



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

بسم الله الرحمن الرحيم

بیست درس ریاضی ۲ در ۲۰ صفحه

جزوه حاضر جمع بندی و خلاصه ای از نکات مهم ۷ فصل ریاضی ۲ پایه ی یازدهم رشته تجربی می باشد، که هدف از تهیه آن مرور و دسته بندی مطالب آموخته شده در کتاب است. با توجه به حجم کم و هدف مد نظر (آمادگی برای امتحان پایان ترم) بدیهی است که این فایل به تنهایی همه تیپ سوالاتی که ممکن است در آزمون پایانی طرح شود را پوشش نخواهد داد. صد البته که تسلط بر تمامی مباحث مطرح شده در کتاب درسی، و حل تمامی تمرینات کتاب اولین قدم در نتیجه گیری مطلوب در آزمون پایانی سال خواهد بود. امیدوارم جزوه حاضر برای دانش آموزان عزیز مفید واقع شود. قطعاً این جزوه دارای اشکالاتی است که امید است همکاران گرانقدر من و نیز دانش آموزان عزیز برای رفع آنها با اینجانب در ارتباط باشند.

سعید سیرامی - شهرستان میانه - ۰۹۳۶۴۶۴۵۹۵۰

@madrese_riazi آدرس کانال تلگرام

درس اول: هندسه ی تحلیلی

شیب خط $ax + by + c = 0$ برابر است با $m = -\frac{a}{b}$

دو خط موازیند هر گاه: $m_1 = m_2$ و بر هم عمودند هرگاه

$$m_1 m_2 = -1$$

فاصله دو نقطه:

فاصله دو نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقطه وسط پاره خط:

اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، دارای مختصات زیر خواهد بود.

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A = (x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۱

فاصله نقطه $A = (1, -2)$ را از خط $-2x + 2y - 1 = 0$ به دست آورید.

حل

$$d = \frac{|-2(1) + 2(-2) + (-1)|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{8}} = \frac{7}{\sqrt{8}}$$

مثال ۲

نشان دهید که خطوط به معادلات $3x + 5y + 7 = 0$ و

$$5x - 3y - 2 = 0$$
 بر هم عمودند.

حل

$$3x + 5y + 7 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{3}{5}$$

$$5x - 3y - 2 = 0 \rightarrow m_2 = \frac{5}{3} \rightarrow m_1 \times m_2 = -1$$

مثال ۳

مثلث ABC با رئوس $A(3, -2)$ و $B(3, 4)$ و $C(-1, 1)$ را در نظر بگیرید. معادله میانه AM را به دست آورید.



حل

$$x_M = \frac{3 + (-1)}{2} = 1, \quad y_M = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{\frac{5}{2} + 2}{1 - 3} = \frac{\frac{9}{2}}{-2} = -\frac{9}{4}$$

$$y - (-2) = -\frac{9}{4}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{19}{4}$$

مثال ۴

نشان دهید مثلث ABC با رئوس $A(3, 1)$ و $B(6, 0)$ و $C(4, 4)$ قائم الزاویه است.

حل

$$AB = \sqrt{(6 - 3)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(4 - 3)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(4 - 6)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{20}^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 \rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

طبق رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه است.



تمرین ۱

قطر دایره ای به مرکز $(-1, 2)$ که بر خط به معادله $x + y = 1$ مماس باشد چقدر است؟

تمرین ۲

یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

تمرین ۳

مساحت مثلث ABC به مختصات $A(0, 1)$ و $B(3, 4)$ و $C(-1, 1)$ را به دست آورید.



درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \rightarrow x^2 = t \rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0$$

مجموع و حاصلضرب ریشه های معادله درجه ۲

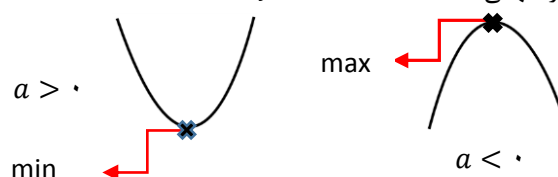
اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند داریم:

$$P = \frac{c}{a} \text{ حاصل جمع ریشه ها: } S = -\frac{b}{a}$$

معادله درجه دومی که مجموع ریشه هایش S و حاصلضرب ریشه هایش P باشد به فرم $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود.

ماکزیمم و مینیمم سهمی

در سهمی $y = ax^2 + bx + c$



طول نقطه مینیمم و ماکزیمم از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید.

با جایگذاری طول مینیمم یا ماکزیمم در معادله سهمی مقدار مینیمم و ماکزیمم تابع به دست می آید.

تشخیص علامت ریشه های احتمالی تابع

مثال ۱

در مورد تعداد و علامت ریشه های احتمالی

$$y = x^2 + 6x + 5 = 0 \text{ تحقیق کنید.}$$

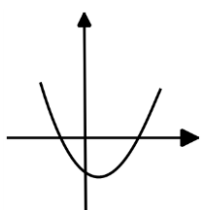
حل

$$\Delta = 16 > 0 \text{ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.}$$

$$P = \frac{c}{a} = 5 > 0 \text{ ریشه ها هم علامتند.}$$

$$S = -\frac{b}{a} = -6 < 0 \text{ ریشه ها هر دو منفی هستند.}$$

تشخیص علامت ضرایب از روی نمودار



دهانه سهمی رو به بالا $a > 0$

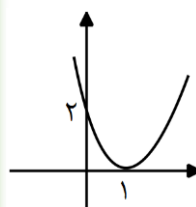
تابع محور y ها را در قسمت منفی قطع کرده $c < 0$

$$-\frac{b}{a} > 0 \rightarrow b < 0 \text{ مجموع دو ریشه مثبت است.}$$



نوشتن ضابطه تابع از روی نمودار

فرض کنیم نمودار مقابل مربوط به $f(x) = ax^2 + bx + c$ است



$$x \text{ راس سهمی } = -\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow 2a + b = 0$$

$$f(0) = 2 \rightarrow c = 2 \text{ و } f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0$$

$$a + b = -2, \quad 2a + b = 0 \rightarrow a = 2, b = -4$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

مثال ها

مثال ۱: معادله $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2 = 0$ را حل کنید.

$$(x^2 - 1)^2 = t \rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \rightarrow t = -2, \quad t = 1$$

$$(x^2 - 1)^2 = -2 \text{ غ ق ق } \rightarrow (x^2 - 1)^2 = 1 \rightarrow x^2 = 2$$

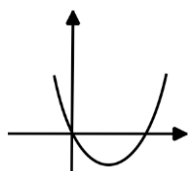
$$x = \pm\sqrt{2}$$



تمرین ۱

شکل روبه رو مربوط به

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ تابع است}$$



الف) علامت a و b را تعیین کنید.

ب) مقدار c را بیابید.

تمرین ۲- بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید.

تمرین ۳- اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ باشند، مقدار عددی $(\alpha - \beta)^2$ را به دست آورید.



درس سوم: معادلات گویا . معادلات رادیکالی

معادلات گویا

ابتدا مخرج ها را تجزیه کرده و ک.م.م مخرج ها را تعیین می کنیم.
سپس کل معادله را در ک.م.م ضرب می کنیم.
معادله جدید را حل کرده و جواب های قابل قبول را تعیین می کنیم.

مثال ۱

$$\text{معادله } 5 = \frac{x}{x-2} + \frac{2}{x} \text{ را حل کنید.}$$

→ طرفین ضرب در ک.م.م $x(2-x) \rightarrow x(2-x) = 5(x)(2-x)$

$$x(x) + 2(2-x) = 5(x)(2-x)$$

$$x^2 + 4 - 2x = 10x - 5x^2 \rightarrow 6x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

نکته: عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن ۱.۶۱۸ می باشد.

معادلات رادیکالی

ابتدا عبارت رادیکالی را به یک طرف معادله می آوریم و بعد از به توان رساندن و خارج کردن از حالت رادیکالی معادله جدید را حل کرده و جوابهای صدق شده را تعیین می کنیم.



مثال ۲

معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2+x} = x$$

$$2+x = x^2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow x = 2 \text{ ق ق}$$

در معادله صدق نمی کند غ ق $x = -1$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+6} = 1$$

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{3x+6} + 1$$

$$x+3 = 3x+6 + 2\sqrt{3x+6} + 1$$

$$-2x - 4 = 2\sqrt{3x+6} \rightarrow -x - 2 = \sqrt{3x+6}$$

بار دیگر طرفین به توان ۲

$$x^2 + 4x + 4 = 3x + 6 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ ق ق} \quad x = -2 \text{ غ ق}$$



مثال ۳

دو کارگر با هم کاری را ۱۰ روزه تمام می کنند. اگر سرعت کار یکی از آن ها ۲ برابر دیگری باشد، هر کارگر به تنهایی کار را چند روزه تمام می کند.

حل: دو کارگر در یک روز $\frac{1}{10}$ کار را انجام می دهند. کارگر اول در x روز کار را تمام می کند یعنی در یک روز $\frac{1}{x}$ کار را انجام می دهد، و کارگر دوم در یک روز $\frac{1}{2x}$ کار را انجام می دهد.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{2+1}{2x} = \frac{1}{10} \rightarrow 2+1 = \frac{x}{5} \rightarrow x = 15, \quad 2x = 30$$

مثال ۴

عدد صحیحی بیابید که حاصل جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

حل:

$$x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = -x + 6$$

$$x = x^2 - 12x + 36 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$(x-9)(x-4) = 0$$

$$x = 9 \text{ غ ق}, \quad x = 4 \text{ ق ق}$$



@madrese_riazi - سعید بیرامی - ۰۹۳۶۴۶۴۵۹۵۰ - میانه

تمرین ۱

معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

تمرین ۲

معادلات زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+9}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-2} = 0$$

تمرین ۳

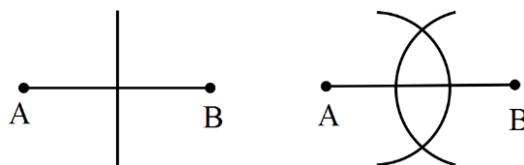
اگر دو ماشین کشت چمن مصنوعی که سرعت یکی از آنها سه برابر دیگری است، بتوانند در ۶ ساعت چمن یک زمین فوتبال را بکارند، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟



درس اول: ترسیم های هندسی

رسم عمود منصف پاره خط AB

دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و یک بار از نقطه A و بار دیگر از B کمان هایی می زنیم. با وصل کردن محل تلاقی کمان ها عمود منصف به دست خواهد آمد.



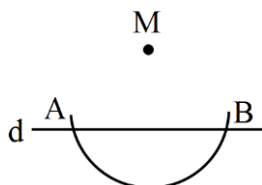
رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن

ابتدا به مرکز آن نقطه و به طول مشخص به کمک پرگار کمانی رسم می کنیم و محل تلاقی آن کمان با خط مفروض را نقاط A و B می نامیم. در پایان مانند بالا عمود منصف AB را رسم می کنیم.



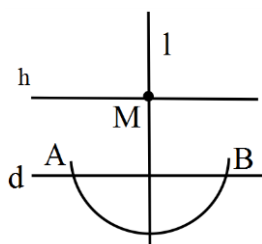
رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه خارج آن

دهانه پرگار را بیش از فاصله M از خط D باز کرده و به مرکز M کمانی می زنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. در این حالت عمود منصف AB از M می گذرد.



رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه خارج آن

با استفاده از روش بالا ابتدا خط l را عمود بر d و گذرنده از M رسم می کنیم و به طریق مشابه خط h را عمود بر l و گذرنده از M رسم می کنیم پس دو خط d و h موازی هستند.



تمرین ۱

خط d_1 را موازی خط d و به فاصله ۴ سانتی متر از آن رسم کنید.

تمرین ۲

مثلثی رسم کنید که طول سه ضلع آن ۳ و ۴ و ۵ سانتی متر باشد.

تمرین ۳

نیم ساز زاویه xoy را رسم کنید. (با توضیح جزئیات ترسیم)

تمرین ۴

مثلث دلخواه ABC را رسم کنید. عمود منصف های اضلاع AB و AC را رسم کنید تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند. به مرکز A و شعاع OA دایره ای رسم کنید.

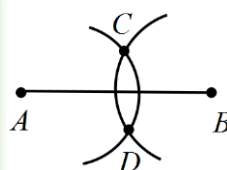
(الف) نشان دهید این دایره از نقاط B و C نیز می گذرد.

(ب) نشان دهید عمود منصف BC نیز از نقطه C می گذرد.



مثال ۱: پاره خط AB به طول ۴ سانتی متر را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله آن ها از نقطه A برابر ۳ سانتی متر و از نقطه B برابر ۲ سانتی متر باشد.

حل: به مرکز های A و B کمان هایی به ترتیب با شعاع های ۳ و ۲ رسم می کنیم تا همدیگر را در نقاط C و D قطع کنند. فاصله نقاط C و D به ترتیب از A و B برابر ۳ و ۲ است.

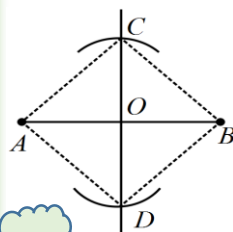


مثال ۲: مربعی به قطر ۶ سانتی متر رسم کنید.

حل: پاره خط $AB = 6\text{cm}$ را رسم می کنیم. سپس عمود منصف

AB را رسم کرده محل تقاطع را O می نامیم. به مرکز O و به شعاع ۳، دو کمان می زنیم تا عمود منصف را در نقاط C و D قطع کند.

$ABCD$ مربع است.



درس دوم: استدلال و قضیه تالس

استدلال استقرایی: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه ای کلی از آن گرفته می شود، یعنی از جزء به کل می رسیم.

استدلال استنتاجی: استدلالی که بر اساس نتیجه گیری منطقی برپایه واقعیت هایی که درستی آن ها را پذیرفته ایم، بیان می شود.

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم، به عکس قضیه شرطی می رسیم.

مثال: متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر داشته باشد، یک مستطیل است.

عکس قضیه: اگر یک متوازی الاضلاع مستطیل باشد، آن گاه دو قطر آن با هم برابرند.

قضیه دو شرطی: اگر یک قضیه شرطی و عکس آن هر دو درست باشند، آن را قضیه دو شرطی می گوئیم.

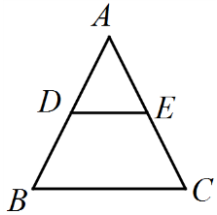
مثال: قضیه "در دو مثلث متشابه، اضلاع متناظر متناسب هستند" را به صورت دو شرطی بنویسید.

حل: دو مثلث متشابه اند اگر و فقط اگر اضلاعشان متناسب باشند.

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد نتیجه گیری کلی غلط است، مثال نقض گوئیم.

مثال: برای حکم "اگر a عددی زوج باشد، آن گاه $a^2 + 1$ مضرب ۵ است" مثال نقض بیابید. **حل:** اگر $a = ۴$ آن گاه $a^2 + 1$ برابر ۱۷ می شود که مضرب ۵ نیست.

قضیه تالس

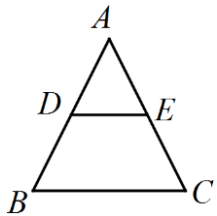


$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

نتایج قضیه تالس

$$\begin{aligned} ۱) \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} \\ ۲) \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC}, \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} \\ ۳) \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \end{aligned}$$

عکس قضیه تالس

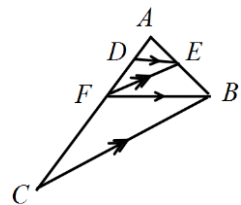


$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow DE \parallel BC$$



مثال ۳

در مثلث ABC ثابت کنید $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



$$\Delta ABF: DE \parallel FB \rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{BE}$$

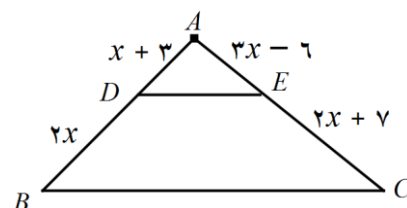
$$\Delta ABC: EF \parallel BC \rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{BE}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$

تمرین ۱: عکس قضیه "اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آن گاه هم مساحتند." را بنویسید. سپس به کمک مثال نقض نشان دهید عکس قضیه درست نیست.

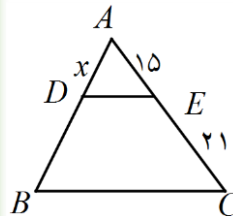
تمرین ۲: برهان خلف را تعریف کنید.

تمرین ۳: در شکل زیر پاره خط DE موازی BC است. مقدار مجهول را بیابید.



مثال ۱

در شکل روبه رو $DE \parallel BC$ مقدار x را به دست آورید. ($AB = ۲۴$)

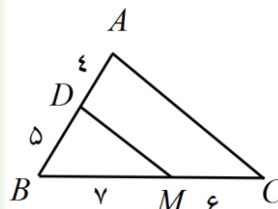


$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{x}{24} = \frac{15}{36}$$

$$x = \frac{24 \times 15}{36} = 10$$

مثال ۲

آیا می توانیم مثلث ABC را به صورت رو به رو داشته باشیم، به طوری که در آن $DM \parallel AC$ باشد؟



حل: باید از عکس قضیه تالس برقراری تناسب زیر را بررسی کنیم.

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BM}{MC} \rightarrow \frac{5}{4} \neq \frac{7}{6} \rightarrow DM \text{ موازی نیست } AC$$

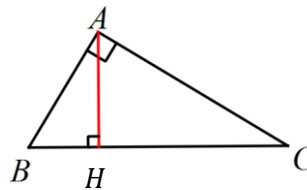


درس سوم: تشابه مثلث ها

حالت های تشابه دو مثلث

- هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه اند. (زز)
- هر گاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن ها برابر باشند، دو مثلث متشابه اند. (ض ض ض)
- هر گاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه اند. (ض ض ض)

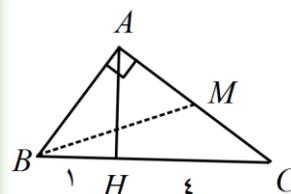
روابط طولی در مثلث قائم الزاویه



- ۱) $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- ۲) $AB \times AC = AH \times BC$
- ۳) $AH^2 = BH \times HC$
- ۴) $AB^2 = BH \times BC$
- ۵) $AC^2 = CH \times BC$

مثال ۲

در مثلث قائم الزاویه ای، ارتفاع وارد بر وتر دو قطعه به طولهای ۱ و ۴ روی وتر ایجاد می کند. طول میانه متوسط این مثلث را بیابید.



$$AB^2 = BH \times BC = 1 \times 5 \rightarrow AB = \sqrt{5}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 4 \times 5 = 20 \rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = 5 + 5 = 10 \rightarrow BM = \sqrt{10}$$

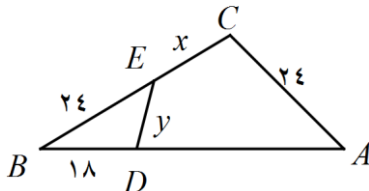
مثال ۳: اندازه محیط های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۵ است. اگر مساحت مثلث بزرگ تر ۲۷ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچکتر را به دست آورید.

رابطه بین نسبت ارتفاع های متناظر، مساحت و محیط دو مثلث متشابه با نسبت تشابه

فرض کنیم دو مثلث ABC و DEF متشابه و نسبت تشابه آن ها K باشد در این صورت:

- (۱) نسبت ارتفاع های متناظر برابر K است.
- (۲) نسبت مساحت های متناظر برابر K^2 است.
- (۳) نسبت محیط های دو مثلث متناظر برابر K است.

مثال ۱: در شکل مقابل $\widehat{C} = \widehat{BDE}$ و $BA = ۴۸$ طول x و y را بیابید.



حل: دو مثلث ABC و BDE به نا به حالت (زز) متشابه اند، چون

$$\widehat{C} = \widehat{BDE} \text{ و } \widehat{B} = \widehat{B} \text{ لذا داریم:}$$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} \rightarrow \frac{24}{y} = \frac{48}{24} \rightarrow y = 12$$

$$\frac{48}{24} = \frac{24 + x}{18} \rightarrow x = 12$$

حل:

$$K = \frac{P_2}{P_1} = \frac{15}{5} = 3$$

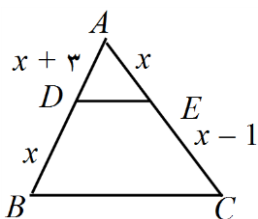
$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \rightarrow \frac{S_2}{S_1} = 9 \rightarrow S_1 = \frac{S_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

تمرین ۱

ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت نیم ساز های نظیر با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.

تمرین ۳

در شکل زیر مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟ $(BC \parallel DE)$ راهنمایی: ابتدا با استفاده از قضیه تالس مقدار x را بیابید و سپس تشابه دو مثلث ADE و ABC را ثابت کنید و با توجه به اینکه نسبت مساحت های متناظر برابر K^2 است جواب را بیابید



درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع گویا: هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا است، هر گاه $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای باشند و $Q(x)$ صفر نباشد.

دامنه توابع گویا

$$R - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

تذکر: در تعیین دامنه نباید توابع را ساده کنیم

تساوی دو تابع: دو تابع f و g مساویند هر گاه:

$$D_f = D_g \quad \text{و} \quad f(x) = g(x)$$

دامنه توابع رادیکالی $\sqrt[n]{f(x)}$

۱. اگر n زوج باشد، $f(x) \geq 0$

۲. اگر n فرد باشد، کافی است دامنه $f(x)$ را حساب کنیم.

رسم تابع به کمک انتقال

برای رسم $y = f(x) + k$ نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای محور y ها انتقال می دهیم.

برای رسم $y = f(x + k)$ نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت چپ و اگر $k < 0$ باشد k واحد به سمت راست انتقال می دهیم.

تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح خود عدد را نسبت می دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگترین عدد صحیح کوچک تر از آن را نسبت می دهد.

$$[6] = 6, \quad [3/75] = 3, \quad [-2/25] = -3$$

رسم تابع شامل جزء صحیح

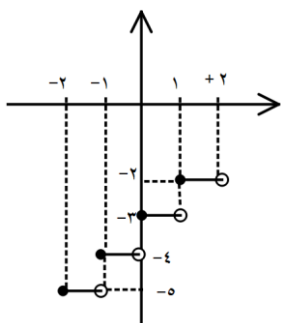
تابع $f(x) = [x] - 3$ را در بازه $[-2, 2)$ رسم کنید.

$$-2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = -2 - 3 = -5$$

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1 - 3 = -4$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0 - 3 = -3$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 1 - 3 = -2$$



تمرین

تمرین ۱

نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x+2}$ را رسم کنید.

تمرین ۲

دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$$\frac{x+5}{x^2-4x+4}$$

$$\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$$

تمرین ۳

نمودار تابع $y = 3 + [2x]$ را در بازه $[-2, 2)$ رسم کنید.

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را در بازه $[-4, 4)$ رسم کنید.



مثال ۱ آیا دو تابع داده شده زیر باهم مساویند؟

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$$

$$D_f: x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0$$

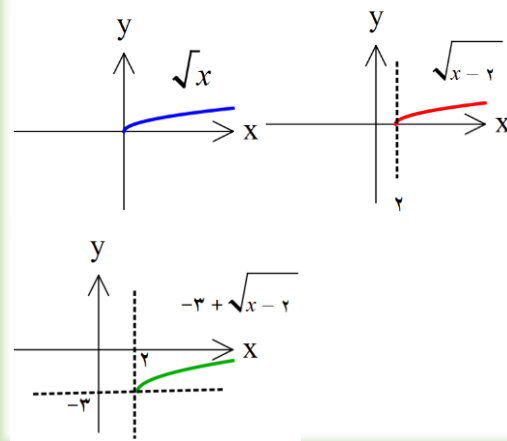
بعد از تعیین علامت داریم:

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_g = \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

چون دامنه دو تابع یکی نیست پس با هم برابر نیستند.

مثال ۲ نمودار تابع $y = -3 + \sqrt{x-2}$ را رسم کنید.



درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک

تابع یک به یک

تابع f را یک به یک گوئیم هرگاه هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه های دوم برابر نباشند و در صورت مساوی بودن مولفه های دوم، مولفه های اول آن ها نیز برابر باشند.

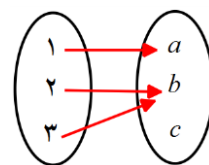
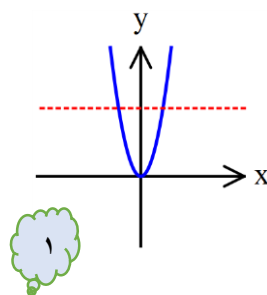
در نمودار ون تابع یک به یک، به هیچ عضوی از مجموعه دوم، دو پیکان وارد نمی شود.

اگر خطی موازی محور X ها رسم کنیم باید تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال:

هیچ یک از توابع زیر یک به یک نیستند.

$$\{(-2, 3), (2, 3), (3, -2)\}$$



تابع وارون

تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد. با تعویض جای تمام مولفه های اول و دوم وارون تابع به دست می آید.

نکته:

- اگر نقطه $A = (x, y)$ روی تابع f باشد، در این صورت $A' = (y, x)$ روی تابع f^{-1} است.
- نمودارهای دو تابع f و f^{-1} نسبت به نیم سازه های ناحیه اول و سوم قرینه یکدیگرند.

ضابطه تابع وارون

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f ، در معادله $y = f(x)$ را بر حسب y به دست آورده و سپس با جابه جا کردن x و y ضابطه تابع را به دست می آوریم.

مثال:

ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x + 1$ را به دست آورید.

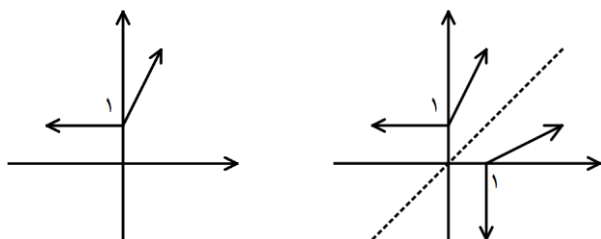
$$y = 2x + 1 \rightarrow 2x = y - 1 \rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$



مثال ۳

نمودار وارون تابع زیر را رسم کنید.



تمرین ۱: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع داده شده یک به یک باشد.

$$f = \{(1, a-b), (2, 4), (3, 2a+b), (a-b, 4), (3, 7)\}$$

تمرین ۲: آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ چرا؟

تمرین ۲: ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ را به دست آورید.

تمرین ۳: نمودار دو تابع f و g را رسم کنید که دامنه هر دو برابر $[-1, 3]$ و برد هر دو برابر $[-1, 2]$ باشد و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.



مثال ۱:

تحقیق کنید که آیا $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ و $g(x) = \frac{2}{x-3}$ وارون یکدیگرند یا خیر؟

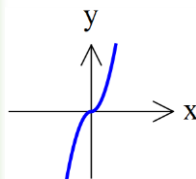
حل: بله چون:

$$g(x) = y = \frac{2}{x-3} \rightarrow yx - 3y = 2 \rightarrow yx = 3y + 2$$

$$x = 3 + \frac{2}{y} \rightarrow g^{-1}(x) = 3 + \frac{2}{x} = f(x)$$

مثال ۲: یک به یک بودن تابع $f(x) = x|x|$ را از روی نمودار بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



بله یک به یک است زیرا هر خطی موازی محور X ها رسم کنیم نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.



درس سوم: اعمال جبری روی توابع

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad , \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad , \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

مثال: دو تابع $g(x) = \sqrt{x+4}$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f+g)(\cdot)$ را به دست آورید.

ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

$$(f+g)(\cdot) = f(\cdot) + g(\cdot) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad , \quad D_g = [-4, +\infty)$$

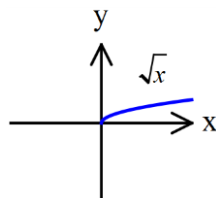
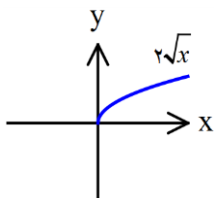
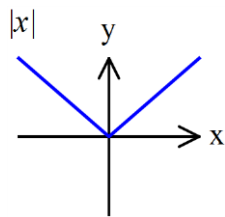
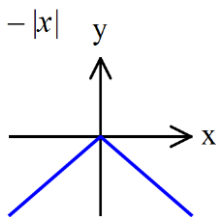
$$D_f \cap D_g = [-4, +\infty) - \{2\}$$

$$g(x) = 0 \rightarrow x+4 = 0 \rightarrow x = -4$$

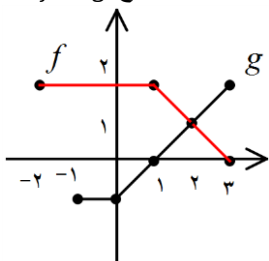
$$D_{\frac{f}{g}} = [-4, +\infty) - \{2\} - \{-4\} = (-4, +\infty)$$

رسم نمودار $y = kf(x)$

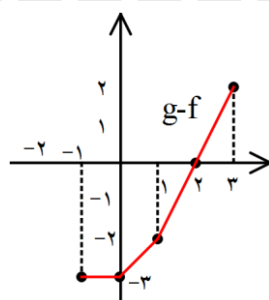
الف) اگر $k > 0$ ، کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم. ب) اگر $k < 0$ ، کافی است نمودار $y = |k|f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



مثال: با توجه به نمودار مقابل نمودار هر یک از توابع $f+g$ و $g-f$ را رسم کنید.



با توجه به نمودار مقابل نمودار هر یک از توابع $f+g$ و $g-f$ را رسم کنید.



تمرین ۱:

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x^2}$ باشند، دامنه $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۲: اگر $f(x) = 3 - x^2$ و $g(x) = -2$ باشند:

الف) نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

ب) مقدار $(f \cdot g)(\cdot)$ را به دست آورید.

تمرین ۳: با توجه به نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$g(x) = 1 - 2\sqrt{x-1}$$



حل

$$D_f = [-2, 3] \quad , \quad D_g = [-1, 3] \rightarrow D_{f+g} = D_{g-f} = [-1, 3]$$

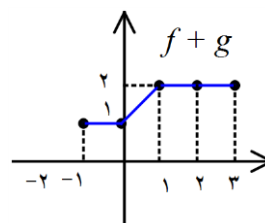
$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 2 + (-1) = 1$$

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + (-1) = 1$$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + (0) = 2$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + (1) = 2$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + (2) = 2$$



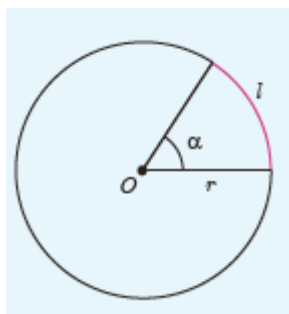
به طریق مشابه نمودار $g-f$ به صورت زیر خواهد بود.



درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه

رادیان

۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبه روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.



اگر l طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$l = r\alpha$$

که l و r هم واحدند.

اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد، آن گاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

مثال ۱:

زاویه 150° را بر حسب رادیان و ۲ رادیان را بر حسب درجه بنویسید.

حل:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$D = 150^\circ \rightarrow R = 150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6} \text{ رادیان}$$

$$R = 2 \text{ رادیان} \rightarrow D = 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360}{3.14} \cong 114.6^\circ$$

مثال ۲:

در یک دایره به قطر ۲۰ سانتی متر، طول کمان متناظر با زاویه $\theta = 41^\circ$ چه قدر است؟ ($\pi = 3.14$)

حل:

$$\theta = 41^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$l = r\theta = 10 \times 41^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \cong 7.1 \text{ cm}$$



تمرین ۱

طول کمان مقابل به زاویه ۵ رادیان در دایره ای به شعاع ۲/۵ سانتی متر، چند دسی متر است؟

تمرین ۲

تفاضل اندازه دو زاویه بر حسب درجه ۳۰ و مجموع آن ها بر حسب رادیان برابر $\frac{4\pi}{9}$ می باشد. اندازه دو زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۳

ظرف چه مدت بر حسب دقیقه، عقربه دقیقه شمار $\frac{11\pi}{4}$ رادیان طی می کند؟



۱۰

مثال ۳:

شعاع چرخ جلوی موتور دو برابر شعاع چرخ عقب آن است. شعاع چرخ جلو ۲۵ سانتی متر است. اگر چرخ عقب ۱ متر روی زمین کشیده شود، چرخ جلو چند درجه می پیماید؟

$$l = (\text{چرخ جلو}) = (\text{چرخ عقب}) l = 100 \text{ cm}$$

$$l = r\alpha \rightarrow 100 = 25\alpha \rightarrow \alpha = 4 \text{ رادیان}$$

$$R = 4 \text{ رادیان}; D = 4 \times \frac{180}{\pi} \cong 229.2^\circ$$

مثال ۴: در دایره ای به مساحت ۳۱۴ سانتی متر مربع، طول کمان متناظر با زاویه $\frac{\pi}{4}$ رادیان چه قدر است؟ ($\pi = 3.14$)

$$S = \pi r^2 \rightarrow 314 = \frac{3}{14} \times r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{314}{3.14}} = 10$$

$$l = r\alpha = 10 \times \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$



@madrese_riazi - سعید بیرامی - ۰۹۳۶۴۶۴۵۹۵۰ - میانه

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت ن	۰	ت ن	۰
$\cot\theta$	ت ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	ت ن	۰	ت ن

چهارم	سوم	دوم	اول	
-	-	+	+	$\sin \alpha$
+	-	-	+	$\cos \alpha$
-	+	-	+	$\tan \alpha$
-	+	-	+	$\cot \alpha$

مثال ۱: اگر $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$ سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \text{ناحیه دو}$$

$$\rightarrow \tan \alpha = -\frac{4}{3} \text{ و } \cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \text{ناحیه سوم} \rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \text{ و } \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

مثال: حاصل $A = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ را بیابید.

$$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow A = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

مثال: حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\sin 120^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل مضارب زوج π رادیان

هر وقت مضرب زوج π دیدیم روی آن خط کشیده و صفر در نظر می گیریم.

$$\sin(2k\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

مثال: حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\tan(\pi - 120^\circ)$$

$$= \tan(120^\circ) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos 40^\circ = \cos(360^\circ + 4^\circ) = \cos 4^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرین: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sin 135^\circ + \cos 45^\circ + \tan(-54^\circ) + \cot 315^\circ$$



نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

مثال: حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{4\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

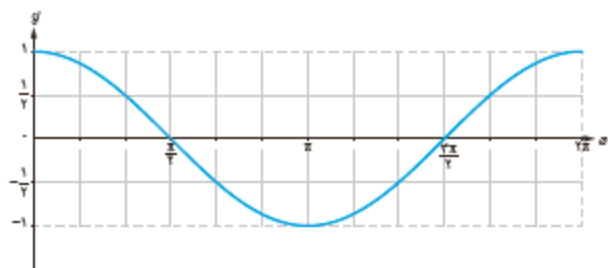
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



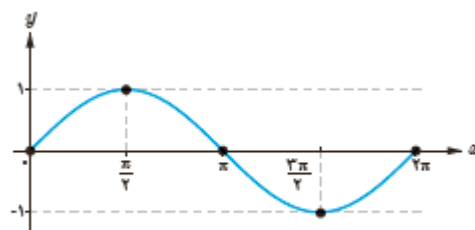
دامنه تابع $y = \cos x$ برابر R و برد آن $[-1, 1]$ می باشد.

این تابع محور x ها را در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ قطع می کند. $k \in Z$

ماکزیمم این تابع برابر 1 و در نقاطی به طول $x = 2k\pi$ و مینیمم آن برابر -1 و در نقاطی به طول $x = (2k+1)\pi$ می باشد. ($k \in Z$)



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



دامنه تابع $y = \sin x$ برابر R و برد آن $[-1, 1]$ می باشد.

این تابع محور x ها را در نقاطی به طول $x = k\pi$ قطع می کند. $k \in Z$

ماکزیمم این تابع برابر 1 و در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و مینیمم آن برابر -1 و در نقاطی به طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ یا $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ می باشد. ($k \in Z$)



مثال ۲:

کمترین و بیشترین مقدار تابع زیر را به دست آورید.

$$y = -\frac{1}{4} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4}$$

$$-1 \leq \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \rightarrow \times -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{4} \rightarrow -\frac{3}{4}$$

$$-1 \geq -\frac{1}{4} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{4} \geq -2 \rightarrow -2 \leq y \leq -1$$

تمرین

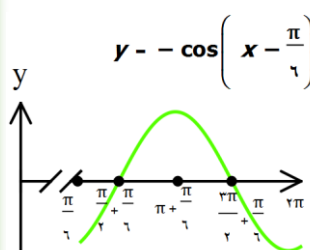
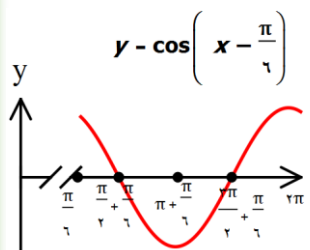
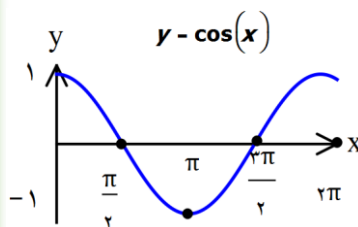
نمودار توابع زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

$$y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$



مثال ۱: نمودار تابع $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



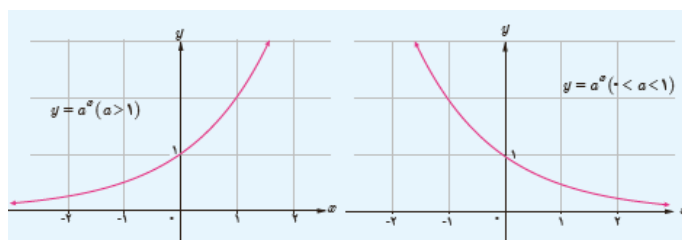
درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

تابع نمایی:

تابع $y = a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x یک متغیر باشد، یک تابع نمایی است.
مانند:

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = 6^{-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x, \quad h(x) = 3^{x+2} - 4$$

نمودار تابع نمایی



ویژگی های تابع نمایی:

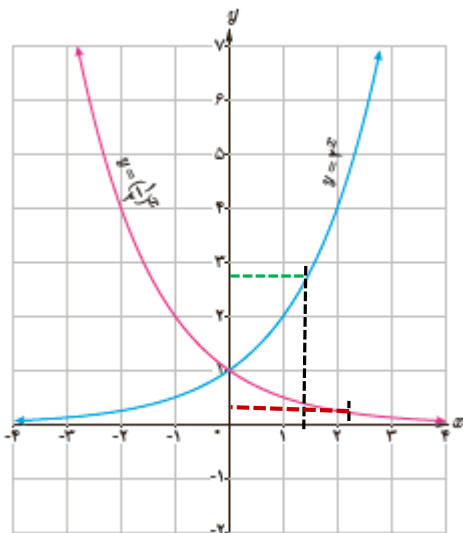
- دامنه آن ها R و برد آن ها $(0, +\infty)$ است.
- یک به یک هستند.
- همواره از نقطه $(0, 1)$ می گذزند.



مثال: الف) نمودار توابع با ضابطه های $y = 2^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

x	y
-4	0.0625
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8

$$y = 2^x$$



ب) مقدار تقریبی عددهای $\sqrt[3]{2}$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ را از روی نمودار به دست آورید. **حل.**

$$\sqrt[3]{2} \approx 2/6, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} \approx 0/2$$

ج) نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه اند؟

حل نسبت به محور y ها



مثال ۳: اگر $1/1^x < 1/1^y$ باشد، آن گاه چه رابطه ای بین

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x \text{ و } \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^y \text{ برقرار است؟}$$

$$\frac{1^x}{1} < \frac{1^y}{1} \rightarrow x < y$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} < 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x > \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^y$$

نکته: در برخی معادلات نمایی تغییر متغیر می تواند مفید باشد.

مثال: معادله $3^{2x} - 5 \times 3^x = 36$ را حل کنید.

$$3^x = t \rightarrow t^2 - 5t - 36 = 0 \rightarrow \dots$$

تمرین ۱: نمودار تابع $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

تمرین ۲: معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} = 3^{x-1} \quad 2^{x^2} = \frac{1}{2^x}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} \times 64^{x+5} = (\sqrt[3]{4})^x$$



معادله نمایی: برای حل معادله نمایی کافی است در دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم پایه ایجاد کنیم و سپس توان هایی را که در آن ها مجهول وجود دارد، برابر قرار دهیم.

مثال ۱: معادله $3^{2x} - 4^x = 9^x$ را حل کنید.

$$3^{2x} = 3^{2x} - 4^x \rightarrow x^2 - 4x - 2x = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = 6$$

مثال ۲: معادله زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \times 25^{3x} = \sqrt{5} \times \left(\frac{1}{125}\right)^{2-x}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \times 5^{6x} = 5^{\frac{1}{2}} \times (5^{-3})^{2-x}$$

$$5^{1-x} \times 5^{6x} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{-6+3x} \rightarrow 5^{1+5x} = 5^{2x-\frac{11}{2}}$$

$$1 + 5x = 2x - \frac{11}{2} \rightarrow 2x = \frac{-13}{2} \rightarrow x = \frac{-13}{4}$$

نکته: اگر پایه عددی بزرگ تر از ۱ باشد، آن گاه هر چه توان بیشتر باشد، عدد بزرگ تر می باشد و اگر پایه، عددی بین صفر و یک باشد، آن گاه هر چه توان بزرگ تر باشد، عدد کوچک تر است.



درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

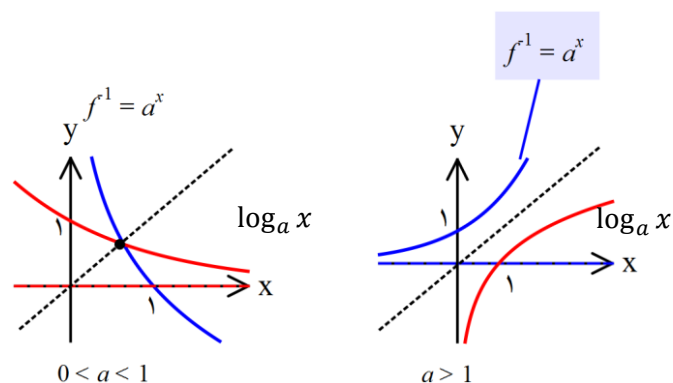
لگاریتم

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (a > 0, a \neq 1, c > 0)$$

مثال:

$$4^3 = 64 \rightarrow \log_4 64 = 3$$

تابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیگرند و نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند.



ویژگی های توابع لگاریتمی

۱- دامنه آن ها $(0, +\infty)$ و برد آن ها R است.

۲- یک به یک هستند.

۳- همواره از نقطه $(1, 0)$ می گذزند.

نکته: اگر $a > 1$ لگاریتم و معکوس آن یکدیگر را قطع نمی کنند و اگر $0 < a < 1$ یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می کنند.

ویژگی های لگاریتم

$$1) \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$2) \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$3) \log_c a^n = n \log_c a \quad 4) \log_{c^m} a^n = \frac{n}{m} \log_c a$$

$$5) \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad 6) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$7) a^{\log_a b} = b$$

مثال: اگر $\log_b a = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ را به دست آورید.

$$\log_{\sqrt{b}} ab^2 = \log_{\sqrt{b}} a + \log_{\sqrt{b}} b^2$$

$$= \log_{b^{\frac{1}{2}}} a + \log_{b^{\frac{1}{2}}} b^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_b a + \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_b b$$

$$= 2 \log_b a + 4 = 2 \left(\frac{2}{3} \right) + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$



مثال ۳: اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{4}, -2)$ بگذرد، مقدار a چند است؟

$$-2 = \log_a \frac{1}{4} \rightarrow a^{-2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \rightarrow a^2 = 4$$

$$a = \pm \sqrt{4} \rightarrow a = \pm 2$$

نکته: اگر $(a, b) \in f$ آن گاه $(b, a) \in f^{-1}$ و برعکس.

مثال ۴: اگر نمودار تابع معکوس $f(x) = \log_a(x+1)$ از نقطه $(2, 4)$ عبور کند، مقدار a را بیابید.

$$(2, 4) \in f^{-1} \rightarrow (4, 2) \in f$$

$$2 = \log_a 5 \rightarrow a^2 = 5 \rightarrow a = \sqrt{5}$$

تمرین ۱: اگر $\log 3 = 0.4$ و $\log 7 = 0.8$ باشد، حاصل

$$\log \frac{8100}{\sqrt[3]{49}}$$

تمرین ۲: معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_3(p^2 - p) = \log_3 p$$

$$\log(x+2) = \log 8 - \log(x-5)$$

$$\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$$



= 14

معادلات لگاریتمی

اگر معادله به صورت $\log_a x = b$ باشد، در این صورت

داریم: $x = b^a$ ولی اگر معادله به فرم $\log_a x = \log_a b$ باشد داریم: $x = b$

توجه: بعد از پیدا کردن ریشه ها باید آن ها را در معادله چک کنیم تا در دامنه حضور داشته باشند.

مثال ۱: معادله زیر را حل کنید.

$$\log_2(x+1) + \log_2(x^2 - x + 1) = 2$$

$$\log_2(x+1)(x^2 - x + 1) = 2 \rightarrow \log_2(x^3 + 1) = 2$$

$$(x^3 + 1) = 2^2 = 4 \rightarrow x^3 = 3 \rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

مثال ۲: اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) = ?$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 20) = \log 16$$

$$= \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$



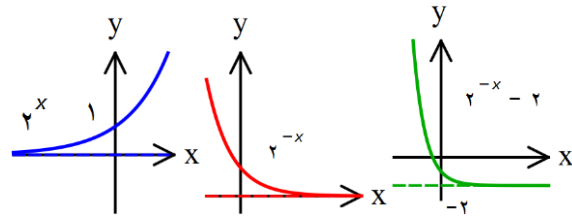
@madrese_riazi - سعید بیرامی - ۰۹۳۶۴۶۴۵۹۵۰-میان

درس سوم: نمودارها و کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

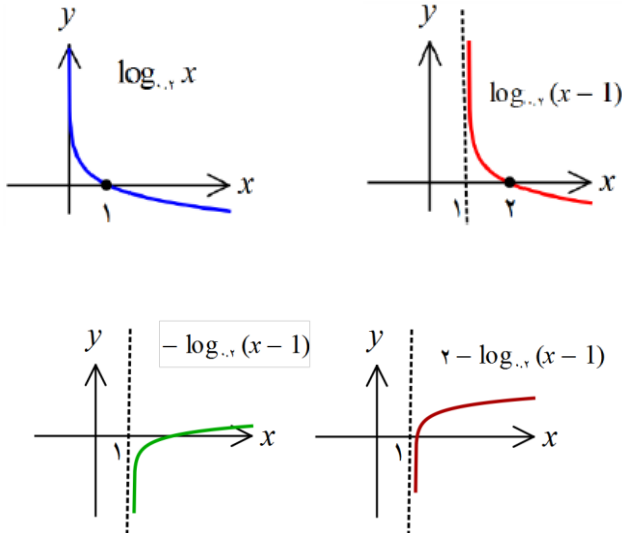
رسم تابع به کمک انتقال

- ✓ برای رسم $y = f(x) + k$ نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای محور y ها انتقال می دهیم.
- ✓ برای رسم $y = f(x + k)$ نمودار تابع $f(x)$ را k واحد به سمت چپ و اگر $k < 0$ باشد k واحد به سمت راست انتقال می دهیم.
- ✓ برای رسم $y = -f(x)$ نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x قرینه می کنیم.
- ✓ برای رسم $y = f(-x)$ نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور y قرینه می کنیم.

مثال ۱: نمودار تابع $f(x) = 2^{-x} - 2$ را رسم کنید.



مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$ را رسم کنید.



کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

اگر بزرگی زلزله ای در مقیاس ریشتر برابر M باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ است که از رابطه زیر به دست می آید.

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$



تمرین ۱

نمودار توابع را رسم کنید.

$$y = 2 - 3^{x+1}$$

$$y = 3 - \log_3(-x)$$

تمرین ۲: در تابع با ضابطه زیر

$$f(x) = -5 - \log_2(4x + 1)$$

الف) مقدار $f(2)$ را به دست آورید.

ب) اگر $f(x) = -3$ ، مقدار x را به دست آورید.

تمرین ۳

نمودار تابع $f(x) = \log_2 x$ را ابتدا یک واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

تمرین ۳

مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله برابر $10^{21/7}$ ارگ است. بزرگی این زلزله چند ریشتر است؟



مثال ۳:

اگر انرژی آزاد شده یک زلزله برابر $4/8$ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر است؟

$$M = 4/8 \rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 \times 4/8 = 19$$

$$\rightarrow \log E = 19 \rightarrow E = 10^{19} \text{ Erg}$$

مثال ۴:

نمودار تابع $f(x) = a + \log_2(x + b)$ ، محور y ها را در نقطه ای به عرض $-\frac{5}{2}$ قطع می کند. اگر نمودار f از نقطه $(2, -2)$ بگذرد، مقادیر b را به دست آورید.

$$f(0) = a + \log_2 b = -\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$f(2) = a + \log_2(2 + b) = -2 \quad (2)$$

با کم کردن رابطه (۱) از (۲) خواهیم داشت

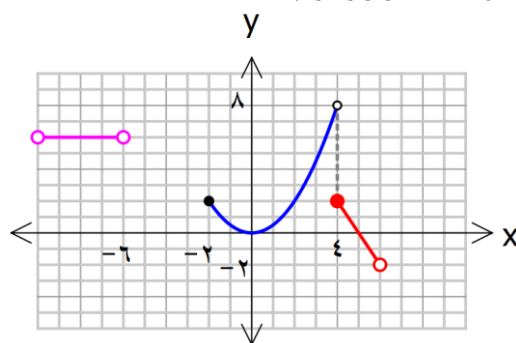
$$\log_2(b + 2) - \log_2 b = \frac{1}{2} \rightarrow \log_2 \frac{b + 2}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b + 2}{b} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \rightarrow b + 2 = \sqrt{2}b \rightarrow b = 2$$



درس اول: فرایندهای حدی

با توجه به شکل زیر داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 16 \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ وجود نیست}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ وجود ندارد} \quad f(-2) = 2$$

$$f(-6), \lim_{x \rightarrow -6} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

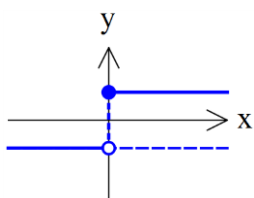
مثال ۱: حد تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

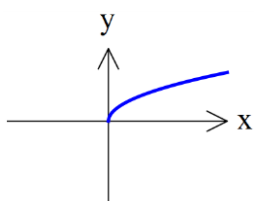
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

چون حد چپ و راست برابر نیستند پس در $x = 0$ حد وجود ندارد.



مثال ۲: آیا $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 0$ حد دارد؟



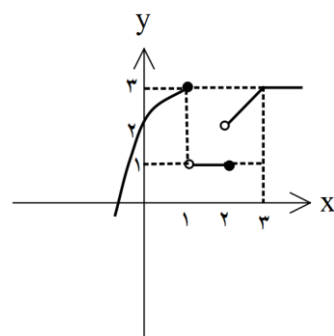
تمرین ۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع در $x = 1$ را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x - x^2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 1 \\ x^2 + 2 & x < 1 \end{cases}$$

تمرین ۲: با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت روبه رو را به دست آورید.

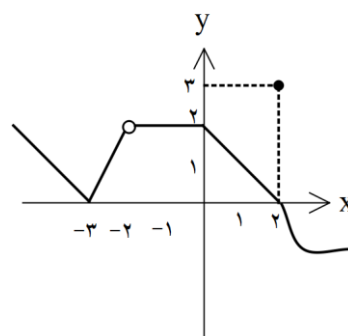
$$3 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2f(3)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

چون حد چپ و راست برابر نیستند پس در $x = 0$ حد وجود ندارد.

مثال ۳: نمودار تابع f داده شده است. حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

حل:

الف) ۲ ب) ۰ ج) ۲ د) ۲



درس دوم: محاسبه حد توابع

(۱) حد تابع ثابت $f(x) = k$ در هر نقطه دلخواه x برابر همان مقدار ثابت k است.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

(۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ در هر نقطه دلخواه x برابر با x است

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

(۳)

$$\lim_{x \rightarrow k} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow k} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow k} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow k} f(x) \times \lim_{x \rightarrow k} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow k} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow k} f(x)}{\lim_{x \rightarrow k} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow k} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow k} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow k} f(x) \right)^n$$



مثال ۱: آیا تابع $f(x) = x - [x]$ در $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - [x] = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - [x] = 1 - 0 = 1$$

چون حد چپ و راست برابر نیستند پس در $x = 1$ حد وجود ندارد.

مثال ۲: اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$

باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{g(x) - 3h(x)} = ?$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3} g(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 3} h(x)} = \frac{2 \times (-1)}{2 - 3 \times (3)} = \frac{2}{-7}$$

مثال: اگر دو تابع f و g در $x = a$ حد داشته باشند، در مورد حد توابع f و g چه می توان گفت؟

چون دو تابع فوق در $x = a$ دارای حد هستند پس مجموع آن ها که می شود $2f$ نیز در $x = a$ دارای حد است. و از آن نتیجه می گیریم که f نیز در $x = a$ دارای حد است. پس تابع

$$(f + g) - f = g$$



نیز در $x = a$ دارای حد است.

مثال ۴: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x}{x + 5}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{5 + 6x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - x}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] + 1}{x^2 - x}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}$$

حل:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x}{x + 5} = \frac{(-2)^2 + 4(-2)}{-2 + 5} = -\frac{4}{3}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -1} 5 + 6x = 5 - 6 = -1 < 0 \text{ حد ندارد}$$



درس سوم: پیوستگی

تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, f(a) = L$$

پیوستگی چپ

تابع f در نقطه $x = a$ دارای پیوستگی چپ است، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1, f(a) = L_1$$

پیوستگی راست

تابع f در نقطه $x = a$ دارای پیوستگی راست است، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2, f(a) = L_2$$

پیوستگی روی بازه

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است، هرگاه، در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه، f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته

اگر $D_f = R$ و f در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.**مثال ۱:** پیوستگی $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \quad f(0) = 1$$

تابع در $x = 0$ ناپیوسته است ولی پیوستگی راست دارد.**مثال ۲:** a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} & 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] + a) = 1 + a$$

برای پیوسته بودن باید حد چپ و راست برابر باشند:

$$-2 = 1 + a \Rightarrow a = -3$$

تمرین ۱: حدود a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته نباشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 4 & x \geq 2 \\ x^2 - x & x < 2 \end{cases}$$

تمرین ۲: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + 2b}{x^2 - 2} & x > 2 \\ 2a + x + 1 & x = 2 \\ 2b + 5 & x < 2 \end{cases}$$

تمرین ۳: مقدار a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + a & x > 0 \\ -4 & x = 0 \\ 3x + 2b & x < 0 \end{cases}$$

تمرین ۴: تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x = 0$ برابر ۲باشد ولی تابع در $x = 0$ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.**مثال ۳:** a را طوری بیابید که تابع زیر در بازه $[0, 3]$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)|x| & x < 2 \\ a + 2 \sin \frac{\pi}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

تابع باید در هر نقطه از بازه $[0, 3]$ مانند ۲ نیز پیوسته باشد لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1)|x| = (2 - 1) \times 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + 2 \sin \frac{\pi}{x} \right) = a + 2 \sin \frac{\pi}{2} = a + 2$$

$$2 = a + 2 \Rightarrow a = 0$$

نکته:

تابع $f(x) = [x]$ در نقاط به طول صحیح، ناپیوسته و در نقاط غیر صحیح پیوسته است.**مثال ۴:** تابع $y = [x]$ در بازه $[2, k]$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را تعیین کنید.**حل:** تابع $y = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، پس k حداکثر ۳ میتواند انتخاب شود. (چون بازه است، پیوستگی راست ۲ کافی است).

قانون ضرب احتمالات

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

پیشامدهای مستقل: پیشامد A از پیشامد B مستقل است هر گاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A تاثیر نداشته باشد یعنی:

$$P(A|B) = P(A)$$

نکته: پیشامد A از پیشامد B مستقل است هر گاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

مثال ۱: اگر $P(A) = 0.5$ و $P(B) = 0.4$ و

$$P(A \cap B) = 0.3 \text{ مطلوبست محاسبه:}$$

$$1) P(A \cup B) \quad 2) P(A - B) \quad 3) P(A')$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$$

مثال ۲: اعداد ۱ تا ۹ را روی ۹ کارت نوشته و سه کارت به تصادف انتخاب می کنیم. اگر مجموع اعداد روی کارت های انتخاب شده زوج باشند، احتمال آنکه هر سه زوج باشند چه قدر است؟

حل: برای اینکه مجموع زوج باشد باید هر سه زوج یا دوتا فرد و یکی زوج باشد.

آمار و احتمال

فصل هفتم

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

اعمال روی پیشامدها

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهند.

متمم یک پیشامد: متمم A را با A' نمایش می دهیم و زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B ناسازگارند هر گاه هم زمان رخ ندهند یعنی $A \cap B = \emptyset$

قانون جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال پیشامد متمم

$$P(A') = 1 - P(A), P(A) = 1 - P(A')$$

احتمال شرطی: احتمال شرطی A به شرط وقوع B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

اعداد زوج: ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ اعداد فرد: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹

$$n(S) = \binom{4}{3} + \binom{5}{2} \binom{4}{1} = 4 + 40 = 44$$

$$n(A) = \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{44} = \frac{1}{11}$$

مثال ۳: درون جعبه ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می کنیم. احتمال آنکه لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را بیابید.

حل: فرض کنیم A پیشامد سالم بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد باید $P(A \cap B)$ را حساب کنیم.

$$P(A \cap B) = p(A)P(B|A)$$

$$P(B|A) = P(\text{لامپ اول سالم بوده} | \text{لامپ دوم معیوب}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = p(A)P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

مثال ۴: ۵۵ درصد جمعیت جامعه ای که ۶۰ درصد این جامعه با سواد هستند را زنان تشکیل می دهند. اگر نیمی از زنان این جامعه با سواد باشند و یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص زن یا با سواد می باشد؟

حل: فرض کنیم A پیشامد زن بودن و B پیشامد با سواد بودن شخص انتخاب شده باشد، باید $P(A \cup B)$ را به دست آوریم.

$$P(A) = 0.55, P(B) = 0.6, P(B|A) = 0.5$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.5 = \frac{P(A \cap B)}{0.55}$$

$$P(A \cap B) = 0.5 \times 0.55 = 0.275$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.55 + 0.6 - 0.275 = 0.875$$

مثال ۵: در بین خانواده های سه فرزندی، اگر A پیشامد حداقل وجود یک پسر و B پیشامد وجود دو جنس دختر و پسر باشد، بررسی کنید که آیا A و B مستقل اند یا خیر؟ مستقلاًد چون:

$$A = \{(g, g, g), (g, g, b), (g, b, g), (b, g, g)\}$$

$$B = \{(g, b, b), (b, g, b), (g, g, b), (g, b, g), (b, g, g)\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{5}{8}, P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16} \neq \frac{3}{8} = P(A \cap B)$$

تمرین ۱: در پرتاب دو تاس، اعداد رو شده در هر تاس کم تر از ۵ هستند. احتمال این که مجموع دو تاس ۴ باشد چه قدر است؟

تمرین ۲: احتمال اینکه علی در درس ریاضی و فیزیک قبول شود، به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ است. اگر احتمال قبولی علی در درس ریاضی به شرط آنکه در درس فیزیک قبول شود برابر ۰/۷۵ باشد، احتمال اینکه علی در حداقل یکی از این دو درس قبول شود را به دست آورید.

درس دوم: آمار توصیفی

معیارهای گرایش به مرکز

میانگین: میانگین داده ها $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ برابر است با

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

N تعداد داده هاست. اگر هر یک از داده های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، میانگین آن ها نیز با همان مقدار ثابت جمع می شود. و اگر هر یک از داده های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، میانگین آن ها نیز در همان مقدار ثابت ضرب می شود.

میانه: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم، اگر تعداد داده ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار دارد میانه است. اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو عددی که در وسط قرار دارند میانه است.

معیارهای پراکندگی

دامنه تغییرات: اختلاف بین بزرگترین و کوچک ترین داده ها را دامنه تغییرات گوئیم.

واریانس (σ^2): پراکندگی داده ها را نسبت به میانگین آن ها نشان می دهد.

واریانس داده های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ برابر است با

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + \dots + (x_N - \bar{X})}{N}$$

انحراف معیار (σ): جذر واریانس است.

ضریب تغییرات: نسبت انحراف معیار به میانگین است.

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

مثال ۱: میانگین ۸ داده آماری ۱۵ است. اگر میانگین ۴ داده اول ۱۲ باشد، مجموع ۴ داده دیگر چه قدر است؟

$$8 \times 15 = 120 = \text{مجموع ۸ داده}$$

$$4 \times 12 = 48 = \text{مجموع ۴ داده اول}$$

$$120 - 48 = 72 = \text{مجموع ۴ داده دوم}$$

مثال ۲: ضریب تغییرات داده های ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴ چه قدر است؟

$$\bar{X} = \frac{6 + 8 + 10 + 12 + 14}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(14-10)^2 + (12-10)^2 + (10-10)^2 + (8-10)^2 + (6-10)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = 8 \rightarrow \sigma = \sqrt{8} \rightarrow cv = \frac{\sqrt{8}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$



چون میانگین هر دو برابر شد هر کدام که واریانس کمتری داشته باشد، داده ها به هم نزدیکتر و در نتیجه عملکرد بهتری دارد.

$$\sigma_A^2 = \frac{6}{5}, \sigma_B^2 = 2 \rightarrow \sigma_A^2 < \sigma_B^2$$

پس عملکرد دانش آموز A بهتر است.

مثال ۵: کارخانه ای دو نوع تسمه تایم تولید می کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۷۵۰۰۰ و ۹۰۰۰۰ کیلومتر و واریانس برای نوع A و B به ترتیب ۴۰۰ و ۶۲۵ کیلومتر مربع است. کدام نوع تسمه تایم بهتر است؟

حل: هر کدام ضریب تغییرات کوچکتری داشته باشد بهتر است.

$$cv_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{\sqrt{400}}{75000} = \frac{20}{75000} \cong 0.00027$$

$$cv_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{625}}{90000} = \frac{25}{90000} \cong 0.00028$$

پس تسمه تایم نوع A بهتر است.

نکته: اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد، آنگاه داده ها همگی با هم برابرند و برعکس.

تمرین: اگر واریانس داده های زیر برابر صفر باشد، a و b را حساب کنید

$$a + 2, b + 3, 4$$

چارک ها: میانه داده ها را به دو دسته تقسیم می کند. داده های قبل از میانه و داده های بعد از میانه. میانه نیمه اول داده ها را **چارک اول** (Q_1) و میانه نیمه دوم داده ها را **چارک سوم** (Q_3) می نامیم. چارک دوم (Q_2) همان میانه است.

مثال ۳: چارک اول و دوم و سوم داده های زیر را به دست آورید.

$$24, 17, 19, 11, 27, 20, 12, 14, 25, 30$$

حل: ابتدا داده ها را مرتب می کنیم.

$$11, 12, 14, 17, 20, 24, 25, 27, 29, 30$$

$$Q_2 = \frac{20 + 24}{2} = 22$$

$$11, 12, 14, 17, 20, Q_2, 24, 25, 27, 29, 30$$

$$Q_1 = 14 \quad Q_3 = 27$$

مثال ۴: نمرات راضی دو دانش آموز A و B در پنج آزمون داخلی به صورت زیر است. عملکرد کدام یک بهتر است؟

$$A: 18, 16, 18, 19, 19 \quad B: 18, 20, 19, 16, 17$$

حل: ابتدا میانگین نمرات هر یک را محاسبه می کنیم

$$\bar{X}_A = \frac{90}{5} = 18 \quad \bar{X}_B = \frac{90}{5} = 18$$

