



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

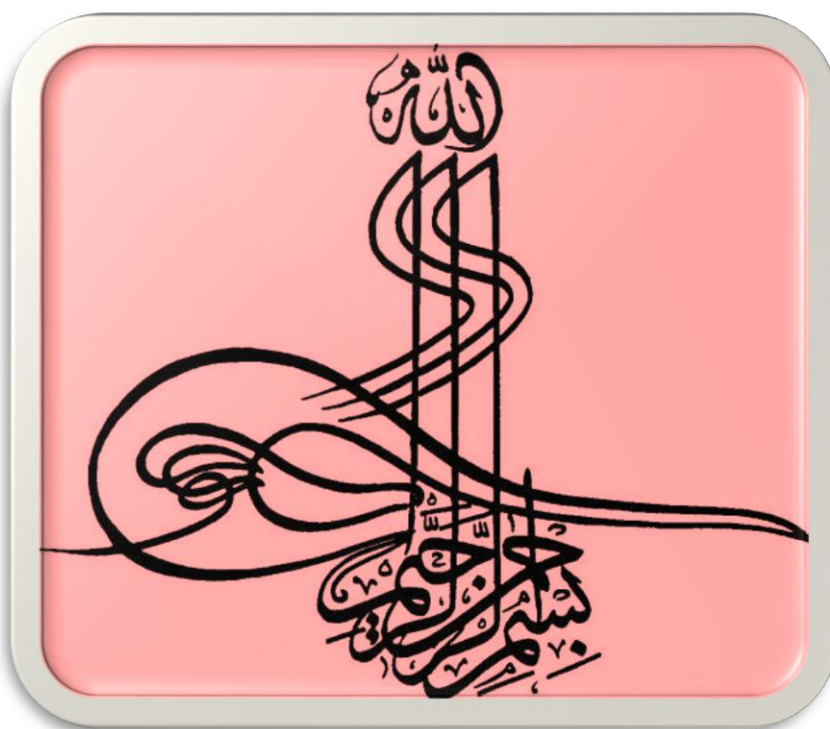
و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)



فصل سوم ریاضی پایه دهم

رشته های تجربی و ریاضی و فیزیک

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی



پاسخ کاملا تشریحی



تمرین های برای آمادگی



مؤلف:

حبیب هاشمی

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل سوم کتاب درسی ریاضی پایه دهم رشته های تجربی و ریاضی و فیزیک نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
 - ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
 - ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
 - ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
 - ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
 - ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
 - ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
 - ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.
- در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس ۴ بخش ۱: اتحادها

اتحاد: اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، حاصل یکسانی داشته باشند، تساوی بین آن ها را اتحاد می نامند.

مثال: نشان دهید تساوی $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یک اتحاد است.

حل) باید نشان دهیم به ازای هر مقدار برای a و b برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $b =$

$a = \frac{1}{5}$ و ۳ اختیار شود، داریم:

$$\left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

تمرین: نشان دهید هر یک از تساوی های زیر یک اتحاد هستند.

الف) $a(a - b) = a^2 - ab$

ب) $b(b + 1) = b^2 + b$

ج) $a \times a = a^2$

برخی از اتحادهای جبری مهم:

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(الف) اتحاد مربع دو جمله‌ای (پراکارد)} \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && \text{(ب) اتحاد مکعب دو جمله‌ای} \end{aligned} \right\} \text{توان دارها}$$

$$\left. \begin{aligned} (a-b)(a+b) &= (a)^2 - (b)^2 && \text{(پ) اتحاد مزدوج (پراکارد)} \\ (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= a^3 \pm b^3 && \text{(ت) چاق و لاغر} \\ (a+x)(a+y) &= (a)^2 + (x+y)(a) + x \cdot y && \text{(ث) جمله مشترک} \end{aligned} \right\} \text{ضرب دو پراکنز}$$

کاربرد اتحادها

۱: محاسبه سریع ضرب دو پراکنز یا محاسبه سریع یک پراکنز که به توان ۲ یا ۳ رسیده باشد. (البته با داشتن شرایط

خاص)

۲: تجزیه ی چند جمله ای ها

الف: اتحاد مربع دو جمله ای: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اثبات)

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(\underbrace{\text{دومی}} + \underbrace{\text{اولی}} \right)^2 = \left(\text{اولی} \right)^2 + \text{دو برابر اولی ضربدر دومی} + \left(\text{دومی} \right)^2$$

اگر در رابطه قبل به جای b , $-b$ قرار دهیم، به دست می آوریم:

$$= a^2 - 2ab + b^2 (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$۱) \left(\underbrace{x}_{\text{دومی اولی}} + \underbrace{3}_{\text{دومی اولی}} \right)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$۲) \left(\underbrace{3x}_{\text{دومی اولی}} - \underbrace{4}_{\text{دومی اولی}} \right)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(-4) + (-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$۳) \left(\underbrace{-x}_{\text{دومی اولی}} + \underbrace{4}_{\text{دومی اولی}} \right)^2 = (-x)^2 + 2(-x)(4) + (4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$۴) \left(\underbrace{-x}_{\text{دومی اولی}} - \underbrace{y}_{\text{دومی اولی}} \right)^2 = (-x)^2 + 2(-x)(-y) + (-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$۵) \left(\underbrace{a^3}_{\text{دومی اولی}} - \underbrace{2a^2}_{\text{دومی اولی}} \right)^2 = (a^3)^2 + 2(a^3)(-2a^2) + (-2a^2)^2 = a^6 - 4a^5 + 4a^4$$

$$۶) (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(-\sqrt{3}) + (-\sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$۷) (1 - \sqrt{2})^2 = 1^2 + 2(1)(-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$۸) (\sqrt{3} - x)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})(-x) + (-x)^2 = 3 - 2\sqrt{3}x + x^2$$

$$۹) \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{5}y \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 2\left(-\frac{1}{4} \right)\left(-\frac{2}{5}y \right) + \left(-\frac{2}{5}y \right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{5}y + \frac{4}{25}y^2$$

$$۱۰) (3x - \sqrt{2})^2 = (3x)^2 + 2(3x)(-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})^2 = 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2$$

$$۱۱) (۲x + y)^۲ = (۲x)^۲ + ۲(۲x)(y) + y^۲ = ۴x^۲ + ۴xy + y^۲$$

$$۱۲) (a^۲ - b^۲)^۲ = (a^۲)^۲ - ۲a^۲b^۲ + (b^۲)^۲ = a^۴ - ۲a^۲b^۲ + b^۴$$

$$۱۳) \left(-\frac{۱}{۳}a^۲ + \frac{۲}{۵}b^۲\right)^۲ = \frac{۱}{۹}a^۴ + \frac{۴}{۱۵}a^۲b^۲ + \frac{۴}{۲۵}b^۴$$

مثال: در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید تا تساوی برقرار باشد.

الف) $(\dots + ۲x)^۲ = ۱ + \dots + ۴x^۲$

ب) $(۲x - \dots)^۲ = \dots - ۱۲x + \dots$

پ) $(۳a - \dots)^۲ = ۹a^۲ - ۶ab + \dots$

حل)

الف)

$$(۱ + ۲x)^۲ = ۱ + ۴x + ۴x^۲$$

ب)

$$(۲x - ۳)^۲ = ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$

پ)

$$(۳a - b)^۲ = ۹a^۲ - ۶ab + b^۲$$

ب) اتحاد مکعب دو جمله ای

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اثبات:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

با جمع جملات متشابه در طرف دوم، داریم:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\left(\underbrace{\text{اولی}} + \underbrace{\text{دومی}} \right)^3 = \left(\text{اولی} \right)^3 + \text{سه برابر اولی ضربدر مربع دومی} + \text{سه برابر مربع اولی ضربدر دومی} + \left(\text{دومی} \right)^3$$

$$۱) \left(4x + 5 \right)^3 = (4x)^3 + 3(4x)^2(5) + 3(4x)(5)^2 + (5)^3 = 64x^3 + 48x^2 + 30x + 125$$

$$۲) \left(2x - 4 \right)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-4) + 3(2x)(-4)^2 + (-4)^3 = 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64$$

$$۳) \left(-3x - 2 \right)^3 = (-3x)^3 + 3(-3x)^2(-2) + 3(-3x)(-2)^2 + (-2)^3 \\ = -27x^3 - 54x^2 - 36x - 8$$

$$۴) (x + 2)^3 = x^3 + 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$۵) (x - 4)^3 = x^3 + 3(x)^2(-4) + 3(x)(-4)^2 + (-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

$$\begin{aligned} ۶) \quad (-۲x - ۴y)^r &= (-۲x)^r + r(-۲x)^{r-1}(-۴y) + r(-۲x)(-۴y)^{r-1} + (-۴y)^r \\ &= -۸x^r - ۴۸x^{r-1}y - ۹۶xy^{r-1} - ۶۴y^r \end{aligned}$$

$$۷) \quad (۱ - x)^r = ۱^r + r(۱)^{r-1}(-x) + r(۱)(-x)^{r-1} + (-x)^r = ۱ - rx + rx^{r-1} - x^r$$

$$\begin{aligned} ۸) \quad (\sqrt[r]{x} - \sqrt[r]{ry})^r &= (\sqrt[r]{x})^r - r(\sqrt[r]{x})^{r-1}(\sqrt[r]{ry}) + r(\sqrt[r]{x})(\sqrt[r]{ry})^{r-1} - (\sqrt[r]{ry})^r \\ &= x - r\sqrt[r]{rx^{r-1}y} + r\sqrt[r]{rxy^{r-1}} - ry \end{aligned}$$

$$۹) (x + \delta)^r = x^r + rx^{r-1}(\delta) + r(x)(\delta^2) + \delta^r = x^r + r\delta x^{r-1} + r\delta^2 x + \delta^r$$

$$۱۰) \quad (ra - ۱)^r = (ra)^r - r(ra)^{r-1} + r(ra) - ۱ = \lambda a^r - r\lambda a^{r-1} + ra - ۱$$

$$۱۱) \quad \left(\frac{1}{r} - rx\right)^r = \left(\frac{1}{r}\right)^r - r\left(\frac{1}{r}\right)^{r-1}(rx) + r\left(\frac{1}{r}\right)(rx)^{r-1} - (rx)^r = \frac{1}{\lambda} - \frac{r}{r}x + \frac{r}{r}x^{r-1} - rx^r$$

$$\begin{aligned} ۱۲) \quad (rx^r - \delta y)^r (rx^r)^r &= r(rx^r)^{r-1}(\delta y) + r(rx^r)(\delta y)^{r-1} - (\delta y)^r \\ &= rrx^{r^2} - r\delta x^{r-1}y + r\delta x^r y^{r-1} - r\delta y^r \end{aligned}$$

$$۱۳) \quad (x^r - ۱)^r = (x^r)^r - r(x^r)^{r-1}(۱) + r(۱)(x^r) - (۱)^r = x^{r^2} - rx^{r^2-1} + rx^r - ۱$$

$$۱۴) \quad (rx + ۱)^r = (rx)^r + r(rx)^{r-1} \times (۱) + r(۱)^{r-1}(rx) + ۱^r = \lambda x^r + r\lambda x^{r-1} + rx + ۱$$

$$۱۵) \quad (x - ry)^r = x^r - rx^{r-1}(ry) + r(x)(ry)^{r-1} - (ry)^r = x^r - rrx^{r-1}y + rxy^{r-1} - ry^r$$

پ: اتحاد مزدوج: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

اثبات:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$۱) (x - ۵)(x + ۵) = x^2 - ۵^2 = x^2 - ۲۵$$

$$۲) (۵x - ۲)(۵x + ۲) = (۵x)^2 - (۲)^2 = ۲۵x^2 - ۴$$

$$۳) (x^2 - y^3)(x^2 + y^3) = (x^2)^2 - (y^3)^2 = x^4 - y^6$$

$$۴) \left(\frac{1}{۵}x + ۲y\right)\left(\frac{1}{۵}x - ۲y\right) = \left(\frac{1}{۵}x\right)^2 - (۲y)^2 = \frac{1}{۲۵}x^2 - ۴y^2$$

$$۵) (\sqrt{۳}x + \sqrt{۲}y)(\sqrt{۳}x - \sqrt{۲}y) = (\sqrt{۳}x)^2 - (\sqrt{۲}y)^2 = ۳x^2 - ۲y^2$$

$$۶) (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + \sqrt{۲}) = (\sqrt{۳})^2 - (\sqrt{۲})^2 = ۳ - ۲ = ۱$$

$$۷) (۵x - ۴)(۴ + ۵x) = (۵x)^2 - (۴)^2 = ۲۵x^2 - ۱۶$$

$$۸) (۲\sqrt{۳} - ۵)(۲\sqrt{۳} + ۵) = (۲\sqrt{۳})^2 - (۵)^2 = ۴(۳) - ۲۵ = ۱۲ - ۲۵ = -۱۳$$

$$۹) \left(\frac{1}{۲۵}x - ۲y^۳\right)\left(\frac{1}{۲۵}x + ۲y^۳\right) = \left(\frac{1}{۲۵}x\right)^2 - (۲y)^۳ = \frac{1}{۶۲۵}x^2 - ۸y^۳$$

$$۱۰) \left(۱ - \frac{۲}{۵}\right)\left(۱ + \frac{۲}{۵}\right) = ۱^2 - \left(\frac{۲}{۵}\right)^2 = ۱ - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۱}{۲۵}$$

$$۱۱) (۴ + ۲y^۳)(۲y^۳ - ۴) = (۲y^۳)^2 - (۴)^2 = ۸y^۶ - ۱۶$$

دقت کنیم: جمله با علامت یکسان را اول و جمله با علامت قرینه را دوم می نویسیم

$$۱۲) (\sqrt{۵} + ۳y)(۳y - \sqrt{۵}) = (۳y)^2 - (\sqrt{۵})^2 = ۹y^2 - ۵$$

$$۱۳) (-\sqrt{۵} - ۳y)(۳y - \sqrt{۵}) = (-\sqrt{۵})^2 - (۳y)^2 = ۵ - ۹y^2$$

ت : اتحاد مجموع و تفاضل مکعب های دو جمله (اتحاد چاق و لاغر) :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

دقت کنیم: علامت بین جملات جواب، موافق علامت بین جملات پرانتز کوچک (لاغر) است.

دقت کنیم: علامت بین جملات پرانتز کوچک و علامت جمله دوم پرانتز بزرگ، مخالف همدیگرند.

اثبات) اتحاد مجموع مکعب های دو جمله

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$

با جمع جملات متشابه در طرف دوم، داریم :

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

به طور مشابه اتحاد تفاضل مکعب های دو جمله اثبات می شود.

$$۱) (x - ۲)(x^2 + ۲x + ۴) = x^3 - ۲^3 = x^3 - ۸$$

$$۲) (x + ۳)(x^2 - ۳x + ۹) = x^3 + ۳^3 = x^3 + ۲۷$$

$$۳) (x - ۱)(x^2 + x + ۱) = x^3 - ۱^3 = x^3 - ۱$$

$$۴) (x^2 - ۳)(x^2 + ۳x^2 + ۹) = (x^2)^3 - ۳^3 = x^6 - ۲۷$$

$$۵) (x + ۲y)(x^2 - ۲xy + ۴y^2) = x^3 + (۲y)^3 = x^3 + ۸y^3$$

$$۶) (۶x + ۰/۱)(۳۶x^2 - ۰/۶x + ۰/۰۱) = (۶x)^3 + (۰/۱)^3 = ۲۱۶x^3 + ۰/۰۰۱$$

$$۷) (۲xy - ۱)(۴x^2y^2 + ۲xy + ۱) = (۲xy)^3 - (۱)^3 = ۸x^3y^3 - ۱$$

ث : اتحاد جمله مشترک

$$(a + x)(a + y) = a^2 + (x + y)a + xy$$

اثبات

$$(a + x)(a + y) = a^2 + ay + ax + xy = a^2 + (x + y)a + xy$$

$$۱) (x + ۵)(x + ۴) = x^2 + (۵ + ۴)x + ۵ \times ۴ = x^2 + 9x + ۲۰$$

$$۲) (x - ۳)(x + ۷) = x^2 + (-۳ + ۷)x + (-۳)(۷) = x^2 + ۴x - ۲۱$$

$$۳) (x - ۳)(x - ۵) = x^2 + (-۳ + (-۵))x + (-۳)(-۵) = x^2 - ۸x + ۱۵$$

$$۴) (x - ۱)(x + ۲) = x^2 + (-۱ + ۲)x + (-۱)(۲) = x^2 + ۱x - ۲$$

$$۵) (۲x - ۴)(۲x + ۵) = (۲x)^2 + (-۴ + ۵)(۲x) + (-۴)(۵) = 4x^2 + ۲x - ۲۰$$

$$۶) (۴x - ۷)(۴x + ۱) = (۴x)^2 + (-۷ + ۱)(۴x) + (-۷)(۱) = ۱۶x^2 - ۲۴x - ۷$$

$$۷) (۳x - ۱)(۳x + ۲) = (۳x)^2 + (-۱ + ۲)(۳x) + (-۱)(۲) = 9x^2 + ۳x - ۲$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

پ. $(x^3 - 3y^2)^2$

ب. $(4xy + 3)^2$

الف. $(2x - 1)^2$

چ. $(x + 5y^2)(x - 5y^2)$

ج. $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

ت. $(2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$

د. $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 5)$

خ. $(x^2 + y)(x^2 - 3y)$

ح. $(x + 2)^2(x - 2)^2$

ز. $(5x - 1)^3$

ر. $(4x + y^2)^3$

ذ. $(3x + 2)^3$

ص. $(2y + 5)^3(2y - 5)^3$

ش. $(5xy + 3z)^3$

س. $(x^2 - 1)^3$

ض. $(x^2 - 1)(x^4 + x + 1)$

(حل)

$$\text{الف) } (2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\text{ب) } (4xy + 3)^2 = (4xy)^2 + 2(4xy)(3) + (3)^2 = 16x^2y^2 + 24xy + 9$$

$$\text{پ) } (x^3 - 3y^2)^2 = (x^3)^2 - 2(x^3)(3y^2) + (3y^2)^2 = x^6 - 6x^3y^2 + 9y^4$$

$$\text{ت) } (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2(2\sqrt{2})(\sqrt{5}) + (\sqrt{5})^2 = 8 + 4\sqrt{10} + 5 = 13 + 4\sqrt{10}$$

$$\text{ج) } (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x^2)^2 - (1)^2 = x^4 - 1$$

$$\text{چ) } (x + 5y^2)(x - 5y^2) = x^2 - (5y^2)^2 = x^2 - 25y^4$$

$$\begin{aligned} \text{ح) } (x + 2)^2(x - 2)^2 &= ((x + 2)(x - 2))^2 = (x^2 - 4)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(4) + (4)^2 \\ &= x^4 - 8x^2 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{خ) } (x^2 + y)(x^2 - 3y) &= (x^2)^2 + (y - 3y)(x^2) + y(-3y) \\ &= x^4 - 2yx^2 - 3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } \underbrace{(x + 3)(x - 3)}_{\text{اتحاد مزدوج}} (x^2 + 5) &= \underbrace{(x^2 - 9)(x^2 + 5)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \\ &= (x^2)^2 + (-9 + 5)x^2 + (-9)(5) = x^4 - 4x^2 - 45 \end{aligned}$$

$$\text{ذ) } (3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2) + 3(3x)(2)^2 + 2^3 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

$$\text{ر) } (4x + y^2)^3 = (4x)^3 + 3(4x)^2y^2 + 3(4x)(y^2)^2 + (y^2)^3 = 64x^3 + 48x^2y^2 + 12xy^4 + y^6$$

$$\text{ز) } (5x - 1)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(1) + 3(5x)(1)^2 - (1)^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$$

$$\text{س) } (x^2 - 1)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(1) + 3(x^2)(1)^2 - (1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{ش) } (5xy + 3z)^3 &= (5xy)^3 + 3(5xy)^2(3z) + 3(5xy)(3z)^2 + (3z)^3 \\ &= 125x^3y^3 + 225x^2y^2z + 135xyz^2 + 27z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ص) } (2y+5)^3(2y-5)^3 &= ((2y+5)(2y-5))^3 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (4y^2-25)^3 \\ &= (4y^2)^3 - 3(4y^2)^2(25) + 3(4y^2)(25)^2 - 25^3 = 64y^6 - 1200y^4 + 7500y^2 - 15625 \end{aligned}$$

$$\text{ض) } (x^4-1)(x^2+x+1) = (x^4)^3 - (1)^3 = x^{12} - 1$$

مثال: حاصل هر یک از عبارات زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$\text{الف) } (x^2-3y)^2(x^2+3y)^2 \quad \text{ب) } (1-x^2)^2 - (1+x^2)^2$$

$$\text{پ) } (2x+1)(4x^2+1-2x)(8x^3-1) \quad \text{ت) } (x-3)^2(x+2)^2$$

$$\text{ث) } (x+2)(x-3)(x^2-x+6) \quad \text{ج) } (x-3)(x+3)(x^2-5)$$

$$\text{چ) } (y-2)(y^4+4y^2+16)(y+2) \quad \text{ح) } (x-1)(x^3+2)(x^2+x+1)$$

$$\text{خ) } (x-2)(x+2)(x^2+7) \quad \text{د) } (1+x)(1-x)(1+x^2)(1+x^4)$$

(حل)

$$\text{الف) } ((x^2-3y)(x^2+3y))^2 = (x^4-9y^2)^2 = x^8 - 18x^4y^2 + 81y^4$$

$$\text{ب) } 1+x^4-2x^2-(1+x^4+2x^2) = -4x^2$$

$$\text{پ) } (8x^3+1)(8x^3-1) = 64x^6-1$$

$$\text{ت) } (x-3)^2(x+2)^2 = \overbrace{[(x-3)(x+2)]^2}^{\text{جمله مشترک}} = [x^2-x-6]^2 = (x^2-x)^2 - 12(x^2-x) + 36$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x^2 + 12x + 36 = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$$

$$\text{ث) } (x^2-x-6)(x^2-x+6) = (x^2-x)^2 - 6^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 36$$

ج) از اتحاد مزدوج و جمله مشترک استفاده می شود.

$$(x-3)(x+3)(x^2-5) = (x^2-9)(x^2-5) = (x^2)^2 + (-5-9)x^2 + (-5)(-9) \\ = x^4 - 14x^2 + 45$$

$$\text{چ) } (y-2)(y+2)(y^2+4y^2+16) = (y^2-4)(y^2+4y^2+16) = (y^2)^3 - (4)^3 = y^6 - 64$$

$$\text{ح) } \underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{x^3-1} \underbrace{(x^3+2)}_{\text{جمله مشترک}} = (x^3-1)(x^3+2) = x^6 + x^3 - 2$$

$$\text{خ) } \underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{مزدوج}} \underbrace{(x^2+7)}_{\text{جمله مشترک}} = (x^2-4)(x^2+7) = (x^2)^2 + (7-4)x^2 + 7(-4) \\ = x^4 + 3x^2 - 28$$

د) با چند بار استفاده از اتحاد مزدوج به دست می آید.

$$\underbrace{(1+x)(1-x)}_{\text{مزدوج}} \underbrace{(1+x^2)(1+x^4)}_{\text{مزدوج}} = \underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{\text{مزدوج}} (1+x^4) = \underbrace{(1-x^4)(1+x^4)}_{\text{مزدوج}} \\ = 1 - x^8$$

نکته: بعضی از ضرب های عددی را با استفاده از اتحادها می توان به صورت ذهنی حساب کرد.

$$\text{الف) } 16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$$

$$\text{ب) } 105^2 = (100+5)^2 = (100)^2 + 2(100)(5) + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$$

$$\text{پ) } (1007)^2 = (100+7)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(7) + (7)^2$$

$$= 1000000 + 14000 + 49 = 1014049$$

$$\text{ت) } (99)^2 = (100-1)^2 = (100)^2 - 2(100)(1) + (1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

مثال: به کمک اتحادها، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) 71^2

ب) 103^2

پ) 996^2

ت) 28×32

ث) 43×37

ج) 11^3

چ) 99^3

الف)

$$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2(70)(1) + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$$

ب)

$$103^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2(100)(3) + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$$

پ)

$$996^2 = (1000 - 4)^2 = 1000^2 - 2(1000)(4) + 4^2 = 1000000 - 8000 + 16 = 992016$$

ت) برای به دست آوردن حاصل ضرب دو عدد متمایز از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم و از میانگین دو عدد برای ساختن اتحاد مزدوج کمک می گیریم. میانگین دو عدد ۲۸ و ۳۲ برابر ۳۰ است و داریم:

$$28 \times 32 = (30 - 2)(30 + 2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$$

ث)

$$43 \times 37 = (40 + 3)(40 - 3) = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$$

ج)

$$11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2(10)(1) + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121$$

چ)

$$99^3 = (100 - 1)^3 = 100^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - 1^3 = 1000000 - 300000 + 300 - 1 = 699700$$

تمرین: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) (3x - y)^2 =$$

$$۲) (a^r - b^r)^2 =$$

$$۳) \left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{5}b^2 \right)^2 =$$

$$۴) (x^k + y^k)^2 =$$

$$۵) (0.01x - 1)(0.01x + 1) =$$

$$۶) (x^r + 5)(5 - x^r) =$$

$$۷) (x^r + 2xy)(x^r - xy) =$$

$$۸) (x + 4)^2 =$$

$$۹) (3a - 1)^2 =$$

$$۱۰) \left(\frac{1}{2} - 4x \right)^2 =$$

$$۱۱) (3x^2 - 2y)^2 =$$

$$۱۲) (x^5 - 1)^2 =$$

$$۱۳) (2x - 1)^2 =$$

$$۱۴) (x^2 - 4y)^2 (x^2 + 4y)^2 =$$

$$۱۵) (1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2 =$$

$$۱۶) (x - 4)(x + 4)(x^2 + 7) =$$

$$۱۷) (\sqrt{2} - 1)^2 =$$

$$۱۸) \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$۱۹) 2\sqrt{2}(5\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})^2 =$$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید؟

۱) $(a - b)^2 + (a + b)^2$

جواب : $2a^2 + 2b^2$

۲) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

جواب : $4ab$

۳) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$

جواب : $a^4 - 1$

درس ۴ بخش ۲: تجزیه چند جمله‌ای‌ها

تجزیه چند جمله‌ای‌ها: عمل تبدیل یک چند جمله‌ای به حاصل ضرب حداقل دو چند جمله‌ای را تجزیه

می‌گوییم.

مثال:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت

راست تجزیه کرده ایم.

تذکر: تجزیه ی چند جمله‌ای‌ها عکس عمل ضرب چند جمله‌ای‌هاست.

برای تجزیه چند جمله‌ای‌ها از سه روش زیر استفاده می‌کنیم

الف) استفاده از فاکتورگیری ب) استفاده از اتحادها پ) استفاده از روش‌های خلاقانه

برای تجزیه یک عبارت ابتدا به سراغ فاکتورگیری می‌رویم که شرط استفاده از فاکتورگیری وجود یک عبارت مشترک در همه جملات است.

الف) **فاکتورگیری:** عبارت مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور در نظر می‌گیریم و بقیه عبارات را بر فاکتور تقسیم می‌کنیم و در پرانتز دیگری قرار می‌دهیم:

۱) $x^2 - x \xrightarrow{x \text{ مشترک پس } x \text{ فاکتور}} x(x - 1)$ $\frac{x^2}{x} = x, \quad \frac{x}{x} = 1$	۲) $x^3 - 4x^2 + x = x(x^2 - 4x + 1)$
۳) $x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$	۴) $2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$
۵) $2x - 4 = 2(x - 2)$	۶) $5x^2 - 7x = x(5x - 7)$
۷) $x^5 - 4x^4 = x^4(x - 4)$	۸) $2x^3 + 16 = 2(x^3 + 8)$
۹) $4x - 6 = 2(x - 3)$	۱۰) $-15x^2 - 20x^3 = -5x^2(3 + 4x)$
۱۱) $-x^2 - x = -x(x + 1)$	۱۲) $-x - 5 = -(x + 5)$

مثال: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

- ۱) $x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$
- ۲) $4x - 8x^2 = 4x(1 - 2x)$
- ۳) $x - x^2 = x(1 - x)$
- ۴) $3x - 6 = 3(x - 2)$
- ۵) $-x - 2 = -(x + 2)$
- ۶) $x^3 - 4x^2 + x = x(x^2 - 4x + 1)$
- ۷) $5x^5 - 4x^4 + x^3 = x^3(5x^2 - 4x + 1)$
- ۸) $x^5 - x^4 = x^4(x - 1)$
- ۹) $4x^5 - x^3 = x^3(4x^2 - 1) = x^3(2x - 1)(2x + 1)$
- ۱۰) $6x + 8 = 2(3x + 4)$

$$۱۱) \quad ۲ - ۴\sqrt{x} = ۲(۱ - ۲\sqrt{x})$$

$$۱۲) \quad (a^۴ - ۲a^۳) + (a - ۲) = a^۳(a - ۲) + (a - ۲) = (a - ۲)(a^۳ + ۱)$$

ب) تجزیه به کمک اتحادها:

$$a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$$

(I) اتحاد مزدوج

$$a^۳ \pm b^۳ = (a \pm b)(a^۲ \mp ab + b^۲)$$

(II) اتحاد چاق و لاغر } دو جمله باشند

(I) اتحاد مربع دو جمله‌ای (بیشتر مواقع اگر دو جمله از آن‌ها جذر کامل داشته باشد از مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم)
 (II) اتحاد جمله مشترک } سه جمله باشند
 الف) بدون ضریب ($x^۲$ ضریب یک داشته باشد)
 ب) ضریب دار (سل دار) از روش A (آپول) حل می‌کنیم

$$I) \quad a^۲ \pm ۲ab + b^۲ = (a \pm b)^۲$$

$$II) \quad x^۲ + (a + b)x + a.b$$

$$II) \quad A = ax^۲ + bx + c$$

چهار جمله باشد ← اتحاد مکعب دو جمله‌ای (بیشتر مواقع اگر دو جمله ریشه‌ی سوم داشته باشند از مکعب

دو جمله‌ای کمک می‌گیریم)

$$a^۳ \pm ۳a^۲b + ۳ab^۲ \pm b^۳ = (a \pm b)^۳$$

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$۱) \quad x^۲ - ۴ = (x - ۲)(x + ۲)$$

$$۲) \quad x^۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱)$$

$$۳) \quad \frac{1}{۴}x^۴ - y^۲ = \left(\frac{1}{۴}x^۲ - y\right)\left(\frac{1}{۴}x^۲ + y\right)$$

$$۴) \frac{۴}{۲۵}x^۲ - y^۶ = \left(\frac{۲}{۵}x - y^۳\right)\left(\frac{۲}{۵}x + y^۳\right)$$

$$۵) x^۲ - ۲ = (x - \sqrt{۲})(x + \sqrt{۲})$$

$$۶) x^۳ - ۴x = x(x^۲ - ۴) = x(x - ۲)(x + ۲)$$

$$۷) x^۳ + ۸ = (x + ۲)(x^۲ - ۲x + ۴)$$

$$۸) x^۳ - ۸ = (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴)$$

$$۹) x^۳ + ۲۷ = (x + ۳)(x^۲ - ۳x + ۹)$$

$$۱۰) y^۳ - ۶۴ = (y - ۴)(y + ۴y + ۱۶)$$

$$۱۱) ۸x^۳ - ۲۷ = (۲x - ۳)(۴x + ۶x + ۹)$$

$$۱۲) x^۲ - ۴x + ۳ = (x - ۳)(x - ۱)$$

$$۱۳) x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)(x - ۲) = (x - ۲)^۲$$

$$۱۴) x^۲ - ۶x + ۸ = (x - ۴)(x - ۲)$$

$$۱۵) x^۲ - x - ۲ = (x - ۲)(x + ۱)$$

$$۱۶) x^۲ - ۶x + ۵ = (x - ۵)(x - ۱)$$

$$۱۷) x^۲ + x - ۶ = (x + ۳)(x - ۳)$$

$$۱۸) x^۲ - ۱۸x + ۷۲ = (x - ۶)(x - ۱۲)$$

$$۱۹) x^۲ - ۱۵x + ۵۰ = (x - ۱۰)(x - ۵)$$

$$۲۰) x^۲ - ۵x - ۶ = (x - ۶)(x + ۱)$$

$$۲۱) -x^۲ - ۷x + ۸ = -(x^۲ + ۷x - ۸) = -(x - ۸)(x + ۱)$$

$$۲۲) ۴x^۲ - ۸x - ۱۲ = ۴(x^۲ - ۲x - ۳) = ۴(x - ۳)(x + ۱)$$

$$۲۳) x^۶ - ۳x^۲ - ۴ = (x^۲ - ۴)(x^۲ + ۱) = (x - ۲)(x + ۲)(x^۲ + ۱)$$

$$۲۴) x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸ = (x + ۲)^۳$$

$$۲۵) x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ = (x - ۱)^۳$$

نکته: روش زیر که به روش A مشهور است. را با ذکر یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید می خواهیم عبارت سه جمله ای $3x^2 - 7x + 4$ را تجزیه کنیم. عبارت را برابر A در نظر می گیریم و طرفین آن را در ضریب جمله ی درجه ی بالاتر، ضرب می کنیم.

$$A = 3x^2 - 7x + 4$$

$$3A = (3x)^2 - 7(3x) + 12$$

حال دنبال دو عدد می گردیم که جمعشان -7 و ضربشان 12 شود؛ این دو عدد -3 و -4 هستند، پس می توان نوشت:

$$3A = (3x - 3)(3x - 4)$$

$$3A = 3(x - 1)(3x - 4)$$

$$A = (x - 1)(3x - 4)$$

حال با تقسیم طرفین عبارت بر 3 عبارت A تجزیه می شود.

مثال: عبارت $5t^2 - 4t - 1$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = 5t^2 - 4t - 1$$

$$5A = (5t)^2 - 4(5t) - 5$$

جمع دو عدد (-4) و حاصل ضربشان (-5) است، این دو عدد -5 و 1 می باشند.

$$5A = (5t - 5)(5t + 1) \Rightarrow A = (t - 1)(5t + 1)$$

$$1) \quad 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow 3A = (3x)^2 - 8(3x) + 15$$

$$3A = (3x - 3)(3x - 5)$$

$$3A = 3(x - 1)(3x - 5)$$

$$A = (x - 1)(3x - 5)$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad -2x^2 + 5x - 3 &\Rightarrow -2A = (-2x)^2 + 5(-2x) + 6 \\
 -2A &= (-2x + 3)(-2x + 2) \\
 -2A &= (-2x + 3) - 2(-2x - 1) \\
 A &= (-2x + 3)(x - 1)
 \end{aligned}$$

مثال: تجزیه کنید.

- ۱) $x^6 - 1$ ۲) $9 - (2x - 1)^2$ ۳) $125a^3 - 1$ ۴) $x^6 - 16$
- ۵) $y^3 - (x + 1)^3$ ۶) $x^4 - y^4$ ۷) $(b + 1)^2 + 6(b + 1) + 9$ ۸) $x^9 - 1$
- ۹) $12a^6 - 1$ ۱۰) $x^2 - 3xy - 10y^2$ ۱۱) $125x^3 - 8y^3$ ۱۲) $(3x - 1)^2 - 9$
- ۱۳) $x^2 - x - 12$ ۱۴) $x^2 + x^2 - 72x$ ۱۵) $x^2y^4 - x^2$ ۱۶) $2x^3 - 32x$
- ۱۷) $x^2 + 3x^2 + 3x + 1$ ۱۸) $2x^2 + 7x + 5$ ۱۹) $-a^2 + 7a + 18$ ۲۰) $2x^2 - 7x + 6$
- ۲۱) $7x^2 - 13x - 2$

(حل)

- ۱) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
- ۲) $(3 - (2x - 1))(3 + 2x - 1) = (4 - 2x)(2 + 2x) = 4(2 - x)(1 + x)$
- ۳) $(5a)^3 - 1 = (5a - 1)(25a^2 + 5a + 1)$

۴) دو بار از اتحاد مزدوج استفاده می شود.

- $x^6 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
- ۵) $y^3 - (x + 1)^3 = (y - (x + 1))(y^2 + y(x + 1) + (x + 1)^2)$
 $= (y - x - 1)(y^2 + yx + y + x^2 + 2x + 1)$
- ۶) $(x^6 - y^6)(x^6 + y^6) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^6 + y^6)$
 $= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^6 + y^6)$
- ۷) $(b + 1)^2 + 6(b + 1) + 9 = (b + 1 + 3)^2 = (b + 4)^2$

$$\begin{aligned} ۸) \quad x^4 - ۱ &= (x^2)^2 - ۱ = (x^2 - ۱)(x^2 + ۱) \\ &= (x - ۱)(x + ۱)(x^2 + ۱) \end{aligned}$$

$$۹) \quad ۱۸a^2 - ۱ = (۳a)^2 - ۱^2 = (۳a - ۱)(۳a + ۱)$$

$$\begin{aligned} ۱۰) \quad x^2 - ۳xy - ۱۰y^2 &= x^2 - ۳xy - ۶y^2 - ۴y^2 = x^2 - ۴y^2 - ۶y^2 - ۳xy \\ &= (x - ۲y)(x + ۲y) - ۳y(۲y + x) = (x + ۲y)(x - ۲y - ۳y) = (x + ۲y)(x - ۵y) \end{aligned}$$

$$۱۱) \quad ۱۲۵x^3 - ۸y^3 = (۵x)^3 - (۲y)^3 = (۵x - ۲y)(۲۵x^2 + ۱۰xy + ۴y^2)$$

$$۱۲) \quad (۳x - ۱)^2 - ۳^2 = (۳x - ۱ + ۳)(۳x - ۱ - ۳) = (۳x + ۲)(۳x - ۴)$$

$$۱۳) \quad x^2 - x - ۱۲ = (x - ۴)(x + ۳)$$

$$۱۴) \quad x(x^2 + x - ۷۲) = x(x + ۹)(x - ۸)$$

$$۱۵) \quad x^3(x^3y^4 - ۱) = x^3((xy^3)^3 - ۱) = x^3(xy^3 - ۱)(x^2y^6 + xy^3 + ۱)$$

۱۶) از فاکتورگیری و اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$۲x^3 - ۳۲x = ۲x(x^2 - ۱۶) = ۲x(x - ۴)(x + ۴)$$

۱۷) همان اتحاد $(a + b)^3$ است لذا تجزیه عبارت برابر $(x + ۱)^3$ است.

$$۱۸) \quad A = ۲x^2 + ۷x + ۵ \Rightarrow ۲A = (۲x)^2 + ۷(۲x) + ۲ \times ۵$$

$$\Rightarrow ۲A = (۲x + ۷)(۲x + ۵) \Rightarrow A = (x + ۷/۲)(۲x + ۵)$$

$$۱۹) \quad -a^2 + ۷a + ۱۸ = -(a^2 - ۷a - ۱۸) = -(a + ۲)(a - ۹)$$

$$۲۰) \quad A = ۲x^2 - ۷x + ۶ \rightarrow ۲A = (۲x)^2 - ۷(۲x) + ۱۲$$

$$\Rightarrow ۲A = (۲x - ۳)(۲x - ۴) = (۲x - ۳)۲(x - ۲) \Rightarrow A = (۲x - ۳)(x - ۲)$$

$$۲۱) \quad A = ۷x^2 - ۱۳x - ۲ \Rightarrow ۷A = (۷x)^2 - ۱۳(۷x) - ۱۴ = (۷x - ۱۴)(۷x + ۱)$$

$$۷A = ۷(x - ۲)(۷x + ۱) \Rightarrow A = (x - ۲)(۷x + ۱) \Rightarrow ۷x^2 - ۱۳x - ۲$$

$$= (x - ۲)(۷x + ۱)$$

مثال: هر يك از عبارت ها را تا حد ممكن (به عبارت های گویا) تجزیه کنید.

$$\text{الف) } x^6 - y^6 \quad \text{ب) } x^6 - y^6$$

$$\text{الف) } x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{ب) } x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x^3 + y^3)(x - y)(x + y)$$

تمرین: تجزیه کنید.

$$۱) \quad x^6 - ۱ =$$

$$۲) \quad ۸a^6 - ۱ =$$

$$۳) \quad x^8 - y^8 =$$

$$۴) \quad x^6 - ۱۶ =$$

$$۵) \quad ۱۲۵a^3 - ۱ =$$

$$۶) \quad x^9 - ۱ =$$

$$۷) \quad x^3 - x - ۱۲ =$$

$$۸) \quad ۷x^3 - ۱۳x - ۲ =$$

$$۹) \quad ۲x^3 + ۷x + ۵ =$$

$$۱۰) \quad ۲x^3 - ۷x + ۶ =$$

$$۱۱) \quad -a^3 + ۷a + ۱۸ =$$

$$۱۲) \quad ۲x^3 - ۳۲x =$$

$$۱۳) \quad ۱۲۵x^3 - ۸y^3 =$$

$$۱۴) \quad x^3 + x^2 - ۷۲x =$$

$$۱۵) x^6 y^9 - x^3 =$$

$$۱۶) 9 - (2x - 1)^2 =$$

$$۱۷) y^3 - (x + 1)^3 =$$

$$۱۸) (b + 1)^2 + 6(b + 1) + 9 =$$

$$۱۹) (3x - 1)^2 - 9 =$$

$$۲۰) 27x - xy^3 =$$

$$۲۱) 3a^5 - 48ab^4 =$$

$$۲۲) x^3 - 8x^2 + 16x =$$

$$۲۳) 64x^{12} - 27x^{18} =$$

$$۲۴) xy^6 - 13xy^2 + 36x =$$

$$۲۵) 4x^2 - 25 =$$

$$۲۶) 27x - xy^3 =$$

$$۲۷) 2x^3 + 16 =$$

$$۲۸) 3t^2 - 2t - 1 =$$

$$۲۹) 9a^2 - 5x - 6 =$$

$$۳۰) b^6 + 2b^2 + 1 =$$

$$۳۱) x^6 - 81 =$$

$$۳۲) 8x^3 + 125 =$$

$$۳۳) x^6 + 3x^3 - 10x^2 =$$

$$۳۴) x^3 + 8x^2 + 15x =$$

$$۳۵) x^5 y - 8y^6 x =$$

$$۳۶) a^6 - 64 =$$

پ) استفاده از روش های خلاقانه

در این روش به کمک دسته بندی، شکستن عبارت، کم و زیاد کردن، تغییر متغیر و... کاری می کنیم که بتوانیم به کمک فاکتور گیری یا اتحادها عبارت را تجزیه کنیم.

مثال: عبارت $a^4 - 2a^2 + a - 2$ را تجزیه کنید.

$$\text{حل: } a^4 - 2a^2 + a - 2 = (a^4 - 2a^2) + (a - 2) = a^2(a - 2) + (a - 2)$$

$$= (a - 2)(a^2 + 1) = (a - 2)(a + 1)(a^2 - a + 1)$$

مثال: عبارت $b^2 - x^2 - y^2 + 2xy$ را تجزیه کنید.

$$\text{حل: } b^2 - x^2 - y^2 + 2xy = b^2 - (x^2 + y^2 - 2xy) = b^2 - (x - y)^2$$

$$= (b + x - y)(b - (x - y)) = (b + x - y)(b - x + y)$$

مثال: عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید.

$$a^6 - 2b^6 + 2a^3b^3 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6 - 3b^6$$

$$= (a^3 + b^3)^2 - 3(b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{3}b^3)(a^3 + b^3 + \sqrt{3}b^3)$$

مثال: عبارت $a^6 - 3b^6 + 2a^3b^3$ را تجزیه کنید.

$$a^6 - 3b^6 + 2a^3b^3 = a^6 - a^3b^3 + 3a^3b^3 - 3b^6 = a^3(a^3 - b^3) + 3b^3(a^3 - b^3)$$

$$= (a^3 - b^3)(a^3 + 3b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + 3b^3)$$

مثال: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$$\text{الف) } 5x^2 + 11x + 6 \quad \text{ب) } 2x^3 - 6x + yx^2 - 3y$$

پاسخ: الف) یک جمله ای $11x$ را به صورت $5x + 6x$ می نویسیم و داریم:

$$5x^2 + 11x + 6 = (5x^2 + 5x) + (6x + 6) = 5x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(5x + 6)$$

$$\text{ب) } \underline{2x^3} - \underline{6x} + \underline{yx^2} - \underline{3y} = 2x(x^2 - 3) + y(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x + y)$$

$$= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2x + y)$$

مثال: عبارت $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه کنید.

می نویسیم:

$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x = (x + 1)^2 + x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x + 1 + x) = (x + 1)(2x + 1)$$

مثال: با استفاده از روش های خلاقانه و فاکتور گیری عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) 4x^2 + 4x + 1 - y^2 \quad ۲) 2\sqrt{x} - xy^2 \quad ۳) x^3 + x^2 + 4x + 4 \quad ۴) ax + a - 9x - 9$$

$$۵) a^3 + 2a^2 + a + 2 \quad ۶) x^2 + y^2 + 2xy - 25 \quad ۷) x^2 - y^2 + 4x + 4 \quad ۸) 3a^5 - 4ab^4$$

$$۹) 4b^3 + b - 4b^2 \quad ۱۰) mx - my - ny + 2ny \quad ۱۱) x^2 + y^2 - 2xy - t^2 \quad ۱۲) y^2 - b^2 + 2xy + x^2$$

$$۱۳) x^2 - 6x + 9 - t^2 \quad ۱۴) x^3 - 8x^2 + 16x \quad ۱۵) 5c - 10x + ac - 2ax$$

$$۱۶) xy^4 - 13xy^2 + 36x \quad ۱۷) 64x^{12} - 27x^{18} \quad ۱۸) x^3 + 4x - 5$$

$$۱۹) a^3 + a + 10 \quad ۲۰) (x - y)(x^2 - z^2) - (x - z)(x^2 - y^2)$$

$$۲۱) x^2(y + z) - y^2(x + z) + z^2(x - y)$$

(حل)

$$۱) \quad ۴x^۲ + ۴x + ۱ - y^۲ = (۲x + ۱)^۲ - y^۲ = (۲x + ۱ - y)(۲x + ۱ + y)$$

$$۲) \quad ۲۷x - xy^۲ = x \underbrace{(۲۷ - y^۲)}_{\text{اتحاد}} = x(۳ - y)(۹ + ۳y + y^۲)$$

$$۳) \quad x^۲ + x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲(x + ۱) + ۴(x + ۱) = (x + ۱)(x^۲ + ۴)$$

$$۴) \quad a(x + ۱) - ۹(x + ۱) = (x + ۱)(a - ۹)$$

$$۵) \quad a^۲(a + ۲) + (a + ۲) = (a + ۲)(a^۲ + ۱)$$

$$۶) \quad (x + y)^۲ - ۲۵ = (x + y + ۵)(x + y - ۵)$$

$$۷) \quad x^۲ - y^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۴x + ۴ - y^۲ = (x + ۲)^۲ - y^۲ = (x + ۲ + y)(x + ۲ - y)$$

$$۸) \quad ۳a^۵ - ۴۸ab^۴ = ۳a(a^۴ - ۱۶b^۴)$$

دوبار از اتحاد مزدوج استفاده می شود.

$$= ۳a(a^۲ - ۴b^۴)(a^۲ + ۴b^۴) = ۳a(a - ۲b^۲)(a + ۲b^۲)(x^۲ + ۴b^۴)$$

$$۹) \quad ۴b^۲ + b - ۴b^۲ = b(۴b^۲ - ۴b + ۱) = b(۲b - ۱)^۲$$

$$۱۰) \quad A = (mx - nx) - (۲my - ۲ny) = x(m - n) - ۲y(m - n) \\ = (m - n)(x - ۲y)$$

$$۱۱) \quad x^۲ + y^۲ - ۲xy - t^۲ = (x - y)^۲ - t^۲ = (x - y - t)(x - y + t)$$

$$۱۲) \quad y^۲ - b^۲ + ۲xy + x^۲ = \overbrace{y^۲ + ۲xy + x^۲}^{\text{اتحاد مربع}} - b^۲ = \overbrace{(y + x)^۲}^{\text{اتحاد مزدوج}} - b^۲ \\ = (y + x - b)(y + x + b)$$

$$۱۳) \quad \underbrace{x^۲ - ۶x + ۹}_{(x-۳)^۲} - t^۲ = \underbrace{(x - ۳)^۲ - t^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (x - ۳ + t)(x - ۳ - t)$$

$$۱۴) \quad x^۲ - ۸x^۲ + ۱۶x = x(x^۲ - ۸x + ۱۶) = x(x - ۴)^۲$$

$$۱۵) \quad ۵c - ۱۰x + ac - ۲ax = (۵ + a)c - ۲x(۵ + a) = (۵ + a)(c - ۲x)$$

$$۱۶) \quad xy^4 - ۱۳xy^2 + ۳۶x = x(y^4 - ۱۳y^2 + ۳۶) = x(y^2 - ۴)(y^2 - ۹)$$

$$= x(y - ۲)(y + ۲)(y - ۳)(y + ۳)$$

$$۱۷) \quad x^{۱۲}(۶۴ - ۲۷x^۶) = x^{۱۲}(۴^۳ - (۳x^۲)^۳) = x^{۱۲}(۴ - ۳x^۲)(۱۶ + ۱۲x^۲ + ۹x^۴)$$

$$= x^{۱۲}(۲ - \sqrt{۳}x)(۲ + \sqrt{۳}x)(۹x^۴ + ۱۲x^۲ + ۱۶)$$

$$۱۸) \quad x^۳ + ۴x - \frac{۵}{-۴-۱} = x^۳ - ۱ + ۴x - ۴ = \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱) + ۴(x-۱)}{}$$

$$= (x-۱)[x^۲+x+۵]$$

از $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ - ab + b^۲)$ استفاده شده است.

۱۹) بجای ۱۰ عدد ۸+۲ قرار داده و از اتحاد مجموع مکعبات استفاده می کنیم.

$$a^۳ + a + ۱۰ = \underbrace{(a^۳ + ۸)}_{\text{اتحاد مجموع}} + (a + ۲) = (a + ۲)(a^۲ - ۲a + ۴) + (a + ۲)$$

$$= (a + ۲)[a^۲ - ۲a + ۴ + ۱] = (a + ۲)(a^۲ - ۲a + ۵)$$

$$۲۰) \quad (x-y)(x^۲-z^۲) - (x-z)(x^۲-y^۲)$$

$$= (x-y)(x-z)(x+z) - (x-z)(x-y)(x+y)$$

$$= (x-y)(x-z)[x+z-x-y] = (x-y)(x-z)(z-y)$$

$$۲۱) \quad x^۲(y+z) - y^۲(x+z) + z^۲(x-y) = \underline{x^۲y} + \underline{x^۲z} - \underline{xy^۲} - \underline{y^۲z} + z^۲(x-y)$$

$$xy(x-y) + z(x^۲-y^۲) + z^۲(x-y) = (x-y)[xy + zx + zy + z^۲]$$

$$= (x-y)[x(y+z) + z(y+z)] = (x-y)(y+z)(x+z)$$

مثال: در اتحاد

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$$

قرار دهید $a = \sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2})^2 - (\sqrt[3]{x^2})(1) + (1)^2$$

$$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^6} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$$

مثال: تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x^2})^2 - (\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{y^2}) + (\sqrt[3]{y^2})^2 \\ &= (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x^6} - \sqrt[3]{x^2 y^2} + \sqrt[3]{y^6}) \end{aligned}$$

مضرب و شمارنده ی عبارت های جبری

$12 = 3 \times 4$ هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این

عددها می نامیم. ۱۲ شمارنده های دیگر نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب های دیگری دارد، از

جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و... مشابه این در اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

هر یک از عبارت های $a - b$ و $a + b$ یک شمارنده $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a - b$ و b و هم مضرب $a + b$ است.

نکته: مضرب های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله ای، از ضرب آن عبارت در عبارت های جبری دیگر به دست می آیند.

مثال: چند نمونه از مضرب های $a + b$ را بنویسید.

... و $(a + b)(a - b)$ و $-۴(a + b)$ و $(a + b)(a + b)^۲$ و $۲(a + b)$ و $a + b$

مثال: چند نمونه از مضرب های $a - b$ را بنویسید.

$۲a(a - b)$, $-۷(a - b)$, $۳(a - b)$, $(a - b)^۲$

تست: عبارت $۲۷a^۳ - ۱$ مضرب کدام یک از عبارت هاست؟

الف) $a - ۱$ ب) $۳a - ۱$ پ) $۹a^۲ + ۳a + ۱$ ت) $۳a + ۱$

$$۲۷a^۳ - ۱ = (۳a - ۱)(۹a^۲ + ۳a + ۱)$$

درس ۴ بخش ۳: عبارت های گویا

عبارت گویا: هر کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد را عبارت گویا می گوئیم.

به عنوان مثال، $\frac{2x+\sqrt{5}}{x+y}$ یک عبارت گویا است، اما عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$ گویا نیست، زیرا $\sqrt{x}$ یک جمله ای نمی باشد.

مثال: مشخص کنید کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟ (چرا؟)

$\frac{x+1}{x^2+5}$ (آ)
 $\frac{x}{x^2-1}$ (ب)
 $\frac{|x|+1}{2x-3}$ (پ)
 $\sqrt[4]{x} + 1$ (ت)
 $x + 4$ (ث)

حل) عبارت (پ) به دلیل وجود $|x|$ و عبارت (ت) به دلیل وجود $\sqrt[4]{x}$ گویا نمی باشد. بقیه عبارت ها در

صورت و مخرج شامل چند جمله ای اند. (x یک جمله ای است و در مخرج کسر (ث)، عدد یک وجود

دارد).

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی گردد (مقدار

ندارد).

مثال: عبارت های گویای زیر به ازای چه مقدار هایی از x تعریف نمی شود؟

$\frac{-4x}{x-2}$ (الف)
 $\frac{2x}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+4}$ (ب)
 $\frac{x+4}{4x^2+8x}$ (پ)

حل) یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که در مخرج آن صفر می شود، تعریف نمی شود.

الف) عبارت $\frac{-4x}{x-2}$ فقط به ازای $x = 2$ تعریف نمی شود:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ب) عبارت $\frac{2x}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+4}$ فقط به ازای $x = -3$ و $x = 1$ تعریف نمی شود:

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

توجه کنیم که $x^2 + 4$ همواره مثبت است و در نتیجه به ازای هیچ مقداری از x صفر نمی شود.

پ) عبارت $\frac{x+4}{4x^2+8x}$ فقط به ازای $x = 0$ و $x = 2$ تعریف نمی شود.

$$4x^2 + 8x = 4x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

مثال: عبارت گویای $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}$ به ازای چه مقدار هایی از x تعریف نمی شود؟

پاسخ:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین عبارت گویای داده شده فقط به ازای $x = 1$ و $x = 2$ تعریف نمی شود.

ساده کردن عبارت های گویا:

برای ساده کردن عبارت های گویا، صورت و مخرج کسر را تجزیه می کنیم و با حذف عامل های مشترک در صورت و مخرج، ساده شده کسر به دست می آید.

مثال: عبارت گویای $\frac{x^3+1}{x^2+6x+5}$ را ساده کنید.

پاسخ: تجزیه عبارت های x^3+1 و x^2+6x+5 به ترتیب به صورت

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) \text{ و } x^2+6x+5 = (x+1)(x+5) \text{ می باشد، بنابراین:}$$

$$\frac{x^3+1}{x^2+6x+5} = \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x+5)} = \frac{x^2-x+1}{x+5}$$

مثال: صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{x^6+1}{x^6+2x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^3-1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$$

$$\text{پ) } \frac{x^2+1}{x^6-1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} = \frac{1}{x^4-x^2+1}$$

$$\text{ت) } \frac{y^6-y}{y^3+y^2+y} = \frac{y(y^5-1)}{y(y^2+y+1)} = \frac{y^5-1}{y^2+y+1}$$

$$\text{ث) } \frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)}$$

$$= \frac{y(y-2)(y+2)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$$

مثال: کسرهای گویای زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^r + 2x^r + x}{x^d + x^r} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{2x^r + 5x + 3}{x^r - x - 2} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{x^r + 4}{x^f - 16} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{x^r - 4}{x^r + 3x + 2} \quad (\text{آ})$$

$$\frac{x^f + 8}{x^f - 4} \quad (\text{ح})$$

$$\frac{x^r - 3x^r + 3x - 1}{(x^r - 1)(x^r - x)} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{y^d + y^r - 2y}{4y^r + 4y} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{y^v - y}{y^r + y^r + y} \quad (\text{ث})$$

$$\frac{x^r - 4}{x^r + 3x + 2} = \frac{(x-2)(\cancel{x+2})}{(x+1)(\cancel{x+2})} = \frac{x-2}{x+1} \quad (\text{آ})$$

$$\frac{x^r + 4}{x^f - 16} = \frac{\cancel{x^r + 4}}{(x^r - 4)(\cancel{x^r + 4})} = \frac{1}{x^r - 4} \quad (\text{ب})$$

پ) عبارت $2x^r + 5x + 3$ را با استفاده از دسته بندی جملات، تجزیه می کنیم:

$$2x^r + 5x + 3 = (2x^r + 2x) + (3x + 3) = 2x(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(2x + 3)$$

$$\frac{2x^r + 5x + 3}{x^r - x - 2} = \frac{(\cancel{x+1})(2x+3)}{(\cancel{x+1})(x-2)} = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$\frac{x^r + 2x^r + x}{x^d + x^r} = \frac{x(x^r + 2x + 1)}{x^r(x^r + 1)} = \frac{(x+1)^r}{x(\cancel{x+1})(x^r - x + 1)} = \frac{x+1}{x(x^r - x + 1)} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{y^v - y}{y^r + y^r + y} = \frac{y^v - y}{y^r + y^r + y} = \frac{\cancel{y}(y^v - 1)}{\cancel{y}(y^r + y + 1)} = \frac{(y^r - 1)(y^r + 1)}{y^r + y + 1} = \frac{(y-1)(y^r + y + 1)}{y^r + y + 1} = (y-1)(y^r + 1) \quad (\text{ث})$$

$$\frac{y^d + y^r - 2y}{4y^r + 4y} = \frac{y(y^d + y^r - 2)}{4y(y^r + 1)} = \frac{(y^r + 2)(y^r - 1)}{4(y+1)} = \frac{(y^r + 2)(y-1)(\cancel{y+1})}{4(y+1)} = \frac{(y^r + 2)(y-1)}{4} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{x^r - 3x^r + 3x - 1}{(x^r - 1)(x^r - x)} = \frac{(\cancel{x-1})^r}{(x-1)(x^r + x + 1) \times x(\cancel{x-1})} = \frac{x-1}{x(x^r + x + 1)} \quad (\text{ج})$$

$$x^f + 8 = (x^r)^r + 2^r = (x^r + 2)(x^f - 2x^r + 4) \Rightarrow \frac{x^f + 8}{x^f - 4} = \frac{(x^r + 2)(x^f - 2x^r + 4)}{(x^r - 2)(\cancel{x^r + 2})} \quad (\text{ح})$$

$$= \frac{x^f - 2x^r + 4}{x^r - 2}$$

ضرب و تقسیم عبارت های گویا:

برای ضرب و تقسیم عبارت های گویا، ابتدا هر یک از عبارت های گویا را ساده کرده و سپس از قوانین زیر

استفاده می کنیم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, (b, d \neq 0), \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, (b, c, d \neq 0)$$

$$\text{مثال: } \frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2+x+1} = \frac{x(x+1)}{x-1} \times \frac{(x-1)\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{x^2+x+1}} = \frac{x(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x(x+1)$$

مثال: حاصل کسرهایی زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\frac{2x^3-8x^2}{x^3} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+1} \quad \text{ب)} \quad \frac{x^2-2x}{x^2+2x} \times \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} \quad \text{الف)$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2+2x} \times \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \frac{\cancel{x}(x-2)}{x(x+2)} \times \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}^2} = 1 \quad \text{حل الف)}$$

$$\frac{2x^3-8x^2}{x^3} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+1} = \frac{\cancel{2}x^2(x-4)}{\cancel{x^3}} \times \frac{x^2+1}{x^2-3x-4} = \frac{2\cancel{(x-4)}}{x} \times \frac{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-4)} = \frac{2(x^2-x+1)}{x} \quad \text{ب)}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا:

برای جمع و تفریق عبارت های گویا، پس از ساده کردن هر یک از عبارت های گویا، کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها را به دست می آوریم سپس کسرهایی با کوچک ترین مضرب مشترک مخرج ها می نویسیم و آن ها را با استفاده از دستور زیر ساده می کنیم:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

کوچک ترین مضرب مشترک مخرج ها

برای به دست آوردن کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها، ابتدا مخرج همه کسرها را تجزیه کرده و سپس عامل های مشترک با بزرگترین توان را در عامل های غیر مشترک ضرب می کنیم.

مثال: حاصل کسرهایی $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{2}{x-1}$ را به دست آورید.

پاسخ: هیچ یک از کسرهایی $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{2}{x-1}$ ساده نمی شوند. کوچک ترین مضرب مشترک مخرج دو کسر،

$(x-1)(x+1)$ می باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x+1) + x-1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x+2+x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x+1}{x^2-1} \end{aligned}$$

مثال: حاصل کسره‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} \quad \text{ب)} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{5x}{x^2-1}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+3x-10} \quad \text{ت)} \quad \frac{x^2+3x+9}{x^2-27} + \frac{x^2-1}{x^2+x}$$

$$\text{ث)} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$$

الف) $(x-3)(x+3)$ کوچکترین مضرب مشترک مخرج دو کسر است، پس داریم:

$$\frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x+3} + \frac{6}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} + \frac{6}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x-3+6}{(x-3)(x+3)} = \frac{\cancel{x+3}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} = \frac{1}{x-3}$$

ب)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{5x}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{5x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+2(x-1)+5x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+2x-2+5x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{8x-1}{(x-1)(x+1)}$$

پ) تجزیه مخرج کسرها به صورت $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$ و $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

است و در نتیجه کوچکترین مضرب مشترک کسرها $(x-1)(x-2)(x+5)$ می باشد:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+3x-10} = \frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x+5)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

$$= \frac{x+5+3x-3}{(x-1)(x-2)(x+5)} = \frac{4x+2}{(x-1)(x-2)(x+5)}$$

ت) ابتدا هر یک از کسرها را ساده می کنیم:

$$\frac{x^r + 3x + 9}{x^r - 27} = \frac{x^r + 3x + 9}{(x-3)(x^r + 3x + 9)} = \frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x^r - 1}{x^r + x} = \frac{(x^r - 1)(x^r + 1)}{x(x^r + 1)} = \frac{x^r - 1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^r + 3x + 9}{x^r - 27} + \frac{x^r - 1}{x^r + x} = \frac{1}{x-3} + \frac{x^r - 1}{x}$$

$$= \frac{x}{x(x-3)} + \frac{(x-3)(x^r - 1)}{x(x-3)} = \frac{x + (x-3)(x^r - 1)}{x(x-3)} = \frac{x + x^r - x - 3x^r + 3}{x(x-3)}$$

$$= \frac{x^r - 3x^r + 3}{x(x-3)}$$

(ث)

$$= \frac{(x+1)(x^r+1) + (x-1)(x^r+1) - (x^r+1) + (x^r-1)}{(x^r-1)(x^r+1)}$$

$$= \frac{x^r + x + x^r + x + x^r + x - x^r - 1 - x^r - 1 + x^r - 1}{(x^r-1)(x^r+1)} = \frac{2x^r + 2x - 2}{(x^r-1)(x^r+1)}$$

گویا کردن مخرج کسرها (تبدیل مخرج رادیکالی به غیر رادیکالی)

حالت اول: در مخرج یک جمله داشته باشیم به عبارت دیگر مخرج به صورت $\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}}$ باشد ($n > m$):

در این حالت صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می کنیم.

مثال: مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ را گویا کنید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^{3-2}}}{\sqrt[3]{x^{3-2}}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{x}$$

پاسخ:

حالت دوم: در مخرج کسر دو جمله با رادیکال (رادیکال هایی) به فرجه زوج داشته باشیم:

در این حالت از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم. به این روش که صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج

ضرب می کنیم (مزدوج یعنی علامت بین دو جمله را قرینه کنیم مثلاً مزدوج $a - b$ ، عبارت $a + b$ و

مزدوج $a + b$ ، عبارت $a - b$ می باشد)، سپس با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل مخرج را که یک عبارت

بدون رادیکال است، به دست می آوریم.

مثال: مخرج کسر $\frac{x}{\sqrt{2}+3}$ را گویا کنید.

پاسخ: مزدوج $\sqrt{2} + 3$ ، عبارت $\sqrt{2} - 3$ می باشد، پس صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2} - 3$ ضرب می کنیم:

$$\frac{x}{\sqrt{2}+3} \times \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2})^2 - (3)^2} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{2-9} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{-7}$$

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ را گویا کنید.

حل: با استفاده از اتحاد مزدوج و ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج (یعنی $\sqrt{3} + \sqrt{2}$) مخرج

عبارت مذکور گویا می شود.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

مثال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} &= \frac{1 \times (3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{9 \times 2 - 4 \times 3} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18-12} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \quad x \neq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\text{ت)} \quad \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$$\text{ث)} \quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} = \frac{1 \times \sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5^2 - (\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{25-6}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{19}}$$

$$= \frac{\sqrt{19} \times \sqrt{5}-\sqrt{6}}{(\sqrt{19})^2} = \frac{\sqrt{19} \times \sqrt{5}-\sqrt{6}}{19}$$

طی دو مرحله مخرج را گویا می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{ج) } \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} &= \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt[4]{x})^2-1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-(1)^2} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \end{aligned}$$

طی دو مرحله مخرج را گویا می کنیم.

$$\begin{aligned} \text{ح) } \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} &= \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \end{aligned}$$

طی سه مرحله مخرج را گویا می کنیم.

حالت سوم : در مخرج کسر دو جمله با رادیکال (رادیکال هایی) به فرجه ۳ داشته باشیم :

در این حالت از اتحاد های چاق و لاغر استفاده می کنیم و صورت و مخرج کسر را در پیرانتز بزرگتر (چاق)

ضرب می کنیم

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

مثال: مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}$ را گویا کنید.

پاسخ: با توجه به اتحاد $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$ ، صورت و مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}$ را در

$$(\sqrt[4]{x})^2 - \sqrt[4]{x} + 1^2$$

ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$$

مثال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}$

(حل)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5} + \sqrt{3}}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt[3]{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt[3]{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt[3]{5 - 3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}}{(\sqrt[3]{2})^3} = \frac{\sqrt[3]{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}}{2}$$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)((\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1}$$

مثال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$ ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}$ پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$

الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{(1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{(1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x - 8}$

$$\text{پ)} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{(1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x + y}$$

مثال: مخارج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ب) $\frac{1}{\sqrt[5]{15}}$ پ) $\frac{3}{4 - \sqrt{7}}$ ت) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ ث) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

ج) $\frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$ ج) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ د) $\frac{1}{\sqrt[3]{5} + 2}$

ر) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$ ز) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 3}$ ژ) $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$$\text{الف)} \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{ب)} \frac{1}{\sqrt[5]{15}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^4}} \times \frac{\sqrt[5]{2^{5-4}}}{\sqrt[5]{2^{5-4}}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{پ)} \frac{3}{4 - \sqrt{7}} &= \frac{3}{4 - \sqrt{7}} \times \frac{4 + \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}} = \frac{3(4 + \sqrt{7})}{(4)^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{3(4 + \sqrt{7})}{16 - 7} = \frac{3(4 + \sqrt{7})}{9} \\ &= \frac{4 + \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ت)} \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3 - 5} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ث)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\underbrace{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}_{x-y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\text{ج)} \frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{x - 4y}$$

$$\text{چ) } \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$$

$$\text{د) } \frac{1}{\sqrt[3]{5} + 2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{5} + 2)} \times \frac{(\sqrt[3]{5})^2 - 2\sqrt[3]{5} + 4}{(\sqrt[3]{5})^2 + 2\sqrt[3]{5} + 4} = \frac{\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} + 4}{\underbrace{(\sqrt[3]{5})^2 + 2^3}_{5+8}} = \frac{\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{5} + 4}{13}$$

$$\text{ر) } \frac{x + y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$$\frac{(x + y)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{\underbrace{(\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{y})^2}_{x+y}} = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$$

$$\text{ز) } \frac{1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{1}{\sqrt{x} - 3} \times \frac{(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 9} = \frac{\sqrt{x^2} + 3\sqrt{x} + 9}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{x^2} + 3\sqrt{x} + 9}{x - 9}$$

$$\text{ژ) } \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x})^2 - 1} = \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1)}{x - 1} = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1)$$

مثال: کسر ها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{3}{x - 1}$$

$$= \frac{1(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} + \frac{3}{x - 1} \quad \text{الف)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} - 2 + 3}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب)} \quad \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} &= \frac{(1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{(2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{5x}{x-1} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{پ)} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \\
 &= \frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} + \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
 &= \frac{1+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ت)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2})^2 - (1)^2} + \frac{1}{x-1} \\
 &= \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + x + 2}{x^2-1}
 \end{aligned}$$