



RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

به نام خدا

(۱۱ تجربی)

جزوه ریاضی ۲

تهیه و تنظیم: فاطمه بوربور

دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران (وراین)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

هندسه تحلیلی

❖ درس اول:

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

❖ درس دوم:

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

❖ درس سوم:

شماره پاره	نوبت دوم	نوبت اول
۲/۵	۲	۶

بارم فصل ۱:

فصل ۱ درس ۱: هندسه تحلیلی

پیش نیازهای درس ۱:

- توانایی رسم نمودار یک خط با داشتن معادله آن
- شناخت معادله خطوط موازی با محورهای مختصات
- آشنایی با معادله خطوط نیمسازهای نواحی مختلف صفحه مختصات
- آشنایی با مفهوم عرض از مبدأ یک خط
- آشنایی با شرط موازی بودن دو خط
- توانایی محاسبه شیب یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن
- توانایی به دست آوردن معادله یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن

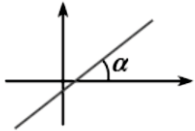
اهداف درس ۱:

- یادآوری معادله خط در حالت کلی و حالت های خاص
- یادآوری شرط موازی بودن دو خط و آموزش شرط عمود بودن دو خط
- توانایی محاسبه فاصله دو نقطه با داشتن مختصات آنها
- توانایی یافتن مختصات نقطه وسط پاره خط
- توانایی به کارگیری فرمول فاصله نقطه از خط

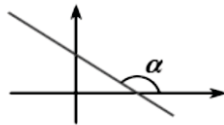
شیب خط (m):

شیب، تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x می سازد. که اگر خط، زاویه تند بسازد، شیب مثبت است و اگر زاویه باز بسازد شیب منفی است.

$\text{شیب خط} = \tan \alpha$



شیب مثبت $m = \tan \alpha$



شیب منفی $m = \tan \alpha$

✓ نکته: برای به دست آوردن شیب خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

عرض از مبدا:

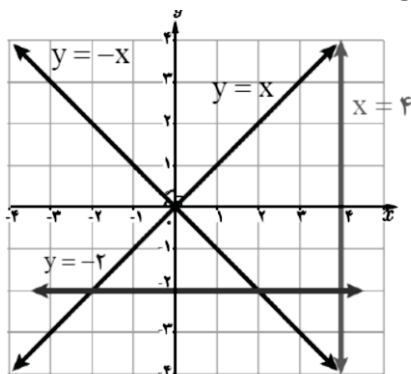
عرض از مبدا را با h نشان می دهیم که به محل برخورد خط با محور عرض ها، عرض از مبدا می گوییم که اگر در معادله به جای x عدد صفر قرار دهیم مقدار y را عرض از مبدا می نامیم.

✓ نکته: اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$

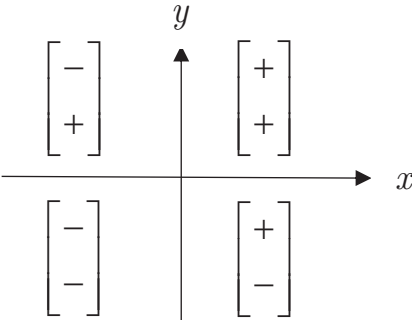
باشد شیب آن $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدا آن $-\frac{c}{b}$ است

معادله خطوط خاص: (گارد رگلاسی ۳ صی ۲)

③ معادله هریک از خط های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید. حل:



همان مفاهیم نقطه و خط است که دوره متوسطه اول با آن آشنا شده اید.



دستگاه مختصات:

معادله خط:

رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد. هر معادله به شکل $y = mx + h$ یک معادله خط است.

رسم یک خط:

(گارد رگلاسی ۱ و ۲ صی ۲)

① می دانیم از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می کند؛ بنابراین با داشتن معادله یک خط می توان با مشخص کردن ۲ نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

② نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید: حل:

$L_1: y = 2x + 1 \rightarrow$

x	0	1
y	1	3

$L_2: y = 2x - 3 \rightarrow$

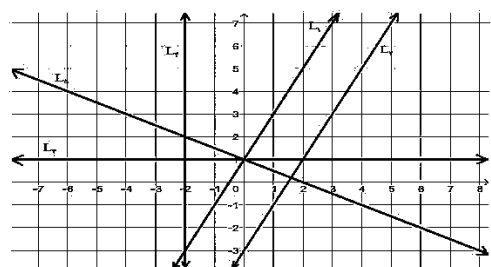
x	0	1
y	-3	-1

$L_3: x + 2y = 2 \rightarrow$

x	0	2
y	1	0

$L_4: y = 1 \rightarrow$ نمودار خط موازی محور طول ها

$L_5: x = -2 \rightarrow$ نمودار خط موازی محور عرض ها



(گارد در کلاسی ۶ ص ۳)

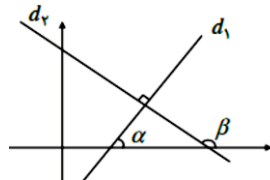
⑥ معادله خط گذرنده از نقطه $P(2, -1)$ را بنویسید. به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.

✓ هر گاه دو خط متقاطع باشند همدیگر را با یک زاویه حاده (متقاطع غیر عمود) و یا ۹۰ درجه (متقاطع عمود) قطع می کنند.

✓ شرط عمود بودن دو خط آن است که شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد. یعنی حاصلضرب شیب هایشان -۱ باشد.

$$m \times m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \Leftrightarrow d_1 \perp d_2$$



معادله ی بسته	
$y = mx + h$	$y = m'x + h'$
۱) $m = m'$, $h \neq h'$	دو خط موازی
۲) $m = m'$, $h = h'$	دو خط منطبق
۳) $m \times m' = -1$	دو خط متعامد (عمود)

(گارد در کلاسی ۱ و ۲ ص ۴)

① در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف) $L: y = 5x - 2$ $T: y = \frac{-1}{5}x + 3$

ب) $L: y = \frac{1}{4}x + 7$ $T: x - 2y = 1$

پ) $L: 2x - 3y + 3 = 0$ $T: 3x + 2y = 0$

ت) $L: x = 1$ $T: y = -3$

ث) $L: y = 3x + 1$ $T: x = 3y - 1$

۱. $y = x$: نیمساز ربع اول و سوم

۲. $y = -x$: نیمساز ربع دوم و چهارم

۳. $y = b$ خطی موازی محور x ها
($m = 0, h = b$)

۴. $x = a$ خطی موازی محور y ها
(ندارد $h =$, $m =$ ت)

۵. $y = 0$ معادله محور x ها

۶. $x = 0$ معادله محور y ها

۷. $y = mx$ خطی که از مبدا می گذرد

نوشتن معادله خط:

برای نوشتن معادله خط از فرمول های زیر کمک می گیریم:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = mx + h$$

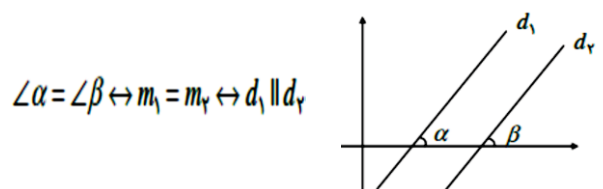
(گارد در کلاسی ۶ ص ۳)

⑥ معادله خط گذرا از دو نقطه $(3, 1)$, $(0, 7)$ را بنویسید.

وضعیت دو خط نسبت به هم:

(گارد در کلاسی ۴ ص ۲)

✓ شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب برابر باشند.



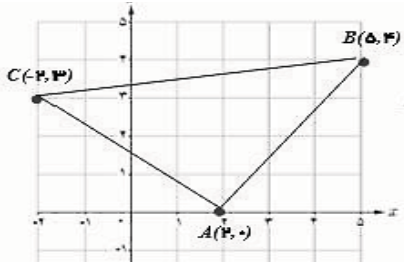
$$\angle \alpha = \angle \beta \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2$$

(کاردر کلاسی ۱ و ۳ ص ۶)

③ فاصله ی نقطه ی $N(-6, 8)$ تا مبدا مختصات بدست آورید.

① نقاط $A(2, 0)$ و $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر

بگیرید و رسم کنید.



حل:

الف) محیط مثلث را محاسبه کنید.

ب) نوع مثلث را مشخص کنید. متساوی الساقین قائم الزویه
پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم الزویه است.

مساحت مثلث را محاسبه کنید.

Home work: (تمرین ۳ ص ۹)

③ نشان دهید مثلث با راس های $A(1, 2)$, $B(2, 5)$, $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزویه است

② خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدا ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار m را چنان بیابید که دو خط L , T با هم موازی باشند.

ب) به ازای چه مقدار m ، دو خط بر هم عمودند؟

Home work: (تمرین ۱ ص ۹)

① وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید

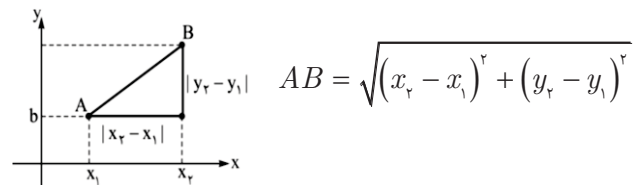
$$L: 2x - y = 1$$

$$T: y = 2x - 3$$

$$\Delta: x + 2y = 0$$

فاصله دو نقطه در دستگاه مختصات:

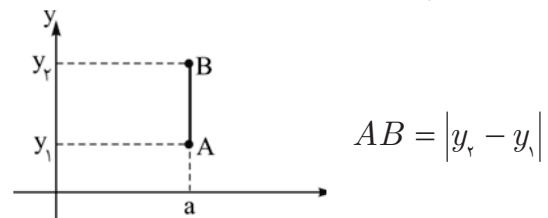
الف) فاصله دو نقطه:



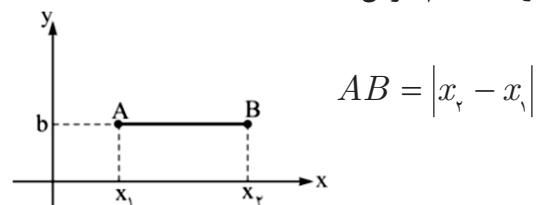
ب) فاصله نقطه از مبدا مختصات:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

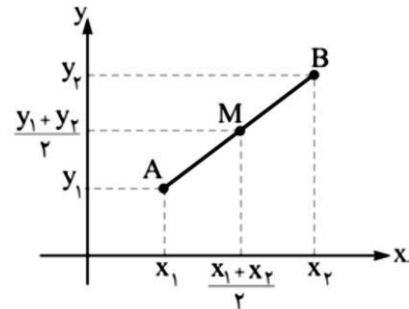
ج) فاصله دو نقطه هم طول:



د) فاصله دو نقطه هم عرض:



مختصات نقطه وسط پاره خط:



$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

✓ نکته: با داشتن مختصات وسط پاره خط می توانیم

موارد زیر را محاسبه کنیم:

(الف) طول میانه و معادله میانه (میانه خطی است که از رأس

به وسط ضلع مقابل کشیده می شود).

(ب) فاصله مبدا مختصات از وسط یک پاره خط

(ج) مختصات مرکز دایره با داشتن مختصات دوسر قطر

(د) قرینه یک نقطه

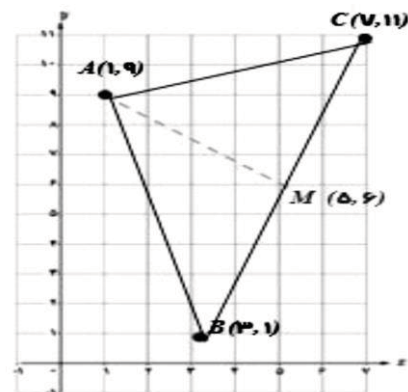
(ه) معادله عمود منصف یک پاره خط (عمود منصف خطی است

که از وسط ضلع میگذرد و بر آن عمود است.

(گاردورگلاسی ۱ ص ۷)

① مثلث با رأس های $A(1, 9)$ و $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$

را در نظر بگیرید و رسم کنید.



(الف) مختصات M وسط ضلع BC را به دست آورید.

(ب) طول میانه AM را به دست آورید.

(پ) معادله AM میانه AM را به دست آورید.

(تمرین ۲ ص ۹)

② دو نقطه $A(4, 10)$ و $B(-2, 8)$ را در نظر بگیرید.

فاصله مبدا مختصات را از وسط پاره خط AB به دست آورید

(تمرین ۴ ص ۹)

④ دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $A(2, -2)$ و

$B(6, 4)$ هستند.

(الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز این دایره را بیابید

(ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

(گاردورگلاسی ۲ ص ۷)

② (الف) نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه

A و $B(7, -2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.

(ب) قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$

را به دست آورید

(پ) قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به نقطه مبدا مختصات را

به دست آورید.

Home work

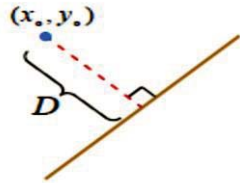
دو نقطه $A(4, 10)$ و $B(-2, 8)$ را در نظر بگیرید. معادله

عمود منصف پاره خط AB را بنویسید

فاصله نقطه از خط:

ابتدا خط را به صورت $ax + by + c = 0$ مرتب میکنیم سپس فاصله را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



(مثال ص ۸)

⑧ فاصله نقطه $A(7, 5)$ از خط به معادله $4x + 3y = 18$ را بدست آورید.

$$d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

Home work: (کار در کلاس ص ۹)

① فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط به معادله $2x + y = 5$ را بدست آورید.

فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط به معادله $x = 5$ را بدست آورید.

فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط به معادله $y = 0$ را بدست آورید.

✓ نکته: با داشتن فاصله نقطه از خط (d) می توانیم موارد زیر را حساب کنیم.

ارتفاع مثلث،

ضلع مربع،

شعاع دایره

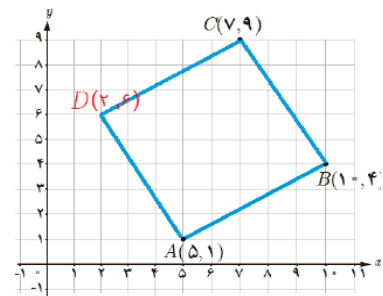
(کار در کلاس ص ۳ ص ۴)

③ مربع $ABCD$ در ناحیه اول مختصات واقع است، به طوری که دو رأس مجاور آن هستند الف) شیب ضلع AB را به دست آورید

الف) شیب ضلع AD را به دست آورید و معادله آن را بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید. حل:

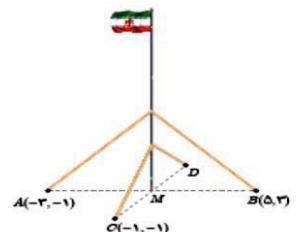


(تمرین ص ۵ ص ۹)

⑤ نقاط $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(1, -2)$ سه رأس یک مستطیل هستند مختصات رأس چهارم را بیابید.

Home work: (تمرین ص ۶ ص ۹)

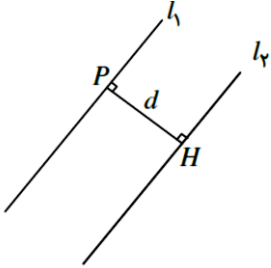
⑥ یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله مختصات نقطه D را به دست آورید



فاصله دو خط موازی:

فاصله دو خط موازی (ضریب های x, y یکسانند)

$ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:



$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(تقریبی ۸ ص ۹)

⑧ الف) نشان دهید دو خط با معادلات

$$5x - 12y + 8 = 0, \quad -10x + 24y + 10 = 0$$

با یکدیگر موازی اند.

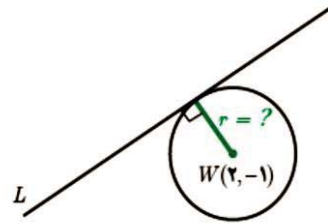
ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

(کاردرکلاسی ۲ ص ۹)

② خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز

$W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

(خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.)

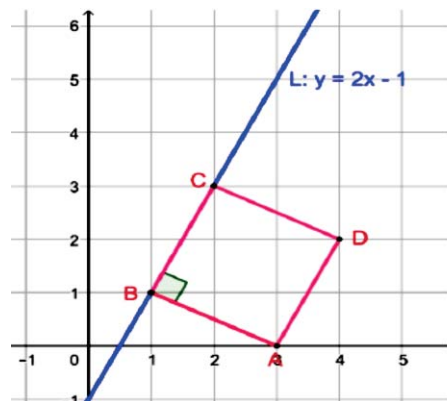


(تقریبی ۷ ص ۹)

⑦ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع

است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت

آن را به دست آورید.



Homework

مثلث با رئوس $A = (2, 0)$ و $B = (-2, -2)$ و $C = (5, 12)$

مفروض است. طول ارتفاع AH را به دست آورید.

فصل ۱ درس ۲:

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

پیش نیازهای درس ۲:

- ❖ توانایی حل معادلات درجه دوم
- ❖ توانایی رسم نمودار سهمی با داشتن ضابطه جبری آن
- ❖ تشخیص اینکه یک سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم از روی ضابطه جبری آن
- ❖ یافتن طول و عرض رأس سهمی داده شده
- ❖ توانایی محاسبه مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه ۲

اهداف درس ۲:

- ❖ استفاده از روش تغییر متغیر برای حل معادلات دو مجذوری.
- ❖ یافتن مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ بدون حل معادله
- ❖ تشکیل معادله درجه ۲ با p و s معلوم برای حل مسائل کاربردی مرتبط.
- ❖ محاسبه ماکزیمم یا مینیمم سهمی و استفاده از آن در حل مسائل بهینه سازی.
- ❖ تشخیص تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبه مقدار دقیق آنها
- ❖ به دست آوردن ضابطه سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن

معادله درجه دوم:

هر معادله پس از ساده کردن به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

مهم‌ترین روش‌های حل معادله درجه دوم:

۱- روش تجزیه

۲- روش فرمول کلی یا دلتا (Δ)

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه:

در حل معادله درجه دوم به روش تجزیه، از فاکتورگیری و اتحادها کمک می‌گیریم. و عبارت حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم.

✓ نکته: ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$A \times B = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array} \right.$$

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی (Δ):

مرحله (۱): ابتدا Δ را بدست می‌آوریم. $\Delta = b^2 - 4ac$

مرحله (۲):

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز

$$\text{است. و مقدار آن } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ است}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه (ریشه مضاعف) است. و مقدار آن $x = \frac{-b}{2a}$ است.

ج) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال: معادله $x^2 - 3x - 10 = 0$ به دو روش تجزیه و دلتا حل کنید.

✓ نکته: در معادله درجه ۲:

(فعالیت ۱ و ۲ ص ۱۲)

الف) اگر a, c مختلف‌العلامت باشند: آنگاه ($\Delta > 0$) و معادله دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است. مثل $x^2 - 5x + 6 = 0$ که ضرایب ۱- و ۳ مختلف‌العلامت هستند و معادله دارای دو ریشه است.

ب) اگر جمع ضرایب برابر صفر شود ($a + b + c = 0$): آنگاه

$$\text{ریشه‌ها } \left(1, \frac{c}{a} \right) \text{ است}$$

ج: اگر $a - b + c = 0$ باشد (یعنی: $b = a + c$) آنگاه

ریشه‌ها $\left(-1, -\frac{c}{a} \right)$ است. مثلا در $x^2 + 4x + 1 = 0$ چون

$$(4=3+1) \text{ است پس جواب‌ها } \left(-1, -\frac{1}{3} \right) \text{ است}$$

روش تغییر متغیر برای حل معادلات دو مجزوری:

معادلاتی که ممکن است حتی درجه دوم نباشند، ولی با تغییر متغیر، به معادله درجه ۲ تبدیل می شوند

(مثال ص ۱۱)

معادله $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ را حل کنید.

حل:

به جای x^2 عبارت متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می دهیم. به این کار تغییر متغیر می گوییم.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$u^2 = u \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

(گاردر کلاسی ۱۱ ص ۱۲)

① معادله های زیر را حل کنید.

الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$	ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
----------------------------	-------------------------

تمرین ص ۱۸: Homework

① معادله های زیر را حل کنید.

الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$	ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
----------------------------	-------------------------

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله درجه ۲ بدون حل آن:

اگر α, β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

(گاردر کلاسی ص ۱۳)

در معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P :معادله درجه دومی که مجموع ریشه های آن S وحاصل ضرب ریشه های آن P باشد، به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(گاردر کلاسی ۱ و ۲ و ۳ ص ۱۳)

① دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $1/5$ - و حاصل ضربشان -7 باشد.

③ معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

و $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ باشد.

② طول و عرض مستطیلی با مساحت $6cm^2$ و محیط $11cm$ را بیابید

(گارد در کلاسی ۱ ص ۱۵)

① تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

تمرین ۳ ص ۱۸: Homework

③ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

ب) $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$

مسائل بهینه سازی:

مسائلی هستند که در آن مقدار مساحت، حجم و... قرار است مینیمم یا ماکزیمم شود

برای حل مسائل بهینه سازی ابتدا مقادری را که قرار است است مینیمم یا ماکزیمم شود را به صورت معادله یک متغیره می نویسیم اگر معادله به دست آمده یک سهمی بود طول

رأس سهمی $(x = -\frac{b}{2a})$ را محاسبه می کنیم و مقدار y را می یابیم.

(مثال ص ۱۴)

یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر

تمرین ۲ ص ۱۸: Homework

② معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ باشد.

محاسبه ماکزیمم (بیشترین) و مینیمم (کمترین) سهمی:

نمودار هر معادله به شکل

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند را سهمی می نامیم.

برای یافتن ماکزیمم (بیشترین) و مینیمم (کمترین) سهمی

کافیست عرض راس سهمی (y) را بیابیم که برای به دستآوردن آن، باید طول راس سهمی $(x = -\frac{b}{2a})$ را در ضابطهسهمی $(y = ax^2 + bx + c)$ قرار دهیم یا مقدار

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$
 بیابیم.

✓ نکته: ماکزیمم (کمترین) و مینیمم (بیشترین) سهمی

به شکل $y = a(x-h)^2 + k$ برابر k می باشد.

(مثال ص ۱۴)

ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را بیابید. حل:

$$x = -\frac{b}{2a} = 1$$

$$f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 3 = 4$$

نوردهی را داشته باشد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

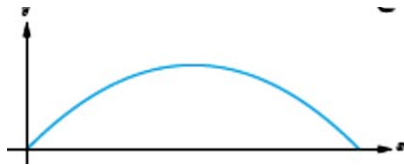
صفرهای تابع درجه ۲:

نقاط برخورد نمودار یک تابع درجه ۲ با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم که در واقع ریشه های معادله درجه ۲ هستند که برای محاسبه صفرهای تابع، تابع را مساوی صفر قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم.

(مثال ص ۱۵)

فوتبالیستی توپی را با زاویه ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه 20 m/s شوت میکند معادله مسیر حرکت این

توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه $y = \frac{-1}{40}x^2 + x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.
حل:

یعنی x راس سهمی را می یابیم

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2 \times \left(-\frac{1}{40}\right)} = 20$$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟
حل:

نقاط برخورد تابع با محور x ها که همان صفرهای تابع است را می یابیم:

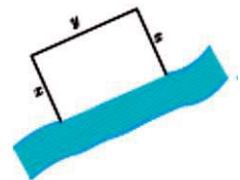
$$y = 0 \Rightarrow x \left(\frac{-1}{40}x + 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

$x = 0$ زمان شروع پرتاب و $x = 40$ زمان برخورد گلوله بازمین است.

(گاردو کلاسی ۲ ص ۱۵)

۲) قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار

داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

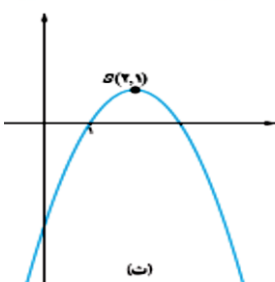
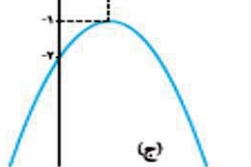
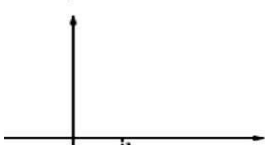
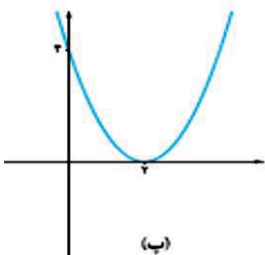
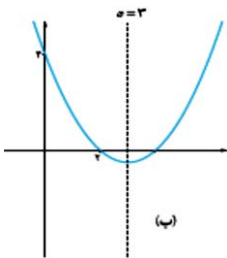
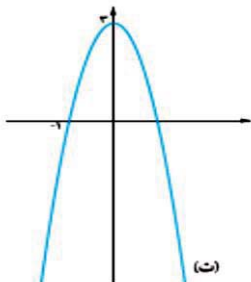
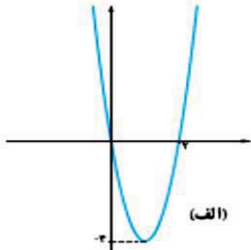


تمرین ۵ ص ۱۸: Homework

۵) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

تمرین ۱۸: Homework

۶ ضابطه جبری سهمی های زیر را بنویسید.



تمرین ۱۸: Homework

۴ راکتی به طور عمودی شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن $(t \geq 0)$

$$h(t) = 10t - 5t^2$$

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی گردد؟

بر دست آوردن ضابطه سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن:

برای نوشتن ضابطه سهمی دو حالت داریم:

۱) با داشتن راس سهمی $y = a(x - h)^2 + k$

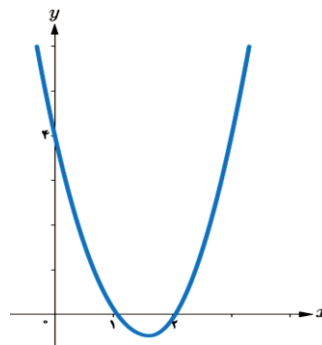
۲) با داشتن صفرهای تابع $\begin{cases} y = a(x - x_1)(x - x_2) \\ y = a(x - x_1)^2 \end{cases}$

توجه: مقدار a را با انتخاب یک نقطه روی نمودار که معمولاً

عرض از مبدا (محل برخورد نمودار با محور y) است می یابیم.


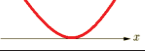
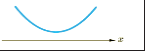
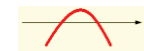


(مثال ص ۱۶)

معادله سهمی مقابل را بنویسید.



تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبه مقدار دقیق آنها:

به کمک علامت دلتا Δ می توان تعداد ریشه های معادله (صفرهای تابع) را مشخص کرد
(گارد در کلاسی ۱ ص ۱۶)

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

به کمک علامت S, P می توان علامت ریشه های معادله را مشخص کرد

اگر $S > 0, P > 0$ دوریشه مثبت هستند

اگر $S < 0, P > 0$ دوریشه منفی هستند

اگر $S < 0, P < 0$ دوریشه مختلف العلامتند و ریشه بزرگتر منفی است

اگر $S > 0, P < 0$ دوریشه مختلف العلامتند و ریشه بزرگتر مثبت است

(گارد در کلاسی ۲ ص ۱۶)

② در توابع زیر، تعداد و علامت ریشه های توابع داده شده را (در صورت وجود) مشخص کنید

الف) $y = x^2 + 6x + 5$ حل:

دو ریشه متمایز دارد $\Delta = 16 > 0 \rightarrow$

ریشه ها هم علامت اند $p = \frac{c}{a} = 5 > 0 \rightarrow$

هر دو ریشه منفی است $s = \frac{b}{a} = 6 < 0 \rightarrow$

ب) $y = x^2 + 4x - 5$

پ) $y = 3x^2 - 7x + 1$

ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

تعیین علامت ضرایب a, b, c از روی نمودار:

۱) علامت c : محل برخورد نمودار سهمی با محور y

۲) علامت a : اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد a مثبت و اگر رو به پایین باشد a منفی است

۳) علامت b :
روش اول:

الف) اگر راس سهمی در ربع ۱ و ۴ و بین آنها بود، علامت b مخالف علامت a است.

ب) اگر راس سهمی در ربع ۲ و ۳ و بین آنها بود، علامت b موافق علامت a است.

ج) اگر راس سهمی روی محور عرض ها باشد b صفر است.

روش دوم:

به محل برخورد منحنی با محور y ها نگاه می کنیم آنگاه

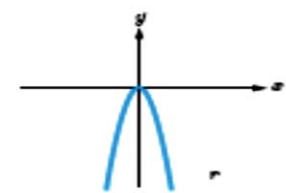
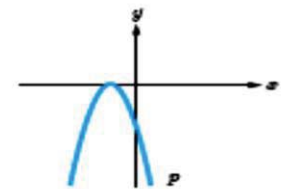
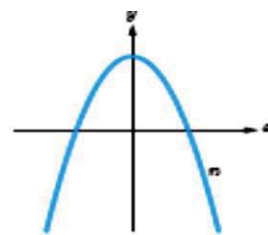
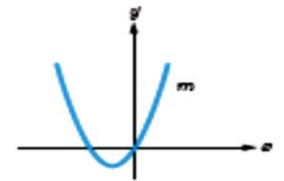
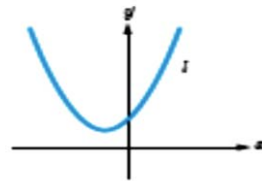
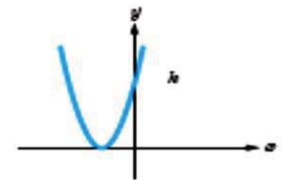
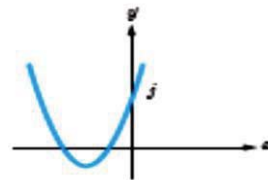
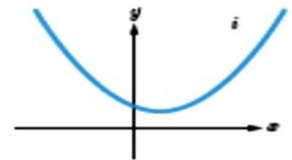
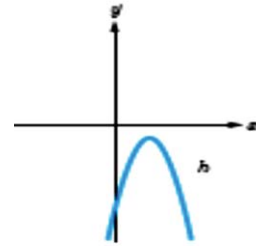
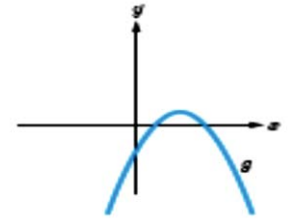
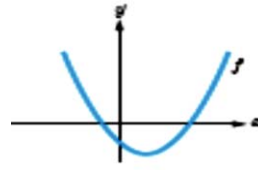
علامت b برابر شیب نمودار این نقطه است

(گارد در کلاسی ۳ ص ۱۷)

③ با توجه به شکل های زیر علامت ضرایب a و b و c و علامت و

تعداد ریشه ها را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ تعیین کنید

ویژگی	علامت a	علامت b	علامت c	تعداد ریشه	علامت ریشه
تابع f					
تابع g					
تابع h					
تابع i					
تابع j					
تابع k					
تابع l					
تابع m					
تابع n					
تابع p					
تابع q					
تابع r					



معادلات گویا و معادلات رادیکالی

فصل ۱ درس ۳:

پیش نیازهای درس ۳:

- آشنایی با عبارت های گویا
- توانایی انجام چهار عمل اصلی با عبارت های گویا
- توانایی محاسبه کوچک ترین مضرب مشترک (ک م م) چند جمله ای ها
- آشنایی با عبارت های رادیکالی
- توانایی محاسبه با عبارت های رادیکالی
- مسلط بودن به اتحاد های جبری، به ویژه اتحاد مربع دو جمله ای

اهداف درس ۳:

- توانایی حل معادلات گویا
- توانایی حل معادلات رادیکالی
- مهارت حل مسائل کلامی مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ



معادلات گویا:

هر معادله که مجهول (متغیر) در مخرج کسر باشد را معادله گویا

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2 \quad \text{گویند. مثل:}$$

مراحل حل معادلات گویا:

۱. تجزیه کردن مخرج کسرها در صورت امکان
۲. تعیین ک.م.م مخرج ها
۳. ضرب دو طرف تساوی در ک.م.م
۴. خارج کردن معادله از حالت کسری و انتقال عبارات به یک سمت
۵. حل معادله به دست آمده
۶. تست جواب ها در معادله اولیه تا مخرج صفر نشود.

(فعالیت ۱ ص ۲۰)

$$\textcircled{1} \text{ معادله } \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \text{ را حل کنید.}$$

حل:

مرحله ۱ و ۲: تجزیه کردن مخرج و تعیین ک.م.م

$$\left. \begin{array}{l} x^2-1 \rightarrow (x+1)(x-1) \\ x+1 \\ x^2-x \rightarrow x(x-1) \end{array} \right\} \rightarrow x(x+1)(x-1)$$

مرحله ۳: ضرب دو طرف تساوی در ک.م.م

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

مرحله ۴: خارج کردن معادله از حالت کسری و انتقال عبارات

به یک سمت

$$x(2x) + 2x(x-1) = (x+1)(2-x)$$

$$2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x - x^2 + 2 - x$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

مرحله ۵ و ۶: حل معادله به دست آمده و تست جواب ها

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

معادله را از راه دل تا با توجه به نکته درس قبل حل میکنیم

(اگر جمع ضرایب برابر صفر شود) $(a+b+c=0)$: آنگاه

ریشه ها $(1, \frac{c}{a})$ است:

$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow{5-3-2=0} \begin{cases} x=1 & \text{قق} \\ x=\frac{-2}{5} & \text{قق} \end{cases}$$

$x=1$ مخرج کسر را صفر می کند و عبارت تعریف نشده می شود پس غیر قابل قبول است

(گارد رگلاسی ۱ ص ۲۱)

① معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های به دست آمده مورد قبول هستند؟

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$\text{ب) } \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

$$\text{پ) } \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

تمرین ۱ ص ۲۳: Homework

① هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5 \quad \text{الف)}$$

(کاردرگلاسی ۲ ص ۲۱)

② دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت $\frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}$ بود او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. می خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است.

$$\text{ب) } \frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r}$$

$$\text{پ) } \frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$$

مستطیل طلایی:

مستطیلی است که در آن رابطه $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ برقرار باشد. نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می گویند.



عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار

تقریبی آن ۱/۶۱۸ می باشد

✓ نکته: برای به دست آوردن پاسخ برخی از مسائل نیاز به تشکیل و حل یک معادله گویا داریم

(فعالیت ۲ ص ۲۰)

② قطاری مسیر ۶۰ کیلومتری میان دو شهر را با سرعت ثابت v (km/h) طی می کند و مسیر برگشت را با سرعت 1.1 (km/h) کمتر از سرعت مسیر رفت طی می کند و نیم ساعت دیر به مقصد میرسد. زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

تمرین ۲ ص ۲۳: Homework

② علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه ای منتشر می کنند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟



معادلات رادیکالی (گنگ یا اسم):

هر معادله که مجهول (متغیر) زیر رادیکال باشد را معادله رادیکالی می گویند. مثل:

$$\sqrt{x} + 3 = 0$$

مراحل حل معادلات رادیکالی:

۱. بردن عبارت رادیکالی در یک طرف تساوی
۲. به توان ۲ رساندن طرفین معادله
۳. خارج کردن معادله از حالت رادیکالی
۴. حل معادله به دست آمده
۵. تست جواب ها در معادله اولیه تا عبارت زیر رادیکال منفی نشود.

(مثال ص ۲۲)

معادله $2\sqrt{x} = \sqrt{3x-3}$ را حل کنید.

حل:

مرحله ۱ و ۲:

$$(2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x-3})^2$$

مرحله ۳: خارج کردن معادله از حالت رادیکالی

$$4x = 3x - 3$$

مرحله ۴ و ۵: حل معادله به دست آمده و تست جواب ها

$$4x - 3x = -3 \rightarrow x = -3 \quad \text{غ ق ق}$$

(کاردرگلاسی ۱ ص ۲۳)

① معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های حاصل

قابل قبول اند؟

الف) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

ب) $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

پ) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x+1}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

ث) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$

تمرین ۱ ص ۲۳: Homework

① هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

ت) $\sqrt{t+4} = 3$

ث) $k = \sqrt{6k-8}$

ج) $x + \sqrt{x} = 6$

چ) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

ح) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

④ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

✓ نکته: جمع اعداد نامنفی هیچ گاه صفر نمی شود ولی اگر مجموع چند عبارت نامنفی صفر شد به معنی آنست که هر کدام از عبارت ها صفر خواهند بود.

(گاردنر کلاسی ۲ ص ۲۳)

② توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند.

$$\text{الف) } \sqrt{t} + 2 = 0$$

$$\text{ب) } \sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$$

$$\text{پ) } \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$$

✓ نکته: برای به دست آوردن پاسخ برخی از مسائل نیاز به تشکیل و حل یک معادله رادیکالی داریم

(مثال ص ۲۲)

نقطه ای روی محور x ها بیابید که فاصله آن از نقطه $p(2,3)$ برابر ۵ باشد. مساله چند جواب دارد؟

تمرین ۳ و ۴ ص ۲۴: Homework

③ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار

$$\text{خواهد داشت؛ به طوری که } t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$$

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟