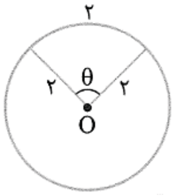
درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه

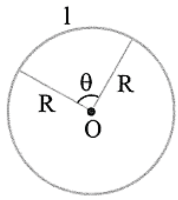
درجه : اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم زاویه مرکزی روبرو به هر قسمت آن یک درجه است



رادیان : برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبروی آن با شعاع آن مساوی باشد

اندازهٔ این زاویه بر حسب درجه، تقریباً برابر $۵۷/۳^\circ$ می‌باشد. بنابراین $۱ = ۵۷/۳^\circ$ رادیان

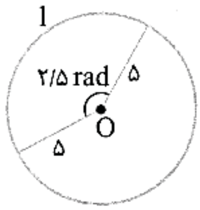
پس در دایره‌ای به شعاع R، زاویهٔ مرکزی‌ای که مقابل به کمانی به اندازهٔ R باشد، برابر با یک رادیان است.



$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$ برحسب رادیان

در دایره‌ای به شعاع ۵، اندازهٔ کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی ۲/۵ رادیان کدام است؟

۱) ۱۲/۵ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

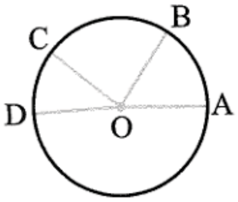


در این‌جا $R = ۵$ و $\theta = ۲/۵$ است، با توجه به رابطهٔ $l = R\theta$ داریم:

$$l = R\theta = (۵)\times(۲/۵) = ۱۲/۵$$

در شکل مقابل، O مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره برابر r می‌باشد. اگر $\overset{\frown}{AB} = r$ و $\overset{\frown}{BC} = \frac{۳}{۲}\overset{\frown}{AB}$ باشند،

اندازهٔ زاویهٔ AOC بر حسب رادیان کدام است؟



۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۷}{۲}$

اندازهٔ کمان‌های BC و CD را بر حسب r به‌دست می‌آوریم: $\overset{\frown}{BC} = \frac{۳}{۲}\overset{\frown}{AB} = \frac{۳}{۲}r$

در دایرهٔ به شعاع r، اگر طول $\overset{\frown}{AB}$ برابر r باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ AOB برابر ۱ رادیان است. داریم:

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = r + \frac{۳}{۲}r = \frac{۵}{۲}r \Rightarrow$ اندازهٔ زاویهٔ AOC برابر $\frac{۵}{۲}$ رادیان است. $\Leftarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تبدیل درجه به رادیان و بلعکس :

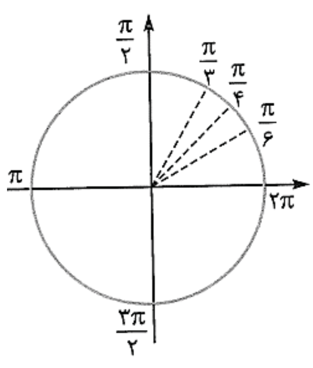
اگر اندازهٔ یک زاویه برحسب درجه D و برحسب رادیان R باشد، داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

به عنوان مثال می‌خواهیم اندازهٔ زاویهٔ ۳۰° را برحسب رادیان بیابیم:

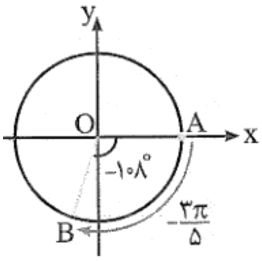
$$\frac{۳۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱}{۶} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{۶}$$

پس ۳۰° همان $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است.



درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

زاویهٔ -۱۰۸° را به رادیان و زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و هر دو زاویه را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

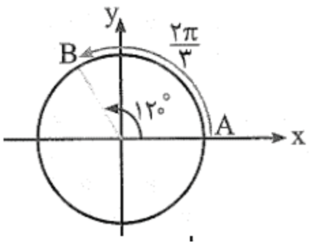


با توجه به رابطهٔ $R = \frac{\pi}{۱۸۰}D$، داریم:

$$D = -۱۰۸ \Rightarrow R = \frac{\pi}{\cancel{۱۸۰}_{۵}} \times (\cancel{-۱۰۸}^{-۳}) = -\frac{۳\pi}{۵}$$

نمایش این زاویه روی دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت روبه‌رو است:

توجه کنید برای نمایش زاویه با اندازهٔ منفی باید از نقطـهٔ A در خـلاف جهـت مثلثـاتی حرکت کرد.



با توجه به رابطهٔ $D = \frac{۱۸۰R}{\pi}$، داریم:

$$R = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow D = \frac{\cancel{۱۸۰}^{۶۰} \times \frac{۲\cancel{\pi}}{\cancel{۳}_{۱}}}{\cancel{\pi}} = ۱۲۰$$

در دایره‌ای به شعاع ۴ متر، توسط زاویهٔ α، کمانی به طول ۵ متر ایجاد می‌شود. با فرض $\pi = ۳$، اندازهٔ α بر حسب درجه کدام است؟

۱) ۶۸   ۲) ۷۲   ۳) ۷۵   ۴) ۸۱

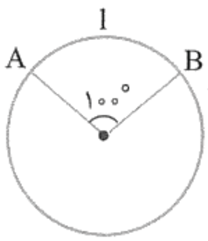
طبق فرض $r = ۴$ و $l = ۵$ می‌باشد. بنابراین اندازهٔ α بر حسب رادیان برابر است با:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow D = \frac{R \times ۱۸۰}{\pi} = \frac{\frac{۵}{۴} \times ۱۸۰}{\pi} \overset{\pi = ۳}{=\!=} \frac{\frac{۵}{۴} \times \cancel{۱۸۰}^{۶۰}}{\cancel{۳}} = ۷۵ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

یک تسمهٔ فلزی به طول ۱۰π را به صورت یک دایره حلقه کرده‌ایم. اندازهٔ کمان مقابل به زاویهٔ مرکزی ۱۰۰° از این حلقه تقریباً کدام است؟ $(\pi \simeq ۳/۱)$

۱) ۷/۸   ۲) ۸/۲   ۳) ۸/۶   ۴) ۹/۸

محیط دایره همان طول تسمه یعنی ۱۰π است. با توجه به این‌که محیط هر دایره از رابطهٔ $۲\pi R$ به دست می‌آید، معلوم است که $R = ۵$ است. حالا تنها چیزی که برای محاسبهٔ طول کمان لازم داریم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برحسب رادیان است، که می‌شود: $\frac{۵\pi}{۹}$



$$l = R\theta \Rightarrow l = ۵ \times \frac{۵\pi}{۹} = \frac{۲۵\pi}{۹} \simeq \frac{۲۵ \times (۳/۱)}{۹} \simeq ۸/۶$$

یک ساعت دیواری را تصور کنید:

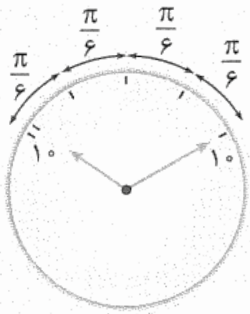
زاویهٔ بین هر دو عدد متوالی روی ساعت چند رادیان است؟

زاویهٔ بین هر دو ساعت متوالی برابر است با $\frac{۱}{۱۲}$ از کل ۳۶۰ درجهٔ ساعت، یعنی $\frac{۱}{۱۲} \times ۳۶۰^\circ = ۳۰^\circ$؛ ۳۰° هم که همان $\frac{\pi}{۶}$ است.

در مدت ۴ ساعت عقربهٔ ساعت‌شمار، چند رادیان حرکت می‌کند؟

در مدت زمان ۴ ساعت، عقربهٔ ساعت‌شمار ۴ تا $\frac{\pi}{۶}$ حرکت می‌کند که می‌شود $۴(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۲\pi}{۳}$.

در ساعت $۱۰:۱۰'$ زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و عقربهٔ دقیقه‌شمار چه‌قدر است؟



در ساعت $۱۰:۱۰'$ یعنی ۴ تا $\frac{\pi}{۶}$ عقربهٔ دقیقه‌شمار از عقربهٔ ساعت‌شمار جلو افتاده است یعنی $\frac{۲\pi}{۳}$؛ ولی در این مدت عقربهٔ ساعت‌شمار هم بی‌کار نبوده و به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳۶}$ جلو آمده است، پس زاویهٔ بین آن‌ها می‌شود:

$$\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳۶}=\frac{۲۳}{۳۶}\pi=\frac{۲۳}{۳۶}\pi$$

جالب است بدانید که به صورت کلی در ساعت $h:m'$ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار برحسب درجه برابر است با:

$$\left|\frac{۱۱}{۲}m-۳۰h\right|$$

در ساعت $۱:۳۰'$ اندازهٔ زاویه‌ای که عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار می‌سازند، بر حسب رادیان کدام است؟

۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

ابتدا زاویهٔ مورد نظر را بر حسب درجه به‌دست می‌آوریم.

در ساعت $۱:۳۰'$، زاویهٔ بین دو عقربه بر حسب دقیقه برابر $۲۷۰'=۴\times۶۰'+۳۰'$ می‌باشد، از طرفی کل ساعت به $۱۲\times۶۰'=۷۲۰'$ تقسیم می‌شود. بنابراین:

اندازهٔ زاویه بر حسب درجه $=\frac{۲۷۰'}{۷۲۰'}\times۳۶۰^\circ=\frac{۳}{۸}\times۳۶۰^\circ=۱۳۵^\circ \Rightarrow R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times۱۳۵=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow$ گزینهٔ (۲)

رابطه طول کمان (L) با زاویه $\propto$ بر حسب درجه :

$$\frac{L}{2\pi R}=\frac{\propto}{360}$$

با نخی به طول 100 سانتی متر یک دایره می سازیم ، اگر طول کمان AB در این دایره 40 سانتی متر باشد اندازه زاویه مرکزی AOB را بیابید ؟

$$\frac{40}{100}=\frac{\propto}{360}\longrightarrow \propto=144 \longrightarrow \frac{144}{180}=\frac{R}{\pi}\longrightarrow R=\frac{4\pi}{5}$$

زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان چند درجه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۳۵° ۲) ۴۵° ۳) ۴۰° ۴) ۵۰°

زاویهٔ $۳۷/۵^\circ$ چند رادیان است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{۳\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۱۸}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۸}$

زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۳، ۵ و ۷ متناسب می‌باشند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث بر حسب رادیان کدام است؟

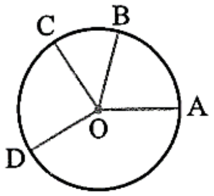
۱) $\frac{\pi}{۵}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۹}$

در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطهٔ $\frac{\hat{D}}{۴}=\frac{\hat{C}}{۷}=\frac{\hat{B}}{۵}=\frac{\hat{A}}{۸}$ بین اندازهٔ زاویه‌های داخلی آن برقرار است. اندازهٔ زاویهٔ C بر حسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۹}$

اگر θ زاویهٔ حاده و $\cos^۴\theta-\sin^۴\theta=-\frac{۱}{۲}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ θ بر حسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

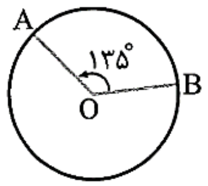


در شکل مقابل، O مرکز دایره و طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر r (شعاع دایره) می‌باشد. اگر $\overset{\frown}{BC}=\frac{۳}{۴}\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}=\frac{۵}{۲}\overset{\frown}{CB}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ AOD (کمان ABD) چند رادیان است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{۲۹}{۸}$ ۲) $\frac{۲۷}{۸}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۲۳}{۸}$

در دایره‌ای به شعاع ۶۰ سانتی‌متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول یک متر، چند رادیان است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶۰}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$



با توجه به شکل مقابل، اگر طول کمان AB برابر ۳π باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

۱) ۱۶π ۲) ۹π

۳) $\frac{۹}{۱۶}\pi$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}\pi$

اگر روی دایره‌ای به شعاع ۵ کیلومتر، مسافت $\frac{۲۵\pi}{۳}$ کیلومتر طی شود، زاویهٔ دوران بر حسب درجه کدام است؟

۱) ۲۳۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۷۵ ۴) ۳۰۰

چه مدت طول می‌کشد که عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ $\frac{۷\pi}{۵}$ رادیان دوران کند؟

۱) ۵۴ دقیقه ۲) ۵۰ دقیقه ۳) ۴۸ دقیقه ۴) ۴۲ دقیقه

در ساعت $۳:۵۰'$ زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند رادیان است؟

۱) $\frac{۳۷\pi}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴۳\pi}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

ابتدا نقطهٔ $A(۱,۰)$ روی دایرهٔ مثلثاتی را به اندازهٔ ۱۴۰° دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم و سپس نقطهٔ B را به اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ C برسد. طول کمان BC کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۵}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۸}$

مقدار عددی عبارت $\cot\frac{\pi}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}+\tan 2\pi-\cos\frac{3\pi}{2}$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

حاصل کسر $\dfrac{\cot^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}}{\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{6}}$، کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{7}{9}$

حاصل عبارت $\sin^2\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+\tan\frac{\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}$، کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) ۳ ۴) ۴

مقدار عددی عبارت $\cos^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{7}-2\cot\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) صفر

اگر $\theta\in[0,2\pi]$ و $\sin\theta=1$ باشد، مقدار عددی $\cos 2\theta+\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sin 3\theta$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۱

چند تا از نامساوی‌های روبه‌رو صحیح است؟ $\sin\frac{4\pi}{7}<0$ ، $\cos\frac{6\pi}{5}<0$ ، $\tan\frac{11\pi}{6}<0$ ، $\cot\frac{13\pi}{8}>0$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

کدام‌یک از عبارت‌های زیر، عددی منفی است؟

۱) $\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{7}$ ۲) $\sin\frac{3\pi}{5}-\tan\frac{7\pi}{8}$ ۳) $\cos\frac{7\pi}{5}+\cot\frac{5\pi}{7}$ ۴) $\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6}$

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

هدف ما در این درس پیدا کردن مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای خاص است که به کمک یک روش دو مرحله ای که در ادامه گفته میشه قابل محاسبه هستند است .

این زوایای خاص (که ۱۲ تا هستند) عبارتند از : $\underbrace{(۱۲۰ ، ۱۳۵ ، ۱۵۰)}_{\text{ناحیه دوم}}$ و $\underbrace{(۲۱۰ ، ۲۲۵ ، ۲۴۰)}_{\text{ناحیه سوم}}$ و $\underbrace{(۳۰۰ ، ۳۱۵ ، ۳۳۰)}_{\text{ناحیه چهارم}}$

روش دو مرحله ای :

۱- تعیین نسبت مثلثاتی به کمک محور معیار :

محور معیار : باید ببینیم زاویه حاده θ توسط کدام محور منتقل شده .

محور عمودی ($\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ یا $\frac{5\pi}{2}$ یا $\frac{7\pi}{2}$ و ...) باعث تغییر نسبت مثلثاتی می شود ⟵

محور افقی (۰ یا π یا ۲π یا ۳π یا ۴π و ...) نسبت مثلثاتی ثابت می ماند

۲- تعیین علامت نهایی : باید ببینیم نسبت مثلثاتی اولیه در زاویه اولیه داده شده در کدام ربع قرار دارد و علامت آن چیست ... ⟵

مقادیر $\sin ۴۲۰^\circ$ و $\cos(\frac{۹\pi}{۴})$ را بیابید.

چون ۴۲۰° از ۳۶۰° بزرگ‌تر است اول یک ۳۶۰° را از آن کم می‌کنیم: $۴۲۰^\circ - ۳۶۰^\circ = ۶۰^\circ$. حالا می‌گوییم:

$$\sin ۴۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$\frac{۹\pi}{۴}$ هم از ۲π بزرگ‌تر است پس از $\frac{۹\pi}{۴}$ باید ۲π را کم کنیم و بعد کسینوسش را حساب کنیم:

$$\cos(\frac{۹\pi}{۴}) = \cos(\frac{۸\pi + \pi}{۴}) = \cos(۲\pi + \frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اگر $\sin\alpha = \frac{۱}{۵}$ باشد، حاصل عبارت $\sin(\alpha-\pi)+\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+\sin(۴\pi-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

مقدار عبارت $\sin\frac{\pi}{۷}+\cos\frac{۵\pi}{۱۴}-۲\sin\frac{۶\pi}{۷}$ را بیابید.

ابتدا عبارت را به صورت مقابل می‌نویسیم: $(\sin\frac{\pi}{۷}-\sin\frac{۶\pi}{۷})+(\cos\frac{۵\pi}{۱۴}-\sin\frac{۶\pi}{۷})$

$\frac{۵\pi}{۱۴}+\frac{۶\pi}{۷}=\frac{۱۷\pi}{۱۴}$ متمم نیستند

$\frac{۶\pi}{۷}$ که همان $\pi-\frac{\pi}{۶}$ است پس سینوس‌هایشان با هم برابرند و چون $\frac{۵\pi}{۱۴}+\frac{\pi}{۷}=\frac{\pi}{۲}$ است، این دو زاویه متمم‌اند یعنی $\cos\frac{۵\pi}{۱۴}=\sin\frac{\pi}{۷}$ و در نتیجه: $\cos\frac{۵\pi}{۱۴}-\sin\frac{۶\pi}{۷}=۰$ پس حاصل کل عبارت صفر می‌شود.

حاصل عبارت $A=\tan(\pi+\alpha)+\frac{\sin(\pi+\alpha)+۳\sin(۳\pi+\alpha)-۴\sin(۴\pi+\alpha)}{۳\cos(\pi+\alpha)+\cos(۵\pi+\alpha)}$ چند برابر $\tan\alpha$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

در عبارت $k\pi+\alpha$ وقتی k فرد باشد یک منفی می‌آید پشت $\sin$ و $\cos$ ولی اگر زوج باشد هیچ اتفاقی نمی‌افتد. $\tan$ با جمع‌شدن مضارب صحیح π عوض نمی‌شود. پس داریم:

$$A=\tan\alpha+\frac{(-\sin\alpha)+۳(-\sin\alpha)-۴\sin\alpha}{۳(-\cos\alpha)+(-\cos\alpha)}=\tan\alpha+\frac{-۸\sin\alpha}{-۴\cos\alpha}=\tan\alpha+۲\tan\alpha=۳\tan\alpha$$

حاصل عبارت $\frac{\cot(-۶۰۰^\circ)-\tan(-۶۰۰^\circ)}{\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})}$ را به دست آورید؟

ابتدا تک‌تک اعداد را با کم‌کردن ضرایب ۳۶۰° و ۲π، کوچک‌تر از ۳۶۰° کنیم: $-۶۰۰^\circ=-(۷۲۰^\circ-۱۲۰^\circ)\Rightarrow ۱۲۰^\circ$

$$\frac{۲۳\pi}{۴}=\frac{۲۴\pi-\pi}{۴}=۶\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow -\frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{۲۵\pi}{۳}=\frac{۲۴\pi+\pi}{۳}=۸\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{\pi}{۳}$$

پس باید به جای -۶۰۰°، $\frac{۲۳\pi}{۴}$ و $\frac{۲۵\pi}{۳}$ به ترتیب زوایای ۱۲۰°، $-\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ را قرار دهیم:

$$\frac{\cot(\overset{\overset{۹۰+۳۰}{\uparrow}}{۱۲۰^\circ})-\tan(\overset{\overset{۹۰+۳۰}{\uparrow}}{۱۲۰^\circ})}{\sin(\frac{\pi}{۳})-\cos(-\frac{\pi}{۴})}=\frac{-\tan۳۰^\circ+\cot۳۰^\circ}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{-۲\sqrt{۳}+۶\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}$$

حاصل $\sqrt{3}\sin(\frac{2\pi}{3})+\cos^2(\frac{7\pi}{6})-\tan^2(\frac{5\pi}{4})$، کدام است؟

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) ۳　　۴) $\frac{5}{4}$

اگر $\tan\alpha=\frac{2}{3}$، آن‌گاه حاصل $\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(3\pi+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)-\cos(\alpha-\pi)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{5}$　　۴) $\frac{1}{15}$

با فرض $\tan 22^\circ=\frac{2}{5}$، حاصل عبارت $\frac{\sin(-112^\circ)+\sin 158^\circ}{\cos 562^\circ}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) $\frac{2}{5}$

اگر $\tan\theta=0/4$ باشد، حاصل کسر $\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}+\theta)+2\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{-\cos(11\pi+\theta)+\sin(13\pi-\theta)}$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) $\frac{9}{7}$　　۳) $\frac{1}{7}$　　۴) $\frac{1}{3}$

تمام مقادیر x را که به ازای آن، تساوی $\tan(x+25^\circ)=\cot(x+45^\circ)$ برقرار می‌باشد، کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{18}$　　۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{18}$　　۳) $k\pi+\frac{\pi}{18}$　　۴) $k\pi-\frac{\pi}{18}$

اگر α و β دو زاویهٔ متمم باشند، آن‌گاه $\tan\alpha=\cot\beta$

$$\tan(\underbrace{x+25^\circ}_{\alpha})=\cot(\underbrace{x+45^\circ}_{\beta})\Rightarrow(x+25^\circ)+(x+45^\circ)=90^\circ\Rightarrow 2x+70^\circ=90^\circ\Rightarrow 2x=20^\circ\Rightarrow x=10^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{18}$$

از طرفی با اضافه کردن مضرب صحیح π به تانژانت، مقدار آن تغییر نمی‌کند:

$$\tan(x+k\pi)=\tan x$$

پس تمام مقادیر $k\pi+\frac{\pi}{18}$، $k\in\mathbb{Z}$ را می‌توان به جای x قرار داد و در نتیجه گزینهٔ (۳) صحیح است.

حاصل $\cot\frac{\pi}{8}+\cot\frac{3\pi}{8}+\cot\frac{4\pi}{8}+\cot\frac{5\pi}{8}+\cot\frac{7\pi}{8}$، کدام است؟

۱) $2\cot\frac{\pi}{8}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) صفر

اگر دو زاویهٔ α و β مکمل باشد، آن‌گاه: $\cot\alpha+\cot\beta=0$

$\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$ مکمل یکدیگرند. $\Rightarrow \cot\frac{3\pi}{8}+\cot\frac{5\pi}{8}=0$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$ مکمل یکدیگرند. $\Rightarrow \cot\frac{\pi}{8}+\cot\frac{7\pi}{8}=0$

$\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \cot\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \cot\frac{\pi}{8}+\cot\frac{3\pi}{8}+\cot\frac{\pi}{2}+\cot\frac{5\pi}{8}+\cot\frac{7\pi}{8}=0\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

اگر $x\cos ۶۰^\circ = \cos ۱۲۰^\circ + \sin ۱۸۰^\circ + \sqrt{۲}\sin ۱۳۵^\circ$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

حاصل $\cot(۲۲۵^\circ) + \sin(-\frac{\pi}{۴})\cos(-\frac{\pi}{۴}) + \tan(\frac{۳\pi}{۴})$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

اگر x زاویهٔ حاده و $\sin(۴x + ۳۰^\circ) = \sin x$ باشد، مقدار $\tan^۲ x$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

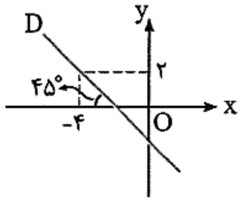
اگر x زاویهٔ حاده و $\cos(۲x + ۱۰^\circ) = -\cos(x - ۱۰^\circ)$ باشد، مقدار $\sqrt{۳}\sin x + ۲\cos x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۷}{۲}$

حاصل $\cos\frac{۳\pi}{۱۴} + \cos\frac{۵\pi}{۱۴} + \cos\frac{۷\pi}{۱۴} + \cos\frac{۹\pi}{۱۴} + \cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

با توجه به شکل مقابل، عرض از مبدأ خط D، کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲-
۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳-

اگر $\tan\alpha = ۲\sqrt{۲}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد، $\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha)$ برابر کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

حاصل $۴\cos ۸۰^\circ - ۵\sin ۱۰۰^\circ - ۳\cos ۱۹۰^\circ - ۲\sin ۲۸۰^\circ$ کدام است؟

۱) $۵\cos ۱۰^\circ$ ۲) $۴\sin ۱۰^\circ$ ۳) $-۴\sin ۱۰^\circ$ ۴) $-۵\cos ۱۰^\circ$

اگر $\tan ۷۶^\circ = ۴$ باشد، حاصل $\sin^۲ ۱۰۰^\circ + \cos^۲ ۸۰^\circ - \cot ۱۶۶^\circ$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۴-

مقدار عددی عبارت $\frac{\cos ۷۰^\circ + ۲\sin ۱۱۰^\circ + \sin ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۶۰^\circ + \sin ۲۹۰^\circ - ۳\sin ۱۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی با طول $-\frac{5}{13}$ و عرض مثبت قرار دارد. اگر θ زاویهٔ بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ و جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل $2\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)+\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$ چند برابر $\frac{1}{13}$ است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۹ ۳) ۲۵- ۴) ۱۹-

حاصل عبارت $\sin(\pi-x)+\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+\sin(\pi+x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $-2\sin x$ ۲) صفر ۳) $2\sin x$ ۴) $2\cos x$

اگر $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=2\sin\alpha$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۲) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ۳) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

اگر $\theta\in[0,\pi]$ و $\sin\theta=\cos\theta$ باشد، مقدار $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)+2\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حاصل $\cos^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{4\pi}{9}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{4}$

در کدام گزینه، دو زاویهٔ داده‌شده هم‌انتها نمی‌باشند؟

۱) $-90^\circ, 270^\circ$ ۲) $-50^\circ, 670^\circ$ ۳) $120^\circ, 470^\circ$ ۴) $\frac{5\pi}{3}, \frac{53\pi}{3}$

حاصل عبارت $\frac{\sin 300^\circ}{1-\cos 240^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

حاصل $\sin\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{31\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{9\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) صفر

اگر نقطهٔ $A(1,0)$ به اندازهٔ $\frac{7}{3}$ دور کامل در جهت عقربه‌های ساعت بچرخد تا به نقطهٔ A' برسد، مختصات نقطهٔ A' کدام است؟

۱) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ۲) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ۳) $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ ۴) $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

مقدار عددی عبارت $\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{17\pi}{4}+\tan\frac{15\pi}{4}+\cot\frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-2$ ۴) ۲

حاصل عددی عبارت $\sin^{-2}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos^{-3}\left(\frac{5\pi}{3}\right)-2\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

اگر $P(1,-2\sqrt{2})$ و θ زاویهٔ بین $\overrightarrow{OP}$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل $\sqrt{2}\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)+2\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۱-

حاصل عبارت $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(5\pi+\theta\right)+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-2\cos(\theta-\pi)$ کدام است؟

۱) $-2\cos\theta$ ۲) $-2\sin\theta$ ۳) $2\sin\theta$ ۴) $2\cos\theta$

حاصل عبارت $\tan(3\pi-\alpha)\cot(10\pi-\alpha)-\sin(3\pi+\alpha)\cos(\frac{5\pi}{2}+\alpha)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) ۱ ۴) ۱-

اگر $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{4}$ ... اگر $-\frac{1}{4}=\cos\frac{2\pi}{3}+3\sin(5\pi+x)$ باشد، حاصل $2\cos(\frac{3\pi}{2}+x)-\sin(11\pi-x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{12}$

اگر $\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=2\cos(\frac{7\pi}{2}+x)$ باشد، حاصل کسر $\frac{2\sin x+5\cos x}{\sin x-\cos x}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) $-\frac{7}{3}$ ۳) ۱۲- ۴) $-\frac{8}{3}$

از تساوی $\frac{2\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}=2$، مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۲- ۲) ۱/۵- ۳) ۲ ۴) ۱/۵

حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}$، با فرض $\tan 15^\circ=0/28$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۴)

۱) $-\frac{16}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{16}{9}$

حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ+\sin 700^\circ}{\cos 560^\circ-\cos 110^\circ}$، با فرض $\tan 20^\circ=0/4$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{5}{8}$

اگر $\tan\theta=0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۱)

۱) ۲- ۲) ۱/۲ ۳) ۲ ۴) ۳

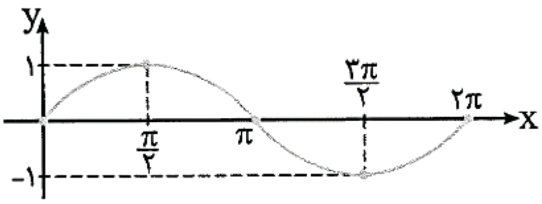
نقاط $k\pi\pm\frac{\pi}{12}$ روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل را مشخص می‌کند؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) لوزی ۲) مربع ۳) مستطیل ۴) ۲۴ ضلعی

درس سوم : توابع مثلثاتی

رسم تابع SIN :

نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:

۱) در بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$، تابع صعودی است.

۲) در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$، تابع نزولی است.

۳) در بازهٔ $\left[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right]$، تابع صعودی است.

۴) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱- است.

کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sin ۴۰^\circ < \sin ۷۰^\circ$ ۲) $\sin ۱۱۰^\circ > \sin ۲۵۰^\circ$ ۳) $\sin ۲۹۰^\circ > \sin ۳۰۵^\circ$ ۴) $\sin ۱۰۰^\circ > \sin ۳۲۰^\circ$

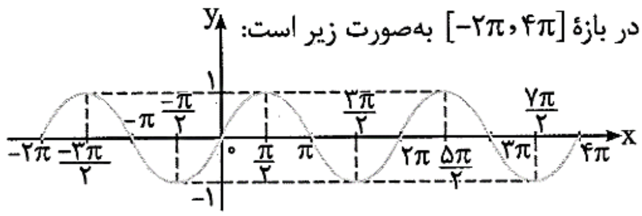
انتهای زاویه‌های ۴۰° و ۷۰° در ناحیهٔ اول قرار دارند و در این ناحیه، مقدار سینوس با افزایش زاویه افزایش می‌یابد. پس:

$۹۰^\circ < ۱۱۰^\circ < ۲۵۰^\circ < ۲۷۰^\circ \Rightarrow \sin ۱۱۰^\circ > \sin ۲۵۰^\circ$ ✓ $۴۰^\circ < ۷۰^\circ \Rightarrow \sin ۴۰^\circ < \sin ۷۰^\circ$ ✓

$۲۷۰^\circ < ۲۹۰^\circ < ۳۰۵^\circ < ۳۶۰^\circ \Rightarrow \sin ۲۹۰^\circ < \sin ۳۰۵^\circ$ ✗

$\sin ۱۰۰^\circ$عددی‌مثبت و$\sin ۳۲۰^\circ$ عددی منفی می‌باشد،پس نامساوی$\sin ۱۰۰^\circ > \sin ۳۲۰^\circ$ برقرار است. بنابراین گزینهٔ (۳) پاسخ تست است.

با توجه به تساوی $\sin(x+۲\pi)=\sin x$، مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان تغییر نمی‌کند. پس نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌های $[۰,۲\pi]$، $[۲\pi,۴\pi]$ و ... یکسان است. همچنین با توجه به تساوی $\sin(x-۲\pi)=\sin x$، مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییر نمی‌کند، در نتیجه نمودار تابع $\sin x$ در بازه‌های $[۰,۲\pi]$، $[-۲\pi,۰]$، $[-۴\pi,-۲\pi]$ و ...یکسان است. پس نمودار $y=\sin x$ در بازه‌های $[۲k\pi,(۲k+۲)\pi]$، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. نمودار تابع در بازهٔ $[-۲\pi,۴\pi]$ به‌صورت زیر است:



با توجه به نمودار کلی $y=\sin x$، می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

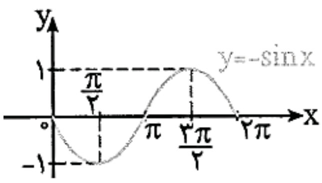
۱) دامنهٔ تابع $f(x)=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشد: $f(x)=\sin x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ ، $R_f=[-۱,۱]$

۲) حداکثر مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های $\dots,\frac{۵\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},-\frac{۳\pi}{۲},-\frac{۷\pi}{۲},\dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول‌های $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ بیش‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۳) حداقل مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱- است و در نقاطی به طول‌های $\dots,\frac{۷\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲},-\frac{\pi}{۲},-\frac{۵\pi}{۲},\dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی، تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول‌های $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کنند.

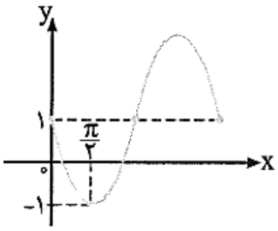
۴) مقدار تابع $y=\sin x$ در نقاطی به طول $k\in\mathbb{Z}$ ، $x=k\pi$ برابر صفر است، بنابراین طول نقاط تلاقی نمودار این تابع با محور xها از تساوی $k\in\mathbb{Z}$ ،$x=k\pi$ به‌دست می‌آید.

✱ می‌دانیم برای رسم نمودار $y=-f(x)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. بنابراین نمودار $g(x)=-\sin x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:



به کمک ویژگی‌های انتقال و قدرمطلق می‌توان نمودار برخی از توابع مثلثاتی سینوسی را از روی نمودار تابع $y=\sin x$ رسم کرد.

ضابطهٔ تابع نمودار مقابل، کدام است؟



۱) $y=-\sin x+۱$ ۲) $y=-۲\sin x+۱$

۳) $y=\sin x+۱$ ۴) $y=۲\sin x+۱$

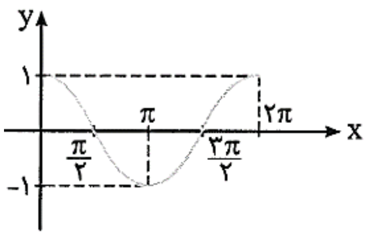
نمودار در سمت راست محور y ها، ابتدا دارای مینیمم و سپس دارای ماکزیمم است، بنابراین ضریب سینوس x باید منفی باشد، پس یکی‌از گزینه‌های (۱) یا (۲) صحیح است. از طرفی تابع به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند. بنابراین با قرار دادن $x=\frac{\pi}{۲}$ در ضابطهٔ گزینه‌های (۱) و (۲)، باید مقدار ۱- برای y به‌دست آید:

$y=-\sin x+۱ \Rightarrow y(\frac{\pi}{۲})=-\sin\frac{\pi}{۲}+۱=-۱+۱=۰$ ✗ نادرست

$y=-۲\sin x+۱ \Rightarrow y(\frac{\pi}{۲})=-۲\sin\frac{\pi}{۲}+۱=-۲+۱=-۱ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

رسم تابع cos :

نمودار تابع $y=\cos x$ روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ نکات زیر را می‌توان نوشت:

۱) در بازهٔ $[۰,\pi]$ تابع نزولی است. ۲) در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ تابع صعودی است.

۳) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱- می‌باشد.

کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\cos\frac{\pi}{۳}<\cos\frac{\pi}{۵}$ ۲) $\cos ۱۴۰^\circ>\cos ۱۷۰^\circ$ ۳) $\cos ۲۵۰^\circ<\cos ۲۰۵^\circ$ ۴) $\cos ۱۹۰^\circ<\cos ۲۸۰^\circ$

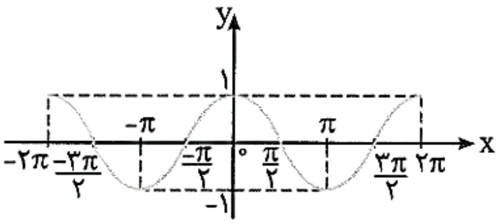
در ناحیه‌های اول و دوم، مقدار تابع $y=\cos x$ با افزایش مقدار x کم می‌شود:

$\frac{\pi}{۳}>\frac{\pi}{۵} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳}<\cos\frac{\pi}{۵}$ ✓ ، $۱۴۰^\circ<۱۷۰^\circ \Rightarrow \cos ۱۴۰^\circ>\cos ۱۷۰^\circ$ ✓

در ناحیه‌های سوم و چهارم، با افزایش مقدار x، مقدار $\cos x$ نیز بیش‌تر می‌شود:

$۲۵۰^\circ>۲۰۵^\circ \Rightarrow \cos ۲۵۰^\circ>\cos ۲۰۵^\circ$ ✗ ، $۲۸۰^\circ>۱۹۰^\circ \Rightarrow \cos ۲۸۰^\circ>\cos ۱۹۰^\circ$ ✓ $\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) پاسخ تست است.

نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار کلی $y=\cos x$، نکات زیر را می‌توان در نظر گرفت:

۱) دامنهٔ تابع $y=\cos x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $[-۱,۱]$ می‌باشد:

$f(x)=\cos x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ ، $R_f=[-۱,۱]$

کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار تابع $f(x)=-3\cos x+5$ را به‌دست آورید.

از نامساوی $-1\le \cos x\le 1$ و خواص نامساوی‌ها، حدود $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$-1\le \cos x\le 1 \xrightarrow{\times(-3)} -3\le -3\cos x\le 3 \xrightarrow{+5} 2\le -3\cos x+5\le 8 \Rightarrow 2\le f(x)\le 8$$

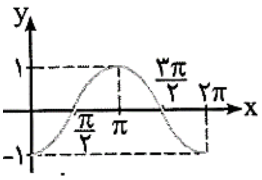
بنابراین کم‌ترین مقدار تابع f برابر ۲ و بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۸ می‌باشد.

* برای به‌دست آوردن کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار توابع با ضابطه‌های $f(x)=a\sin x+b$ و $g(x)=a\cos x+b$، کافی است به‌جای $\sin x$ و $\cos x$ یک بار -1 و بار دیگر ۱ قرار دهیم.

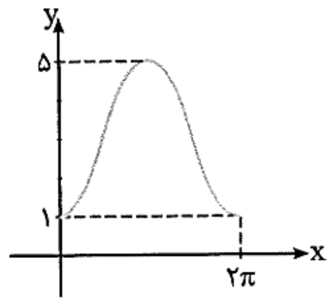
۲) حداکثر مقدار تابع $y=\cos x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول‌های $\dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots$ این مقدار را اختیار می‌کند و در حالت کلی تابع $y=\cos x$ در نقاطی به طول‌های $x=2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، بیش‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۳) حداقل مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -1 است و در نقاطی به طول‌های $x=2k\pi+\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۴) مقدار تابع $y=\cos x$ در نقاطی به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$، $k\in\mathbb{Z}$ برابر صفر است. در واقع طول نقاط تلاقی نمودار $y=\cos x$ با محور xها از تساوی $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$، $k\in\mathbb{Z}$ به‌دست می‌آید.



همانند توابع سینوسی با قرینه کردن نمودار توابع کسینوسی نسبت به محور xها، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم دو تابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=-\cos x$ جابه‌جا می‌شوند. نمودار $y=-\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ به‌صورت مقابل است:



نمودار تابع $y=a\cos x+b$ به‌صورت مقابل است. مقدار تابع به ازای $x=\frac{7\pi}{3}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

با توجه به نوع نمودار رسم‌شده، باید ضریب $\cos x$ عددی منفی باشد. این تابع به ازای $x=0$، کم‌ترین مقدار و به ازای $x=\pi$، بیش‌ترین مقدار را اختیار می‌کند:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow a\overset{1}{\cancel{\cos 0}}+b=1 \\ x=\pi \Rightarrow y=5 \Rightarrow a\overset{-1}{\cancel{\cos\pi}}+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a}+b=1 \\ \cancel{-a}+b=5 \end{cases} \Rightarrow 2b=6 \Rightarrow b=3 , a=-2$$

$$\Rightarrow y=-2\cos x+3 \Rightarrow y(\frac{7\pi}{3})=-2\cos(\frac{7\pi}{3})+3=-2\overset{\cos\frac{\pi}{3}}{\cancel{\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})}}+3=-2\times\frac{1}{2}+3=-1+3=2 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳)

نمودار تابع $y=\cos x$ را به کمک انتقال نمودار $y=\sin x$ می‌توان رسم کرد. با توجه به تساوی $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$، اگر نمودار $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار تابع $y=\cos x$ به دست می‌آید و هم‌چنین می‌توان نمودار $y=\sin x$ را با انتقال نمودار $y=\cos x$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست رسم کرد.