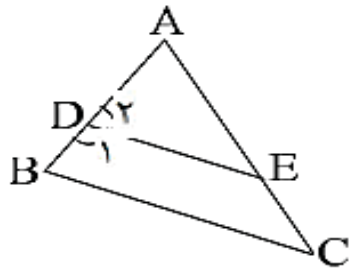
در شکل مقابل دو زاویه B و D از چهار ضلعی مکمل هم‌اند و

$AB = 12$  و  $BC = \frac{3}{2}DE$  اندازه BD کدام است؟

$$\begin{matrix} 4 & (2) \\ 5 & (4) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & (1) \\ 4/5 & (3) \end{matrix}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

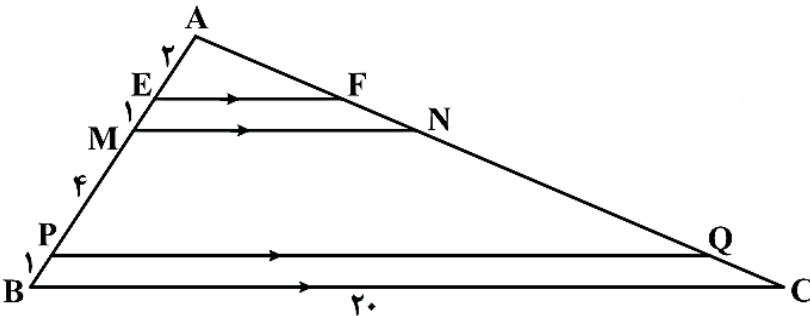


$$\left. \begin{matrix} \hat{B} + \hat{D}_1 = 180 \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_2 \Rightarrow DE \parallel BC$$

$$\text{طبق رابطه تناسلی: } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AD = \frac{2}{3}AB = 8$$

$$\Rightarrow BD = AB - AD = 12 - 8 = 4$$

در شکل مقابل، حاصل  $EF + MN + PQ$  کدام است؟



$$28 \quad (1)$$

$$30 \quad (2)$$

$$32 \quad (3)$$

$$\frac{61}{2} \quad (4)$$

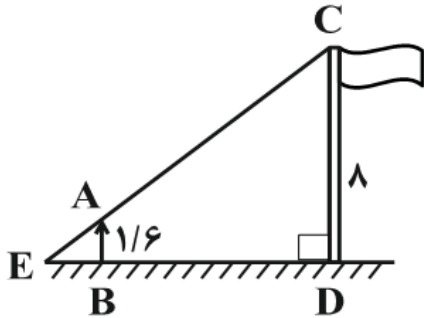


$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{EF}{20} \Rightarrow EF = 5$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{MN}{20} \Rightarrow MN = \frac{15}{2} \quad EF + MN + PQ = 5 + \frac{15}{2} + \frac{35}{2} = 30$$

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{PQ}{20} \Rightarrow PQ = \frac{35}{2}$$

در شکل زیر پاره خط  $AB$  شخصی است که در فاصله ۴ متری از پای پرچمی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. اگر اندازه قد شخص  $1/6$  متر باشد، طول کابل  $EC$  چند متر است؟



$$\sqrt{89} \quad (2)$$

$$\sqrt{91} \quad (1)$$

$$9 \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

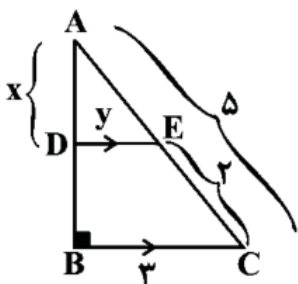
مردی به طول قد  $180\text{ cm}$  به تیر چراغ برقی به طول  $6\text{ m}$  در حال نزدیک شدن است. در لحظه‌ای که فاصله این مرد تا تیر چراغ برق برابر  $3\text{ m}$  است. طول سایه این فرد چند متر است؟

$$\frac{10}{9} \quad (4)$$

$$\frac{7}{9} \quad (3)$$

$$\frac{9}{10} \quad (2)$$

$$\frac{9}{7} \quad (1)$$



در شکل زیر،  $x + y$  کدام است؟

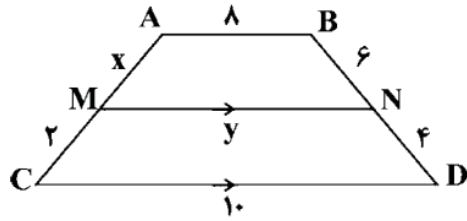
$$4/1 \quad (1)$$

$$4/2 \quad (2)$$

$$5/2 \quad (3)$$

$$5/4 \quad (4)$$

در ذوزنقه زیر، اندازه  $x + y$  کدام است؟ ( $AB \parallel MN \parallel CD$ )



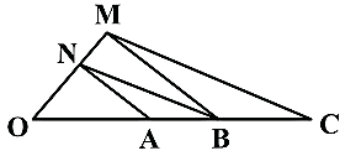
(۱) ۹

(۲) ۱۲/۲

(۳) ۶/۲

(۴) ۹/۲

در شکل زیر،  $NA \parallel MB$  و  $NB \parallel MC$  می‌باشد. اگر  $OA = 2x - 8$  و  $OB = x$  و  $OC = x + 3$  باشد، اندازه پاره خط  $AB$  چقدر است؟



(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

در مربع ABCD ضلع CD را از طرف C به اندازه‌ی ضلع مربع تا نقطه‌ی E امتداد می‌دهیم، به طوری که AE ضلع BC را در F قطع کند.

مساحت چهار ضلعی AFCD چند برابر مساحت مربع است؟

(۴)  $\frac{4}{7}$

(۲)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۱)  $\frac{4}{5}$



نقاط  $M$ ,  $N$ ,  $P$  وسطهای سه ضلع مثلث  $ABC$  را به هم وصل می‌کنیم. اگر پیرامون مثلث  $MNP$  برابر ۶ باشد، آنگاه پیرامون مثلث  $ABC$  کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

اوسط یک چهارضلعی محیطی را به هم وصل کردیم حاصل الزاماً کدام چهارضلعی است؟

(۱) لوزی

(۲) مستطیل

(۴) متوازی الاضلاع

(۳) یک چهار ضلعی محیطی

در مربعی به ضلع ۴ واحد فاصله وسط یک ضلع از قطر مربع کدامست؟

۱ (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۱)

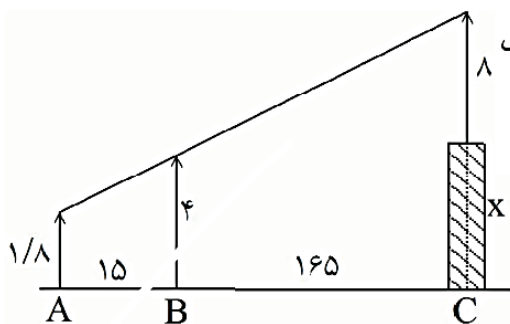


اوساط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کرده ایم، حاصل، یک مستطیل شده است. این چهارضلعی الزاماً کدام است؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین (۲) لوزی (۳) مستطیل (۴) متوازی الاضلاع

اندازه دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی محدب برابرند. اوساط دو قطر و اوساط دو ضلع مقابل دیگر آن همواره رأسهای کدام چهارضلعی است؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین (۲) چهارضلعی محاطی (۳) لوزی (۴) متوازی الاضلاع



در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع  $\frac{1}{8}$  متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است، بلندی برج چند متر است؟

- (۱)  $\frac{19}{8}$  (۲)  $\frac{20}{2}$  (۳)  $\frac{20}{8}$  (۴)  $\frac{21}{2}$

دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس خارج‌اند، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مماس مشترک خارجی و خط‌المركزین آنها از مرکز دایره‌ی بزرگتر چند واحد است؟

$12\frac{2}{3}$  (۴)

$12\frac{1}{3}$  (۳)

$11\frac{2}{3}$  (۲)

$11\frac{1}{3}$  (۱)

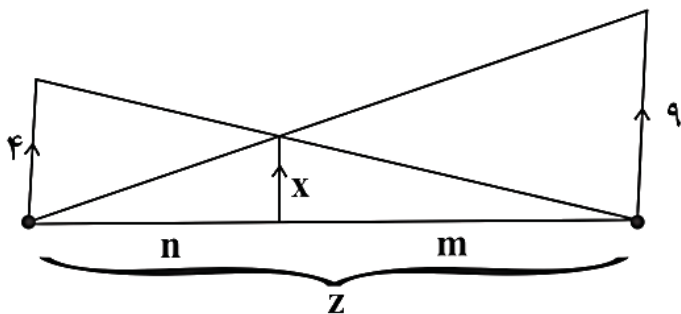
اواسط اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم یکی از زوایای چهارضلعی حاصل ۶۰ درجه است، نسبت قطر مستطیل به ضلع بزرگ مستطیل چقدر است؟

$2\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)

۲ (۳)

$2\sqrt{3}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۱)



در شکل زیر مقدار  $x$  کدام است؟

$\frac{18}{13}$  (۴)

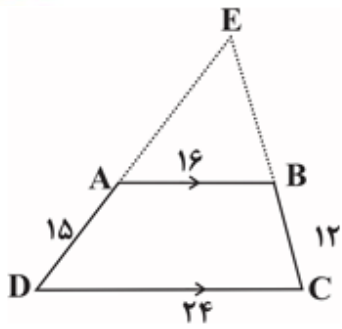
$\frac{36}{13}$  (۳)

$\frac{13}{36}$  (۲)

$\frac{13}{18}$  (۱)



در شکل مقابل، محیط مثلث CDE کدام است؟



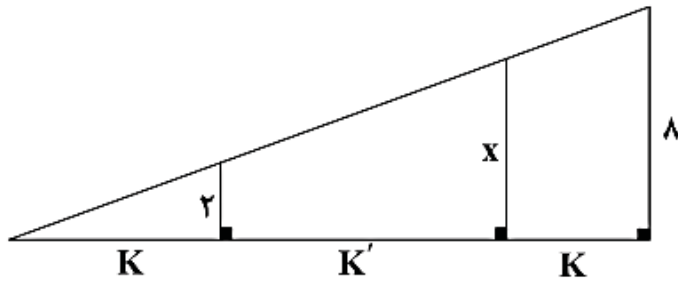
۱۰۵ (۴)

۹۰ (۳)

۷۵ (۲)

۷۰ (۱)

در مثلث قائم الزاویه زیر، مقدار X کدام است؟



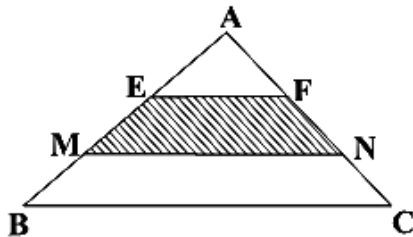
۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

در شکل زیر، اگر  $\frac{AE}{BE} = \frac{BM}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{3}$  باشد، مساحت چهارضلعی هاشورخورده چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



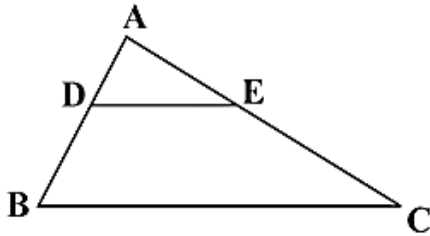
$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{1}{4}$  (۱)

- در شکل زیر  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ ،  $BC = 4$  و  $AB + AC = 5$  است. محیط ذوزنقه  $DECB$  چند برابر محیط مثلث  $ADE$  است؟



$$\frac{7}{3} \quad (1)$$

$$\frac{8}{3} \quad (2)$$

$$\frac{25}{9} \quad (3)$$

$$\frac{26}{9} \quad (4)$$



دو مثلث زمانی متشابه هستند که زاویه های نظیر در آن دو با هم برابر بوده و اضلاع نظیر متناسب باشند که در آن نسبت اضلاع نظیر را نسبت تشابه می گویند

توجه داشته باشید در مثلث های متشابه :

1. نسبت تشابه با نسبت اضلاع نظیر ، ارتفاع های نظیر ، نیمسازهای نظیر ، میانه های نظیر و نسبت محیط ها برابر است . یعنی در دو مثلث متشابه  $A'B'C'$  ،  $ABC$  داریم :

2. نسبت مساحت های دوشکل برابر است با مجذور نسبت تشابه .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{h_b}{h_{b'}} = \frac{h_c}{h_{c'}} = \frac{m_a}{m_{a'}} = \frac{m_b}{m_{b'}} = \frac{m_c}{m_{c'}} = \frac{d_a}{d_{a'}} = \frac{d_b}{d_{b'}} = \frac{d_c}{d_{c'}} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} = \frac{rp}{rp'} = k$$

$$\frac{S}{S'} = k^2$$

نسبت تشابه:  $k$  شعاع دایره محاطی:  $r$  شعاع دایره محیطی:  $R$  ارتفاع:  $h$  نیمساز:  $d$  میانه:  $m$

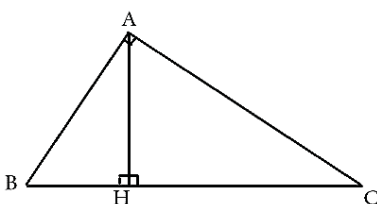
حالت های تشابه دو مثلث:

1. (زز) : دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند

2. (ض ز ض) : دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه های بین آنها برابر

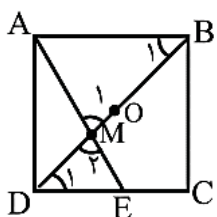
3. (ض ض ض) : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر دوجه دو متناسب باشند

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه : بکمک تشابه در مثلث قائم الزاویه زیر روابط مهم زیر استخراج می شود



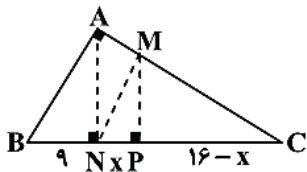
$$\left\{ \begin{array}{l} AH^2 = BH \times HC \\ AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \\ AB \times AC = AH \times BC \end{array} \right.$$

تمرین ۱ : در یک مربع به ضلع  $4\sqrt{2}$  پاره خطی که راس  $A$  را به به نقطه  $E$  وسط ضلع  $CD$  وصل می کند قطر مربع را در  $M$  قطع می کند ، فاصله نقطه  $M$  از وسط مربع کدام است



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta DME \Rightarrow MD = \quad \quad MO = DO - MD =$$

تمرین ۲ : در مثلث شکل مقابل ارتفاع هر سه مثلث قائم الزاویه رسم شده است ، اندازه  $X$  را بیابید؟



از آنجا که  $MN \parallel AB$  و  $MP \parallel AN$  نیز موازی هم می باشند، با توجه به قضیه ی تالس داریم:

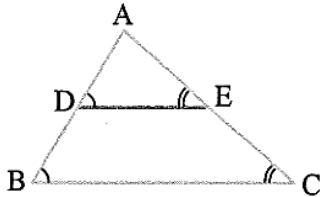
$$\triangle ABC : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{16}{9}$$

$$\triangle ACN : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{16-X}{X}$$

چون نسبت  $\frac{CM}{MA}$  در هر دو تناسب وجود دارد به راحتی نتیجه می گیریم که  $\frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PN}$  است، یعنی:

$$X = 5/76$$

قضیه اساسی تشابه مثلث ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



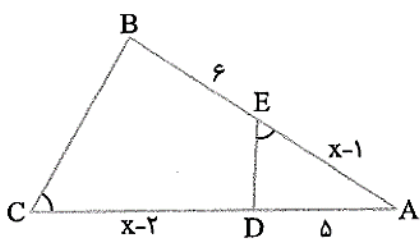
$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

تمرین ۳ : طول اضلاع یک مثلث ۲۰ و ۲۴ و ۳۰ است و محیط مثلث متشابه با آن ۱۸.۵ اختلاف بزرگترین و کوچکترین ضلع مثلث دوم کدام است؟ راهنمایی : ابتدا نسبت تشابه محاسبه شود .... سپس اضلاع مثلث دوم ....

تمرین ۴ : در مثلث قائم الزاویه ای به طول اضلاع قائمه ی ۱ و ۲ عمود منصف وتر سطح مثلث را با چه نسبتی تقسیم می کند؟ راهنمایی : با رسم عمود منصف وتر آیا دو مثلث متشابه خواهیم داشت؟! ... کدام دو مثلث متشابه اند؟! نسبت تشابه چقدر است؟ ...

تمرین ۵ : اگر محیط یک مثلث متساوی الساقین ۱۸ واحد و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد باشد مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

راهنمایی : با رسم ارتفاع وارد بر قاعده و مساوی قرار دادن دو ساق و کمک گرفتن از قضیه فیثاغورس ....



در شکل مقابل  $\hat{E} = \hat{C}$  است. مقدار  $X$  کدام است؟

$$7 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

$$5 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

دو مثلث  $AED$  و  $ABC$  بنابر حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه اند، زیرا:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{E} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

با حذف  $\frac{DE}{BC}$  از این تناسب و قرار دادن مقادیر از روی داده ها، داریم:

$$\frac{5}{6+(X-1)} = \frac{X-1}{(X-2)+5} \Rightarrow \frac{5}{\Delta+X} = \frac{X-1}{3+X} \Rightarrow 5(3+X) = (\Delta+X)(X-1) \Rightarrow 15+5X = \Delta X - \Delta + X^2 - X$$

$$\Rightarrow X^2 - X - 20 = 0 \Rightarrow (X-5)(X+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X-5=0 \\ X+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=5 \\ X=-4 \end{cases}$$

چون طول عددی مثبت است، پس  $X = -4$  غیر قابل قبول است و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

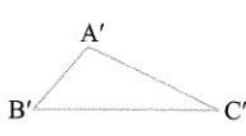
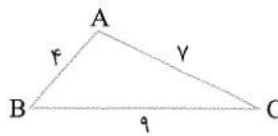
مثلث ABC با طول اضلاع ۴، ۷ و ۹ با مثلث A'B'C' متشابه است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث A'B'C' است؟

$$\frac{9}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{16}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$



نسبت تشابه دو مثلث برابر

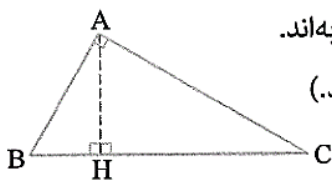
$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'} = \frac{4+7+9}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

است، پس نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر  $k^2 = \frac{16}{9}$  می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{S}{S'} = k^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow S = \frac{16}{9} S' \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، اگر ارتفاع AH را رسم کنید، روابط طولی بین برخی از پاره‌خط‌ها به وجود می‌آید که در تست‌ها کاربرد فراوان دارند. این روابط را حفظ کنید.

(آ) مثلث‌های ABH و AHC با هم متشابه‌اند و همچنین این دو مثلث با مثلث اصلی، یعنی مثلث ABC متشابه‌اند. (اگر در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، آن‌گاه سه مثلث قائم‌الزاویه، دوبه‌دو با هم متشابه‌اند.)

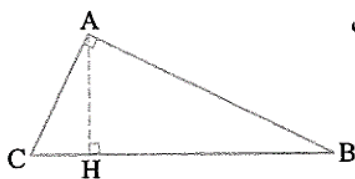


(ب)  $AH^2 = BH \cdot CH$  (ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعه ایجادشده روی وتر است.)

(پ)  $AB^2 = BH \cdot BC$  و  $AC^2 = CH \cdot BC$  (به ترتیب تصویر قائم اضلاع AB و AC روی وتر BC هستند.)

**نکته** از رابطه  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$  می‌توان برای به دست آوردن طول ارتفاع وارد بر وتر استفاده کرد.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، طول ارتفاع AH برابر ۸ و  $CH = 4$  می‌باشد. مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$40 \quad (۲)$$

$$50 \quad (۱)$$

$$60 \quad (۴)$$

$$80 \quad (۳)$$

$$AH^2 = CH \cdot BH \Rightarrow 8^2 = 4 \times BH \Rightarrow BH = \frac{64}{4} = 16$$

با توجه به شکل، داریم:

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{8 \times (4+16)}{2} = 4 \times 20 = 80 \Rightarrow \text{گزینه (۳) صحیح است.}$$

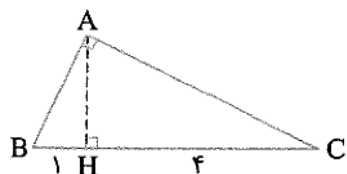
در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، ارتفاع وارد بر وتر دو قطعه به طول‌های ۱ و ۴ روی وتر ایجاد می‌کند. طول میانه متوسط این مثلث کدام است؟

$$\sqrt{5} \quad (۴)$$

$$2\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$3 \quad (۲)$$

$$\sqrt{10} \quad (۱)$$



با توجه به شکل مقابل، ابتدا طول دو ضلع AB و AC را به دست می‌آوریم:

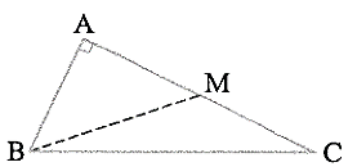
$$AB^2 = BH \cdot BC = 1 \times 5 \Rightarrow AB = \sqrt{5}$$

$$AC^2 = CH \cdot CB = 4 \times 5 = 20 \Rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

میانه وارد بر ضلع AC (ضلع متوسط)، میانه متوسط مثلث است:

$$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}, AB = \sqrt{5}$$

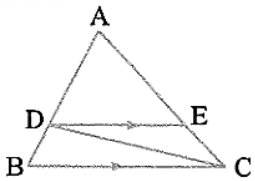
$$\Rightarrow BM^2 = AB^2 + AM^2 = 5 + 5 = 10 \Rightarrow BM = \sqrt{10} \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$





در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت دوزنقه چند برابر

مساحت مثلث ADE است؟

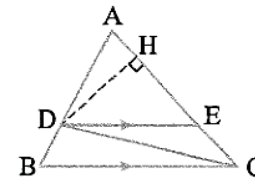


$$1/64 \text{ (4)}$$

$$1/56 \text{ (3)}$$

$$1/44 \text{ (2)}$$

$$1/36 \text{ (1)}$$



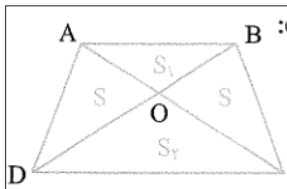
بنابر فرض  $\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$  می باشد. با رسم عمود DH بر AC، داریم:

$$\frac{S_{DEC}}{S_{ADE}} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} CE = 3m \\ AE = 5m \end{cases}$$

بنابر قضیه اساسی تشابه، داریم:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \left(\frac{5m}{3m+5m}\right)^2 = \frac{25}{64} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}-S_{ADE}} = \frac{25}{64-25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{BCED}} = \frac{25}{39} \Rightarrow \frac{S_{BCED}}{S_{ADE}} = \frac{39}{25} = \frac{39 \times 4}{25 \times 4} = \frac{156}{100} = 1/56 \Rightarrow \text{گزینه (3) صحیح است.}$$



اگر در دوزنقه، قطرهای آن را رسم کنیم، مثلثهایی ایجاد می شود که بین مساحت های آنها روابطی به صورت زیر برقرار است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

(1) دو مثلث OAB و OCD بنابر حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه اند و داریم:

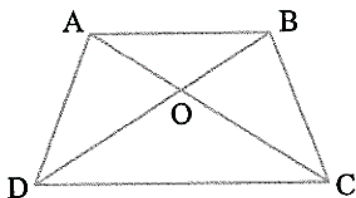
$$S_{AOD} = S_{BOC}$$

(2) مساحت دو مثلث کناری با هم برابرند، یعنی:

$$S_{AOB} \times S_{COD} = S_{AOD} \times S_{BOC}$$

(3) با نام گذاری مساحت ها در شکل روبه رو، داریم:

در دوزنقه شکل روبه رو، اگر CD دو برابر AB باشد، مساحت مثلث OCD چه کسری از مساحت دوزنقه ABCD است؟



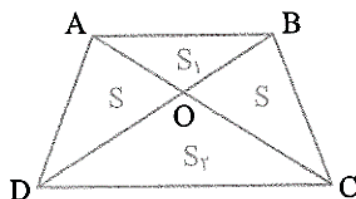
$$\frac{4}{9} \text{ (4)}$$

$$\frac{2}{9} \text{ (3)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (2)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (1)}$$

با توجه به نام گذاری زیر، داریم:



$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2AB}{AB}\right)^2 = 4 \Rightarrow S_2 = 4S_1 \quad (1)$$

$$S_1 S_2 = S^2 \xrightarrow{(1)} S_1 (4S_1) = S^2 \Rightarrow S^2 = 4S_1^2 \Rightarrow S = 2S_1 \quad (2) \quad \text{از طرفی داریم:}$$

مساحت دوزنقه را بر حسب  $S_1$  به دست می آوریم:

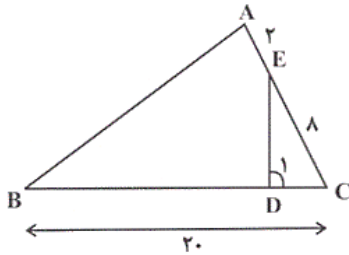
$$\text{مساحت دوزنقه} = 2S + S_1 + S_2 \xrightarrow{(2), (1)} 2(2S_1) + S_1 + 4S_1 = 9S_1 \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow \frac{\text{مساحت دوزنقه}}{S_2} = \frac{9S_1}{4S_1} = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{گزینه (4) صحیح است.}$$





در شکل مقابل،  $\hat{A} = \hat{D}_1$  است. طول BD چند واحد است؟



۱۲ (۱)

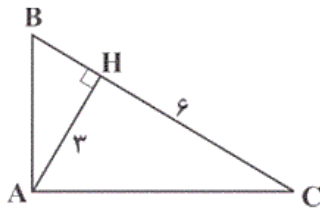
۱۴ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D}_1 \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right. \Rightarrow \triangle DCE \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{4}{20} = \frac{DC}{10} \Rightarrow DC = 4 \Rightarrow BD = BC - DC = 20 - 4 = 16$$

در شکل زیر مساحت مثلث قائم الزاویه ABC چقدر است؟



۱۲/۲۵ (۱)

۱۱/۲۵ (۲)

۱۱/۵ (۳)

۱۱ (۴)

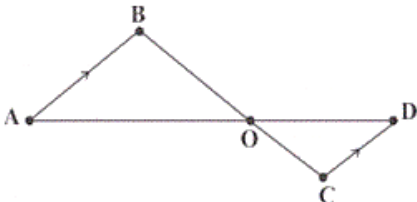
از تشابه دو مثلث  $\triangle ABH$  و  $\triangle AHC$  و نوشتن تناسب اضلاع داریم:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow 9 = 6 \times BH \Rightarrow BH = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$BC = BH + CH = 1.5 + 6 = 7.5$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 7.5 = \frac{22.5}{2} = 11.25$$

-نسبت مساحت مثلث AOB به COD، برابر  $\frac{9}{4}$  است. اگر  $AD = 15$  باشد، OD چقدر است؟



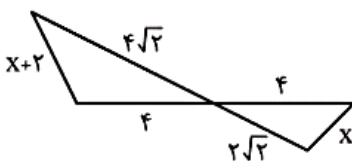
۳ (۱)

۶ (۲)

۹ (۳)

۱۲ (۴)

$$AB \parallel CD \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \sqrt{\frac{S_{AOB}}{S_{COD}}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{3}{2} \Rightarrow AO + OD = 15 \Rightarrow OD = 6$$



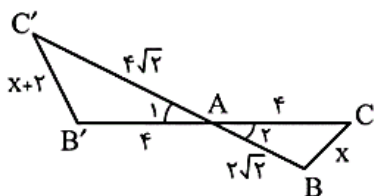
با توجه به شکل زیر، x کدام است؟

۲(√۲+۱) (۴)

√۲-۱ (۳)

√۲ (۲)

۲ (۱)

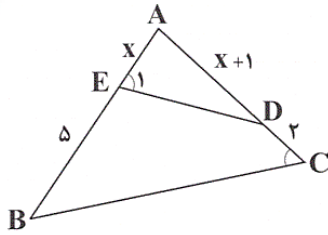


دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle AB'C$  بنا به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آنها با هم متشابه‌اند، زیرا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (متقابل به رأس)} \\ \frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'} \end{array} \right. \Rightarrow \left( \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ (زیرا)}$$

پس نسبت  $\frac{BC}{B'C}$  نیز برابر نسبت تشابه است و داریم:

$$\frac{BC}{B'C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}x = x+2 \Rightarrow \sqrt{2}x - x = 2 \Rightarrow x(\sqrt{2}-1) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}+1)$$



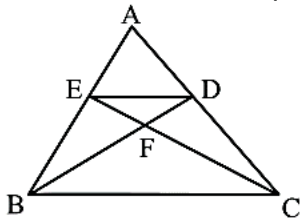
اگر در شکل زیر  $\hat{E}_1 = \hat{C}$  باشد، مساحت چهارضلعی EDCB چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

- (1)  $\frac{1}{4}$  (2)  $\frac{1}{3}$  (3)  $\frac{3}{4}$  (4)  $\frac{1}{2}$

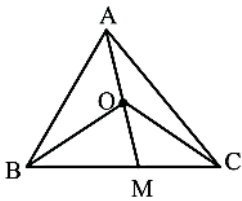
یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلثهای همنهشت است؟

- (1)  $\frac{3}{2}$  (2) 2 (3) 3 (4) 4

در مثلث ABC شکل زیر به فرض آنکه پاره خطهای BD و CE میانه های اضلاع مثلث باشند نسبت مساحت مثلث EFD به مساحت مثلث ABC کدام است؟



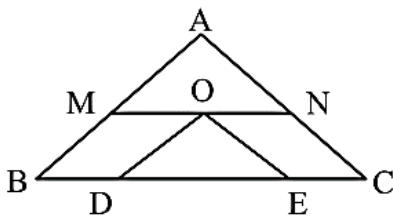
- (1)  $\frac{1}{12}$  (2)  $\frac{1}{8}$  (3)  $\frac{1}{6}$  (4)  $\frac{1}{5}$



در شکل مقابل، مساحت مثلثهای OBC, ABC را به ترتیب S و S' می نامیم. نسبت  $\frac{OM}{AM}$  کدام است؟

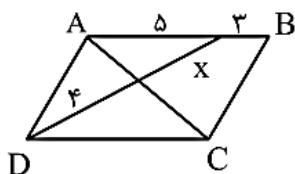
- (1)  $\sqrt{\frac{S'}{S}}$  (2)  $\left(\frac{S'}{S}\right)^2$  (3)  $\frac{S-S'}{S}$  (4)  $\frac{S'}{S}$

در شکل مقابل  $S_{ABC} = 54$  و نقاط M و N و O به ترتیب وسط AB و AC و MN هستند اگر  $OE \parallel AC$  و  $OD \parallel AB$  باشد.



آنگاه مساحت مثلث ODE کدام است؟

- (1)  $\frac{25}{2}$  (2)  $\frac{23}{2}$  (3)  $\frac{27}{2}$  (4)  $\frac{19}{2}$



در متوازی الاضلاع ABCD اندازه ی x کدام است؟

- (1) 1 (2)  $\frac{1}{5}$  (3) 2 (4)  $\frac{2}{5}$