درس اول: توابع چند جمله‌ای- توابع صعودی و نزولی:

توابع چند جمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ که در آن a_n و a_{n-1} و ... و a_1 و a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است را یک تابع چند جمله‌ای از **درجه‌ی n** می‌گویند.

دامنه و برد توابع چند جمله‌ای: دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ و برد آن اگر n فرد باشد، برابر $\mathbb{R}$ و اگر **n زوج** باشد، برابر $\mathbb{R} \geq 0$ یا $[0, +\infty)$ است.

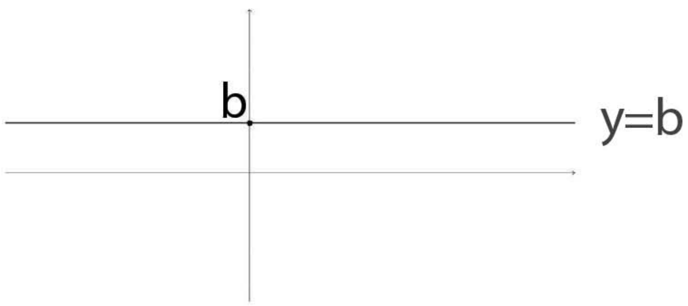
درجه‌ی توابع چند جمله‌ای: به **بالاترین** (بیشترین) **توان x** در توابع چند جمله‌ای، درجه توابع چند جمله‌ای می‌گویند.

برخی از توابع چند جمله‌ای مهم:

۱- تابع ثابت: شکل کلی (ضابطه) تابع ثابت به صورت $y=b$ یا $f(x)=b$ که $b \in \mathbb{R}$ می‌باشد.

تابع ثابت یک چند جمله‌ای از **درجه‌ی صفر** می‌باشد.

نمودار تابع ثابت: نمودار تابع ثابت همواره **خطی موازی با محور x هاست.**



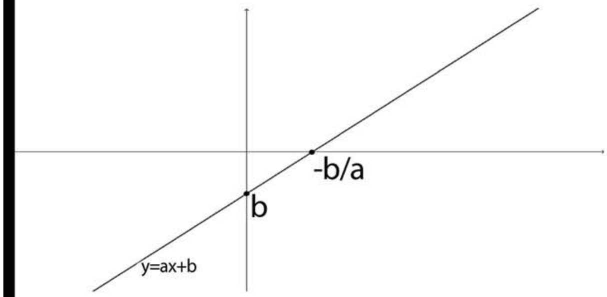
نکته: برد تابع ثابت $f(x)=b$ **مجموعه‌ی تک عضوی** $\{b\}$ است و **دامنه‌ی** تابع ثابت $f(x)=b$ برابر $\mathbb{R}$ است. به عبارتی:

$$\begin{cases} D=\mathbb{R} \\ R=\{b\} \end{cases}$$

۲- تابع درجه‌ی اول (تابع خطی): شکل کلی (ضابطه) تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ که $(a \neq 0)$ می‌باشد.

تابع خطی یک چند جمله‌ای از **درجه‌ی یک** می‌باشد.

نمودار تابع خطی: نمودار تابع خطی همواره یک خط راست می‌باشد که از مبدأ مختصات می‌گذرد یا دو محور x و y را در دو نقطه قطع می‌کند.



نکته: دامنه و برد تابع خطی همواره برابر $\mathbb{R}$ است.

۳- تابع درجه‌ی دوم (سهمی): شکل کلی (ضابطه) تابع سهمی به صورت $f(x)=ax^{2}+bx+c$ که $(a\neq 0)$ می‌باشند.

تابع سهمی یک چندجمله‌ای از **درجه‌ی دوم** می‌باشد.

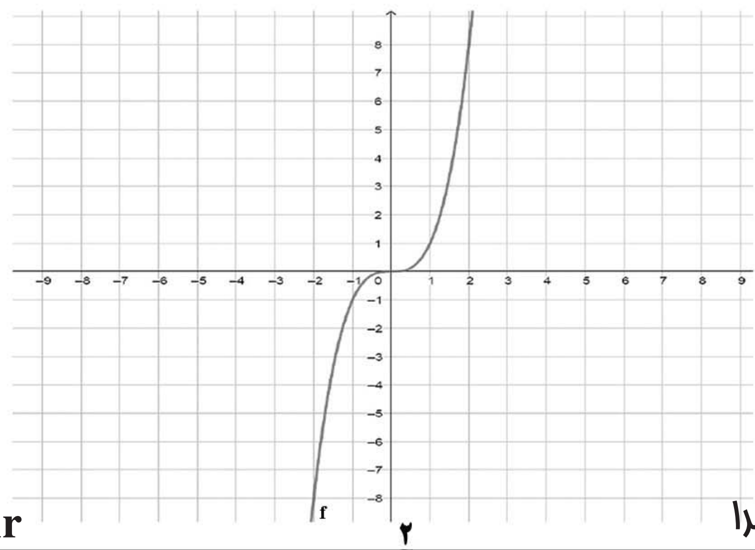
نمودار تابع سهمی: نمودار تابع سهمی به یکی از حالت‌های زیر است.

نکته: دامنه‌ی تابع درجه‌ی دوم (سهمی) همواره برابر $\mathbb{R}$ و برد آن اگر $a>0$ باشد به صورت $\left[-\frac{\Delta}{4a},\ +\infty\right)$ و اگر $a<0$ باشد به صورت $\left(-\infty,\ \frac{-\Delta}{4a}\right]$ می‌باشد.

۴- تابع درجه‌ی سوم (تابع لُر): شکل کلی (ضابطه) تابع درجه‌ی سوم به صورت $y=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ که $(a\neq 0)$ می‌باشد.

تابع درجه‌ی سوم یک چند جمله‌ای از**درجه‌ی سوم** است.

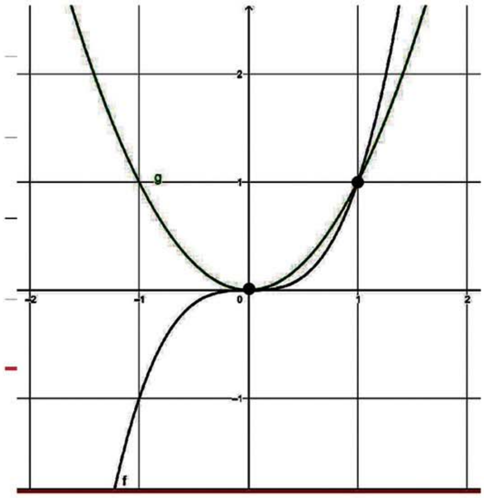
نمودار تابع درجه‌ی سوم: نمودار تابع درجه‌ی سوم $y=x^{3}$ به صورت زیر است.



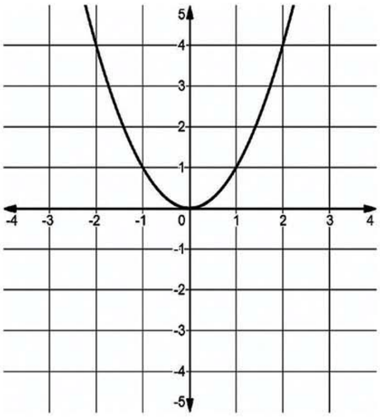
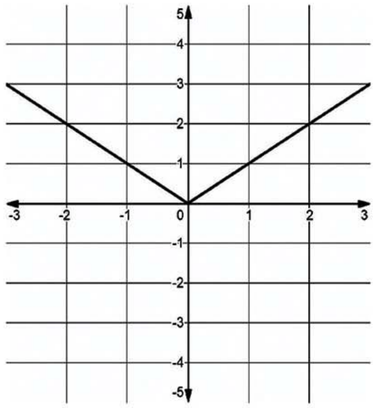
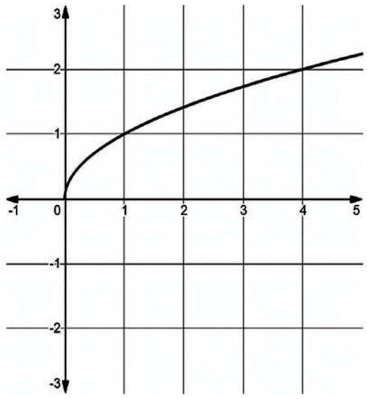
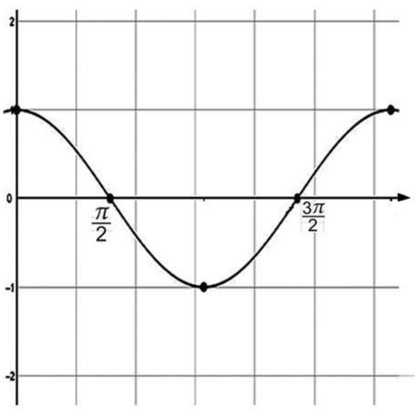
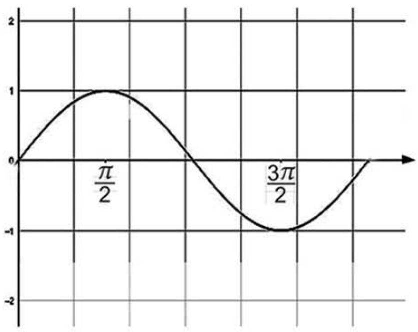
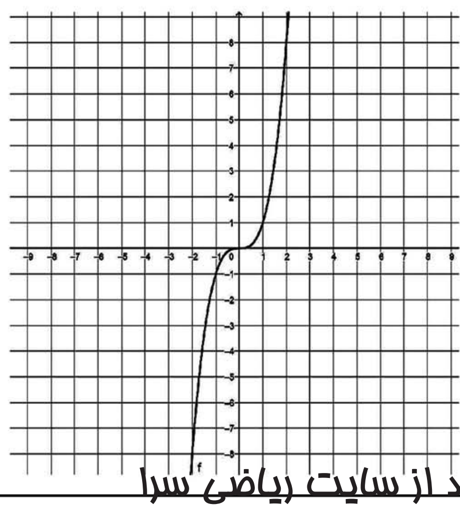
نکته: دامنه و برد تابع درجه‌ی سوم همواره برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال: الف) نمودارهای $f(x)=x^{۲}$ و $f(x)=x^{۳}$ را در یک دستگاه محور مختصات رسم کنید.

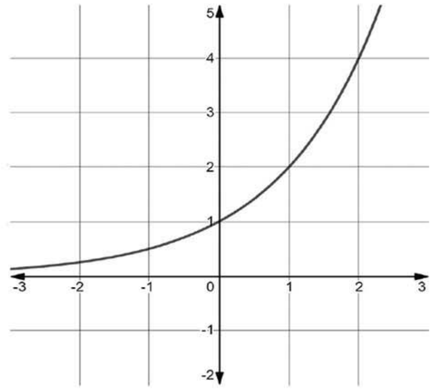
ب) در چه قسمتهایی از نمودارهای رسم شده $x^{۳} > x^{۲}$ است.



یادآوری چند نمودار مهم و پر کاربرد:

۳- تابع درجه دو (سهمی)  $y=x^{۲}$	۲- تابع قدر مطلق  $y=\|x\|$	۱- تابع رادیکالی (ابرو)  $y=\sqrt{x}$
۶- تابع کسینوس $y=\cos x$ 	۵- تابع سینوس $y=\sin x$ 	۴- تابع درجه سه (لُر) $y=x^{۳}$ 

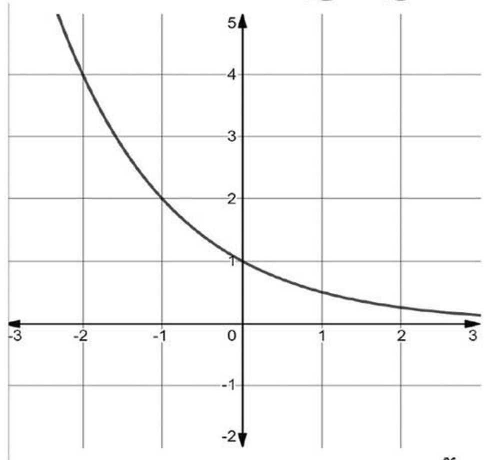
۷- تابع نمایی



$y=a^x$

$a>1$

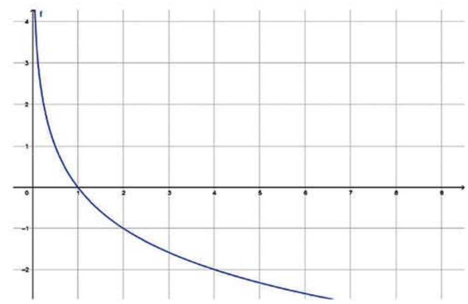
۸- تابع نمایی



$y=a^x$

$0<a<1$

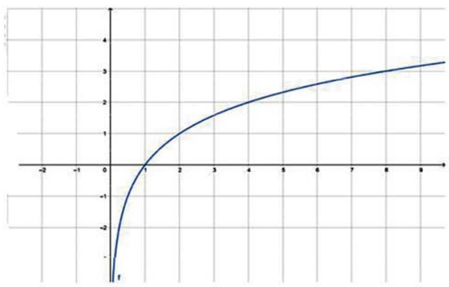
۹- تابع لگاریتمی



$y=\log_a^x$

$0<a<1$

۱۰- تابع لگاریتمی



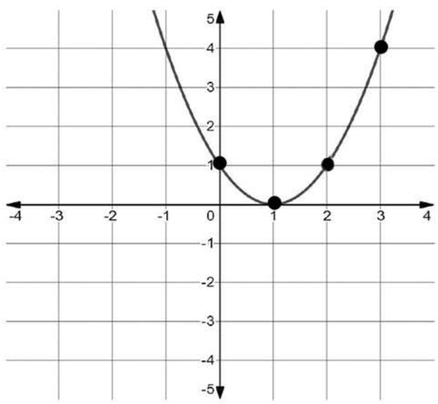
$y=\log_a^x$

$a>1$

رسم نمودار به کمک انتقال:

انتقال طولی یا افقی (انتقال قطاری):

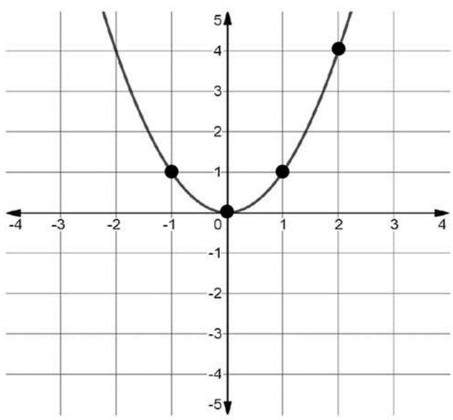
۱- برای رسم نمودار $\underset{a>0}{y=f(x-a)}$ کافی است، نمودار تابع $y=f(x)$ را در **راستای محور طول‌ها، a واحد به راست** انتقال دهیم.



$y=(x-1)^2$

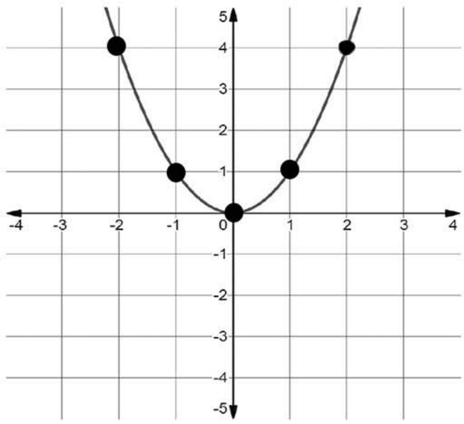
یک واحد به راست

انتقال می دهیم



$y=x^2$

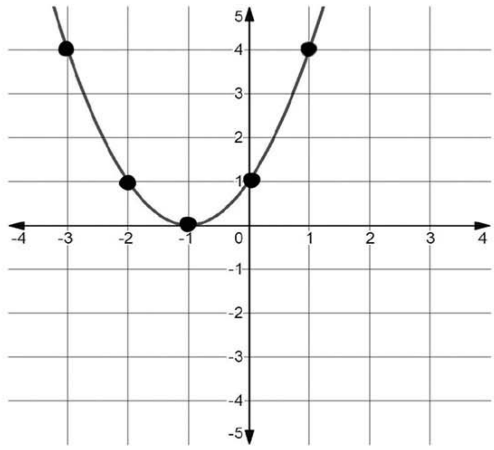
۲- برای رسم نمودار $\underset{a>0}{y=f(x+a)}$ کافی است، نمودار تابع $y=f(x)$ را در **راستای محـور طـول‌هـا، a واحد به چپ** انتقال دهیم.



$y=x^2$

یک واحد به چپ

انتقال می دهیم

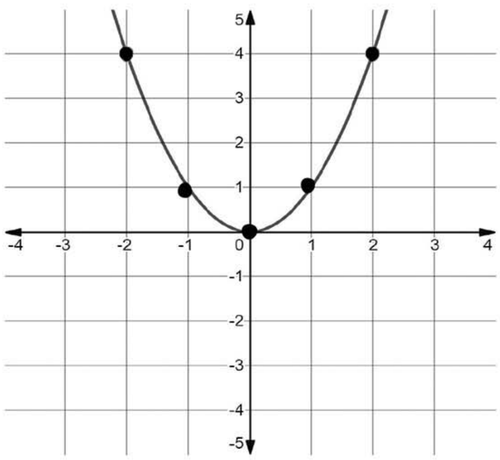


$y=(x+1)^2$

تذکر: در انتقال طولی (افقی) نمودار $\underset{a>0}{y=f(x\pm a)}$، دامنه‌ی تابع ممکن است تغییر کند، اما **برد آن ثابت باقی می‌ماند.**

انتقال عرضی یا عمودی (انتقال آسانسوری)

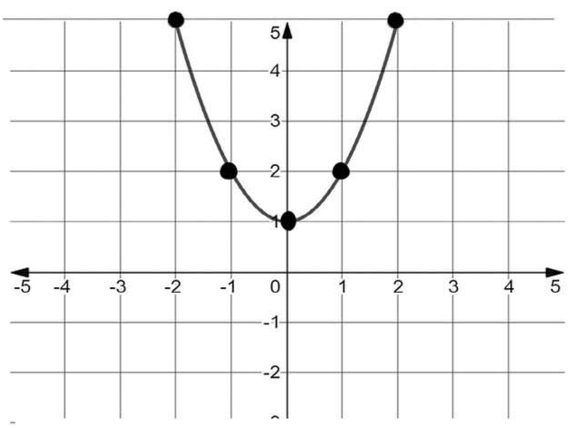
۳- برای رسم نمودار $\underset{a>0}{y=f(x)+a}$ کافی است، نمودار تـابع $y=f(x)$ را **در راستای محـور عرضـها، a واحد به بالا** انتقال دهیم.



$y=x^2$

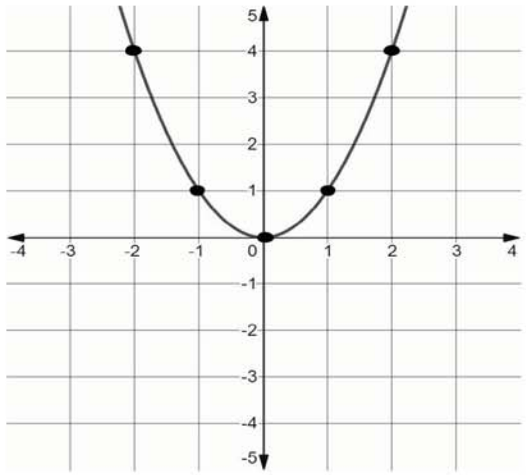
یک واحد به بالا

انتقال می دهیم



$y=x^2+1$

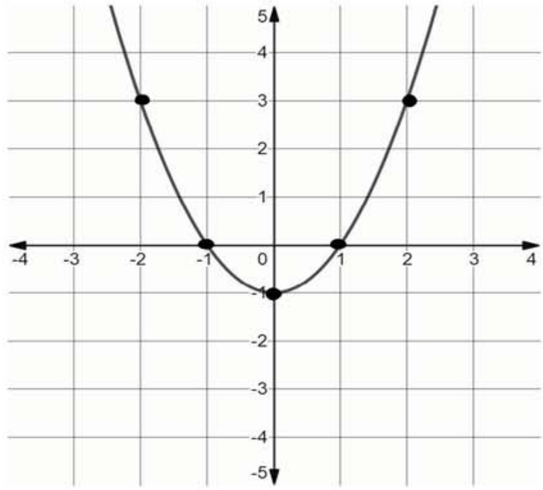
۴- برای رسم نمودار $\underset{a>0}{y=f(x)-a}$ کافی است، نمودار تابع $y=f(x)$ را در **راستای محـور عـرض‌هـا، a واحد به پایین** انتقال دهیم.



$y = x^{۲}$

یک واحد به پایین

انتقال می دهیم



$y = x^{۲} - ۱$

تذکر: در انتقال عرضی (عمودی) نمودار $y = f(x) \pm a$، برد تابع ممکن است تغییر کند، اما **دامنه‌ی تابع ثابت باقی می‌ماند.**

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$ $\qquad x \in [۰ \,,\, ۲\pi]$

۲) $y = \sin x + ۲$ $\qquad x \in [۰ \,,\, ۲\pi]$

۳) $y = \log_{\frac{۱}{۲}}(x + ۲)$

٤) $y = \log_{۲}(x - ۱)$

٥) $y = \cos x - ۱$

٦) $y = \log_{۲}^{x} \quad + ۲$

$۷)\ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) + ۱ \qquad x \in [۰ , ۲\pi]$

$۸)\ y = ۲^{x-۱} + ۲$

انقباض و انبساط طولی (افقی):

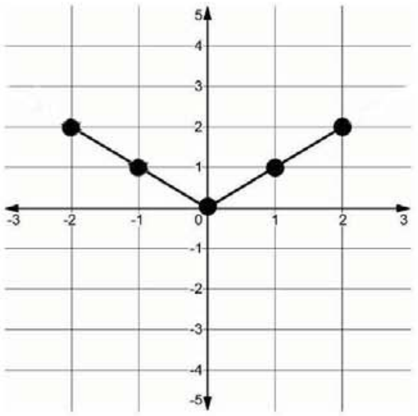
رسم نمودار $y = f(kx)$:

نکته: برای رسم نمودار $y = f(kx)$ کافی **است طول تمام نقاط را در** $\frac{۱}{k}$ **ضرب کنیم.**

(دامنه ی تابع $\frac{۱}{k}$ **برابر می شود.)**

رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ **با شرط** $k>۱$:

در این حالت نمودار $y=f(x)$ را در **راستای محور x ها** با ضریب $\frac{۱}{k}$ جمع (فشرده) می‌شود (انقباض طولی)



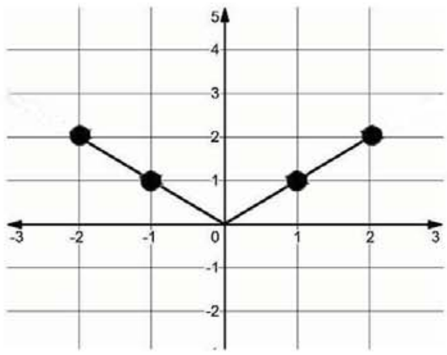
طول نقاط را $\frac{۱}{۲}$ برابر می کنیم
نصف می کنیم

$y=|x|$

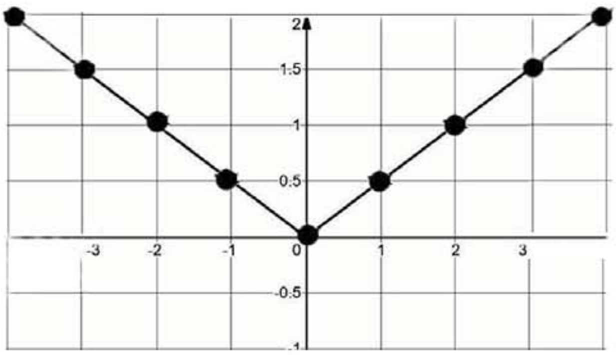
$y=|2x|$

رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ **با شرط** $۰<k<۱$:

در این حالت نمودار $y=f(x)$ را **در راستای محور x ها** با ضریب $\frac{۱}{k}$ باز (کشیده) می‌شود. (انبساط افقی)



طول نقاط را در ۲ ضرب می کنیم
(۲ برابر می کنیم)



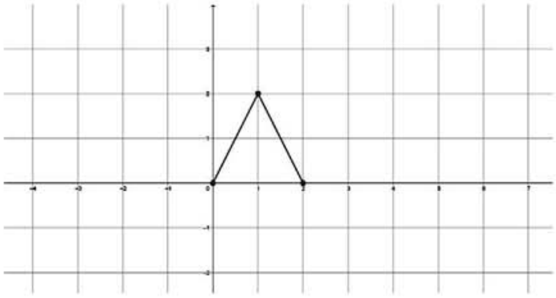
$y=|x|$

$y=\left|\frac{۱}{۲}x\right|$

تذکر: اگر $k<۰$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\frac{۱}{|k|}$ به طور افقی **منسبط** یا **منقبض** می‌شود.

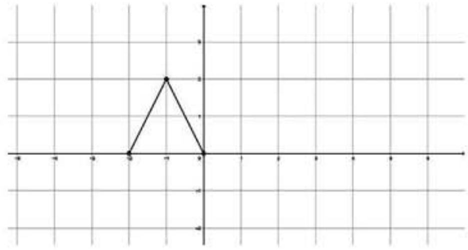
حالت خاص $k=-۱$:

اگر $k=-۱$ باشد، برای رسم نمودار $y=f(-x)$ کافی است، **طول تمام نقاط را در ۱- ضرب کنیم**. به عبارتی نمودار $y=f(x)$ را **نسبت به محور yها قرینه کنیم**.



$y=f(x)$

نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم

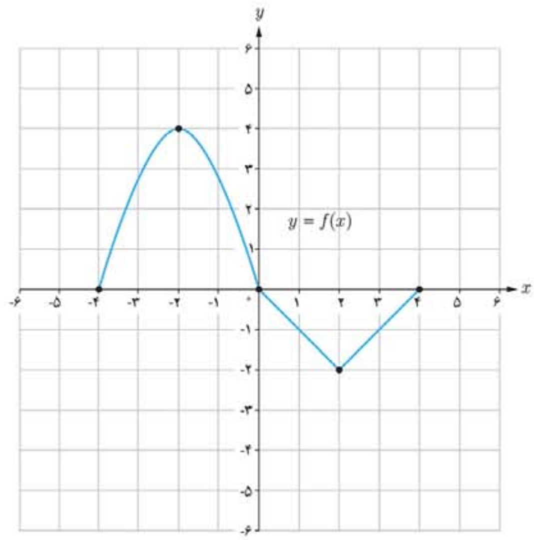


$y=f(-x)$

تذکر: در انبساط و انقباض طولی تابع $y=f(kx)$ ممکن است دامنه‌ی تابع تغییر کند، **اما برد تابع ثابت باقی می‌ماند.**

مثال: نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-۴\ ,\ ۴]$ به صورت زیر است. نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

x	$f(x)$
−۴	۰
−۲	۴
۰	۰
۲	−۲
۴	۰

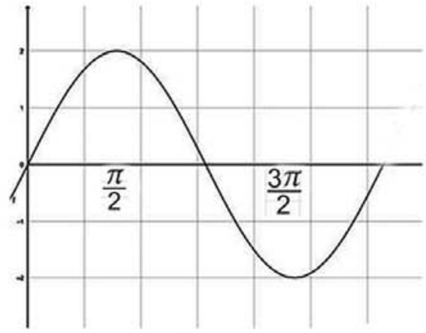


انبساط و انقباض عرضی (عمودی):

نکته: برای رسم نمودار $y=kf(x)$ کافی است **عرض تمام نقاط را در k ضرب کنیم. (برد تابع k برابر می‌شود.)**

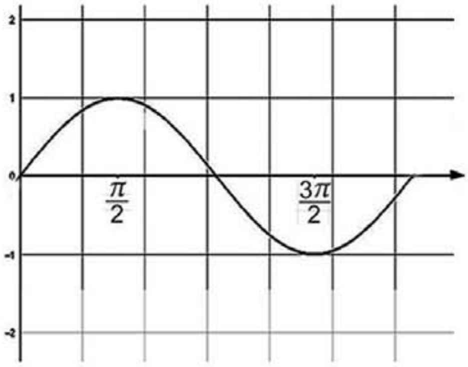
رسم نمودار $y=kf(x)$ **با شرط** $k>1$:

در این حالت نمودار $y=f(x)$ در **راستای محور y ها** با ضریب k **باز** (کشیده) می‌شود. (انبساط عرضی)



$y=2\sin x$

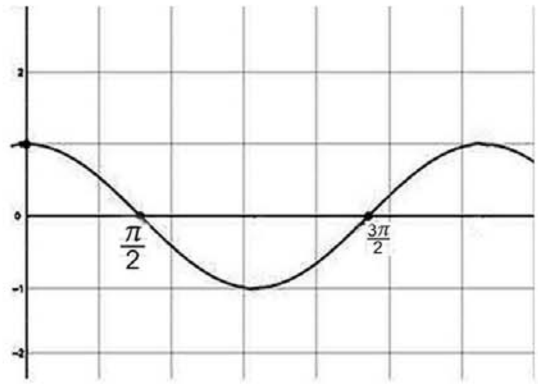
عرض نقاط را در ۲ ضرب می کنیم (۲ برابر می کنیم)



$y=\sin x$

رسم نمودار $y=kf(x)$ **با شرط** $0<k<1$:

در این حالت نمودار $y=f(x)$ در **راستای محور y ها**، با ضریب k **جمع** (فشرده) می‌شود. (انقباض عرضی).



$y=\cos x$

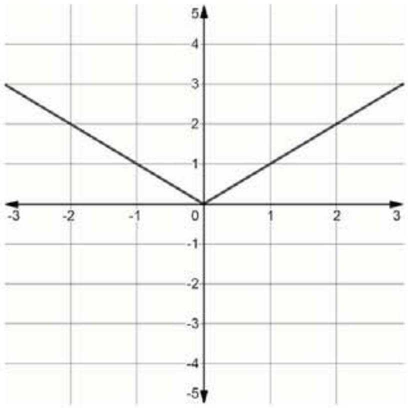
عرض نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم (نصف می کنیم)

$y=\frac{1}{2}\cos x$

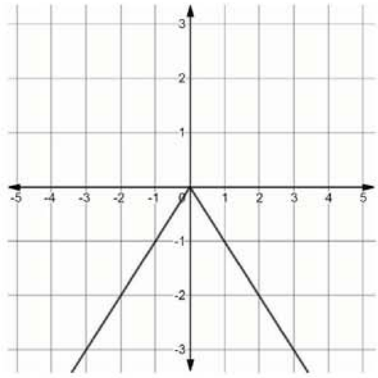
تذکر: اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار f نسبت به **محور x ها قرینه** می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی **منبسط** یا **منقبض** می‌شود.

حالت خاص $k = -1$:

اگر $k = -1$ باشد، برای رسم نمودار $y = -f(x)$ کافی است، **عرض تمام نقاط را در ۱- ضرب کنیم**. به عبارتی نمودار $y = f(x)$ را نسبت به **محور x ها قرینه کنیم**.



نسبت به محور x ها قرینه می کنیم



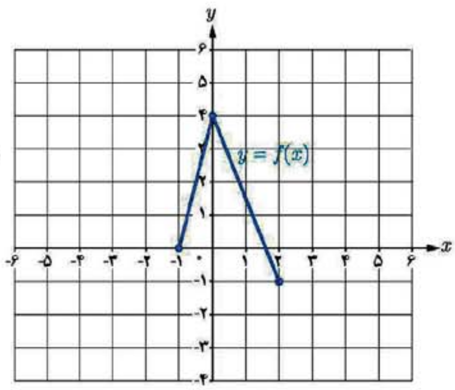
$y = |x|$

$y = -|x|$

تذکر: در انبساط و انقباض عرضی تابع $y = kf(x)$ ممکن است برد تابع تغییر کند، اما **دامنه‌ی تابع ثابت باقی می‌ماند.**

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است، نمودار تابع‌های $y = ۲f(x)$ و $y = \frac{۱}{۲}f(x)$ را رسم کنید.

x	$f(x)$
۱-	۰
۰	۴
۲	۱-



مثال: به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y=(x-۱)^{۳}+۲$

ب) $y=(x-۲)^{۳}$

پ) $y=-x^{۳}+۱$

ت) $y=(x+۱)^{۳}-۱$

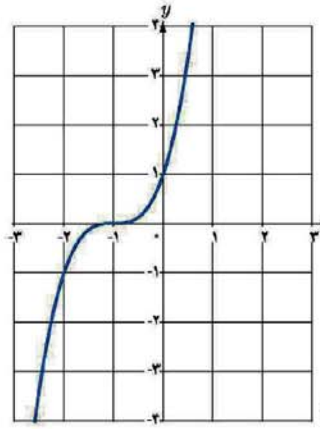
ث) $y=-x^{۳}$

ج) $(x+۱)^{۳}$

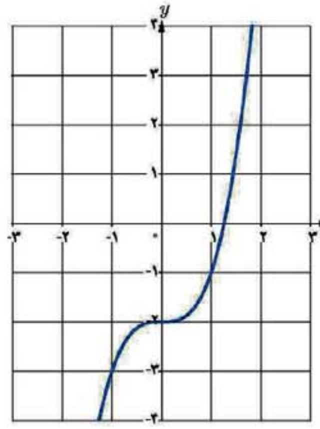
ج) $y=x^{۳}+۱$

ح) $y=-x^{۳}-۱$

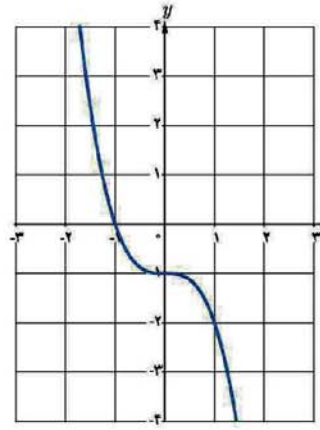
خ) $y=x^{۳}-۲$



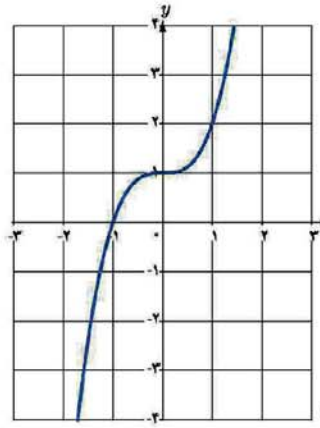
(۱)



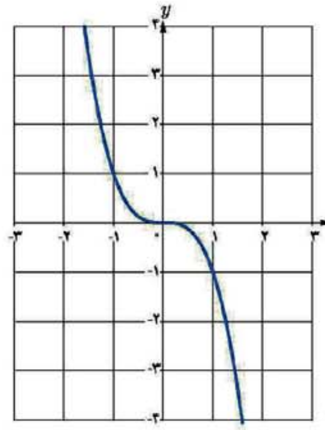
(۲)



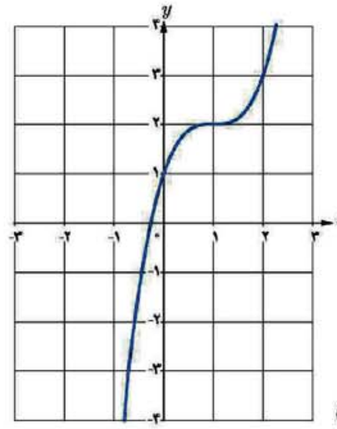
(۳)



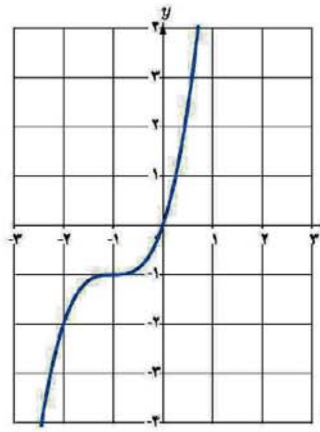
(۴)



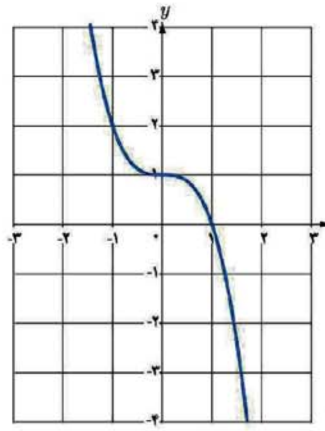
(۵)



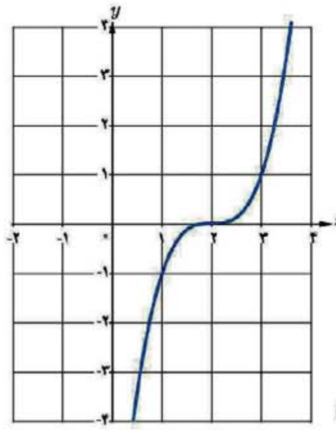
(۶)



(۷)



(۸)

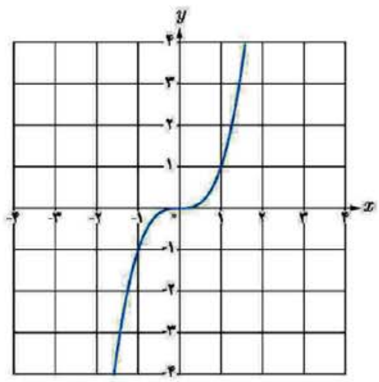


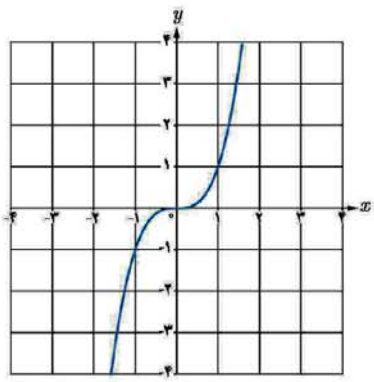
(۹)

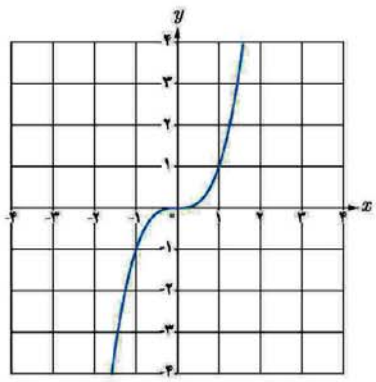
مثال: نمودار توابع $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{-x}$ را در یک دستگاه محـور مختـصات رسـم کنید.

مثال:با استفاده از نمودار تابع ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

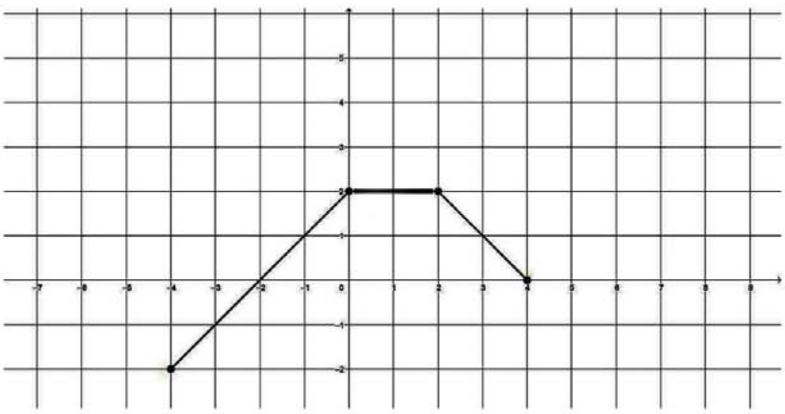
ج) $y=-(x-۲)^۳$ ب) $y=(x+۲)^۳$ الف) $y=-x^۳-۲$







مثال: با استفاده از نمودار زیر، نمودار توابع داده شده را رسم کنید.



ب) $y=-f(-x)+۲$ الف) $y=f(-x)$

ت) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$ پ) $y=f(۲x)$

ث) $y = f(x - ۱)$

ج) $y = ۲f(x - ۱) - ۳$

چ) $y = f(\frac{۱}{۲}x)$

ح) $y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$

خ) $y = f(۳ - x)$

د) $y = f(۲x - ۱)$

ذ) $y = -۲f(x + ۱)$

ر) $y = f(-x + ۱)$

رسم نمودار $y=|f(x)|$:

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

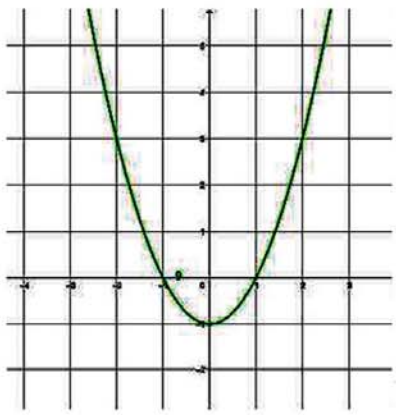
۱) نمودار $y=f(x)$ را (بدون در نظر گرفتن علامت قدر مطلق) رسم می‌کنیم.

۲) آن قسمت از نمودار $y=f(x)$ که در **زیر محور x ها** اسـت را **نسبت به محور x ها قرینه کـرده** و در **بالای محور x ها** رسم می‌کنیم.

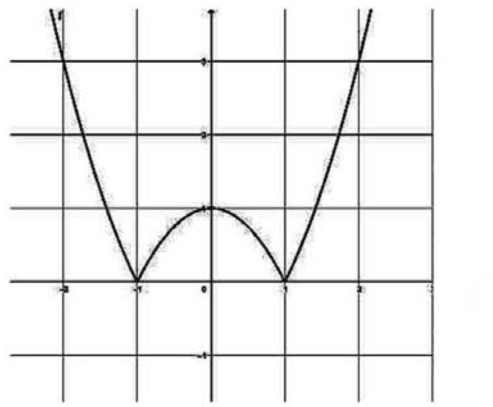
۳) بعد از مرحله‌ی ۲ قسمت‌هایی که زیر محور x ها است را پاک (حذف) می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=|x^{۲}-۱|$



قرینه y های منفی‌را در بالای محور x ها رسم می کنیم



ب) $y=|\sin x|$ $\quad x\in[۰\ ,\ ۲\pi]$

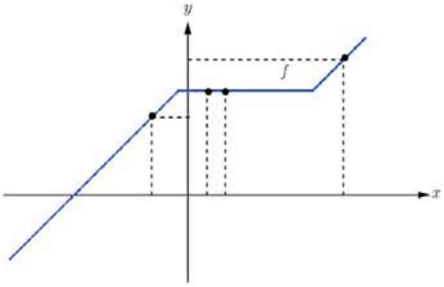
پ) $y=|\cos x|-۱$ $\quad x\in[۰\ ,\ ۲\pi]$

ت) $y=||x|-۲|$

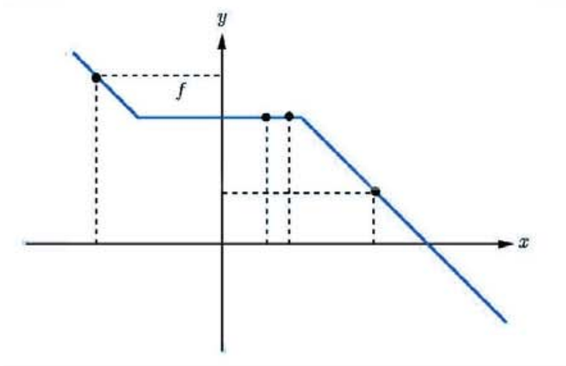
ث) $y=-||x|-۱|$

توابع صعودی و نزولی:

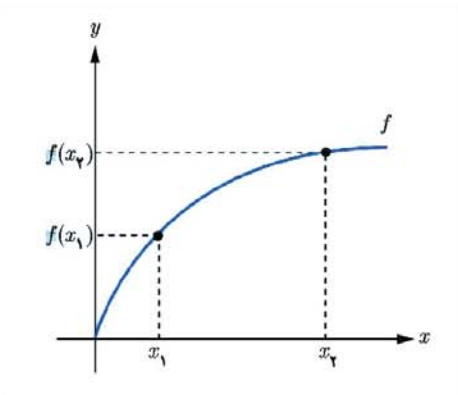
تابع صعودی: اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه‌ی A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



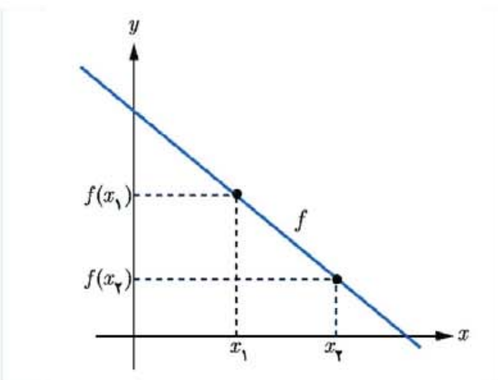
تابع نزولی: اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه‌ی A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) \ge f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی: اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه‌ی A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

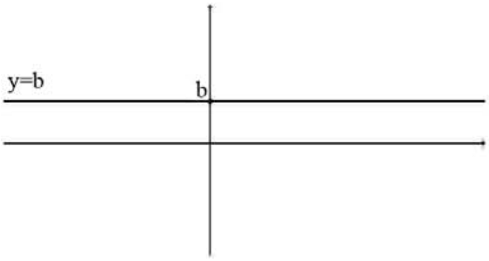


تابع اکیداً نزولی: اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه‌ی A $(A \subseteq D_f)$ که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی گویند.

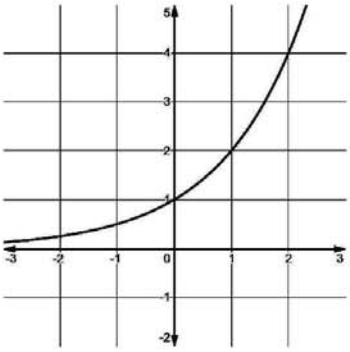


تابع ثابت: تابع f را در یک بازه ثابت گویند. هرگاه برای **تمام مقادیر x** در این بازه، **مقدار** f **ثابت** باشد.

نکته: تابع های ثابت **هم تابع صعودی و هم تابع نزولی** هستند.



تابع اکیداً یکنوا: به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ، تابع اکیداً یکنوا گویند.



تابع یکنوا : به تابعی که صعود یا نزولی یا ثابت باشد، تابع یکنوا می‌گویند.

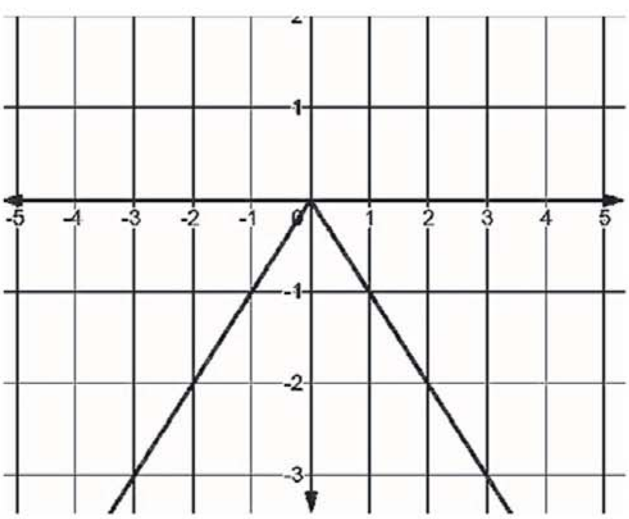
نکته: توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. اما هر تابع یکنوا، تابع اکیداً یکنوا نیست.

نکته: هر تابع اکیداً صعودی، تابع صعودی است. اما هر تابع صعودی، تابع اکیداً صعودی نیست.

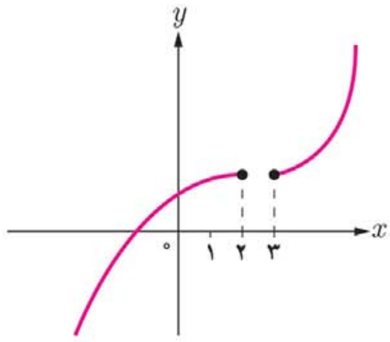
نکته: هر تابع اکیداً نزولی، تابع نزولی است. اما هر تابع نزولی، تابع اکیداً نزولی نیست.

تذکر: ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه‌ی دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

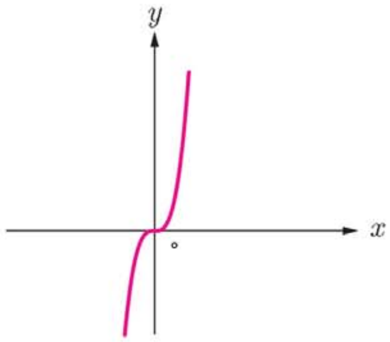
مثل تابع $y=-|x|$ که در بازه‌ی $(-\infty,0]$ یک تابع اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[0\,,\,+\infty)$ یک تابع اکیداً نزولی است. اما **در کل دامنه‌اش (R) نه نزولی است نه صعودی.**



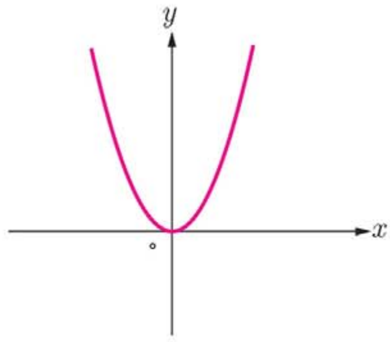
مثال: توابع زیر در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌های اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی ثابت هستند.



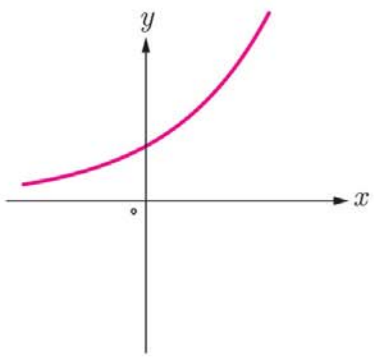
(الف)



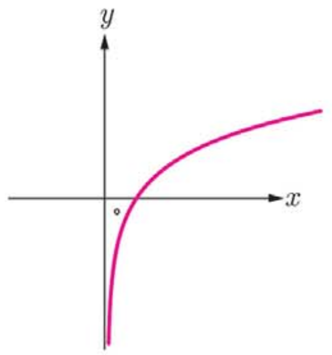
(ب)



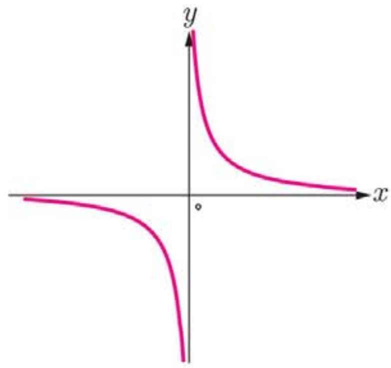
(پ)



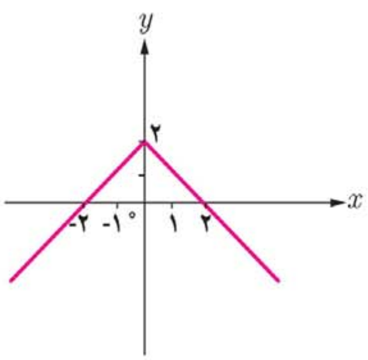
(ت)



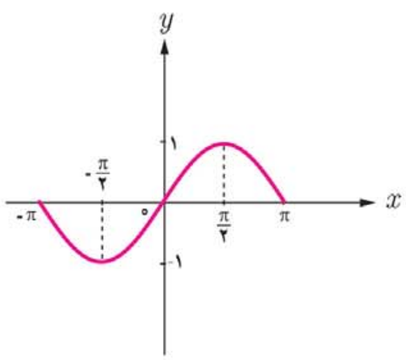
(ث)



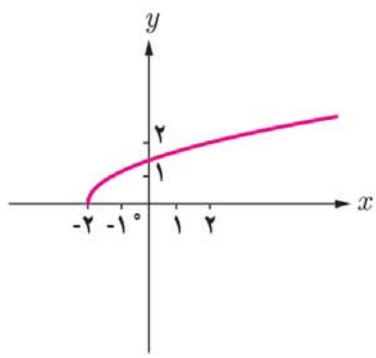
(ج)



(چ)



(ح)



(خ)

نکته: تابع f یک به یک است هرگاه هر **خط افقی** نمودار تابع را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.

نکته: توابع **اکیداً یکنوا** (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) **همواره تابع یک به یک** می‌باشند.

مثال: با رسم نمودار توابع زیر مشخص کنید این توابع در چه فاصله‌هایی صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی هستند؟

الف) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ $\qquad D_f=[۰\ ,\ ۲\pi]$

ب) $y=x+|x|$

پ) $y=x^{۲}|x|$

ت) $y=۲^{x}-۲$

ث) $y = -\log_{۲}^{x} + ۲$

ج) $y = \left(x + ۲\right)^{۳} - ۲$

چ) $y = \left(x - ۱\right)^{۳} - ۱$

ح) $f(x) = \begin{cases} -۲x - ۳ & x < -٤ \\ ۳ & -٤ \leq x < ۲ \\ ۳x - ۲ & x \geq ۲ \end{cases}$