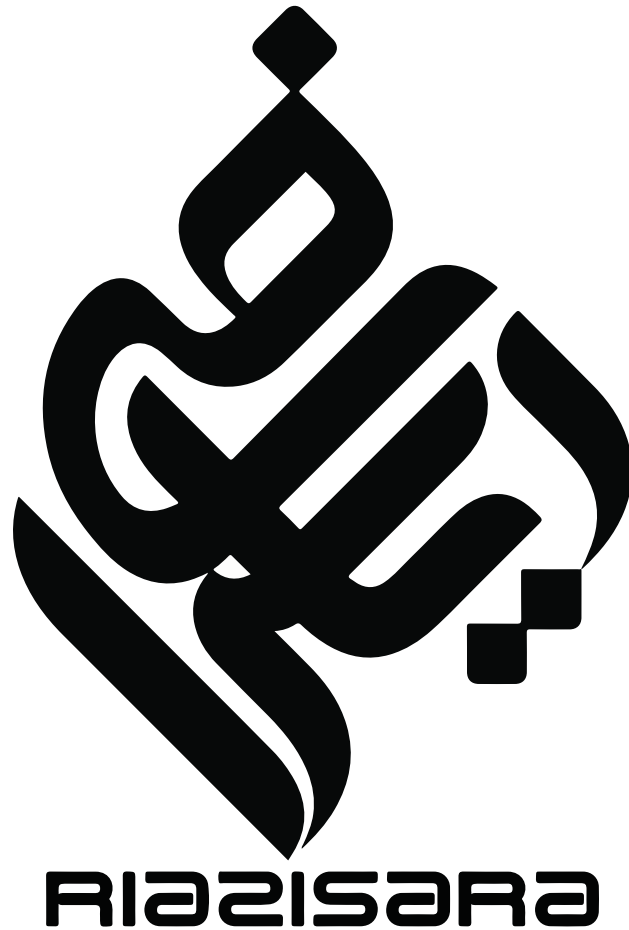




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



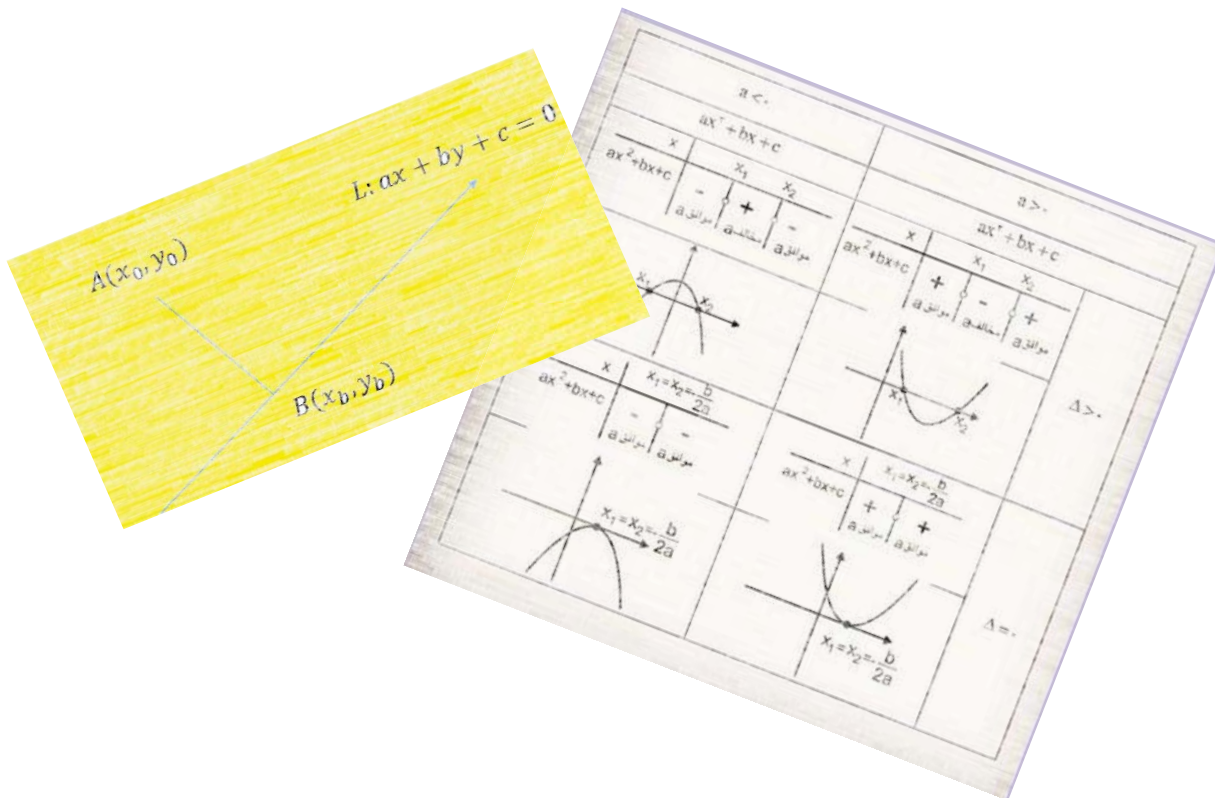
<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه تحلیلی و جبر



هندسه تحلیلی

- پوشش کامل مطالب کتاب درسی و نکات و جزئیاتی فراتر از آن در درس نامه‌ها
- تقسیم مطالب، تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای بر اساس بخش‌های کتاب درسی
- ۹۱ مثال و ۷۶ پرسش چهارگزینه‌ای

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

درس اول

درس دوم

درس سوم

یادآوری و تکمیل معادله خط

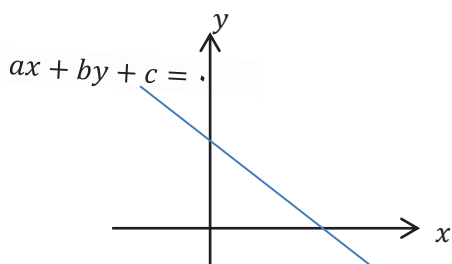
معادله خط

معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b هم‌زمان صفر نیستند.

اگر $b \neq 0$ باشد با تقسیم طرفین معادله $ax + by + c = 0$ بر b داریم:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

توجه کنید:



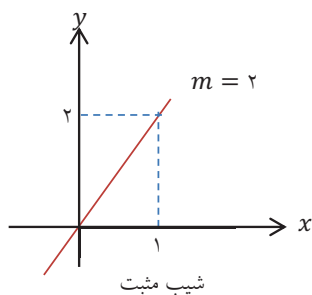
ضریب x : $m = -\frac{a}{b}$ شیب خط $\Rightarrow ax + by + c = 0$ اگر
ضریب y : $m = a$ شیب خط $\Rightarrow y = ax + b$ اگر

نوشتن معادله خط: معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد برابر است با: $y - y_1 = m(x - x_1)$

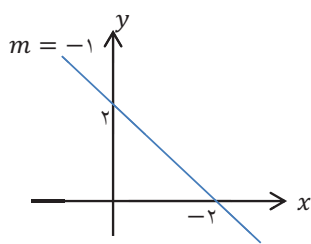
شیب خطی که از دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ می‌گذرد برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

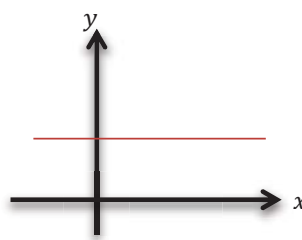
شیب خط در شکل سمت راست برابر ۲ و در شکل سمت چپ برابر -۱ است.



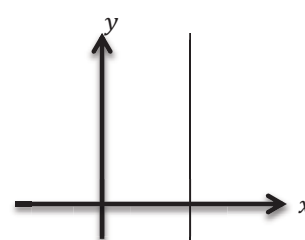
شیب مثبت



شیب منفی

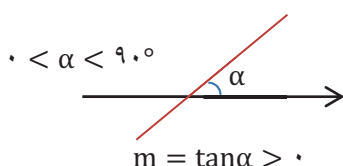


شیب صفر



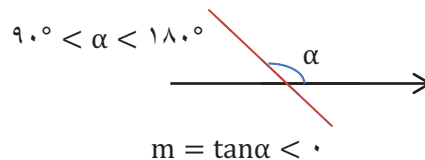
شیب تعریف نشده

نکته: شیب خط در واقع تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد.



$$0 < \alpha < 90^\circ$$

$$m = \tan \alpha > 0$$



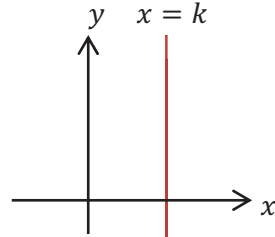
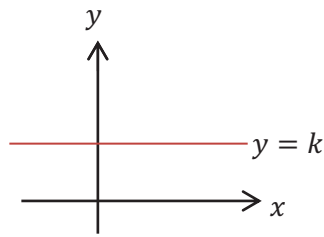
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

$$m = \tan \alpha < 0$$

به عبارتی دیگر معادله خطی که با جهت مثبت محور x زاویه α می‌سازد و از نقطه $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد برابر است با:

$$y - y_1 = \tan \alpha (x - x_1)$$

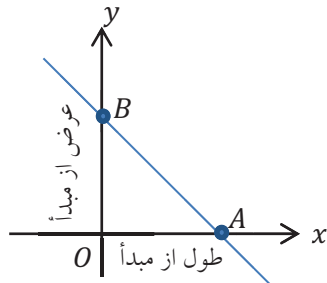
نکته: خط $x = k$ موازی محور عرض‌ها (با شیب تعریف نشده) و خط $y = k$ موازی محور طول‌ها (با شیب صفر) است.



خط $x = k$ همواره بر خط $y = k$ عمود است. برای مثال خط $x = 2$ بر $y = -1$ عمود است.

عرض نقطه تلاقی با محور y ها را عرض از مبدأ می‌نامیم، و برای به‌دست آوردن عرض از مبدأ کافی است در معادله خط به‌جای x ، صفر قرار دهیم. هم‌چنین طول نقطه تلاقی با محور x ها را طول از مبدأ می‌نامیم و در نتیجه برای به‌دست آوردن آن کافی است به‌جای y ، صفر قرار دهیم.

نکته: اگر خطی محور x ها و y ها را در نقاط A و B قطع کند، با آن‌ها مثلثی تشکیل می‌دهد که مساحت این مثلث برابر است با:



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \left| \text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ} \right| = \frac{1}{2} |A \times B|$$

* معادله خطی که از دو نقطه $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است.

مثال ۱: خط زیر را رسم کنید شیب و عرض از مبدأ آن‌ها را نیز به دست آورید.

$$3x + 2y = -6$$

مثال ۲: خط‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3$

ب) $y = -2$

شماره ۳: خط های زیر را رسم کنید.

$$x = 3$$

$$x = -2$$

شماره ۴: معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن ۷ بوده و محور عرض را در نقطه ی $A(0, 4)$ قطع کند.

شماره ۵: معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $A(3, 5)$ و $B(2, -1)$ بگذرد.

شماره ۶: معادله ی خطی که از نقطه $(-1, 2)$ می گذرد و شیب آن برابر $\frac{3}{4}$ می باشد

شماره ۷: معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۳ و طول از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

شماره ۸: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 4)$ گذشته و:

الف) موازی محور طول ها باشد. ب) موازی محور عرض ها باشد.

مثال ۹: مساحت مثلثی را حساب کنید که خط $3x + 4y = 12$ با محورهای مختصات می‌سازد.

مثال ۱۰: مقدار a را چنان تعیین کنید که خط زیر از نقطه‌ی $A(-1, -2)$ بگذرد.

$$(a - 2)x - 3y = 2a - 4$$

وضعیت دو خط نسبت به هم:

الف) موازی دو خط در صورتی با هم موازیند که شیب‌های آنها با هم برابر باشد. $m = m'$

ب) عمود: دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند هر گاه شیب هر کدام عکس و قرینه‌ی شیب دیگری

باشد. به عبارت دیگر حاصلضرب شیب‌های آنها برابر (-1) باشد، یعنی $mm' = -1$

مثال ۱۱: نشان دهید که دو خط به معادلات زیر موازیند.

$$y = -2x + 3 \quad 6x + 3y = 5$$

مثال ۱۲: معادلات دو خط زیر را در نظر بگیرید، نشان دهید این دو خط برهم عمودند.

$$3y - 2x + 7 = 0 \quad -2y = 3x - 4$$

مثال ۱۳: به ازای چه مقدار a دو خط $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ ax + 4y = -a + 5 \end{cases}$ موازی اند؟

$$\frac{5}{8}(1) \quad -\frac{8}{5}(2) \quad \frac{8}{5}(3) \quad -\frac{5}{8}(4)$$

مثال ۲: به ازای چه مقدار m ، دو خط $y = 3x + 1$ و $y + mx + 2 = 0$ بر هم عمودند؟

$$3(1) \quad \frac{1}{3}(2) \quad -\frac{1}{3}(3) \quad -3(4)$$

مثال ۳: خط L به معادله $y - 3x = 1$ و خط d با عرض از مبدا 5 به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید:

الف) m ، شیب خط d را طوری بیابید که d با L موازی باشد.

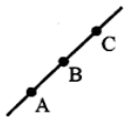
ب) به ازای چه مقداری از m دو خط بر یکدیگر عمودند؟

مثال ۴: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(3, -2)$ بگذرد و با خط $4x - 2y - 1 = 0$ موازی باشد.

مثال ۵: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(-1, 2)$ بگذرد و بر خط $4y - 2x = 1$ عمود باشد.

شرط اینکه سه نقطه بر روی یک خط راست واقع شوند یا بر یک استقامت باشند و یا بر یک راستا واقع شوند:

اگر بخواهیم سه نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ بر یک استقامت باشند یعنی بر روی یک خط راست واقع باشند، باید شیب جزء با شیب کل برابر باشد.



$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

مثال ۶: نشان دهید سه نقطه‌ی $A(5, 7)$ و $B(4, 3)$ و $C(6, 11)$ روی یک خط راست قرار دارند.

مثال ۷: اگر سه نقطه‌ی متمایز $A(1, 1)$ و $B(-1, -1)$ و $C(m, m^2 + 2m)$ روی یک خط راست باشند، آن گاه:

$$m = 0(1) \quad m = 0, -1(2) \quad m = -1(3) \quad m = 1(4)$$

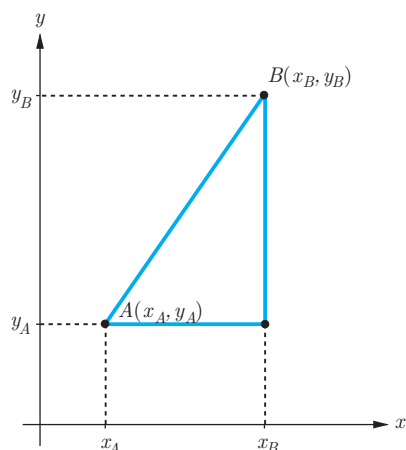
مثال ۱۷:

مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رأس مجاور آن هستند.
 الف) شیب ضلع AB را بنویسید.
 ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.
 پ) اگر بدانیم نقطه $C(7,9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.
 ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

مثال ۱۸:

مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط $A(2-m, 2n+3)$ و $B(-2,4)$ و $C(n+1, 2m)$ و $D(m+3n, n-5)$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشد.

فاصله دو نقطه (طول یک پاره خط)



فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

شرح ۱۹: نقاط $A(2,0)$, $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.

- الف) محیط مثلث ABC را با محاسبه طول اضلاع آن به دست آورید.
- ب) ABC چه نوع مثلثی است؟
- پ) به روش دیگر (غیر از فیثاغورس) نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

شرح ۲۰: نشان دهید مثلث با رئوس $A(1,2)$, $B(2,5)$ و $C(4,1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

شرح ۲۱: اگر $A(4,4)$ و $C(1,1)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع چقدر است؟

شماره ۲۲: شعاع دایره‌ای به مرکز $O(3, 1)$ و گذرنده از نقطه $A(-1, 2)$ را بیابید.

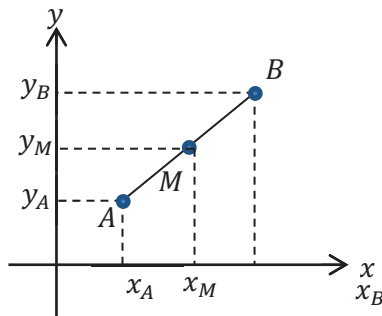
شماره ۲۳: نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که از نقاط $A(-1, 3)$ و $B(2, 4)$ به یک فاصله باشد.

شماره ۲۴: نقطه‌ی $A(3, a)$ بالای محور x هاست و فاصله‌ی آن از مرکز مختصات برابر ۵ می باشد. a کدام است؟

- ۲(۱) ۴(۲) -۴(۳) -۲(۴)

مختصات نقطه وسط پاره خط: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه در یک دستگاه مختصات باشند مختصات نقطه

M وسط نقاط A و B از رابطه زیر به دست می آید.



$$M(x_M, y_M): \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

شماره ۲۴: اگر $A(3, -2)$ و $B(-5, 4)$ مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را بیابید.

شماره ۲۵: دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

شماره ۳۶: نقطه $M(۵, -۴)$ وسط پاره خط و اصل بین دو نقطه A و $B(۷, -۲)$ است. مختصات A را بیابید.

شماره ۳۷: مثلث با رئوس $A(۱, ۹)$, $B(۳, ۱)$ و $C(۷, ۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.

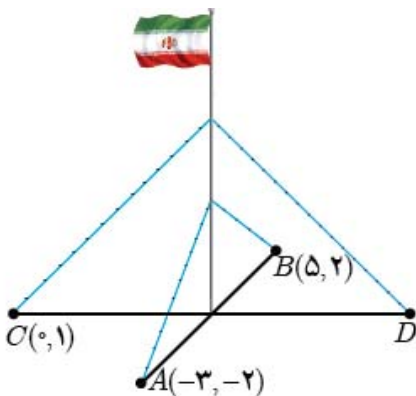
الف) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید.

پ) معادله میانه AM را به دست آورید.

شماره ۳۸: یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری

که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه D را به دست آورید.



مثله ۲۵: نقاط $A(۶,۲)$ و $B(۵,۵)$ و $C(۶,۸)$ سه رأس یک لوزی هستند، مساحت لوزی چه قدر است؟

۱۸(۴)

۹(۳)

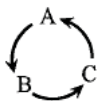
۸(۲)

۴(۱)

مثله ۲۶: دو نقطه $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰, -۱۳)$ را در نظر بگیرید.
الف) فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید.
ب) معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

مساحت مثلث با معلوم بودن سه رأس :

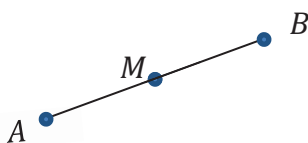
اگر نقاط $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث ABC باشند در این صورت مساحت مثلث ABC از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.



$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

مثله ۳۰: اگر $A(۲,۱)$ ، $B(۳, -۱)$ و $C(۳, ۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث را بیابید.

نکته: اگر دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(\alpha, \beta)$ را داشته باشیم و بخواهیم قرینه نقطه A را نسبت به نقطه M پیدا کنیم طبق شکل زیر اگر این نقطه را B بنامیم نقطه M وسط پاره خط AB است، پس :



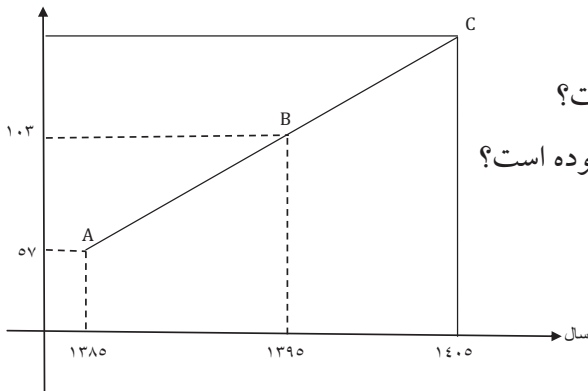
$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha - x_A \\ 2\beta - y_A \end{bmatrix}$$

مثله ۳۱: قرینه نقطه $A(۱, ۲)$ نسبت به نقطه $M(-۱, ۴)$ را به دست آورید

شماره ۳۲:

سود سالانه یک واحد کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته

سود بر حسب
میلیون تومان



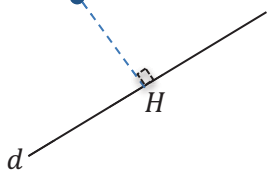
است. به کمک فرمول نقطه میانی پاره خط مشخص کنید:

الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

$A(x_0, y_0)$

فاصله نقطه از خط: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $d: ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

شماره ۳۳:

فاصله نقطه $A(1, 2)$ را از خط $4x - 3y - 3 = 0$ را بیابید.

شماره ۳۴:

فاصله نقطه $A(2, 4)$ را از خط به معادله $y = -\frac{3}{4}x + 3$ را به دست آورید.

شماره ۳۵:

اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

شماره ۳۶:

خط d به معادله $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

مثال ۳۷: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را بدست آورید.

مثال ۳۸: اگر $A(-2, 1)$ ، $B(3, 2)$ و $C(2, 3)$ سه رأس یک مثلث باشند:
الف) اندازه ارتفاع AH را بیابید. ب) اندازه AM میانه ضلع BC را بیابید. پ) طول MH را بیابید.

فاصله دو خط موازی: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه کنید شرط موازی بودن دو خط $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ می باشد.

مثال ۳۹: فاصله دو خط $x - 3y = 3$ و $2x - 6y = 5$ را بیابید.

سوال ۶: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع

کدام است؟ (سراسری ۹۳)

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

سوال ۷: دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن، نقطه $A(8, 5)$ است.

مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) $7/2$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

سوال ۸: فاصله بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

سوال ۹: نقطه $(2, -1)$ مرکز مربع و معادله ی یک ضلع آن به صورت $4x - 3y = a$ می باشد. به ازای

کدام مقدار a ، مساحت مربع ۱۶ واحد مربع است؟

- (۱) ۲- (۲) ۱- (۳) ۱ (۴) ۲

درس دوم

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲ هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ ، یک درجه‌ی دوم است.

مثلاً: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $3k^2 = 13k - 10$

ب) $r^2 + 2r + 5 = 0$

پ) $4u^2 + 12u + 9 = 0$

معادلات دو مجذوری

یکی از دلایل اهمیت معادلات درجه دوم آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دسته خاصی از معادله‌ها آشنا می‌شویم که یک شیوه کارآمد برای حل انواع معادله است.

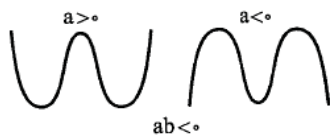
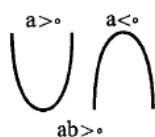
نکته: معادله‌ی $ax^4 + bx^2 + c = 0$ را **معادله‌ی دو مجذوری** گوئیم و با تغییر متغیر $x^2 = u$ به معادله‌ی $au^2 + bu + c = 0$ می‌رسیم که به آن معادله‌ی حلال می‌گوئیم.

نکته: اگر در یک معادله جمله‌ای تکرار شود (عبارت مشترک داشتیم) بهتر است آن عبارت تکرار شده (عبارت مشترک) را برابر یک حرف لاتین مانند u یا t بگیریم. (تغییر متغیر)

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2 = (x^2)^2} a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0 \xrightarrow{x^2 = u} au^2 + bu + c = 0$$

دقت کنیم: در معادلات دو مجذوری عبارت x^2 تکرار شده است پس آن را برابر u می‌گیریم.

◀ نمودار تابع دو مجذوری: $y = ax^4 + bx^2 + c$



◀ اگر بخواهیم معادله‌ی دو مجذوری دارای دو ریشه باشد باید $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

◀ اگر بخواهیم معادله‌ی دو مجذوری دارای چهار ریشه باشد باید معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه مثبت باشد یعنی:

● $\Delta > 0$

● $-\frac{b}{a} > 0$

● $\frac{c}{a} > 0$

مثال ۲: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

مثال ۳: معادله $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$ را حل کنید.

مثال ۴: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$

۲) $(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 2 = 0$

به دست آوردن مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ بدون حل آن

مثله: آیا در معادله مقابل بین ضرایب معادله و مجموع ریشه ها (S) رابطه ای وجود دارد؟

$$-2x^2 + 5x - 3 = 0$$

نکته: اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) جواب داشته باشد ($\Delta \geq 0$) و جمع ریشه ها را با S و ضرب ریشه ها

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

را با P نمایش دهیم روابط روبه رو برقرارند.

مثله: در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

تشکیل معادله ی درجه ی ۲

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله ی درجه ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند، می توان معادله را بصورت روبرو نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثله: معادله درجه دوم بنویسید که ریشه های آن $1 - \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{2}$ باشد.

مثله: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند، حاصل عبارات زیر را بدست

آورید.

الف) $\alpha + \beta =$

ب) $\alpha\beta =$

ج) $\alpha^2 + \beta^2 =$

د) $\alpha^3 + \beta^3 =$

هـ) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} =$

و) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$

بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه دوم

الف) معادله دارای دو ریشه مثبت باشد.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

ب) معادله دارای دو ریشه منفی باشد.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

ج) معادله دارای دو ریشه مختلف علامه باشد.

$$p < 0$$

د) معادله دارای یک ریشه مثبت باشد.

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

هـ) معادله دارای یک ریشه منفی باشد.

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

مثال ۹: به ازای چه مقادیری از m معادله درجه دوم $(m-1)x^2 + 2x + (2-m) = 0$ دو ریشه مختلف علامت دارد؟

مثال ۱۰: معادله $mx^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ دو ریشه مثبت دارد حدود m را بدست آورید؟

مثال ۱۱: به ازای چه مقدار از m معادله $mx^2 + (m^2 - 4)x + m - 3 = 0$ دو ریشه ی قرینه دارد؟

مسئله ۱۲:

مقدار m را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$ برابر ۳

باشد.

مسئله ۱۳:

در معادله $x^2 + 3mx + 2 = 0$ اگر مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۵ باشد m کدام است؟

مسئله ۱۴:

در معادله درجه دوم $mx^2 - 5x + m^2 = 6$ مقدار m را طوری تعیین کنید که :

$$mx^2 - 5x + m^2 - 6 = 0$$

الف) دو ریشه معکوس یکدیگر باشند

ب) دو ریشه معکوس و قرینه یکدیگر باشند

مسئله ۱۵:

در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی

مثبت را به دست آورید؟

مسئله ۱۶:

اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + x + m = 0$ از دو برابر معکوس دیگری ۲ واحد بیشتر باشد m را

پیدا کنید؟

مثال ۱۷: مقدار m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 6mx + 8 = 0$ مربع ریشه‌ی دیگری باشد.

مثال ۱۸: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $5x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند.

مثال ۱۹: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳ واحد کمتر از ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند.

مثال ۲۰: اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ مربع ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ باشند a کدام است؟

مثال ۲۱: ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2 + ax + b = 0$ دو واحد بیشتر از عکس ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند a کدام است؟

مثال ۲۲: در مورد علامت ریشه های معادلات داده شده (در صورت وجود) بحث کنید.

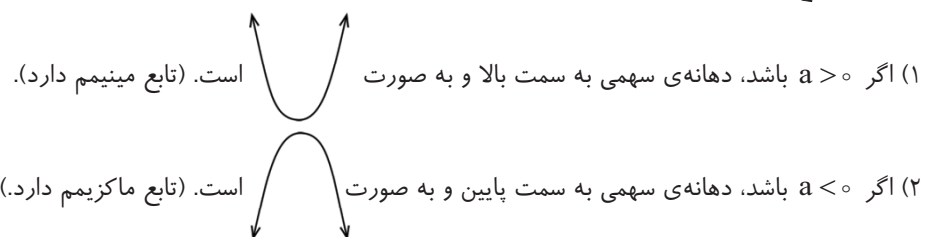
الف) $y = x^2 + 6x + 5$

ب) $y = x^2 + 4x - 5$

پ) $y = 3x^2 - 7x + 1$

ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

نمودار تابع درجهی دوم $y = ax^2 + bx + c$ (سهمی)



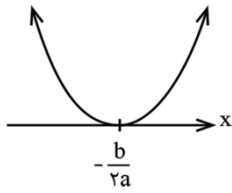
(۳) مختصات رأس سهمی از فرمول $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ به دست می‌آید که به آن نقطه‌ی مینیمم (هرگاه $a > 0$) یا نقطه‌ی ماکزیمم (هرگاه $a < 0$)

نیز می‌گویند. و خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

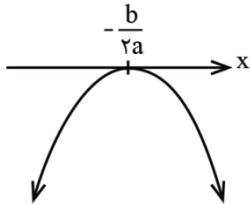
(۴) هر تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ را می‌توان به صورت $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$) نیز نوشت که در آن $S(\alpha, \beta)$ رأس سهمی است.

(۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ محور x را در نقاطی به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نیز می‌توان نوشت.

(۶) اگر تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ محور x را فقط در یک نقطه مانند x_1 قطع کند، آن گاه معادله را به صورت $y = a(x - x_1)^2$ نیز می توان نوشت.



(۷) در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a > 0 \end{cases}$ سهمی بالای محور x و بر آن مماس است.



(۸) در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a < 0 \end{cases}$ سهمی پایین محور x و بر آن مماس است.

(۹) نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ بالای محور x ها است، (به عبارت دیگر چند جمله ای $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

(۱۰) نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ پایین محور x ها است (به عبارت دیگر چند جمله ای $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

مثال ۲۳: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه ی $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را در صورت وجود به دست آورید.

تست: معادله ی محور تقارن منحنی $x + y = x^2$ کدام است؟

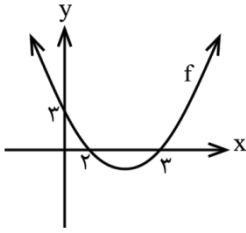
(۱) $2x + 1 = 0$ (۲) $2y - 1 = 0$ (۳) $2x - 1 = 0$ (۴) $2y + 1 = 0$

مثال ۲۴: تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم و مینیمم هریک را مشخص کنید.

الف) $y = x^2 - 2x - 3$

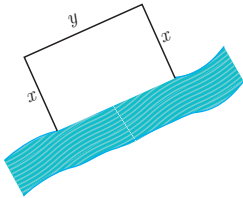
ب) $y = -(x - 3)^2 + 1$

ج) $y = -4x^2 + 8x + 1$



مثال ۲۵: مطابق شکل اگر عبارت درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ متناظر تابع $f(x)$ باشد، در این صورت $f(4)$ را بیابید.

مثال ۲۶: قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

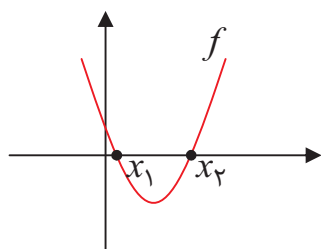


مثال ۲۷: استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد. ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

مثال ۲۸: مقادیر a و b را طوری به دست آورید که نقطه‌ی $S(-1, -4)$ رأس سهمی $y = ax^2 + 2x + b$ باشد.

صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی)

همانطور که می‌دانیم نمودار هر تابع درجه ۲، بصورت یک سهمی است و دارای معادله ای به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.



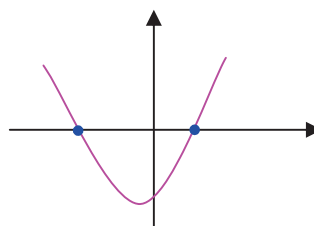
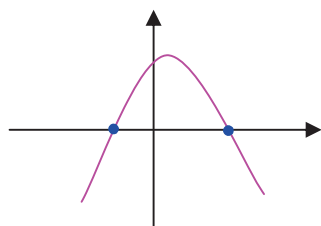
$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

بنابراین ممکن است محور طول ها را در یک یا دو نقطه قطع کند و یا اینکه محور طولها را هیچ قطع نکند. طول نقطه‌ی تقاطع نمودار سهمی با محور طول ها را صفر تابع می‌نامند. بدیهی است که در این نقطه

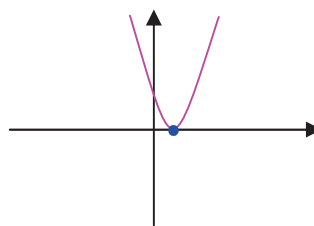
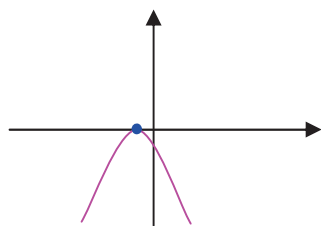
مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. بنابر این، صفر تابع f همان ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ است.

نتیجه: بر اساس مفهوم فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

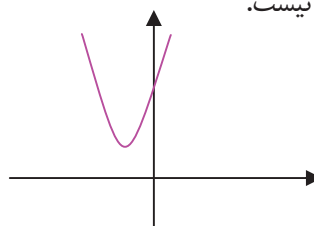
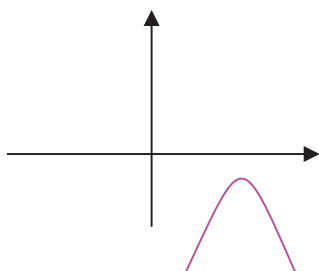
الف: نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع می‌کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.



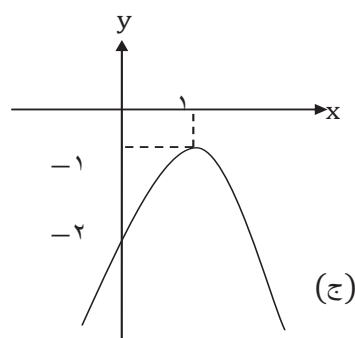
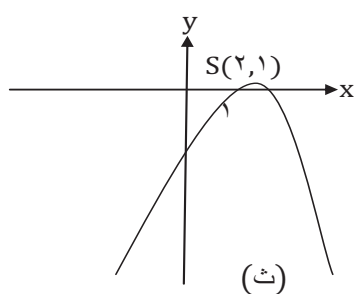
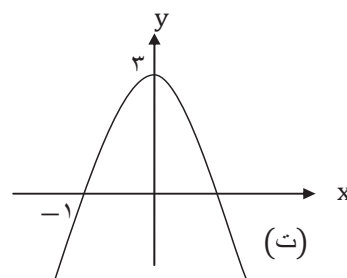
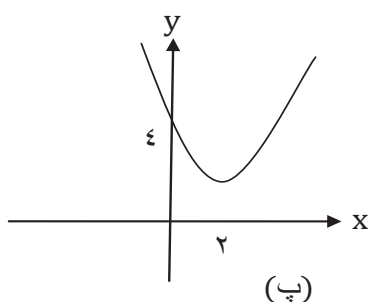
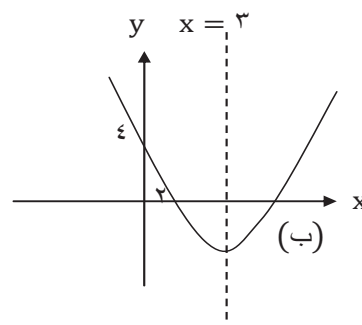
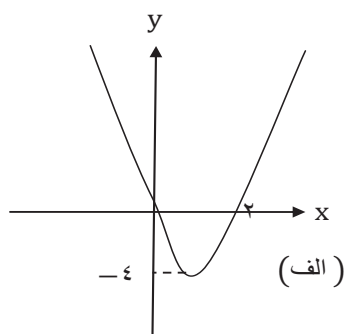
ب: نمودار سهمی بر محور طولها مماس است. بنابراین معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است.



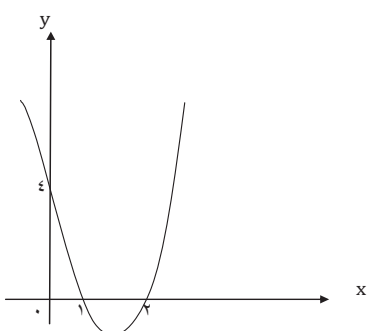
ج: نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع نمی‌کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.



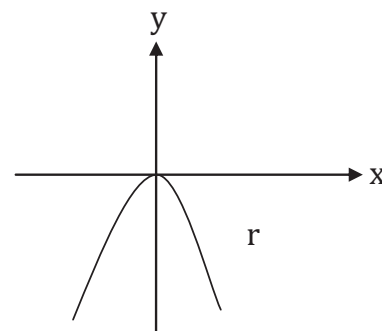
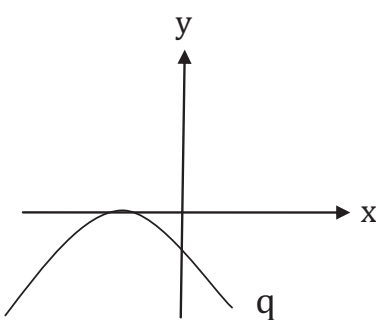
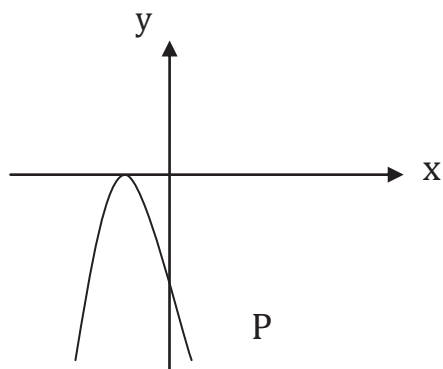
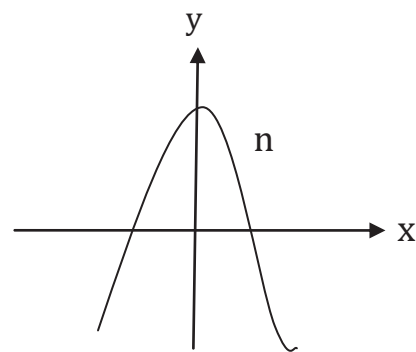
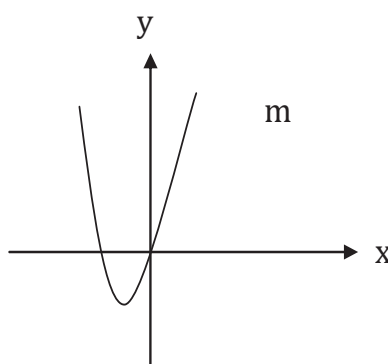
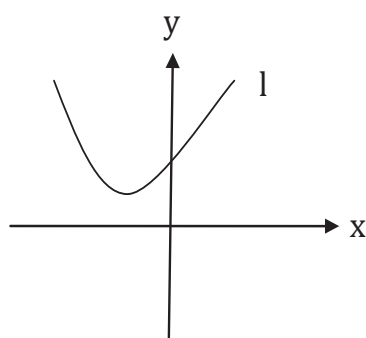
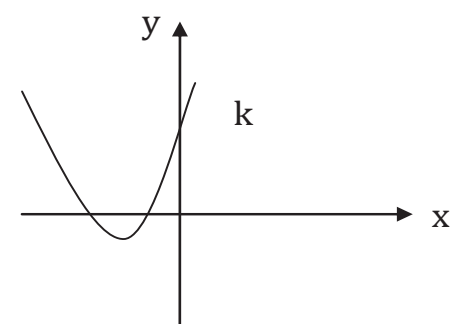
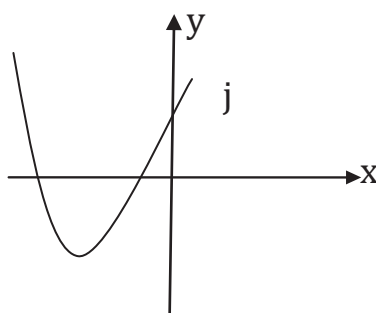
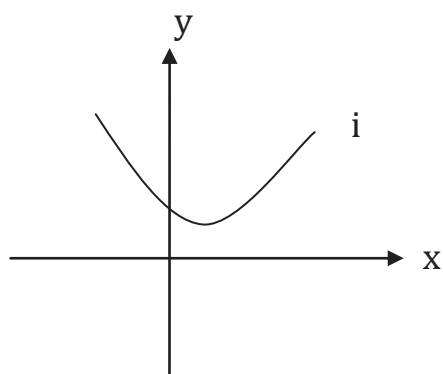
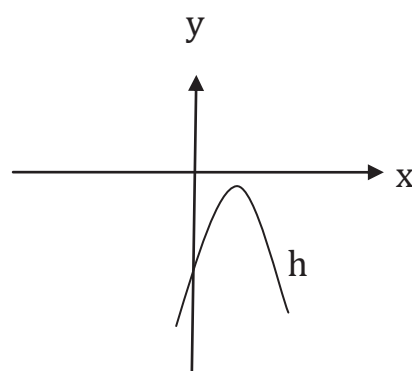
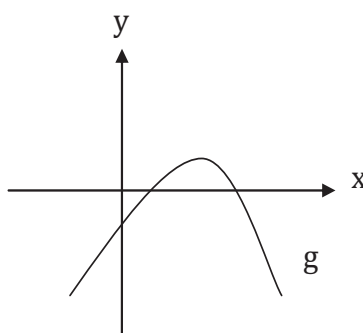
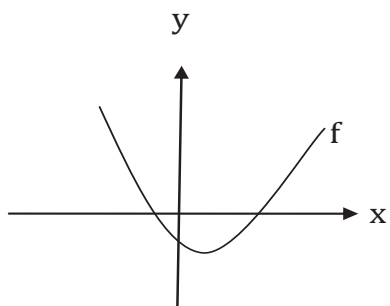
مثال ۲۹: معادله سهمی های زیر را بنویسید.



مثال ۳۰: معادله سهمی مقابل را بنویسید.



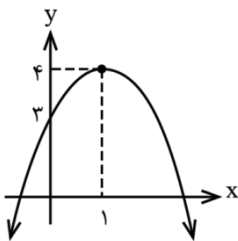
شماره ۳۱: با توجه به نمودارهای داده شده جدول زیر را کامل کنید.



تابع ویژگی	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a												
علامت b												
علامت c												
تعداد ریشه‌ها												
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)												

تست ۲:

اگر نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل باشد، آن گاه مقدار $a - b + c$ کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۰
(۴) -۱

تست ۳:

در معادله‌ی درجه‌ی دومی به عنوان ضابطه‌ی یک سهمی $a = -۱$ ضریب جمله‌ی درجه دوم، $\Delta = ۱۶$ و مجموع ریشه‌ها برابر ۲ بوده،

این سهمی، فاقد «کدام ویژگی» است؟

- (۱) رو به پایین باز می‌شود.
(۲) محور تقارن: خط $x = ۲$
(۳) بیشترین مقدار را دارد.
(۴) مختصات رأس: $(۱, ۴)$

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

به معادلاتی مانند $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می نامیم

حل معادلات گویا

- برای حل معادلات گویا مراحل زیر را انجام می دهیم
- ۱- مخرج ها را تجزیه می کنیم (اگر تجزیه شدند)
 - ۲- کوچکترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج ها را به دست می آوریم
 - ۳- دو طرف تساوی را در کوچکترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود.
 - ۴- پس از ساده کردن معادله به دست آمده را حل می کنیم
- تذکر مهم: جواب های به دست آمده در صورتی قابل قبول هستند که هیچ یک از مخرج ها را صفر نکنند
- مثال ۱:** معادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

مثال ۲: معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های به دست آمده مورد قبول هستند؟

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0 \quad \text{ب) } \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k} \quad \text{پ) } \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

مثال ۳: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$۴) \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{3}{x^2-2x+3}$$

$$۲) \frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$۵) \frac{n^2-2n+2}{n^2-2n} - \frac{1+n}{n} = \frac{n-1}{n-2}$$

$$۳) \frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x}$$

$$۶) \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

مثال ۴: به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

مثال ۵: به ازای چه مقدار از k معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-6}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

مسئله ۶: رضا و محسن با هم پروژه ای را در ۲۰ روز به اتمام می رسانند. اگر رضا این پروژه را به تنهایی ۹ روز دیرتر از محسن انجام دهد، محسن ظرف چند روز پروژه‌ی مذکور را به تنهایی انجام خواهد داد.

مسئله ۷: در یک مزرعه اگر دو کارگر هم زمان فعالیت کنند کار در ۳۶ روز تمام می شود و اگر کارگر اول به تنهایی کار کند کار ۶۰ روزه تمام می شود. در صورتی که کارگر دوم به تنهایی کار کند کار چند روزه تمام خواهد شد؟

مسئله ۸: لیلی به همراه تعدادی از دوستانش به یک موزه‌ی تاریخی رفت و پول بلیط همه‌ی آنها ۱۰۰۰ تومان شد. اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند که ۵۰ تومان اضافه بدهند تا لیلی پول بلیط خود را ندهد. دوستان لیلی چند نفر بودند؟

مسئله ۹: جسمی به وزن ۱۵ کیلوگرم از جنس آلیاژ نیکل و گرم بوده و ۸۰ درصد آن نیکل می باشد. برای رساندن درصد نیکل به ۶۰ درصد باید چند کیلوگرم گرم به این آلیاژ افزوده شود؟

مسئله ۱۰: هلی کوپتر مسیر ۸۰۰ کیلومتری بین دو شهر را طی می کند. در مسیر رفت سرعتش به طور متوسط ۲۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر از برگشت است. اگر زمان بازگشت ۱۰ دقیقه بیشتر باشد سرعت هلی کوپتر در مسیر رفت چقدر است؟

سوال ۱۱: در یک آکواریوم با آب شور، قرار است محلول آب نمک با غلظت ۶ درصدی داشته باشیم. اگر در حال حاضر ۱۵۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصدی داشته باشیم چقدر از آب آن تبخیر شود تا به حد مجاز برسیم؟

سوال ۱۲: ۲۰۰ کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد را با n کیلوگرم رنگ با غلظت ۸ درصدی مخلوط کرده ایم. حاصل رنگ با غلظت ۱۰ درصد شده است مقدار n کدام است؟

سوال ۱۳: درون ظرفی ۴۹ لیتر آب موجود است، x لیتر آب از ظرف خارج نموده و x لیتر متانول درون ظرف می ریزیم سپس x لیتر از محلول برمی داریم اگر در محلول باقیمانده ۳۶ لیتر آب موجود باشد، x کدام است؟

سوال ۱۴: آقای فلاح چای چند اسباب بازی برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰۰۰ شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می داد او ۴ اسباب بازی بیشتر می توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی بدون تخفیف چقدر است؟

معادلات گنگ:

اگر در معادله ای دست کم یک رادیکال شامل مجهول وجود داشته باشد آن معادله را گنگ می نامیم.

حل معادلات رادیکالی (گنگ)

برای حل معادلات رادیکالی مراحل زیر را انجام می دهیم:

- ۱- رادیکال را در یک سمت معادله (معمولا سمت چپ) قرار می دهیم و بقیه عبارات را به سمت دیگر (معمولا سمت راست) منتقل می کنیم یعنی کاری می کنیم رادیکال به تنهایی در یک سمت قرار گیرد.
- ۲- طرفین را به توانی می رسانیم تا رادیکال حذف شود (اگر فرجه ۲ باشد به توان ۲ و اگر فرجه ۳ باشد به توان ۳ و ...)
- ۳- بعد از حذف رادیکال معادله به دست آمده را حل می کنیم تا جواب به دست آید.
- تذکره ۱: اگر چند رادیکال داشتیم رادیکال ها را به تعداد مساوی به طرفین تساوی می بریم .
- تذکره ۲: اگر مراحل ۱ و ۲ را انجام دادیم و باز رادیکال داشتیم دوباره این دو مرحله را تکرار می کنیم تا رادیکال از بین برود.
- تذکره ۳ (خیلی مهم): ریشه های به دست آمده را حتما در معادله ی اصلی (قبل از به توان رساندن) قرار می دهیم این ریشه ها در صورتی قابل قبول هستند که در معادله اصلی صدق کنند.

مثال ۱: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $x + \sqrt{x} = 6$

۲) $\sqrt{15 + \sqrt{2x + 80}} = 5$

۳) $\sqrt{5q - 1} + 3 = 0$

۴) $2\sqrt{x} - \sqrt{3x + 4} = 0$

۵) $\sqrt{1 - x^2} = x$

۶) $2 + \sqrt{1 + x} = \sqrt{x}$

مثال ۱۷: هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{t+4} = 3$

ب) $k = \sqrt{6k-8}$

ج) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

ج) $x + \sqrt{x} = 6$

ح) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

مثال ۱۸: بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند؟

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$ ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$ پ) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

سوال ۱۹: عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

سوال ۲۰: نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله باشد.

سوال ۲۱: دانش آموزان کلاس سن دبیر ریاضی را از او پرسیدند. گفت: وقتی فرزندم دنیا آمد، من ۳۰ سال داشتم و اکنون سن او جذر سن من است. حال شما سن من را حساب کنید.

سوال ۲۲: معادله‌ی $x - 13\sqrt{x} + 36 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سوال ۲۳: معادله‌ی $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱: به ازای چه مقدار a دو خط $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ ax + 4y = -ay + 5 \end{cases}$ موازی اند؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $-\frac{8}{5}$ (۳) $\frac{8}{5}$ (۴) $-\frac{5}{8}$

تست ۲: به ازای چه مقدار m دو خط $y = 3x + 1$ و $y + mx + 2 = 0$ بر هم عمودند؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۳

تست ۳: اگر خطوط $y = x + 2$ و $(k + 1)y = x + 1$ و $y = (2k + 1)x + 1$ اقطار یک لوزی باشند، k کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

تست ۴: خطی که از نقاط $A(1, -2)$ و $B(2, -2)$ می گذرد، خط $x + y = 1$ را در نقطه ی C قطع می

کند. $x_C + 2y_C$ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) -۳

تست ۵: خطی موازی با خط $3y = 1 - 6x$ بوده و عرض از مبدأ آن برابر ۱- است. کدام یک از نقاط زیر

روی این خط واقع است؟

- (۱) $(1, 3)$ (۲) $(-1, -1)$ (۳) $(1, -3)$ (۴) $(-1, -2)$

تست ۶: معادله ی خطی که از نقطه ی $(-1, 2)$ گذشته و بر خط $2y - x + 2 = 0$ عمود باشد، کدام است؟

(۱) $y + 2x - 3 = 0$ (۲) $y + 2x = 0$

(۳) $2y + x - 3 = 0$ (۴) $2y + x = 0$

تست ۷: معادله ی خطی که بر خط $3y = 4 - 2x$ عمود باشد و خط $y = x + 1$ را در نقطه ای به عرض

۲- قطع کند. کدام است؟

$$3x - 2y + 5 = 0 \quad (2)$$

$$3x + 2y - 5 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad (4)$$

$$2x - 3y - 5 = 0 \quad (3)$$

تست ۸: معادله ی خطی که از نقطه ی تلاقی $2y = x - 2$ و محور x ها گذشته و با خط $3y = x + 2$

موازی باشد، کدام است؟

$$y + 3x + 2 = 0 \quad (4) \quad y - 3x - 1 = 0 \quad (3) \quad 3y - x + 2 = 0 \quad (2) \quad 3y + x - 2 = 0 \quad (1)$$

تست ۹: اگر سه نقطه ی متمایز $A(1,1)$ و $B(-1,-1)$ و $C(m, m^2 + 2m)$ روی یک خط راست باشند،

آن گاه :

$$m = 1 \quad (4)$$

$$m = -1 \quad (3)$$

$$m = 0, -1 \quad (2)$$

$$m = 0 \quad (1)$$

تست ۱۰: دو نقطه ی $A(2, -3)$ و $B(2, 1)$ دو انتهای قطر کوچک یک لوزی هستند که قطر بزرگ آن ۳ برابر

قطر کوچک آن است. مساحت لوزی کدام است؟

$$48 \quad (4)$$

$$36 \quad (3)$$

$$24 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

تست ۱۱: سه نقطه ی $A(0, -1)$ و $B(3, 1)$ و $C(2, -4)$ سه رأس یک مثلث اند. این مثلث همواره چگونه

است؟

(۱) متساوی الاضلاع است. (۲) متساوی الساقین است ولی قائم الزاویه نیست.

(۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین است. (۴) قائم الزاویه است ولی متساوی الساقین نیست.

سوال ۱۲: نقاط $A(1,0)$ و $B(4,2)$ و $C(a,-a)$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار a ، مثلث ABC در رأس A

قائمه و متساوی الساقین است.

$$-3(1) \quad -2(2) \quad 2(3) \quad 3(4)$$

سوال ۱۳: طول نقطه M واقع بر محور طول ها که از دو نقطه $B(-2,3)$ و $C(4,-1)$ به یک فاصله باشد،

کدام است؟

$$-\frac{1}{2}(1) \quad \frac{2}{3}(2) \quad \frac{1}{3}(3) \quad -\frac{2}{3}(4)$$

سوال ۱۴: نقطه $A(3,a)$ بالای محور x هاست و فاصله y آن از مرکز مختصات برابر ۵ می باشد. A کدام

است؟

$$2(1) \quad 4(2) \quad -4(3) \quad -2(4)$$

سوال ۱۵: خطی که از نقاط $(-1,1)$ و $(2,2)$ می گذرد، با محور های مختصات چه مساحتی می سازد؟

$$\frac{2}{3}(1) \quad \frac{16}{3}(2) \quad \frac{4}{3}(3) \quad \frac{8}{3}(4)$$

سوال ۱۷: نقاط $A(2,-1)$ و $B(0,1)$ و $C(-1,1)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه CM چه قدر است؟

$$\sqrt{5}(1) \quad 4(2) \quad 2\sqrt{2}(3) \quad \sqrt{2}(4)$$

سوال ۱۸: معادله y میانه AM در مثلثی که مختصات سه رأس آن $A(1,0)$ و $B(2,0)$ و $C(2,2)$ باشد، کدام

است؟

$$y = -x + 1(1) \quad y = -x(2) \quad y = x + 2(3) \quad y = x - 1(4)$$

تست ۱۹: دو نقطه ی $A(2a, a)$ و $B(a + 3, a - 4)$ دو رأس از مثلثی هستند. میانه ی نظیر رأس C منطبق بر

خط $y = 5$ می باشد مختصات وسط AB کدام است؟

- ۷(۱) ۸(۲) ۹(۳) ۱۲(۴)

تست ۲۰: نقاط $A(1, 2)$ و $B(-5, 2)$ و $C(-2, 5)$ سه رأس یک مربع هستند. مجموع طول و عرض رأس

چهارم کدام است؟

- ۱(۴) $-1(3)$ $-5(2)$ $-3(1)$

تست ۲۱: نقاط $A(6, 2)$ و $B(5, 5)$ و $C(6, 8)$ سه رأس یک لوزی هستند، مساحت لوزی چه قدر است؟

- ۴(۱) ۸(۲) ۹(۳) ۱۸(۴)

تست ۲۲: یک رأس از متوازی الاضلاع نقطه ی $A(7, 9)$ و معادله های دو ضلع آن $2y = x + 3$ و $y = 3x + 4$

است. مختصات محل تلاقی دو قطر آن کدام است؟

- $(2, 4)(1)$ $(3, 2)(2)$ $(3, 5)(3)$ $(4, 5)(4)$

تست ۲۳: طول قعر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط به معادله ی $x + y = 5$ و مختصات یک رأس آن

$(-2, 1)$ است، کدام است؟

- $3\sqrt{2}(1)$ $4\sqrt{2}(2)$ $5(3)$ $6(4)$

تست ۲۴: معادله ی یکی از قطرهای مربع برابر با $y = 2x + 1$ است. اگر مختصات یکی از رئوس مربع

$(1, -2)$ باشد، مساحت مربع کدام است؟

- $\frac{5}{2}(1)$ $5(2)$ $10(3)$ $20(4)$

تست ۲۵: نقطه ی $(-1, 2)$ مرکز مربع و معادله ی یک ضلع آن به صورت $4x - 3y = a$ می باشد. به ازای

کدام مقدار a ، مساحت مربع ۱۶ واحد مربع است؟

- ۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

تست ۲۶: فاصله ی نقطه ای واقع بر نیمساز ناحیه ی دوم از خط به معادله ی $4 = 3y - 2x + 4$ برابر $3\sqrt{13}$

واحد است. عرض آن نقطه کدام است؟

- ۱) 5 ۲) 6 ۳) 7 ۴) 8

تست ۲۷: نقطه های $A(0, 3)$ و $B(\sqrt{3}, 6)$ و مبدأ مختصات سه رأس یک مثلث می باشند. طول ارتفاع این مثلث

گذرنده از مبدأ کدام است؟

- ۱) $5/1$ ۲) 2 ۳) $5/2$ ۴) 3

تست ۲۸: فاصله ی دو خط موازی $y = mx + 4$ و $y = x - 2$ برابر است با:

- ۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $m - 1$ ۳) $\sqrt{m - 3}$ ۴) $\sqrt{2}$

تست ۲۹: فاصله ی خطی که دو نقطه ی $A(0, 0)$ و $B(1, 1)$ را به هم وصل می کند، از خطی که دو نقطه ی

$C(1, 3)$ و $D(2, 4)$ را به هم وصل می کند، کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

تست ۳۰: معادلات دو ضلع از یک مربع به صورت $y = 2x$ و $5 = 4x - 2y$ است. مساحت مربع کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{6}{5}$

تست ۳۱: معادله $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۳۲: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟ (سراسری)

(تجربی ۹۰)

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

تست ۳۳: اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟ (سراسری)

(تجربی)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست ۳۴: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟ (سراسری)

(تجربی ۹۰ خ)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

تست ۳۵: به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶

می‌باشد؟ (سراسری تجربی ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{9}{5}, 1$ (۴) $-\frac{9}{5}, -1$

تست ۳۶: به ازای چه مقداری از k در معادله درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه‌های رابطه $x_1 + 2x_2 = 3$

برقرار است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) -۲ (۴) $\frac{1}{2}$

تست ۳۷: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از معادله درجه دوم

$3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است b کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

تست ۳۸: اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی

$$x^2 - 7x + 3 = 0$$
 باشند، a کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

- (۱) -۱۴ (۲) -۱۲ (۳) -۸ (۴) -۶

تست ۳۹: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر

است؟ (سراسری تجربی ۹۴)

$$(۱) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (۲) \quad x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(۳) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (۴) \quad x^2 + 5x + 2 = 0$$

تست ۴۰: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x = 1$ باشند به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی

$$x^2 + kx - 1 = 0$$
 به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری ریاضی ۹۰ خ)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

تست ۴۱: اگر معادله‌ی $(m^2 + 1)x^2 - 2mx + 4 - m^2 = 0$ دو ریشه‌ی غیر هم علامت داشته باشد حدود m

کدام است؟

$$(۱) \quad m > 2 \quad (۲) \quad m < -2 \quad (۳) \quad |m| > 2 \quad (۴) \quad |m| < 2$$

تست ۴۲: اگر معادله‌ی $mx^2 - 2(m^2 + m - 2)x + m - 2 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی با علامت‌های مختلف

داشته باشد آن گاه مقدار m کدام است؟

$$(۱) \quad m > 2 \quad \text{یا} \quad m < 0 \quad (۲) \quad 0 < m < 2 \quad (۳) \quad m > 2 \quad (۴) \quad m < 0$$

تست ۴۳: اگر $(k > 1)$ باشد معادله $x^2 - (2k + 1)x + (k + 1) = 0$ دارای :

(۱) دو ریشه‌ی مثبت است (۲) دو ریشه‌ی منفی است

(۳) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه است (۴) ریشه نیست

تست ۴۴: اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه‌ی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$

تست ۴۵: به ازای کدام مقدار a ، معادله $ax^2 + 5x^2 + 3x^4 + a^2 = 1$ فقط دو جواب قرینه برابر x دارد؟

- (۱) $0 < a < 2$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $|a| > 1$ (۴) هر مقدار a

تست ۴۶: معادله $(x+2)(x-2)(x^2+1) = 1$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۴۷: معادله $x + y = x^2$ محور تقارن منحنی $x + y = x^2$ کدام است؟

- (۱) $2x + 1 = 0$ (۲) $2y - 1 = 0$ (۳) $2x - 1 = 0$ (۴) $2y + 1 = 0$

تست ۴۸: اگر دو نقطه‌ی $A(1, 4)$ و $B(-5, 4)$ روی تابع $y = ax^2 + bx + c$ باشد طول اکستریم منحنی کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) -۲

تست ۴۹: با توجه به شکل زیر، سهمی به معادله‌ای $y = -2x^2 - 2mx - m^2 + 3$ در چه نقطه‌ای محور عرض‌ها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) -۳

تست ۵۰: به ازای چه مقدار m نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ‌هاست؟ (سراسری ریاضی فیزیک خ)

- (۱) $m < -\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4} < m < 1$ (۳) $1 < m < \frac{3}{4}$ (۴) $m > \frac{3}{4}$

تست ۵۱: به ازای کدام مقادیر، نمودار تابع $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x هاست؟
(سراسری ریاضی فیزیک)

$$(1) m > -2 \quad (2) -2 < m < -1 \quad (3) -2 < m < 2 \quad (4) -1 < m < 2$$

تست ۵۲: به ازای کدام مقدار a هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟
(سراسری ریاضی فیزیک ۸۹ خ)

$$(1) a < -1 \quad (2) a > 1 \quad (3) a > 2 \quad (4) 1 < a < 2$$

تست ۵۳: نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 2mx + 1$ بالای محور ox است مقادیر m در کدام گزینه صدق می-کند؟

$$(1) m > -1 \quad (2) m < 1 \quad (3) m < -1 \text{ یا } m > 1 \quad (4) -1 < m < 1$$

تست ۵۴: نقطه‌ی مینیم تابع با ضابطه $y = x^2 + 2ax + 6$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد a کدام است؟

$$(1) -4 \quad (2) -2 \quad (3) 3 \quad (4) -3$$

تست ۵۵: به ازای کدام مقدار a نقطه‌ی مینیم نمودار تابع $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط به معادله $y = 1$ واقع است؟

$$(1) -1 \quad (2) \frac{2}{3} \quad (3) 1 \quad (4) 2$$

تست ۵۶: به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ فقط از ناحیه دوم مختصات نمی‌گذرد؟

$$(1) a \leq -2 \quad (2) a < -2 \quad (3) a \geq -2 \quad (4) -2 \leq a < 0$$

تست ۵۷: به ازای کدام مقادیر a منحنی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم مختصات نمی‌گذرد؟
(سراسری ریاضی ۸۹ خ)

$$(1) a = 1 \quad (2) a = 2 \quad (3) a = -2 \quad (4) a = -1$$

تست ۵۸: به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = (1-m)x^2 + x + m - 2$ از چهار محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

$$(1) m < 1 \quad (2) m > 2 \quad (3) 1 < m < 2 \quad (4) -1 < m < 2$$

سوال ۵۹: به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی گذرد؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

سوال ۶۰: به ازای کدام مقادیر m منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه مختصات گذشته می گذرد؟ (سراسری ریاضی فیزیک)

- (۱) $m < -2$ (۲) $m < -1$ (۳) $1 < m < +1$ (۴) $-4 < m < -2$

سوال ۶۱: حدود m کدام باشد تا مینیمم تابع $y = mx^2 + 2x + 2m - 1$ در ناحیه سوم قرار گیرد؟

- (۱) $m > 0$ (۲) $-1 < m < \frac{1}{2}$ (۳) $0 < m < 1$ (۴) $-\frac{1}{2} < m < 0$

سوال ۶۲: اگر نمودار تابع $y = x^2 - mx + m - 3$ از ناحیه های اول و دوم و سوم عبور کند حدود m کدام است؟

- (۱) به ازای هیچ مقدار حقیقی (۲) $m < 0$ (۳) $m \geq 3$ (۴) به ازای هر عدد حقیقی

سوال ۶۳: تعداد جواب های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سوال ۶۴: اگر $x = 4$ یکی از جواب های معادله $\frac{x-a}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{a-1}{2x-4}$ باشد جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) جواب دیگری ندارد

سوال ۶۵: اگر عدد $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یکی از جواب های معادله $\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{k}{x+1}$ باشد. مجموع تمامی ریشه ها کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال ۶۶: معادله $\sqrt{4 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ریشه حقیقی ندارد

سوال ۶۷: معادله $\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 5 = \sqrt{13 - x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ریشه حقیقی ندارد (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

تست ۶۸: اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x^2 - 5x + a = 0$ باشد جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگری ندارد.

تست ۶۹: معادله $x^2 - 13\sqrt{x} + 36 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۷۰: معادله $x^2 - 5\sqrt{x} - 36 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۷۱: به ازای کدام مقدار a معادله $x - (a^2 + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0$ فقط دو جواب برای x دارد؟

- (۱) $a > 2$ (۲) $-1 < a < 1$ (۳) $|a| > 2$ (۴) هر مقدار a

تست ۷۲: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x

حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی ۸۸ خ)

- (۱) $m \geq 1$ (۲) $m < 2$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) هر مقدار m

تست ۷۳: به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی ۸۸)

- (۱) $-\frac{3}{4} < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $\frac{3}{4} < m < \frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{4} < m < 2$

تست ۷۴: معادله $\frac{(x^2-9)(x^2-16)\sqrt{x-2}}{x-3} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) چهار ریشه (۲) سه ریشه (۳) یک ریشه (۴) دو ریشه

تست ۷۵: معادله $\sqrt[4]{x^3 + x} - 10 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۷۶: معادله $|x^2 - x - 6| + \sqrt{x^3 - 5x^2 - 2x + 24} = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳