



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی (۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک - علوم تجربی

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

تهیه و تنظیم: پریسا استواری

کارشناسی ارشد ریاضی

دبیر ناحیه ۲ استان کرمانشاه

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله..... ۱.

- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی..... ۲
- متمم یک مجموعه..... ۷
- الگو و دنباله..... ۱۴
- تمرینات تکمیلی..... ۲۱
- تست..... ۲۵

فصل ۲: مثلثات..... ۲۸

- نسبت‌های مثلثاتی..... ۲۹
- دایره مثلثاتی..... ۳۴
- روابط بین نسبت‌های مثلثاتی..... ۴۰
- تمرینات تکمیلی..... ۴۳
- تست..... ۴۶

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری..... ۴۹

- ریشه و توان..... ۵۰
- ریشه n ام..... ۵۶
- توان‌های گویا..... ۵۹
- عبارت‌های جبری..... ۶۱
- تمرینات تکمیلی..... ۷۰
- تست..... ۷۲

فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها..... ۷۴

- معادله درجه دوم و روش‌های حل..... ۷۷
- سهمی..... ۸۶
- تعیین علامت..... ۸۸
- تمرینات تکمیلی..... ۱۰۴
- تست..... ۱۰۷

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوّم: متمم یک مجموعه

درس سوّم: الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۱/۵ نمره

بارم شهریور: ۲ نمره

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به صورت زیر است:

مجموعه اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعدادی که نتوان عضوهای آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد: $Q' = \{x \mid x \notin Q\}$

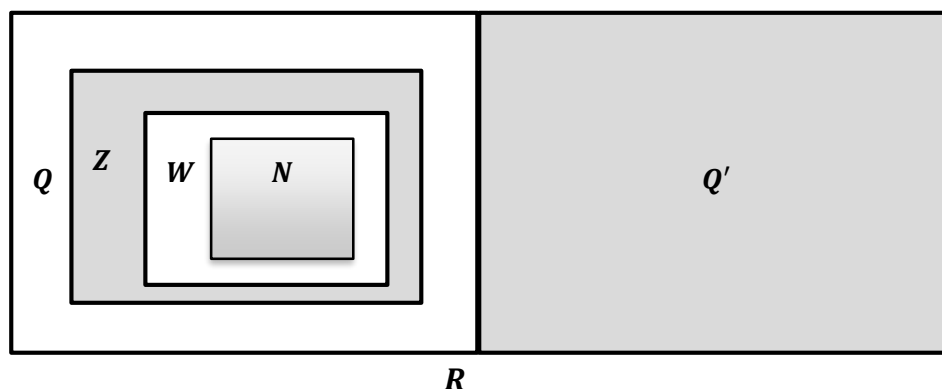
مجموعه اعداد حقیقی: $R = Q \cup Q'$

☑ نکته:

۱. رابطه زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

$$Q' \subseteq R$$



۲. با توجه به شکل بالا داریم

- $R - Q = Q'$
- $R - Q' = Q$
- $Q \cup Q' = R$
- $Q \cap Q' = \emptyset$

مثال:

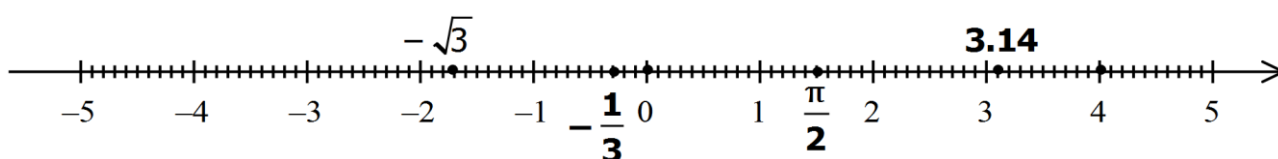
کدامیک از اعداد زیر گویا و کدامیک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.

$$-\frac{1}{3}, 3/14, \frac{\pi}{2}, -\sqrt{3}, 6, 0$$

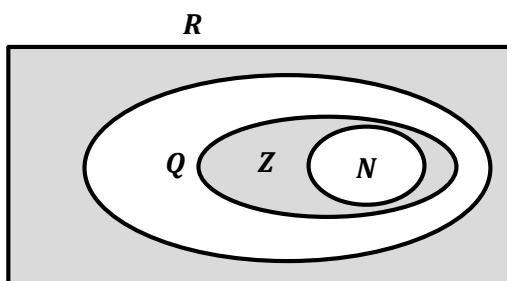
پاسخ:

اعداد گویا: $-\frac{1}{3}, 3, 14, 4, 0$

اعداد گنگ: $\frac{\pi}{2}, -\sqrt{3}$

تمرین:

1- الف) مجموعه R_Q چه نام دارد؟ آن را روی شکل زیر هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید.



ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل بالا در مکان مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

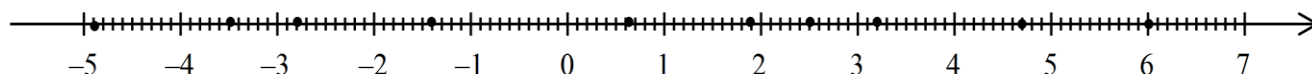
$$\sqrt{17}, 2, 200, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{6}, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

ث) مجموعه W_N چند عضو دارد؟

2- هر يك از اعداد داده شده را در يكي از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام يك از این اعداد گنگ‌اند؟ آنها را مشخص کنید.

$$2 \cdot 45, -\frac{7}{2} \cdot 6, -4 \cdot 9 \cdot \pi, -\sqrt{2}$$



بازه (فاصله)

زیرمجموعه‌هایی از R را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص باشد را بازه یا فاصله می‌نامیم. اگر a, b دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $a < b$ ، آنگاه

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in R a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in R a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in R a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم باز b (نیم بسته a)
	$\{x \in R a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم باز a (نیم بسته b)
	$\{x \in R x \leq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم باز
	$\{x \in R x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم باز
	$\{x \in R x < a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in R x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز

نکته: ☒

دو نماد $-\infty$ (منفی بینهایت) و $+\infty$ (مثبت بینهایت) عدد حقیقی نیستند.

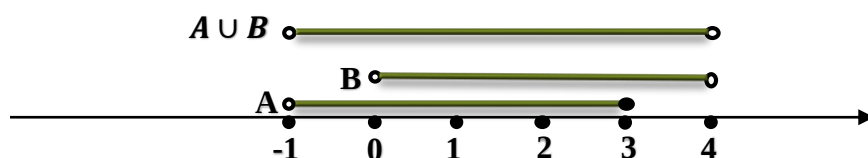
|

مثال:

اگر $A = \{x \in R | -1 < x \leq 3\}$ و $B = (0, 4)$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ:

ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A \cup B$ برابر مجموعه‌ای است که اعضای آن در A یا در B و یا در هر دو باشد.



$$A \cup B = (-1, 4)$$

تمرین:

جدول زیر را کامل کنید.

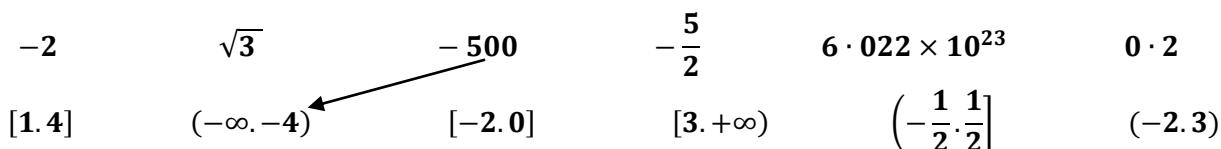
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
		$(-2, 2)$	
		$[0, 2)$	
	$\{x \in \mathbb{R} 1 < x \leq \sqrt{5}\}$		
	$\{x \in \mathbb{R} x < \frac{1}{2}\}$		
	$\{x \in \mathbb{R} x \geq -2\}$		

تمرین:

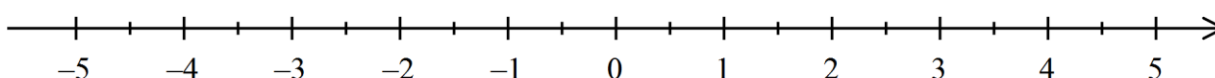
1- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0]$
 ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$
 ث) $-1 \in \{-2, 0\}$ ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2]$
 ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$

2- هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



3- نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A - B$ ت) $B - A$

4- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x + 1 \leq 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

الف) A ب) $A \cup B$ پ) $A - B$ ت) B

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (باپایان) می‌نامیم.

مجموعه‌های نامتناهی:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم. در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه متناهی می‌نامیم.

مثال: 

مجموعه اعداد اول یک رقمی یک مجموعه متناهی است. زیرا

$\{2, 3, 5, 7\}$ = مجموعه اعداد اول یک رقمی

که یک مجموعه چهار عضوی و متناهی است.

نکته: ✓

تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و با بعضی امکانات می‌توان تعداد آنها را به‌دست آورد. مانند تعداد ماشین‌های سواری شهر تهران، مجموعه انسان‌های روی زمین، مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب (عدد آووگادرو)، مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع:

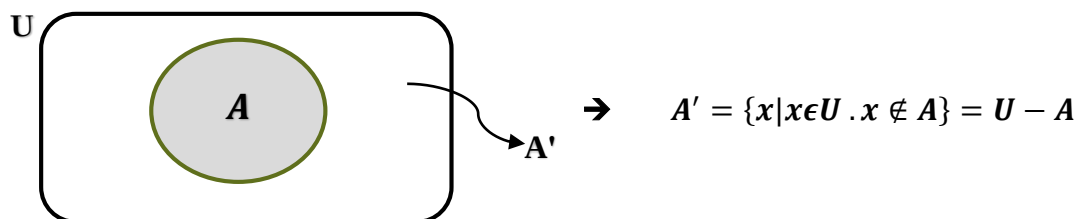
مجموعه‌ای است که تمام اعضای مجموعه‌های مورد بحث از آن انتخاب می‌شوند و آن را با U یا M نشان می‌دهند.

مثال: ✎

وقتی می‌گوییم از اعداد طبیعی، مضارب 3 را انتخاب می‌کنیم، اعداد طبیعی مجموعه مرجع است.

مجموعه متمم:

متمم مجموعه A که آن را با A' نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که شامل همهٔ عضوهای U (مجموعه مرجع) به غیر از عضوهای مجموعه A است.



مثال: ✎

فرض کنید $U = \{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7\}$ مجموعه مرجع، $A = \{1. 2. 4\}$ و $B = \{3. 4. 5. 7\}$ باشند، مجموعه‌های $A' - B$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا هر یک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم.

$$A' = U - A = \{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7\} - \{1. 2. 4\} = \{3. 5. 6. 7\}$$

$$B' = U - B = \{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7\} - \{3. 4. 5. 7\} = \{1. 2. 6\}$$

$$A' - B = \{3. 5. 6. 7\} - \{3. 4. 5. 7\} = \{6\}$$

$$A' \cup B' = \{3. 5. 6. 7\} \cup \{1. 2. 6\} = \{1. 2. 3. 5. 6. 7\}$$

❖ تمرین:

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 4 و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از 4 باشد.
الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب) A چند عضو دارد؟

پ) درباره تعداد اعضای B چه می توان گفت؟

❖ تمرین:

1- دو مجموعه متناهی نام ببرید.

2- دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد.

3- دو مجموعه نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

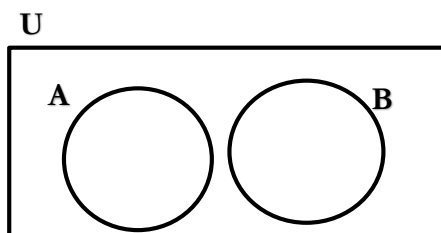
☑ نکته:

اگر A و B دو زیر مجموعه از مجموعه مرجع U باشند، آنگاه روابط زیر برقرار است.

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------|
| 1) $(A')' = A$ | 2) $A \cap A' = \emptyset$ | 3) $A \cup A' = U$ | 4) $\emptyset' = U$ |
| 5) $U' = \emptyset$ | 6) $A - B = A \cap B'$ | 7) $A - B = A - (A \cap B)$ | |
| 8) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | (قانون دمورگان) | 9) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | (قانون دمورگان) |

دو مجموعه جدا از هم:

به هر دو مجموعه که عضو مشترکی نداشته باشند دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می گوئیم. نمودار ون دو مجموعه جدا از هم به صورت مقابل است.



$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

✍ مثال:

مجموعه اعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد طبیعی زوج، دو مجموعه جدا از هم هستند.

$O = \{1, 3, 5, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی فرد

$$\Rightarrow O \cap E = \emptyset \Rightarrow O \text{ و } E \text{ دو مجموعه جدا از هم هستند.}$$

$E = \{2, 4, 6, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی زوج

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

برای مجموعه متناهی A ، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

• اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، آنگاه تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ برابر است با

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

• اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آنگاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

• اگر U مجموعه مرجع و متناهی باشد، آنگاه

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

 مثال:

در یک کلاس 30 نفره، 17 نفر عضو تیم فوتبال، 15 نفر عضو تیم والیبال و 7 نفر عضو هر دو تیم هستند.

(الف) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟

(ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی‌باشند؟

 پاسخ:

مجموعه تمام دانش آموزان را با U ، مجموعه دانش آموزان تیم فوتبال را با A و مجموعه دانش آموزان تیم والیبال را با B نشان می‌دهیم.

(الف)

$$n(A) = 17 \quad n(B) = 15 \quad n(A \cap B) = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 15 - 7 = 25$$

(ب)

$$n(U) = 30 \quad n(A \cup B) = 25 \quad \rightarrow \quad n((A \cup B)') = 30 - 25 = 5$$

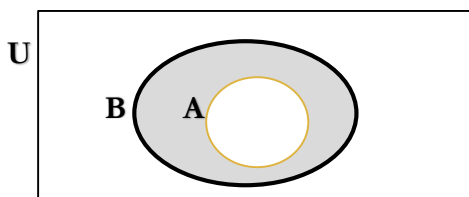
☒ نکته:

1- اگر A و B دو مجموعه متناهی و U مجموعه مرجع و متناهی باشد، آنگاه

$$1) \quad n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$2) \quad n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

2- اگر $A \subseteq B \subseteq U$ ، آنگاه $B' \subseteq A'$.



❖ تمرین:

الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه (0, 1) بنویسید.

ب) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟
پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه (0, 1) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

❖ تمرین:

در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از 5- یک مجموعه است. (متناهی-نامتناهی)

ب) مجموعه اعداد طبیعی چهار رقمی یک مجموعه است. (متناهی-نامتناهی)

پ) اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعه A و B را دو مجموعه می‌نامیم.

ت) اگر A یک مجموعه نامتناهی و B یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه $A - B$ یک مجموعه است.

ث) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

❖ تمرین:

1- فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد 5 باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید به‌طوری‌که $C \subseteq D$.

2- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی.

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد 36.

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 2\}$.

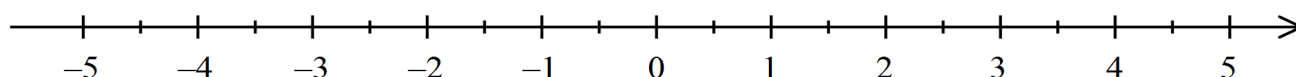
ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد 100.

ج) مجموعه اعداد طبیعی اول و دورقمی.

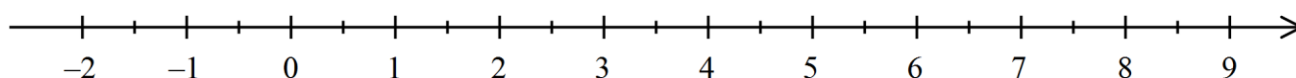
چ) مجموعه تمام مربع‌ها.

3- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید.

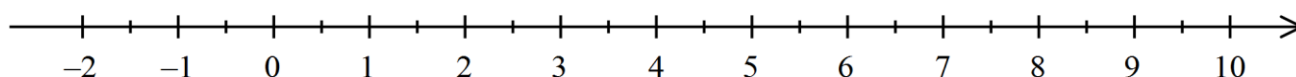
الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5]$



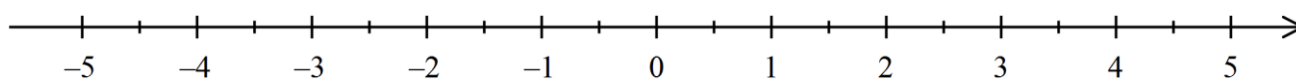
ب) $(-\infty, 6] \cap [2, 9)$



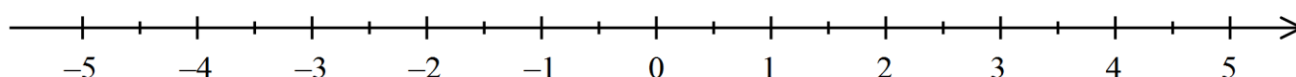
پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$



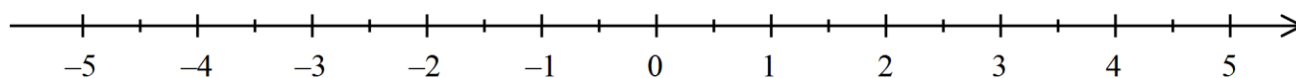
ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$



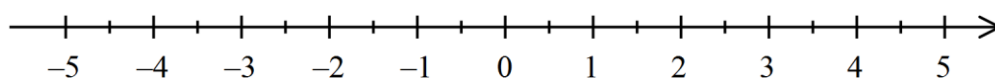
ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$



ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$

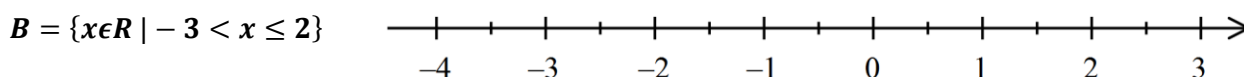
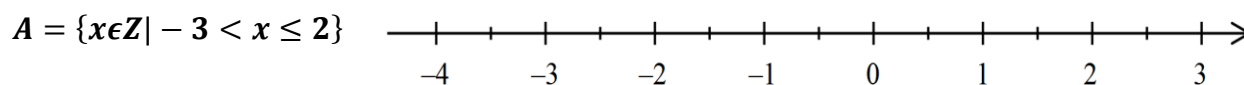


4- مجموعه $R - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



5- اگر $A \subseteq B$ مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

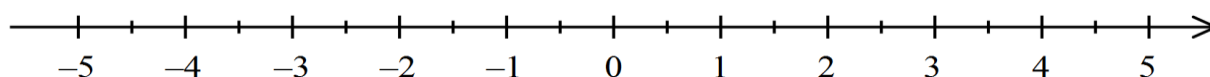
6- الف) دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور مشخص کنید.



ب) A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

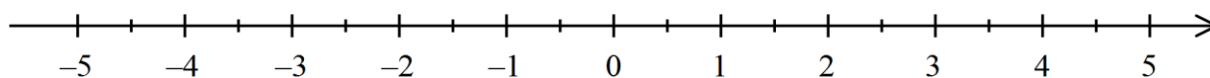
پ) در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را Z در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت) در مورد B با فرض اینکه R مجموعه مرجع باشد، B' را روی محور مشخص کنید.



7- الف) اگر Z مجموعه مرجع باشد، آنگاه N' را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب) اگر R مجموعه مرجع باشد، در این صورت N' را روی محور نمایش دهید.



8- فرض کنیم $U = \{1.2.3.4.5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1.2.3\}$ و $B = \{2.4\}$. جدول زیر را کامل کنید.

$(A')'$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	$A - B$	$A - (A \cap B)$

9- یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت 21 فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها 7 فیلم کارتونی و 8 فیلم طنز وجود دارد، بطوریکه 3 تا از فیلم های کارتونی با مضمون طنز می باشند. مطلوبست تعداد کل فیلم هایی که:
الف) کارتونی یا طنزند.

ب) غیرکارتونی و غیرطنزند.

10- اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B)$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

11- در یک نظرسنجی از 110 مشتری یک فروشگاه، مشخص شد که 70 نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و 57 نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین 32 نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده اند. چه تعداد از این 110 نفر در یک ماه گذشته:
الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند.

درس سوّم: الگو و دنباله

الگو:

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند، رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشند. در این کتاب ما با الگوهای عددی و شکلی کار می‌کنیم.

در هر الگوی عددی جمله اول را با a_1 ، جمله دوم را با a_2 و به همین ترتیب جمله n ام این الگو را با a_n نمایش می‌دهیم. a_n را جمله عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جمله عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به دست آورد.

مثال

جملات عمومی یک الگو به صورت $a_n = \frac{2n+1}{n+4}$ است.

الف) مقدار جمله دهم الگو را مشخص کنید.

$$n = 10 \quad a_n = \frac{2n+1}{n+4} \quad a_{10} = \frac{2 \times 10 + 1}{10 + 4} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

ب) جمله چندم الگو برابر $\frac{7}{4}$ است؟

$$a_n = \frac{7}{4} \quad \frac{2n+1}{n+4} = \frac{7}{4} \rightarrow 4(2n+1) = 7(n+4) \rightarrow 8n+4 = 7n+28 \rightarrow$$

$$8n - 7n = 28 - 4 \rightarrow n = 24 \rightarrow \text{جمله } 24 \text{ ام}$$

مثال

اگر جمله عمومی یک الگو به صورت $a_n = 2n^2 + 1$ باشد، سه جمله اول آن را به دست آورید.

پاسخ:

$$\text{جمله اول الگو: } a_1 = 2(1^2) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\text{جمله دوم الگو: } a_2 = 2(2^2) + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$\text{جمله سوم الگو: } a_3 = 2(3^2) + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$$

$$\text{الگو: } 3, 9, 19, \dots$$

الگوی خطی:

الگوهایی که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ باشد را با توجه به شباهت آن به معادله خط، الگوی خطی می‌نامیم. که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. t_n یک عبارت دوجمله‌ای از درجه یک بر حسب n می‌باشد.

نکته:

اختلاف هر دو جمله متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب n می باشد. که همان شیب در معادله خط است.

مثال:

در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب 9 و 23 می باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

پاسخ:

فرض می کنیم جمله عمومی الگو $t_n = an + b$ باشد. داریم

$$t_5 = a(5) + b = 9$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5a + b = 9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5a - b = -9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \rightarrow 7a = 14 \rightarrow a = 2$$

$$t_{12} = a(12) + b = 23$$

$$\xrightarrow{t_n = an + b} 5(2) + b = 9 \rightarrow b = 9 - 10 = -1 \rightarrow t_n = 2n - 1$$

الگوهای غیرخطی:

هر الگویی که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an + b$ نباشد را الگوی غیرخطی می نامیم.

مثال:

آیا الگویی با جملات $5, 8, 11, 14, \dots$ خطی است؟

پاسخ:

بله، زیرا اختلاف هر دو جمله متوالی آن، مقدار ثابت 3 است.

$$\begin{array}{ccccccc} & +3 & & +3 & & +3 & \\ 5 & . & 8 & . & 11 & . & 14 . \dots \end{array}$$

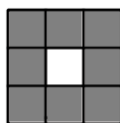
تمرین:

الف) شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



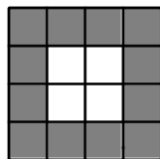
شکل 1

4 مربع رنگی



شکل 2

8 مربع رنگی



شکل 3

12 مربع رنگی

n : شماره شکل	1	2	3	4	5
b_n : تعداد مربع های رنگی	4	8			
رابطه بین b_n و n	$b_1 = 4$	$b_2 = \dots$			

ب) چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود؟

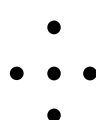
پ) با توجه به جملات الگو، مقدار a در رابطه $t_n = an + b$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار b ، حاصل t_n را به دست آورید.

ت) شکل شماره 250 دارای چند مربع رنگی است؟

ث) در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر 144 است؟

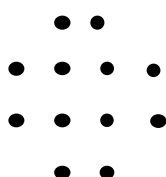
تمرین:

الف) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم و جدول را کامل کنید.



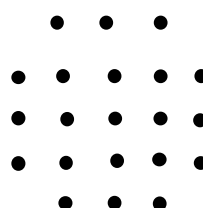
شکل 1

5 نقطه



شکل 2

12 نقطه



شکل 3

.... نقطه

n : شماره شکل	1	2	3	4	5
b_n : تعداد نقطه ها	5	12			
رابطه بین t_n و n	$t_1 = 5$	$t_2 = \dots$			

ب) آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

پ) آیا شما روشی برای یافتن t_n می شناسید؟

دنباله:

هر تعداد عدد که پشت سرهم قرار می گیرند را یک دنباله می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند. توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند.

تمرین:

جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n = n^2 - 1$: 0.3... 15.24

ب) $b_n = -n + 4$: 3.2.1.0... -2

پ) $c_n = -13 + 2n$: -11... -1... -3

تمرین:

در هر سطر جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4					$-n$	
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$						
1	4	9	16						
0.1	0.01	0.001	0.0001						
-1	8	-27	64						

دنباله های حسابی و هندسی**دنباله های حسابی:**

دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی می نامیم و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گوئیم و آن را با d نمایش می دهیم.

نکته:

1- اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی t_n باشد، آنگاه

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

2- جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

3- شکل دنباله حسابی، به صورت الگوی خطی است.

4- اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه $2b = a + c$ و عدد b را واسطه حسابی دو عدد a و c می‌گوییم.

مثال:

در دنباله حسابی زیر، جمله بیست و پنجم را مشخص کنید.

$$-5, -2, 1, \dots$$

پاسخ:

$$t_1 = -5 \quad d = t_2 - t_1 = -2 - (-5) = 3 \quad t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow t_{25} = -5 + 24 \times 3 = 67$$

مثال:

بین دو عدد 11 و 41 با جمله اول 11، پنج واسطه حسابی درج کنید.

پاسخ:

می‌خواهیم بین دو عدد 11 و 41 پنج عدد قرار دهیم به‌طوری‌که هفت عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

$$t_1 = 11 \quad t_7 = 41 \rightarrow t_1 + 6d = 41 \rightarrow 11 + 6d = 41 \rightarrow 6d = 30 \rightarrow d = 5$$

بنابراین هفت عدد حاصل به‌صورت زیر است.

$$11, 16, 21, 26, 31, 36, 41$$

تمرین:

در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به‌دست آورید.

الف) $5, 10, 15, 20, \dots$ $a_n = \dots$ $d = \dots$

ب) $1, 3, 5, 7, \dots$ $b_n = \dots$ $d = \dots$

پ) $5, 9, 13, 17, \dots$ $c_n = \dots$ $d = \dots$

ت) $13, 7, 1, -5, \dots$ $d_n = \dots$ $d = \dots$

تمرین:

A و B دو شرکت عرضه‌کننده سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم‌کارت‌های شرکت B

سیم‌کارت‌های شرکت A

هزینه ثابت ماهانه: 3000 تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه: 20 تومان

هزینه ثابت ماهانه: 2000 تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه: 30 تومان

فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	0	40	80	120	160
a_n : هزینه سیم کارت A	2000	3200			
b_n : هزینه سیم کارت B	...	3800			

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً 150 دقیقه با تلفن همراه مکالمه می کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می کنید؟ چرا؟

دنباله های هندسی:

دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می نامیم آن را با r نمایش می دهیم.

نکته:

1- در دنباله هندسی با جمله عمومی t_n داریم

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

2- جمله n ام یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

3- اگر $t_1 \cdot r > 0$ ، جملات دنباله هندسی مثبت و اگر $r < 0$ ، آنگاه جملات دنباله هندسی، یک در میان مثبت و منفی و اگر $t_1 < 0$ و $r > 0$ ، جملات دنباله هندسی منفی هستند.

4- اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2 = ac$ اعداد $b = \pm \sqrt{ac}$ را واسطه هندسی دو عدد a و c می گوئیم.

مثال 

در یک دنباله هندسی، جمله دوم $\frac{1}{3}$ و جمله پنجم 9 است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

پاسخ 

$$t_2 = t_1 r = \frac{1}{3} \quad . \quad t_5 = t_1 r^4 = 9 \quad \rightarrow \quad \frac{t_5}{t_2} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad r^3 = 27 = 3^3$$

$$r = 3 \quad . \quad t_1 r = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 3t_1 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{9}$$

مثال 

بین دو عدد 3 و 48 واسطه هندسی درج کنید.

پاسخ 

$$b^2 = ac \quad \rightarrow \quad b^2 = 3 \times 48 = 144 = 12^2 \quad \rightarrow \quad b = \pm\sqrt{12}$$

تمرین 

در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, \dots$ $a_n = \dots$

ب) $5, 10, 20, 40, \dots$ $b_n = \dots$

پ) $6, -60, 600, -6000, \dots$ $c_n = \dots$

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ $d_n = \dots$

تمرین 

جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب 12 و 96 می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

تمرین 

چند دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

تمرینات تکمیلی فصل 1

1- R را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-2, 3)$

ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

پ) $C = (0, +\infty)$

ت) $D = (-\infty, 1]$

2- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوبست:

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

پ) $n(A' \cap B)$

ت) $n(A' \cap B')$

3- در یک کلاس 31 نفری، تعداد 14 نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و 19 نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر 5 نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوبست:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

4- الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



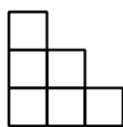
شکل 1

1 مربع



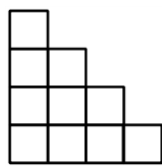
شکل 2

3 مربع



شکل 3

6 مربع



شکل 4

10 مربع

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ) a_n را بر حسب n به دست آورید.

ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

5- جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 4n$

ب) $b_n = 3n + 1$

پ) $c_n = n^2 + 2$

ت) $d_n = n^2 + n$

6- برای دنباله‌های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی دنباله را بیابید.

الف) 5. 8. 13. 20. 29. ...

ب) 5. 12. 22. 35. 51. ...

7- بین 20 و 80 به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.

20		80
----	--	----

		20				80
20						80
20						80

8- از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدر نسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

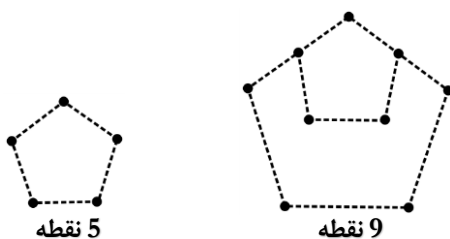
ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

9- در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20 و 56 است. دنباله را مشخص کنید.

10- در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول 3 و مجموع سه جمله بعدی آن 39 است. دنباله را مشخص کنید.

11- الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله 397 است؟

12- الف) واسطه حسابی بین 5 و 11 چه عددی است؟

ب) واسطه حسابی بین 20 و 30 چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

13- الف) بین 3 و 48 سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتا است؟

3				48
---	--	--	--	----

ب) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

10		4000
----	--	------

10			80000
----	--	--	-------

4					972
---	--	--	--	--	-----

14- یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می دهد. پس از گذشت 5 روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نمی ماند.

ب) حدوداً $\frac{1}{3}$ آن باقی می ماند.

پ) تقریباً نصف آن آب می شود.

ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می ماند.

15- از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7.28.112.448.\dots$ $d = \dots$

ب) $5.5.5.5.\dots$ $d = \dots$

پ) $1.-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.-\frac{1}{8}.\dots$ $d = \dots$

ت) $2\sqrt{5}.4\sqrt{5}.6\sqrt{5}.8\sqrt{5}.\dots$ $d = \dots$

16- علی دوچرخه ای را به قیمت 500 هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال 20 درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از 3 سال قصد فروش دوچرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

17- حاصلضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

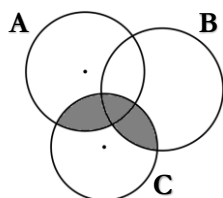
$2.4.8.\dots$

تست‌های فصل 1

1- اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند. مجموعه $(A \cup B) - [A - (A \cap B)]$ چند عضو دارد؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

2- کدام مجموعه، قسمت سایه خورده را نشان می‌دهد؟



(1) $A \cap (B \cup C)$ (2) $A \cup (B \cap C)$

(3) $C \cup (A \cap B)$ (4) $C \cap (A \cup B)$

3- اگر $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و $B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty)$ باشد، کدام گزینه زیر مجموعه $A \cap B$ است؟

- (1) $(-1, 4)$ (2) $[4, 5)$ (3) $[-4, -2)$ (4) $[-4, 5)$

4) مجموعه $\{x \in R \mid x \leq 3 \text{ یا } x > -2\}$ برابر است با:

- (1) $[-2, 3]$ (2) R (3) $R - [-2, 3)$ (4) Q

5) کدام مجموعه دارای کوچکترین عضو می‌باشد؟

- (1) $(1, 7)$ (2) $\{x \in R, x \geq 7\}$ (3) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (4) گزینه‌های (1) و (2)

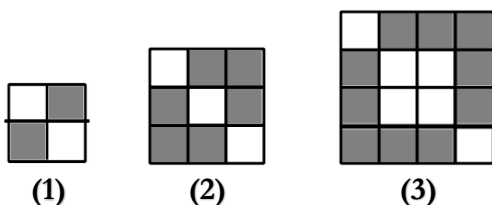
6) تعداد مسافریں در یک هتل 72 نفرند که 32 نفر آنها تاجر و 12 نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. 8 نفر از این تاجریں، برای اولین بار سفر کرده‌اند. چند نفر از مسافریں نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

- (1) 32 (2) 40 (3) 45 (4) 54

7) اگر $n(U) = 200$ ، $n(A') = 140$ ، $n(B) = 50$ و $n(A \cup B) = 98$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (1) $n(A \cap B) = 12$ (2) $n(A \cap B') = 48$ (3) $n(A' \cap B') = 98$ (4) $n(A' \cup B') = 188$

8) در الگوی مقابل، در مرحله‌ای که تعداد قطعه‌های مربعی رنگی کوچک 50 است، تعداد قطعه‌های سفید کوچک کدام است؟



- (1) 119 (2) 146

- (3) 169 (4) 196

9) جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ است. کدام جمله این دنباله برابر $\frac{5}{3}$ است؟

- (1) جمله دوم (2) جمله دوازدهم (3) جمله هفتم (4) جمله نهم

(10) جمله هشتم یک دنباله حسابی غیر ثابت دو برابر جمله سیزدهم آن است. جمله دوم آن چند برابر جمله دهم آن است؟

- (1) 1.5 برابر (2) 2.5 برابر (3) 3 برابر (4) 2 برابر

(11) در یک دنباله حسابی مجموع دو جمله اول برابر 7.5 و مجموع جملات سوم و چهارم برابر 5.5 است. قدر نسبت آن کدام است؟

- (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{4}$

(12) در دنباله هندسی $4, 6, 9, \dots$ مجموع جملات چهارم و پنجم چقدر است؟

- (1) $\frac{27}{2}$ (2) $\frac{135}{2}$ (3) $\frac{135}{4}$ (4) $\frac{81}{4}$

(13) در یک دنباله هندسی افزایشی، جمله سوم 10 و جمله هفتم 40 است. جمله اول کدام است؟

- (1) $\sqrt{5}$ (2) 25 (3) 5 (4) $\frac{5}{4}$

(14) واسه هندسی بین جمله‌های هشتم و چهاردهم دنباله هندسی $4, 8, 16, \dots$ کدام است؟

- (1) 2^{10} (2) 2^{11} (3) 2^{12} (4) 2^{13}

(15) جمله پنجم یک دنباله هندسی 2 و جمله دوم آن 54 می‌باشد. قدر نسبت این دنباله چند است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{1}{3}$

فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم: دایره مثلثاتی

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۱/۵ نمره

بارم شهریور: ۲ نمره

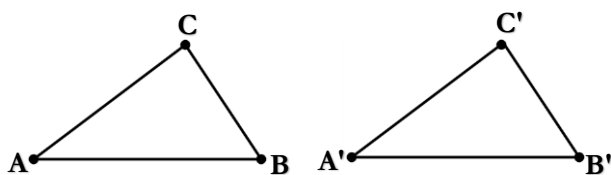
درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

تشابه:

دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.

قضیه:

هر گاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

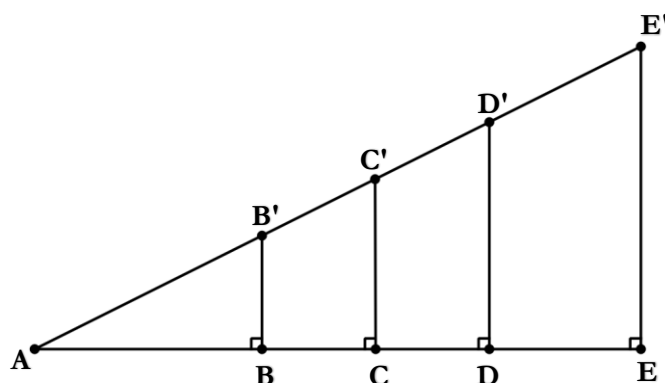


$$\widehat{B} = \widehat{B'} \quad \widehat{C} = \widehat{C'} \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{A} = \widehat{A'} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه:

در دو مثلث قائم‌الزاویه، برابری تنها یک زاویه حاده از مثلث اوّلی با یک زاویه حاده از مثلث دوّمی برای تشابه دو مثلث کافی است. (چرا؟)



در شکل بالا داریم $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در رأس A مشترکند متشابه هستند. بنابراین

$$\triangle ABB' \sim \triangle ACC' \sim \triangle ADD' \sim \triangle AEE'$$

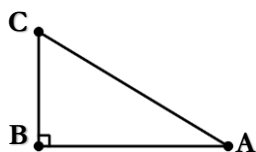
حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث‌ها بنویسیم داریم:

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} = \frac{DD'}{AD} = \frac{EE'}{AE}$$

بنابراین برای زاویه A همه این نسبت‌ها مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم.

تانژانت و کتانژانت:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، تانژانت و کتانژانت زاویه حاده A به صورت زیر تعریف می‌شود:



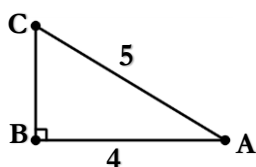
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

مثال:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، $AB = 4$ و $AC = 5$ می‌باشند. مقدار $\tan A$ و $\cot A$ را به دست آورید.

پاسخ:



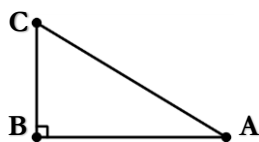
با استفاده از قضیه فیثاغورس، طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow BC = 3$$

$$\tan A = \frac{3}{4} \quad \cdot \quad \cot A = \frac{4}{3}$$

سینوس و کسینوس:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، تانژانت و کتانژانت زاویه حاده A به صورت زیر تعریف می‌شود:

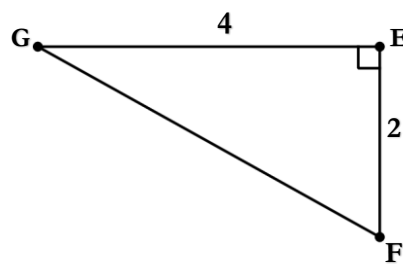
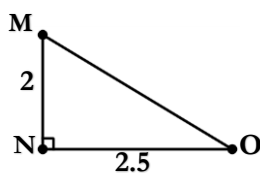
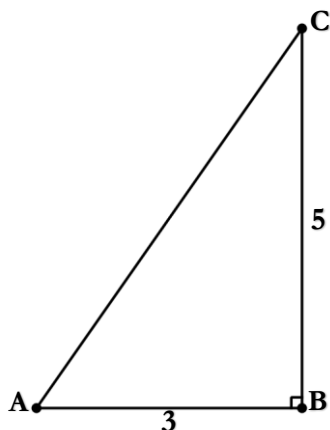


$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

مثال:

در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



پاسخ:

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

$$\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2 \cdot 5}{2}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2 \cdot 5}$$

نکته:

1- در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

2- رابطه بین $\tan A$ و $\cot A$ با $\sin A$ و $\cos A$ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$)، به صورت زیر است:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \cdot \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

3- رابطه بین $\tan A$ و $\cot A$ به صورت زیر است:

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \Rightarrow \quad \tan A \cdot \cot A = 1$$

تمرین:

مثلث متساوی الاضلاع ABC با اضلاعی به طول 2 واحد را در نظر بگیرید.

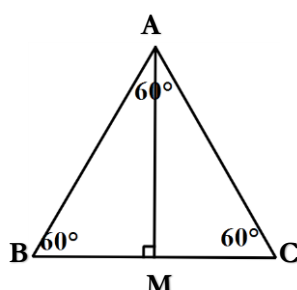
الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید.

با توجه به خواص مثلث متساوی الساقین، AM ضلع BC است.

بنابراین

$$BM = MC = \dots\dots\dots$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM را به دست آورید.



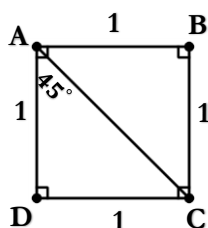
پ) حاصل کسرهای زیر را به دست آورید.

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \dots \quad \cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \dots \quad \tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \dots \quad \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \dots$$

تمرین:

مربعی با اضلاع 1 واحد را در نظر بگیرید.

الف) قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را به دست آورید.



ب) حاصل کسرهای زیر را به دست آورید.

$$\sin 45^\circ = \frac{DC}{AC} = \dots \quad \cos 45^\circ = \frac{AD}{AC} = \dots \quad \tan 45^\circ = \frac{DC}{AD} = \dots \quad \cot 45^\circ = \frac{AD}{DC} = \dots$$

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60°

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال:

مقدار عددی عبارت $3\sin 30^\circ + 4\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$3 \cdot \frac{1}{2} + 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$$

تمرین:

حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{2}\cos 45^\circ + 2\sqrt{3}\sin 60^\circ - \sqrt{3}\tan 30^\circ$

ب) $4\sqrt{2}\sin 45^\circ + 5\cot 45^\circ - 3\cos 60^\circ$

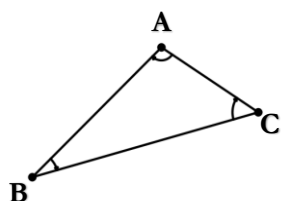
پ) $6\sin 30^\circ + \sqrt{3}(\cot 60^\circ + \tan 60^\circ)$

ت) $-\sin 60^\circ + 2\cos 30^\circ + 4\cot 30^\circ - 2\tan 45^\circ$

نکته:

مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویه بین آنها.

یعنی:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin C$$

مثال:

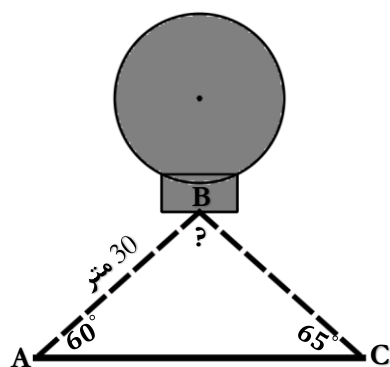
در مثلث ABC ، $AC = 4$ ، $BC = 6$ و $\hat{C} = 25^\circ$ می‌باشند. با فرض $\sin 25^\circ = 0.42$ ، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

پاسخ:

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin C = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin 25^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 0.42 = 5.04$$

تمرین:

در راه‌پیمایی 22 بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها 30 متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.



الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید.

سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

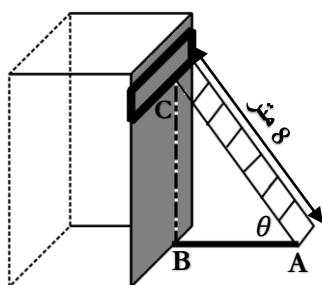
ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه 65° ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

تمرین:

نردبانی به طول 8 متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید.

فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

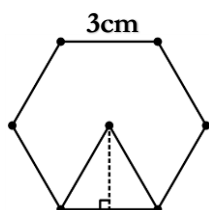


تمرین:

نسرین می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه آن 3 متر است، حساب کند. قد نسرین 1.5 متر و طول سایه او در همان لحظه 0.5 متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

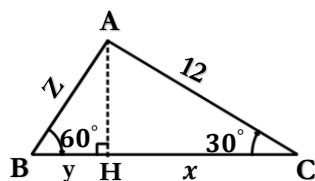
تمرین:

مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



تمرین:

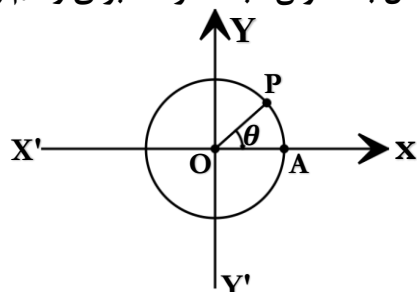
در مثلث روبرو، مقادیر x ، y و z را به دست آورید.



درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره مثلثاتی:

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک که در آن نقطه A مطابق شکل به عنوان مبدأ حرکت برای رسم زاویه در نظر گرفته شده است را دایره مثلثاتی می‌نامیم.



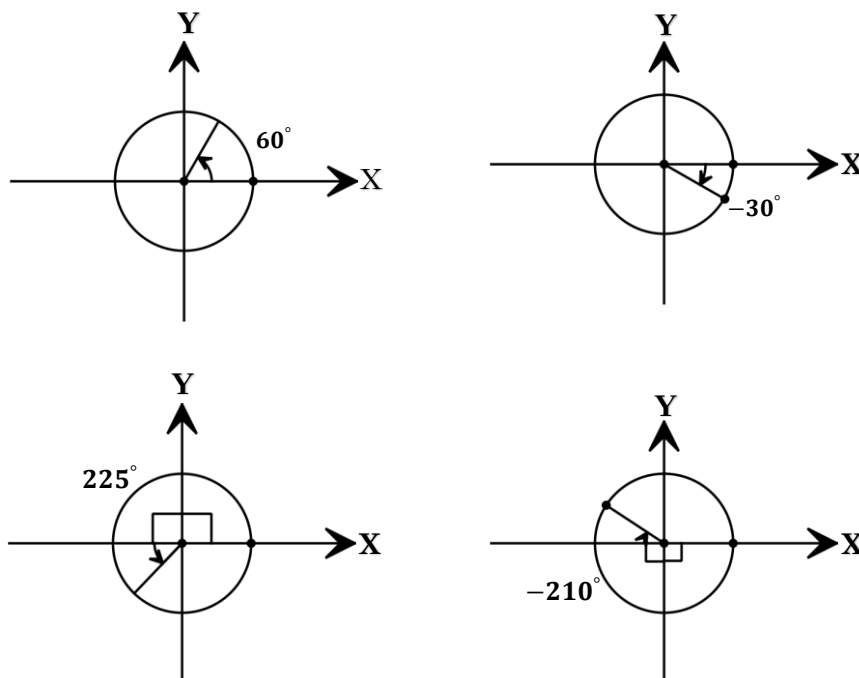
نکته:

اگر نقطه P روی دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOP مثبت و با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، زاویه AOP منفی است.

مثال:

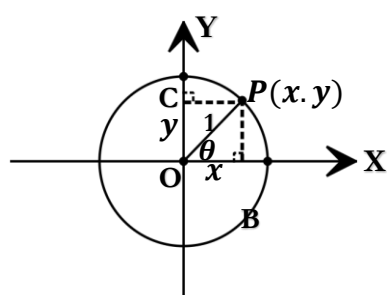
هر یک از زاویه‌های 60° ، -30° ، 225° و -210° را روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

پاسخ:



نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی:

فرض کنیم $P(x, y)$ نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی (دایره‌ای که شعاع آن یک است) بوده و θ زاویه‌ای باشد که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطه P ، خطوط PB و PC را بر محورهای Ox و Oy عمود می‌کنیم. در این صورت:



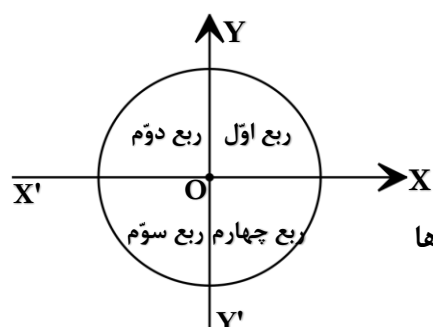
$$\sin \theta = \frac{PB}{OP} = PB = y \quad \cdot \quad \cos \theta = \frac{OB}{OP} = OB = x$$

$$\tan \theta = \frac{PB}{OB} = \frac{y}{x} \quad \cdot \quad \cot \theta = \frac{OB}{PB} = \frac{x}{y}$$

بنابراین داریم:

$$P(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

نکته:



1- برای هر زاویه دلخواه θ ، داریم

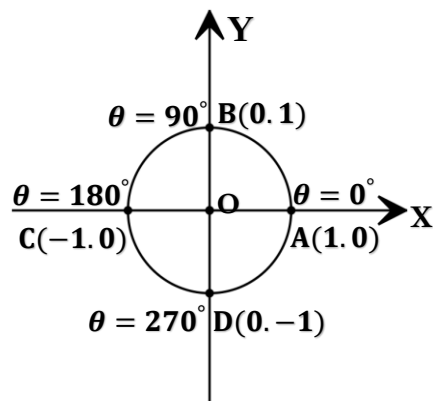
$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad \cdot \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

2- محور $X'OX$ یا محور X ها را محور کسینوس ها و محور $Y'OY$ یا محور Y ها

را محور سینوس ها می‌نامیم.

3- دو محور عمود بر هم $X'OY$ و $Y'OY$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند که هر یک از آنها را یک ربع مثلثاتی می گوئیم. با توجه به دایره مثلثاتی، ناحیه XOY را ربع اول، ناحیه $X'OY$ را ربع دوم، ناحیه $X'OY'$ را ربع سوم و ناحیه XOY' را ربع چهارم مثلثاتی می نامیم.

4- زاویه های $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم.



مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360°

مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

جدول زیر علامت نسبت های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی نشان می دهد.

مقدار	ربع اول $x > 0, y > 0$	ربع دوم $x < 0, y > 0$	ربع سوم $x < 0, y < 0$	ربع چهارم $x > 0, y < 0$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

مثال:

اگر $\sin \theta > 0$ و $\tan \theta > 0$ ، آن گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

پاسخ:

با توجه به جدول فوق، θ در ربع اول قرار دارد.

تمرین ۱

فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. می دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin \theta = \dots$

الف) مختصات نقطه P را به دست آورید.

ب) سایر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

تمرین ۲

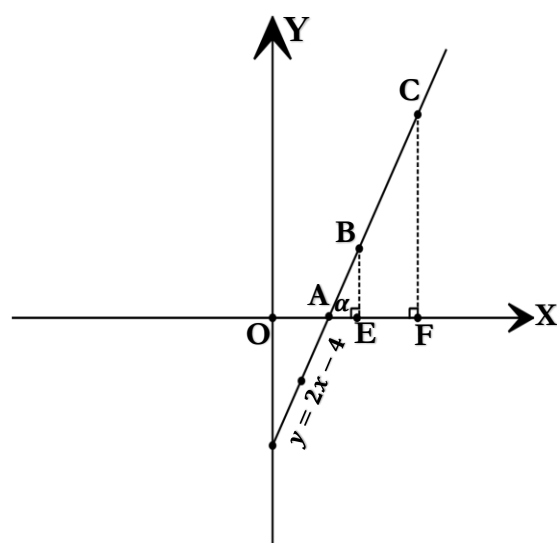
اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه ای که α در آن قرار می گیرد، بحث کنید.

تمرین ۳

زاویه ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

تمرین ۴

نمودار خط $y = 2x - 4$ در شکل روبه رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط در نظر بگیرید و خطی از آنها



به محور X ها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب E و F بنامید.

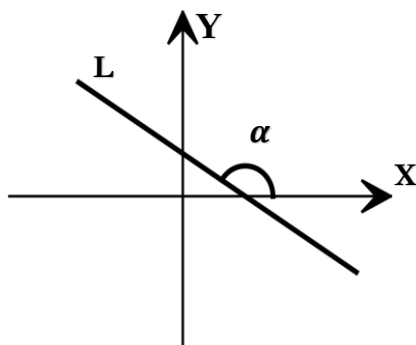
الف) تانژانت زاویه α را به دست آورید.

ب) شب این خط را پیدا کنید.

پ) از مقایسه قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه ای می گیرید؟

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه:

شیب هر خطی که محور افقی را قطع می کند، برابر تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی و در جهت مثلثاتی است. به عبارت دیگر، اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد، آنگاه:



$$\tan \alpha = \text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}}$$

مثال:

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور X ها 45° است و از نقطه $(2, -1)$ می گذرد.

پاسخ:

$$m = \tan 45^\circ = 1 \quad A(2, -1)$$

$$\rightarrow y + 1 = 1(x - 2) \rightarrow y = x - 3$$

یادآوری

معادله خطی که از نقطه $A(x_1, y_1)$ می گذرد و شیب آن m باشد، به صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ است.

نکته:

- 1- درحالتی که شیب خط عددی منفی شود، زاویه را منفرجه در نظر می گیریم.
- 2- درحالتی که خط موازی محور Y ها است، زاویه 90° و شیب تعریف نمی شود.
- 3- درحالتی که خط موازی محور X ها است، زاویه 0° و شیب صفر است.

تمرین:

شیب خط های زیر را با استفاده از تانژانت زاویه به دست آورید.

الف) $2y - 3x = 5$

ب) $x + y = 2$

❖ تمرین:

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور X ها 30° است و از نقطه $(1, 0)$ می گذرد.

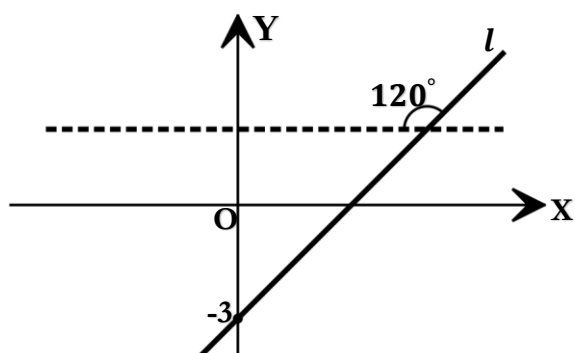
❖ تمرین:

هر یک از زاویه های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد.

الف) 270° ب) -135° پ) 185° ت) -240°

❖ تمرین:

با توجه به شکل زیر، معادله خط l را به دست آورید.



❖ تمرین:

مشخص کنید هر یک از زاویه های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می گیرد؟

الف) -30° ب) 65° پ) 182° ت) -95°

❖ تمرین:

معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور X ها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

قرارداد:

اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$(\sin \alpha)^n = \underbrace{\sin \alpha \times \sin \alpha \times \cdots \times \sin \alpha}_n = \sin^n \alpha$$

به همین ترتیب داریم:

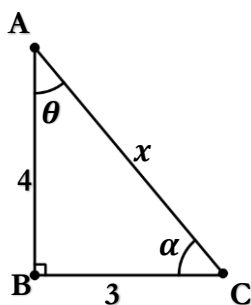
$$(\cos \alpha)^n = \cos^n \alpha$$

$$(\tan \alpha)^n = \tan^n \alpha$$

$$(\cot \alpha)^n = \cot^n \alpha$$

تمرین:

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر بگیرید.



الف) اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AC} = \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \dots$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \dots$$

$$\cot \alpha = \frac{BC}{AB} = \dots$$

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \dots$$

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \dots$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \dots$$

$$\cot \theta = \frac{AB}{BC} = \dots$$

ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت الف) مقدار $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ و $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ را به دست آورید.

پ) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \dots$$

ت) مشابه قسمت پ) درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را بررسی کنید.

روابط مهم مثلثاتی:

اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$1) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha \neq 0$$

$$2) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha \neq 0$$

$$3) \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \text{یا} \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$4) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$5) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha \neq 0$$

$$6) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha \neq 0$$

نکته: 

در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α ، با توجه به ناحیه‌ای که زاویه α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال: 

اگر α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

پاسخ:

در ناحیه دوم مثلثاتی، $\sin \alpha$ عددی مثبت است. بنابراین

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

اتحاد مثلثاتی:

هر یک از تساوی‌های $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha \neq 0$ را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

نکته:

هر گاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می توانیم یک طرف تساوی را نوشته و با توجه به روابط بین نسبت های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم.

مثال:

درستی اتحاد مثلثاتی $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ و } (2) \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \\ &= (1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha) + (1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha) = 2 \end{aligned}$$

تمرین:

با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

ب) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

تمرین:

کدام یک از تساوی های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

تمرین:

با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ در $\cot \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید. سپس درستی آن را اثبات کنید.

تمرینات تکمیلی فصل 2

1- فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

2- اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

3- اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

4- اگر $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 240° را به دست آورید.

5- در هر یک از موارد زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

(الف) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ (α در ربع چهارم)

ب) $\sin \beta = -\frac{1}{2}$ (β در ربع سوم)

6- اگر $\cot \alpha = \frac{2}{5}$ مقدار $\frac{3\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha}$ را به دست آورید.

7- اگر $\tan \theta$ و $\sin \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

8- اگر $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل $\sin \alpha \cos \alpha$ را به دست آورید.

9- اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟

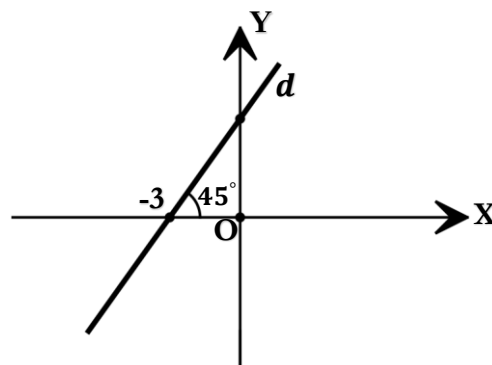
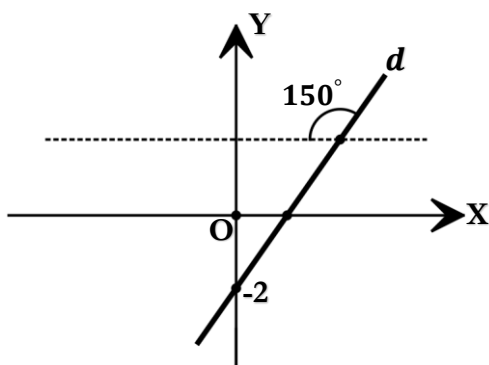
10- حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta > 0$. $\cos \theta > 0$

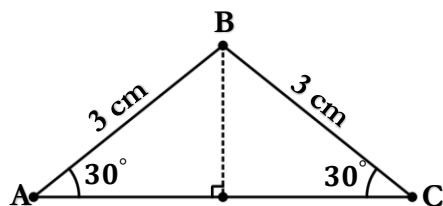
ب) $\sin \theta < 0$. $\cos \theta > 0$

11- فرض کنیم α زاویه ای است که خط $2y + x = 4$ با جهت مثبت محور X ها می سازد. نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

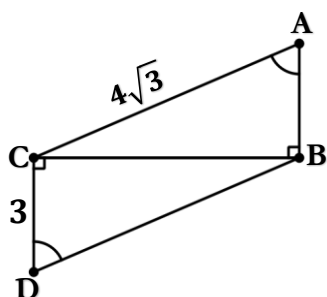
12- با توجه به شکل های داده شده، معادله خط d را بنویسید.



13- مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



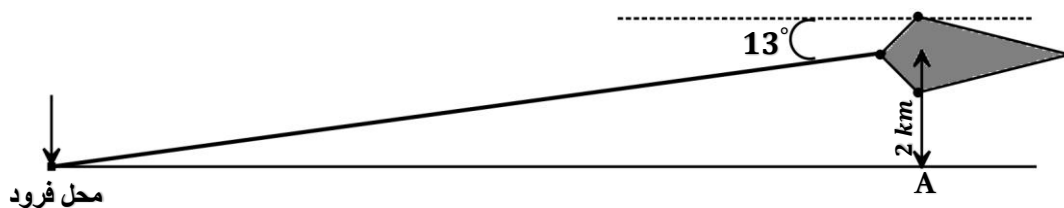
14- فرض کنید $\sin 75^\circ \simeq 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



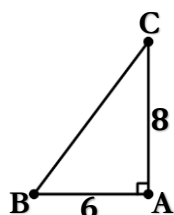
15- در شکل روبرو نسبت‌های مثلثاتی زاویه D را به دست آورید.

16- یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید؟

$$(\tan 13^\circ \simeq 0.23)$$



تست‌های فصل 2



(1) در شکل مقابل، حاصل $\sin B + \cos C$ کدام است؟

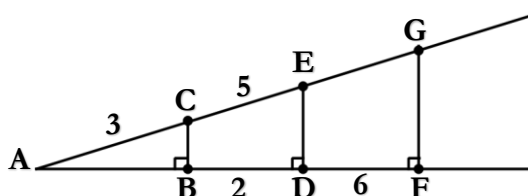
$1 \cdot 8$ (2) $1 \cdot 6$ (1)

$1 \cdot 2$ (4) $1 \cdot 4$ (3)

(2) با توجه به شکل مقابل، $\sin G$ کدام است؟

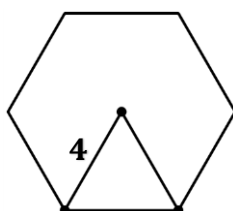
$\frac{2}{3}$ (2) $\frac{5}{6}$ (1)

$\frac{2}{5}$ (4) $\frac{3}{5}$ (3)



(4) شخصی با قد 180 سانتی‌متر در فاصله $2 \cdot 5$ متری یک تیر چراغ برق به ارتفاع 3 متر ایستاده است. این شخص چند سانتی‌متر به تیر نزدیک شود تا سایه‌اش 2 برابر قدش شود؟

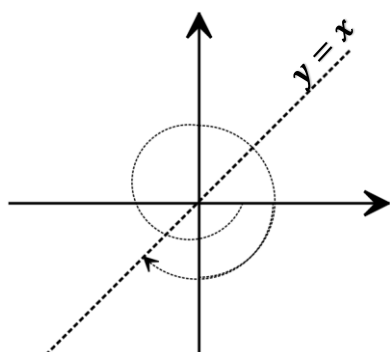
40 (4) 30 (3) 20 (2) 10 (1)



(5) مساحت شش ضلعی منتظم مقابل کدام است؟

$20\sqrt{3}$ (2) $16\sqrt{3}$ (1)

$28\sqrt{3}$ (4) $24\sqrt{3}$ (3)

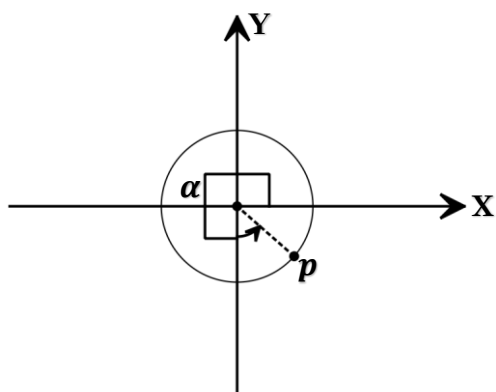


(6) شکل مقابل بیانگر کدام زاویه است؟

-135° (2) 135° (1)

-495° (4) 495° (3)

(7) اگر $p(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{2}{\sqrt{5}})$ روی دایره مثلثاتی واقع باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

$$\cot \alpha = -\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

(8) اگر $\cos \theta = \frac{1}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

$$-2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$-2\sqrt{6} \quad (3)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$2\sqrt{6} \quad (1)$$

(9) اگر $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، $\cot \alpha$ کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

(10) عبارت $\tan^2 x - \sin^2 x$ برابر است با:

$$\cot^2 x \cos^2 x \quad (4)$$

$$\cot^2 x \sin^2 x \quad (3)$$

$$\tan^2 x \cos^2 x \quad (2)$$

$$\tan^2 x \sin^2 x \quad (1)$$

(11) حاصل عبارت $\frac{\tan x}{1+\tan x} - \frac{\cot x}{1+\tan x}$ برابر کدام است؟

$$1 - \cos x \quad (4)$$

$$1 - \sin x \quad (3)$$

$$1 - \cot x \quad (2)$$

$$1 - \tan x \quad (1)$$

(12) ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 x) \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - (1 - \cos x)^2$ کدام است؟

$$2\cos x \quad (4)$$

$$-\cos^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x \quad (2)$$

$$\sin^2 x \quad (1)$$

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اوّل: ریشه و توان

درس دوّم: ریشه n ام

درس سوّم: توان‌های گویا

درس چهارم: عبارت‌های جبری

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۲ نمره

بارم شهریور: ۲/۵ نمره

درس اول: ریشه و توان

ریشه دوم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی و b یک عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی صفر باشد. اگر $a^2 = b$ باشد، آن گاه a را ریشه دوم عدد b می‌گوییم.

نکته:

1- هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه دوم می‌باشد. اگر $a^2 = b$ و $b > 0$ ، آن گاه $\pm\sqrt{b}$ ریشه‌های دوم عدد b هستند. یعنی

$$a^2 = b \quad b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{b}$$

2- عدد حقیقی صفر فقط یک ریشه دوم برابر صفر دارد و اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

3- علامت $(\Rightarrow)$ را «نتیجه می‌دهد» و علامت $(\Leftrightarrow)$ را «معادل است با» می‌خوانیم. به عبارتی علامت $(\Leftrightarrow)$ به معنای آن است که سمت چپ، سمت راست و سمت راست، سمت چپ را نتیجه می‌دهد.

مثال:

$\sqrt{0.01} = 0.1 \Leftrightarrow (0.1)^2 = 0.01$ به معنای آن است که از تساوی $(0.1)^2 = 0.01$ می‌توان تساوی $\sqrt{0.01} = 0.1$ و از تساوی $\sqrt{0.01} = 0.1$ می‌توان تساوی $(0.1)^2 = 0.01$ را نتیجه گرفت.

ریشه سوم:

اگر a و b دو عدد حقیقی و $a^3 = b$ باشد، a را ریشه سوم عدد b می‌گوییم و آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.

نکته:

تمام اعداد حقیقی ریشه سوم دارند و هر عدد حقیقی فقط یک ریشه سوم دارد که علامت آن با علامت خود عدد یکی است.

ریشه‌های چهارم و پنجم:

مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه‌ها چهارم و پنجم اعداد را تعریف کرد.

مثال:

ریشه‌های چهارم عدد $0 \cdot 0016$ ، برابر با $\pm 0 \cdot 2$ می‌باشند، زیرا $(-0 \cdot 2)^2 = 0 \cdot 0016$ و $(0 \cdot 2)^2 = 0 \cdot 0016$.
هم‌چنین:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

تمرین:

مانند نمونه کامل کنید.

$(-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81$
$(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow$	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$2^4 = 16 \Leftrightarrow$	$\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow$
$11^2 = 121 \Leftrightarrow$	$\sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow$
$(0 \cdot 25)^2 = 0 \cdot 0625 \Leftrightarrow$	$\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$(0 \cdot 5)^3 = 0 \cdot 25 \Leftrightarrow$	$\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

تمرین:

در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	8	27	-27				1000	729
ریشه سوّم			-3	5	-10	15		

تمرین:

حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر 25 متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید.

یادآوری

هر گاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است.

مقدار تقریبی:

اعدادی مانند $\sqrt[3]{42}$ ، اعدادی اعشاری هستند که هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. البته با ماشین حساب‌های قوی می‌توان تعداد ارقام بیشتری به دست آورد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم 42 پیدا کرد.

در مثال زیر، مقدار تقریبی عدد $\sqrt[3]{42}$ را می‌بینید که از همین روش می‌توانید برای به دست آوردن مقدار تقریبی سایر عددها نیز استفاده کنید.

مثال:

مقدار تقریبی عدد $\sqrt[3]{42}$ را به دست آورید.

پاسخ:

می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[3]{42}$ را با یک رقم اعشار به دست آوریم. با توجه به اینکه عدد 42 بین دو عدد $3^3 = 27$ و $4^3 = 64$ قرار دارد، بنابراین عدد $\sqrt[3]{42}$ بین دو عدد 3 و 4 قرار می‌گیرد و چون عدد 42 به عدد 27 نزدیک‌تر است، پس عدد $\sqrt[3]{42}$ به 3 نزدیک‌تر است تا به عدد 4. با محاسبه $(3 \cdot 1)^3$ ، $(3 \cdot 2)^3$ و... مقدار تقریبی $\sqrt[3]{42}$ را پیدا می‌کنیم:

$$(3 \cdot 1)^3 = 3 \cdot 1 \times 3 \cdot 1 \times 3 \cdot 1 = 27 \cdot 791$$

$$(3 \cdot 2)^3 = 3 \cdot 2 \times 3 \cdot 2 \times 3 \cdot 2 = 32 \cdot 768$$

$$(3 \cdot 3)^3 = 3 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 = 35 \cdot 937$$

$$(3 \cdot 4)^3 = 3 \cdot 4 \times 3 \cdot 4 \times 3 \cdot 4 = 39 \cdot 304$$

$$(3 \cdot 5)^3 = 3 \cdot 5 \times 3 \cdot 5 \times 3 \cdot 5 = 42 \cdot 875$$

بنابراین عدد $(3 \cdot 5)^3$ ، نزدیک‌ترین عدد با یک رقم اعشار به 42 است. یعنی $\sqrt[3]{42} \approx 3 \cdot 5$.

توجه کنید که $\sqrt[3]{42}$ به جای مقدار دقیق ریشه سوم عدد 42 به کار می‌رود، اما در عمل با مقادیر تقریبی آن کار می‌کنیم.

تمرین:

جاهای خالی را کامل کنید.

الف) اعداد 4 و ریشه‌های چهارم عدد می‌باشند.

ب) هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که یک‌دیگرند.

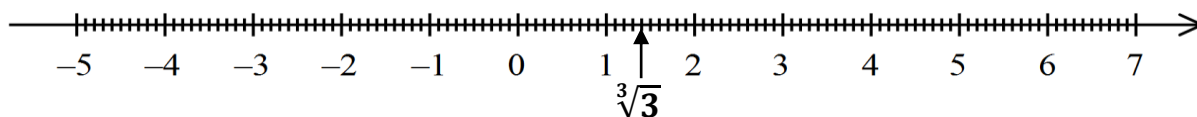
پ) هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن و اگر عدد باشد، ریشه پنجم آن منفی است.

ت) $\sqrt[3]{-4}$ یک عبارت است.

تمرین:

مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید.

$$\sqrt[3]{1} = \dots \quad \sqrt[3]{3} \simeq 1.4 \quad \sqrt[3]{4} \simeq \dots \quad \sqrt[3]{125} = \dots \quad \sqrt[3]{-8} = \dots$$



تمرین:

مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:

الف) چون $25 < 30 < 36$ پس $5 < \sqrt{30} < 6$. همچنین چون $1 < 5 < 8$ پس $1 < \sqrt[3]{5} < 2$.

ب) $\dots < \sqrt{7} < \dots$

پ) $\dots < \sqrt{10} < \dots$

ت) $\dots < \sqrt[3]{-17} < \dots$

ث) $\dots < \sqrt[3]{20} < \dots$

تمرین:

در جای خالی عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی برقرار باشد.

الف) $4 < \sqrt{\dots} < 5$ ب) $9 < \sqrt[3]{\dots} < 10$

تمرین:

جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	16		625		10000		3125			
ریشه‌های چهارم	2	-2	5	-5			$5\sqrt[3]{5}$			

تمرین:

جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-32		71	-243			19	
ریشه پنجم	-2	5			-1	-10		

تمرین ۲:

نظیر هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی و نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید.

$$1) (0 \cdot 15)^2 = 0 \cdot 0225$$

$$2) (-0 \cdot 1)^3 = -0 \cdot 001$$

$$3) \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$4) \sqrt{\frac{49}{4}} = 3 \cdot 5$$

$$5) \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

تمرین ۳:

الف) ریشه پنجم چه عددی با خودش برابر است؟

ب) اگر $\sqrt[4]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ را بیابید.

تمرین ۴:

برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16}$$

$$\sqrt{20}$$

$$\sqrt[5]{-32}$$

$$\sqrt{75}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$$

$$\sqrt[3]{20}$$

$$-\sqrt{35}$$

$$\sqrt[3]{-90}$$

$$\sqrt[3]{250}$$

$$\sqrt[5]{-0 \cdot 00032}$$

$$-\sqrt[4]{20}$$

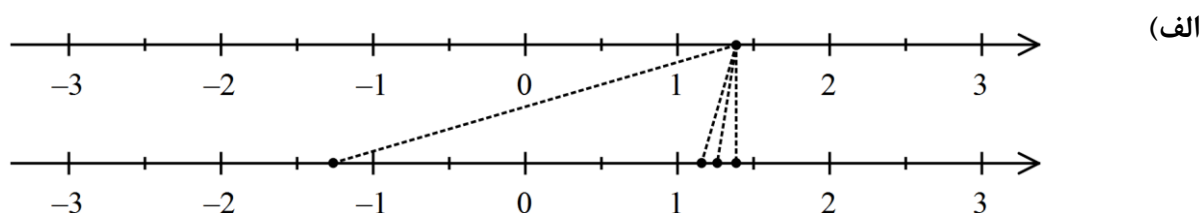
$$-\sqrt[4]{120}$$

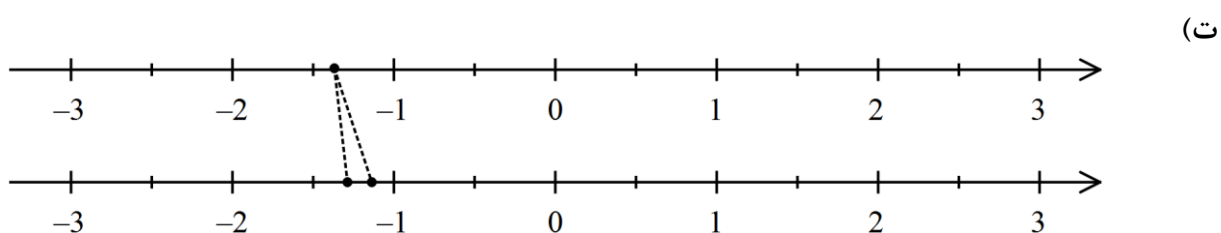
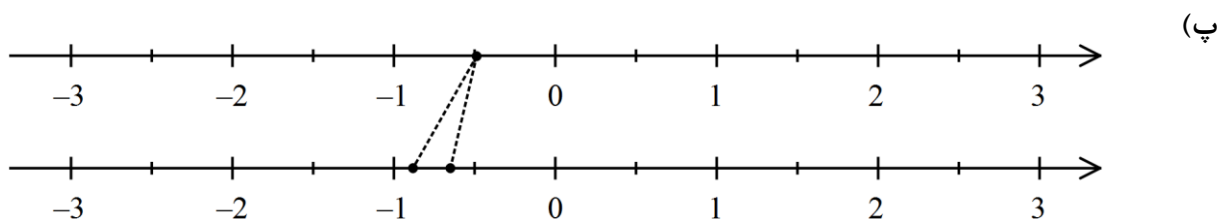
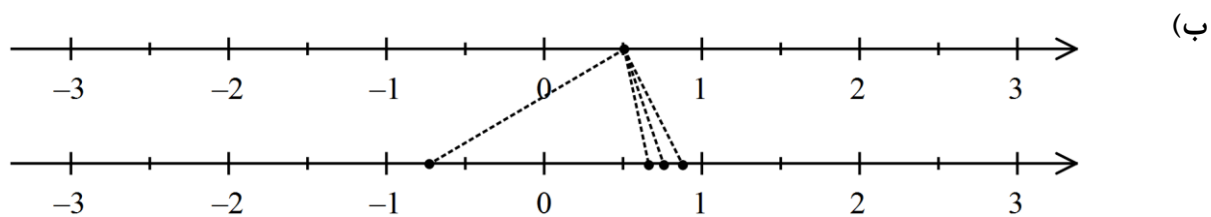
$$\sqrt[5]{400}$$

$$\sqrt[4]{400}$$

تمرین ۵:

در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر نقطه در محور پایین مربوط به کدام ریشه است؟





❖ تمرین:

مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید.

$$\sqrt{10}$$

$$\sqrt[5]{16}$$

$$\sqrt[3]{25}$$

$$\sqrt[5]{64}$$

$$\sqrt[3]{7 \cdot 25}$$

$$\sqrt[4]{90}$$

❖ تمرین:

در جاهای خالی یکی از علامت‌های « $>$ »، « $<$ »، یا « $=$ » را قرار دهید.

$$(-0 \cdot 1)^5 \bigcirc (-0 \cdot 1)^3$$

$$(0 \cdot 1)^5 \bigcirc (0 \cdot 1)^3$$

$$2^5 \bigcirc 2^2$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$$

$$(-2)^5 \bigcirc (-2)^3$$

$$\sqrt[5]{0 \cdot 00001} \bigcirc 0 \cdot 1$$

❖ تمرین:

می‌دانیم $11 = \sqrt[5]{161051}$ ، $\sqrt[5]{170000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

درس دوم: ریشه n ام

ریشه n ام:

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم، هرگاه $b^n = a$.

نکته:

1- اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه a دارای دو ریشه n ام به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

2- اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه a دارای یک ریشه n ام به صورت $\sqrt[n]{a}$ است.

3- اگر a یک عدد حقیقی منفی باشد، آن‌گاه

الف) اگر n زوج باشد، آن‌گاه a ریشه n ام ندارد.

ب) اگر n فرد باشد، آن‌گاه a فقط یک ریشه n ام منفی دارد.

4- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه ریشه n ام عدد صفر برابر صفر است.

قرارداد

هرگاه n زوج باشد و بنویسیم $\sqrt[n]{a}$ ، آن‌گاه a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم. (ریشه‌های زوج برای اعداد منفی بی‌معنی هستند)

تمرین:

جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد 64 است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ $-\sqrt{64} = -8$		$\sqrt[4]{64}$ $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$			

تمرین:

جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد -64 است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$			

تمرین:

حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\begin{array}{llll} \sqrt[3]{125} = & \sqrt[5]{-32} = & \sqrt[7]{128} = & \sqrt[8]{256} = \\ \sqrt[9]{-1} = & \sqrt[4]{625} = & -\sqrt[4]{16} = & \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \\ \sqrt[7]{-128} = & \sqrt[3]{-0.001} = & -\sqrt{1} = & \sqrt[6]{0} = \end{array}$$

تمرین:

الف) یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ را در $\bigcirc$ قرار دهید.

$$(0.5)^2 \bigcirc (0.5)^3 \qquad \sqrt{0.125} \bigcirc \sqrt[3]{0.125}$$

ب) وقتی است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\bigcirc$ قرار دهید.

$$a^2 \bigcirc a^3 \qquad \sqrt{a} \bigcirc \sqrt[3]{a}$$

قواعد ریشه:

1- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

-2

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

(وقتی n زوج است، a و b نباید اعداد منفی باشند و در حالتی که n فرد است، a و b می‌توانند هر عدد حقیقی دلخواه باشند.)

$$\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m \qquad -3$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad ; \qquad \begin{cases} k \text{ زوج} & a > 0 \\ k \text{ فرد} & a \in R \end{cases} \qquad -4$$

5- اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

مثال:

$$\text{الف)} \quad \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \times 9} = \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

$$\text{ب)} \quad \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{-1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{(-1)^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{ت)} \quad \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$$

تمرین:

آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر 3، 4 یا 5 بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

تمرین:

آیا $(\sqrt[3]{2})^5$ و $\sqrt[3]{2^5}$ با هم برابرند؟ درباره $(\sqrt[4]{-2})^4$ و $\sqrt[4]{(-2)^4}$ چه می توان گفت؟

تمرین:

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \quad \sqrt{48} \times \sqrt{12}$$

$$\text{ب)} \quad \sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{54}$$

$$\text{پ)} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{32}} \times \sqrt[4]{2}$$

$$\text{ت)} \quad \sqrt[5]{-27} \times \sqrt[5]{-288}$$

$$\text{ث)} \quad \sqrt[6]{180} \times \sqrt[6]{5^5 \times 1296}$$

$$\text{ج)} \quad \sqrt[3]{90} \times \sqrt[3]{300}$$

$$\text{چ)} \quad \sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} + \sqrt[5]{(2-\sqrt{2})^5}$$

$$\text{ح)} \quad \sqrt{3-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

درس سوّم: توان‌های گویا

تعریف:

برای هر عدد طبیعی $n, n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

تعریف:

هرگاه $a \geq 0$ ، برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تذکر مهم

عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{5}}$ ، $(-3)^{\frac{2}{8}}$ و... که در آن‌ها پایه a منفی است، تعریف نشده‌اند.

تمرین:

توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$3^{\frac{2}{7}} =$$

$$4^{\frac{1}{4}} =$$

$$5^{\frac{2}{5}} =$$

$$5^{\frac{1}{2}} =$$

$$2^{\frac{7}{2}} =$$

$$(-3)^{\frac{2}{5}} =$$

$$(-6)^{\frac{2}{7}} =$$

$$(81)^{\frac{1}{4}} =$$

$$(-5)^{\frac{1}{4}} =$$

تمرین:

کدام درست است؟

الف) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$

ب) $\sqrt[5]{-32} = -2$

قواعد توان:

قواعد توان، برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار است. اگر r و s دو عدد گویا و $a > 0$ باشد، آن گاه

$$\begin{array}{lll} 1) a^r \times a^s = a^{r+s} & 2) a^r \times b^r = (ab)^r & 3) a^r \div a^s = a^{r-s} \\ 4) a^r \div b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r, b > 0 & 5) (a^r)^s = a^{rs} & 6) 1^r = 1 \quad 7) a^{-r} = \frac{1}{a^r} \end{array}$$

مثال 

عبارت زیر را به صورت یک عبارت رادیکالی بنویسید.

$$\frac{2^{\frac{4}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{2}{3}}}$$

پاسخ:

$$\frac{2^{\frac{4}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{5}} \times \frac{6^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{5}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{5}} \times \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{2^2} = \sqrt[15]{4}$$

تمرین:

تساوی های زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\begin{array}{llll} 4^{\frac{1}{5}} = & 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = & 4^{\frac{7}{5}} = & (4 \times 2)^{\frac{1}{3}} = \\ 5^{\frac{4}{3}} = & (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} = & 6^{\frac{3}{8}} = & 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = \\ 32^{\frac{2}{5}} = & 32^{-\frac{1}{5}} = & 17^{-\frac{1}{2}} = & a^{\frac{2}{7}} = \end{array}$$

تمرین:

رادیکال ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\begin{array}{llll} \sqrt[7]{3^2} = & \sqrt{2^5} = & \sqrt[3]{7^2} = & \sqrt[3]{-1} = \\ \sqrt[5]{19} = & \sqrt[5]{64} = & \sqrt[3]{-27} = & \sqrt[5]{2^5} = \\ \sqrt[7]{a} = & \sqrt[4]{a^3} = & \sqrt[n]{a^2} = & \sqrt[5]{2^{10}} = \end{array}$$

نکته:

1- اگر a و b دو عدد مثبت و k, n, m سه عدد طبیعی باشند، آن گاه

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \\ 2) a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \\ 3) \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}} \end{array}$$

تمرین:

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{lll} \sqrt[3]{\sqrt{5}} = & \sqrt{\sqrt[3]{64}} = & \sqrt{\sqrt{81}} = \\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{32}} = & \sqrt[5]{\sqrt{2}} = & \sqrt[3]{625} = \\ \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = & \sqrt[3]{\sqrt[3]{4}} = & \sqrt[5]{3\sqrt{2}} = \\ \sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}} = & \sqrt[3]{-2\sqrt[5]{2}} = & \sqrt[3]{\sqrt{27}} = \\ \sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{8} = & & \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}} = \end{array}$$

تمرین:

عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$(5^{-\frac{3}{2}})^{\frac{6}{5}} = \quad \quad \quad 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}} =$$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

اتحاد جبری:

اگر دو عبارت به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

نام اتحاد	اتحاد اصلی	اتحاد فرعی
اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
اتحاد مربع سه جمله‌ای	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
اتحاد مزدوج	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	
اتحاد جمله مشترک	$(a + x)(a + y) = a^2 + (x + y)b + xy$	
اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	
اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	

مثال:

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(2x - 5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$

ب) $(2 - x + y)^2 = 2^2 + (-x)^2 + y^2 + 2(2)(-x) + 2(2)(y) + 2(-x)(y)$
 $= 4 + x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2xy$

پ) $(x - 0 \cdot 1)(x + 0 \cdot 1) = x^2 - (0 \cdot 1)^2 = x^2 - 0 \cdot 01$

ت) $(2y - x)(2y + x) = (2y)^2 + (-x + 5y)(2y) + (-x)(5x) = 4y^2 + 8xy - 5x^2$

ث) $(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

ج) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$

تمرین:

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(4xy + 3)^2 =$

ب) $(x - 2y + 1)^2 =$

پ) $(x + 5y^2)(x - 5y^2) =$

ت) $(x^2 + y)(x^2 - 3y) =$

ث) $(4x + y^2)^3 =$

ج) $(x - 1)(x^2 + x + 1) =$

چ) $(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9) =$

ح) $(5x - 1)^3 =$

تجزیه:

عمل تبدیل یک چندجمله‌ای به حاصل ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای را تجزیه می‌گوییم.

تجزیه عبارت‌های جبری می‌تواند با روش فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها و یا دسته‌بندی مناسب جملات انجام شود.

مثال:

عبارت‌های $x^2 - 4y^2$ و $4x^3 - 5x^2$ را تجزیه کنید.

پاسخ:

$$\begin{array}{l} 4x^3 - 5x^2 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x^2} x^2(4x - 5) = x \times x \times (4x - 5) \\ x^2 - 4y^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - 2y)(x + 2y) \end{array}$$

مثال:

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $5x^2 + 11x + 6$

ب) $2x^3 - 6x + yx^2 - 3y$

پ) $2x^2 + 11x + 15$

پاسخ:

الف) $11x$ را به صورت $5x + 6x$ می‌نویسیم و داریم:

$$5x^2 + 11x + 6 = (5x^2 + 5x) + (6x + 6) = 5x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(5x + 6)$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \underline{2x^3} - \underline{6x} + \underline{yx^2} - \underline{3y} &= 2x(x^2 - 3) + y(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x + y) \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2x + y) \end{aligned}$$

ب) با قرار دادن $A = 2x^2 + 11x + 15$ و ضرب دو طرف تساوی در عدد 2 داریم:

$$\begin{aligned} 2A &= 4x^2 + 11(2x)x + 30 = (2x)^2 + 11(2x) + 30 = (2x + 6)(2x + 5) = 2(x + 3)(2x + 5) \\ A &= (x + 3)(2x + 5) \end{aligned}$$

عامل یا شمارنده:

هر یک از عبارت‌های ضرب در تجزیه را یک عامل یا شمارنده عبارت تجزیه شده می‌نامیم.

مثال:

در تجزیه $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ، عبارت‌های $(x + y)$ و $(x - y)$ عامل‌های $x^2 - y^2$ می‌باشند.

مضرب:

مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چندجمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر و یا هر دو به دست می‌آیند.

مثال:

$x^2 - y^2$ هم مضرب $(x + y)$ و $(x - y)$ هم مضرب است.

هم چنین

$a - b$ مضرب های $a - b$. $5(a - b)$. $(a - b)(a^2 + b^2)$. $3(a - b)(a^2 + 4ab)$

تذکر

عبارت $\sqrt{5}(a - b)$ یک مضرب $(a - b)$ محسوب نمی شود، چون ضرایب عددی باید عدد صحیح باشند.

تمرین:

عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^3 + 1$

ب) $8x^3 - 27$

پ) $x^6 - y^6$

ت) $x^4 - y^4$

ث) $x^2 + y^2$

تمرین:

به کمک اتحادها، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) 105^2

ب) 1007^2

پ) 43×37

ت) 28×32

ث) 99^2

تمرین:

عبارت $27x^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت ها است؟

$3a + 1$ (4)

$9a^2 + 3a + 1$ (3)

$3a - 1$ (2)

$a - 1$ (1)

عبارت‌های گویا:

هر کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد را عبارت گویا می‌گوییم.

مثال:

یک عبارت گویا است، اما عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$ گویا نیست، زیرا $\sqrt{x}$ یک جمله‌ای نمی‌باشد.

نکته:

یک عبارت گویا به‌ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد.

مثال:

عبارت گویای $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1}$ به‌ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

پاسخ:

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2. \quad x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

بنابراین عبارت گویای داده شده فقط به‌ازای $x = 2$ و $x = 1$ تعریف نمی‌شود.

تمرین:

کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

$$\sqrt[3]{x^2} + x - 1 \quad (4)$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 \quad (3)$$

$$\frac{x^3-1}{x^3+1} \quad (2)$$

$$\frac{3x-\sqrt{7}}{x^2} \quad (1)$$

تمرین:

عبارت‌های گویای زیر به‌ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$1) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$2) \quad \frac{4x}{x-2}$$

ساده کردن عبارت‌های گویا:

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم و با حذف عامل‌های مشترک در صورت و مخرج، ساده شده کسر به دست می‌آید.

 مثال:

عبارت گویای $\frac{x^3+1}{x^2+6x+5}$ را ساده کنید.

 پاسخ:

$$\begin{aligned}x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) \\x^2 + 6x + 5 &= (x + 1)(x + 5) \\ \frac{x^3+1}{x^2+6x+5} &= \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x+5)} = \frac{x^2-x+1}{x+5}\end{aligned}$$

 تمرین:

کسرهای گویای زیر را ساده کنید.

1) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

2) $\frac{x^2+4}{x^4-16}$

3) $\frac{2x^2+5x+3}{x^2-x-2}$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا:

برای ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا، ابتدا هر یک از عبارت‌های گویا را ساده کرده و سپس از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (b, d \neq 0) \quad . \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (b, c, d \neq 0)$$

 مثال:

عبارت گویای $\frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$ را ساده کنید.

پاسخ:

$$\frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^3-1}{x^2+x+1} = \frac{x(x+1)}{x-1} \times \frac{(x-1)(\cancel{x^2+x+1})}{x^2+\cancel{x}+1} = \frac{x(x+1)(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})} = x(x+1)$$

تمرین:

حاصل کسره‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$1) \frac{x^2-2x}{x^2+2x} \times \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

$$2) \frac{2x^3-8x^2}{x^3} \div \frac{x^2-3x-4}{x^3+1}$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا:

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، پس از ساده کردن هر یک از عبارت‌های گویا، کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها را به دست می‌آوریم (اگر مخرج همه کسرها را تجزیه کرده و سپس عامل‌های موجود با بزرگترین توان را در هم ضرب کنیم، کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها به دست می‌آید)، سپس کسرهایی با کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها می‌نویسیم و آن‌ها را با استفاده از دستور زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

مثال:

حاصل کسر $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ را به دست آورید.

پاسخ:

هیچ یک از کسره‌های $\frac{2}{x-1}$ و $\frac{1}{x+1}$ ساده نمی‌شوند. کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج دو کسر، $(x-1)(x+1)$ می‌باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x+1) + x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2+x-1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{3x+1}{x^2-1} \end{aligned}$$

تمرین:

حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$1) \frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9}$$

$$2) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{5x}{x^2-1}$$

گویا کردن مخرج کسرها:

برای گویا کردن مخرج کسر عبارت $\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}}$ ، $(n > m)$ ، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می کنیم.

مثال:

مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ را گویا کنید.

پاسخ:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^{3-2}}}{\sqrt[3]{x^{3-2}}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}$$

نکته:

اگر در مخرج کسر، رادیکال هایی با فرجه زوج داشته باشیم و مخرج کسر فقط یک رادیکال نباشد، برای گویا کردن مخرج از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم. به این روش که صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم (مزدوج $a - b$ ، عبارت $a + b$ و مزدوج $a + b$ ، عبارت $a - b$ می باشد)، سپس با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل مخرج را که یک عبارت بدون رادیکال است، به دست می آوریم.

مثال:

مخرج کسر $\frac{x}{\sqrt{2}+3}$ را گویا کنید.

پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{2}+3} = \frac{x}{\sqrt{2}+3} \times \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2})^2-3^2} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{2-9} = \frac{x(\sqrt{2}-3)}{-7}$$

نکته:

اگر در مخرج کسر، رادیکال‌هایی با فرجه 3 داشته باشیم و مخرج کسر فقط یک رادیکال نباشد، برای گویا کردن مخرج از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

مثال:

مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ را گویا کنید.

پاسخ:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^3 + (1)^3} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{x+1}$$

تمرین:

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$

پ) $\frac{3}{4-\sqrt{7}}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

ث) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+2}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-3}$

چ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

تمرینات تکمیلی فصل 3

1- برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$\sqrt{69}$	$-\sqrt{125}$
$\sqrt[3]{400}$	$\sqrt{\frac{8}{9}}$
$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[3]{0.001}$
$-\sqrt{0.04}$	$\sqrt[3]{-80}$
$\sqrt[5]{0}$	$\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$
$-\sqrt[4]{100}$	

2- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{49} - \sqrt{100}$
 ب) $2\sqrt[3]{-8} + 5\sqrt{16}$
 پ) $\sqrt[3]{-32} \times \sqrt{\frac{1}{4}}$
 ت) $\sqrt{2\sqrt[3]{27} + 3\sqrt[4]{1}}$
 ث) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{49}}$

3- فرض کنیم $a = -1$ است، در $\square$ علامت مناسب قرار دهید.

$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{a} \square \sqrt[11]{a}$
$a^2 \square a^3$	$a^3 \square a^5$

4- به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر $\sqrt[3]{4} = a$ باشد، حاصل عبارت $a^3 - 2$ را به دست آورید.

ب) اگر $\sqrt[3]{11} = a$ باشد، حاصل عبارت $a^6 + 15$ را به دست آورید.

پ) اگر $\sqrt[4]{x} = 9$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[8]{x}$ را به دست آورید.

5- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

پ) $\frac{3}{4-\sqrt{7}}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

ث) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

ج) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

چ) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$

ح) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$

6- عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 12x$

ب) $x^2 - 16y^2$

پ) $x^2 + 7x + 6$

ت) $27x^4 - xy^3$

ث) $x^5 - xy^4$

تست‌های فصل 3

(1) یکی از ریشه‌های چهارم عدد 256، با کدام گزینه زیر می‌تواند برابر باشد؟

- (1) ریشه پنجم 512 (2) یکی از ریشه‌های دوم 36 (3) ریشه سوم -64 (4) 2

(2) کدام گزینه نادرست است؟

- (1) $4\sqrt{\frac{162}{32}} = 1 \cdot 5$ (2) $\sqrt[5]{32000} = 2$ (3) $\sqrt[4]{0 \cdot 0081} = 0 \cdot 3$ (4) $\sqrt[6]{0} = 0$

(3) با توجه به جدول مقابل، حاصل $a + b$ کدام است؟

عدد	-3125	b
ریشه پنجم	a	$2\sqrt[5]{3}$

- (1) 101 (2) 91
(3) 81 (4) 92

(4) عدد $\sqrt[3]{-300}$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

- (1) -11 (2) -13 (3) -15 (4) -17

(5) اگر $\sqrt[4]{x} = 27$ باشد، حاصل $\sqrt[12]{x}$ کدام است؟

- (1) 3 (2) $\sqrt{3}$ (3) $\sqrt[3]{3}$ (4) 1

(6) حاصل $3\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[6]{9}$ برابر است با:

- (1) $2\sqrt[3]{3}$ (2) $6\sqrt[3]{3}$ (3) $3\sqrt[3]{3}$ (4) $21\sqrt[3]{3}$

(7) در تجزیه $xy^5 - yx^5$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (1) xy (2) $x + y$ (3) $x + 2y$ (4) $-x + y$

(8) حاصل کسر $\frac{2x^2-8x+8}{2x-4}$ کدام است؟

- (1) $2x + 4$ (2) $x + 2$ (3) $x - 2$ (4) $2x - 4$

(9) حاصل عبارت $(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}) \times (1 - \frac{2}{x^2+1})$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{x+1}$ (2) $\frac{1}{x-1}$ (3) -1 (4) 1

فصل ۴: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اوّل: معادله درجه دوّم و روش‌های مختلف حل آن

درس دوّم: سهمی

درس سوّم: تعیین علامت

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۲ نمره

بارم شهریور: ۳/۵ نمره

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

معادله درجه دوم:

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$. ($a \neq 0$) را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند، یک معادله درجه دوم می‌نامیم. در واقع باید بعد از ساده کردن یک معادله، بزرگترین توان متغیر آن 2 باشد.

 مثال:

معادله $2x^2 - 8x + 1 = 0$ ، یک معادله درجه دوم است. اما معادله $x^2 - 8x + 1 = 0$ یک معادله درجه دوم نمی‌باشد زیرا:

$$(x+1)^2 - (x-3)^2 = x \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 6x + 9) = x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 6x - 9 = x \Rightarrow 8x - 8 = x$$

که معادله به صورت $8x - 8 = x$ درمی‌آید که یک معادله درجه یک می‌باشد.

نکته

ویژگی حاصل ضرب صفر:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه:

اگر بتوان عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه کرد، آنگاه می‌توان از ویژگی حاصل ضرب صفر برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ استفاده کرد.

 مثال:

معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^2 - 4x + 3 = 0$

ب) $3t^2 - t = 0$

پ) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

پاسخ:

$$\text{الف) } x^2 - 4x + 3 \stackrel{\text{اتحاد جمله مشترک}}{=} (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 & \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$$\begin{cases} x=1 & \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \quad \checkmark \\ x=3 & \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\text{ب) } 3t^2 - t \stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} t(3t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ 3t-1=0 & \Rightarrow t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow 3t^2 - t = 3(0)^2 - (0) = 0 \quad \checkmark \\ x=\frac{1}{3} & \Rightarrow 3t^2 - t = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\text{پ) } 3x^2 - 4x + 1 = 0 \stackrel{\text{روش A}}{\Rightarrow} A = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3A = 9x^2 - 4(3x) + 3 = (3x-1)(3x-3)$$

$$\cancel{3}A = (3x-1)\cancel{3}(x-1)$$

$$A = (3x-1)(x-1)$$

$$(3x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 & \Rightarrow x=\frac{1}{3} \\ x-1=0 & \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$$\begin{cases} x=1 & \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 3(1)^2 - 4(1) + 1 = 3 - 4 + 1 = 0 \quad \checkmark \\ x=\frac{1}{3} & \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1-4+3}{3} = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

تمرین:

معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 3x = 10$$

ب) $9x^2 - 4 = 0$

پ) $5x^2 + 7x - 6 = 0$

ت) $5a^2 - 7a = 2a(a - 3)$

ث) $5t^2 = 20$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه گیری:

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ عبارت اند از:

$$x = -\sqrt{a} \quad . \quad x = \sqrt{a}$$

زیرا

$$\begin{aligned} x^2 = a &\Rightarrow x^2 - a = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{a} = 0 &\Rightarrow x = \sqrt{a} \\ x + \sqrt{a} = 0 &\Rightarrow x = -\sqrt{a} \end{cases} \end{aligned}$$

 مثال:

جواب هر یک از معادلات زیر را در صورت وجود به روش ریشه گیری به دست آورید.

الف) $5x^2 = 20$

ب) $x^2 + 4 = 0$

پ) $(r - 2)^2 = 16$

 پاسخ:

الف) $5x^2 = 20 \xrightarrow{\div 5} x^2 = 4 \xrightarrow{4 > 0} x = 2 \quad . \quad x = -2$

ب) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \xrightarrow{-4 < 0}$ معادله ریشه حقیقی ندارد

پ) $(r - 2)^2 = 16 \xrightarrow{16 > 0} r - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} r - 2 = 4 &\Rightarrow r = 6 \\ r - 2 = -4 &\Rightarrow r = -2 \end{cases}$

تمرین:

معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

الف) $2x^2 = 50$

ب) $t^2 + 7 = 0$

پ) $3 - 3k = 3k(2k - 1)$

ت) $(2x + 1)^2 = 25$

ث) $4(2b - 1)^2 = 9$

نکته

عبارت مربع کامل:

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه با اضافه کردن $(\frac{a}{2})^2$ به دو جمله‌ای $x^2 + ax$ ، این دو جمله‌ای به شکل مربع کامل درمی‌آید. (a ضریب x است.) توجه می‌کنیم که در این روش ضریب x^2 باید عدد یک باشد.

به عنوان مثال، اگر بخواهیم دو جمله‌ای $x^2 + 8x$ را به صورت مربع کامل بنویسیم، کفایت عبارت $(\frac{8}{2})^2 = 16$ را به دو جمله‌ای اضافه کنیم. یعنی:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل:

ابتدا اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب x^2 ، به یک معادله درجه دوم به صورت $x^2 + ax + b = 0$ می‌رسیم. سپس معادله را به صورت $x^2 + ax = -b$ می‌نویسیم و با اضافه کردن $(\frac{a}{2})^2$ به دو طرف معادله، در سمت چپ معادله مربع کامل به دست می‌آید. حال به ریشه‌گیری از دو طرف معادله، ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم.

مثال:

معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 4x - 5 = 0$

ب) $2t^2 + 5t + 3 = 0$

پ) $x^2 + 2x = 24$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{الف) } x^2 - 4x - 5 = 0 &\Rightarrow x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 9 \\ &\Rightarrow x - 2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 &\Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 &\Rightarrow x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 2t^2 + 5t + 3 = 0 &\Rightarrow t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16} \\ &\Rightarrow \left(t + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{-24+25}{16} \Rightarrow \left(t + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow t + \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \begin{cases} t + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} &\Rightarrow t = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1 \\ t + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} &\Rightarrow t = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } x^2 + 2x = 24 &\Rightarrow \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 24 + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 = 25 \Rightarrow x + 1 = \pm 5 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 5 &\Rightarrow x = 4 \\ x + 1 = -5 &\Rightarrow x = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

تمرین:

معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 1 = 0$

ب) $t^2 + 3t = 3$

پ $n^2 - 4n + 5 = 0$

ت) $2r^2 + r - 2 = 0$

ث) $2x^2 + 3x = 0$

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی:

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوم یفرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در $a \neq 0$ است، پیدا کنیم. ابتدا معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را با استفاده از روش مربع کامل حل می‌کنیم. داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\text{طرفین بر } a \text{ تقسیم}} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

نکته: ☒

در روش فرمول کلی مقدار $b^2 - 4ac$ را برابر Δ (دلتا) قرار می‌دهیم. با توجه به مقدار Δ یکی از سه حالت زیر به وجود می‌آید:

(1) $\Delta > 0$ ، در این صورت معادله دارای دو ریشه حقیقی به صورت زیر است:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad . \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(2) $\Delta = 0$ ، در این صورت معادله دارای ریشه مضاعف (ریشه مکرر مرتبه دوم) به صورت زیر است:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

(3) $\Delta < 0$ ، در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال:

معادلات زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $4t^2 - 7t + 1 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

پاسخ:

الف) $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \cdot b = -1 \cdot c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

$\Delta < 0$ و معادله ریشه حقیقی ندارد.

ب) $4t^2 - 7t + 1 = 0 \Rightarrow a = 4 \cdot b = -7 \cdot c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(4)(1) = 49 - 16 = 33 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{33}}{2(4)} = \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{33}}{2(4)} = \frac{7 - \sqrt{33}}{8}$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو ریشه حقیقی است.

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow a = -1 \cdot b = 4 \cdot c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\Delta = 0$ و معادله دارای ریشه مضاعف (ریشه مکرر مرتبه دوم) است.

تمرین:

معادلات زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

الف) $2x^2 - x - 5 = 0$

ب) $t^2 + 3t = 3$

پ) $-2x^2 + x + 3 = 0$

ت) $r - r^2 = 3$

ث) $4x^2 - 13x + 3 = 0$

تمرین:

مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی 265 است. این دو عدد را پیدا کنید.

تمرین:

محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب 20 و 24 می باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

❖ تمرین:

اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر 4 سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها 60 شود، سن هر کدام چقدر است؟

❖ تمرین:

هر یک از معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید.

الف) $2x^2 = 250$

ب) $4a^2 + 3a = 1$

پ) $9 - 6z + z^2 = 0$

ت) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

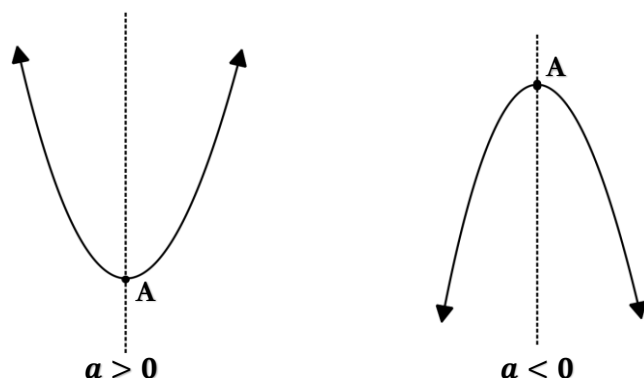
ث) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

ج) $8 - x = 3x(x - 1)$

درس دوم: سهمی

سهمی:

نمودار هر سهمی به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت زیر است:



نقطه A را در شکل‌های بالا رأس سهمی می‌گوییم. اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است. همچنین خط عمودی را که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی می‌نامیم.

رسم سهمی:

برای رسم سهمی باید رأس سهمی و دو نقطه کمکی در دو طرف رأس مشخص کنیم. با توجه به علامت a و با وصل کردن این نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم. (می‌توان از محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات نیز به عنوان نقاط کمکی استفاده کرد.)

نکته:

معادله هر سهمی به یکی از دو صورت زیر داده می‌شود:

(1) اگر معادله سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، داده شود، رأس سهمی نقطه $A(h, k)$ و خط به معادله $x = h$ ، خط تقارن سهمی است.

(2) اگر معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$ است، داده شود، ابتدا با استفاده از روش مربع کامل، سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل می‌نویسیم. یعنی:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

در نتیجه معادله سهمی به صورت

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

نوشته می شود که در آن طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض رأس سهمی برابر $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ می باشد و همچنین معادله محور تقارن، $x = -\frac{b}{2a}$ است. توجه می کنیم که عرض رأس سهمی را می توان با قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله سهمی به دست آورد.

مثال:

رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 + 4x - 1$ را مشخص کنید. معادله خط تقارن آن را بنویسید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} a &= 2 \quad b = 4 \quad c = -1 \\ \begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(2)} = -1 \\ y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(-1) - 4^2}{4(2)} = \frac{-8 - 16}{8} = \frac{-24}{8} = -3 \end{cases} &\rightarrow \text{رأس سهمی } A(-1, -3) \end{aligned}$$

معادله خط تقارن سهمی $x = -1$ است.

مثال:

سهمی به معادله $y = -2x^2 + 1$ را رسم کنید.

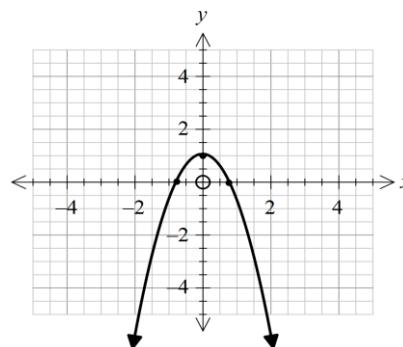
پاسخ:

ابتدا رأس سهمی را مشخص می کنیم.

$$\begin{aligned} a &= -2 \quad b = 0 \quad c = 1 \\ x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(-2)} = 0 \quad y = -2(0)^2 + 1 = 1 &\rightarrow \text{رأس سهمی } A(0, 1) \end{aligned}$$

برای مشخص کردن دو نقطه کمکی، محل تلاقی نمودار با محور x ها را مشخص می کنیم.

$$\begin{aligned} y = 0 &\Rightarrow -2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{aligned}$$



مثال:

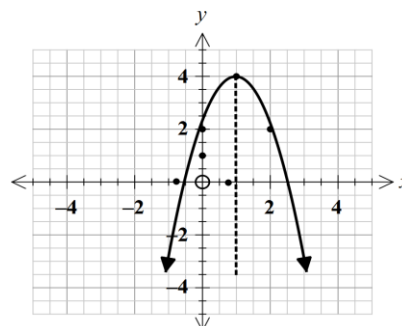
سهمی به معادله $y = -2(x - 1)^2 + 4$ را رسم کنید.

پاسخ:

رأس سهمی نقطه $A(1, 4)$ است. دو نقطه کمکی در دو طرف رأس مشخص می‌کنیم:

x	y
0	2
1	4
2	2

→ رأس سهمی



تمرین:

مختصات رأس و معادله خط تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $y = 3(x + 2)^2 - 4$

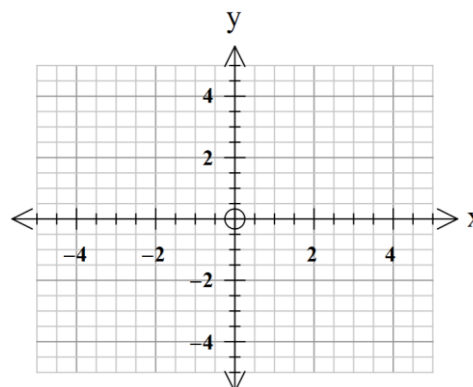
ب) $y = x^2 - 4x$

پ) $y = -2x^2 + 10x + 7$

ت) $y = (x + 1)^2 - 2$

تمرین:

سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور Y ها را در نقطه‌ای به عرض 10 و محور X ها را در نقاط 2 و 5 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.



تمرین:

اگر (-2.5) و (0.5) دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

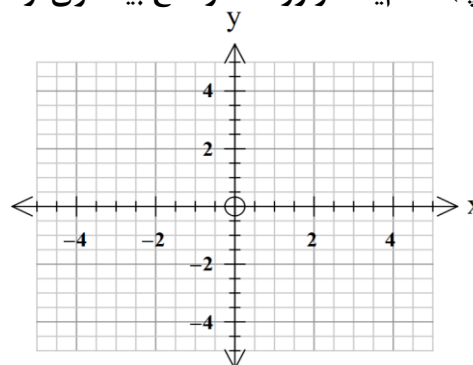
تمرین:

دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A ، زاویه α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور X ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.



درس سوّم: تعیین علامت

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اوّل:

برای تعیین علامت $y = ax + b$ ابتدا ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم. (معادله $ax + b = 0$ را حل می‌کنیم).
 $x = -\frac{b}{a}$ ریشه این معادله است، سپس از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	$\circ$	موافق علامت a

مثال:

عبارت $y = -3x + 6$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

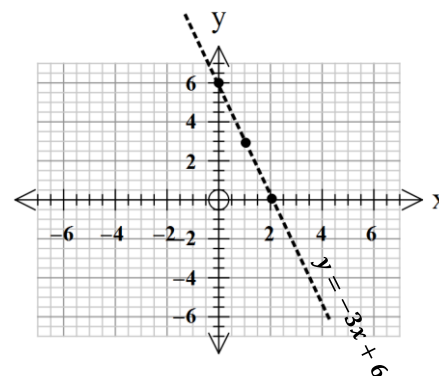
ابتدا ریشه‌های معادله $y = -3x + 6$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور معادله درجه اوّل $y = 0$ را حل می‌کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$$

ریشه معادله

با توجه به اینکه ضریب x ($a = -3$) عددی منفی است، جدول تعیین علامت y به صورت زیر است:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$y = -3x + 6$	+	$\circ$	-



تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوّم:

چندجمله‌ای درجه دوّم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ است را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم. سپس بر حسب اینکه معادله دارای دو ریشه حقیقی ($\Delta > 0$) یا فقط یک ریشه مضاعف ($\Delta = 0$) و یا فاقد ریشه حقیقی ($\Delta < 0$) باشد، علامت P را تعیین می‌کنیم.

1) اگر معادله $P(x) = 0$ دو ریشه متمایز x_1 و x_2 ، داشته باشد ($\Delta > 0$)، جدول تعیین علامت P به صورت زیر است:

x		x_1		x_2	
P		موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a	

مثال:

عبارت $P(x) = 2x^2 - x - 3$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

ابتدا ریشه‌های معادله $P(x) = 2x^2 - x - 3$ را در صورت وجود به دست می‌آوریم. برای این منظور معادله درجه دوم $P = 0$ را به روش فرمول کلی حل می‌کنیم.

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -3$$

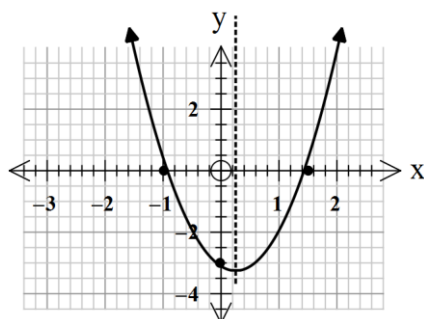
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $a = 2$ و مثبت است، بنابراین علامت P به صورت زیر مشخص می‌شود:

x		-1		$\frac{3}{2}$	
P		+	-	+	

نمودار سهمی $y = 2x^2 - x - 3$ در شکل زیر رسم شده است.



به کمک نمودار نیز می‌توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد.

برای $x > \frac{3}{2}$ و $x < -1$ ، نمودار بالای محور X هاست،

پس y علامت مثبت دارد و برای $-1 < x < \frac{3}{2}$ ،

نمودار پایین محور X هاست، پس y علامت منفی دارد.

برای $x = -1$ و $x = \frac{3}{2}$ نمودار محور X ها را قطع کرده است پس مقدار y برابر صفر است.

تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $y = x^2 - 4x$

ب) $y = x^2 + 4x - 21$

2) اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه مضاعفی برابر $x = -\frac{b}{2a}$ داشته باشد ($\Delta = 0$)، جدول تعیین علامت P به صورت زیر است:

x	$-\frac{b}{2a}$
P	موافق علامت a $\circ$ موافق علامت a

مثال:

عبارت $P(x) = -x^2 + 6x - 9$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

ابتدا ریشه‌های معادله $P(x) = -x^2 + 6x - 9$ را در صورت وجود به دست می‌آوریم. برای این منظور معادله درجه دوم $P = 0$ را به روش فرمول کلی حل می‌کنیم.

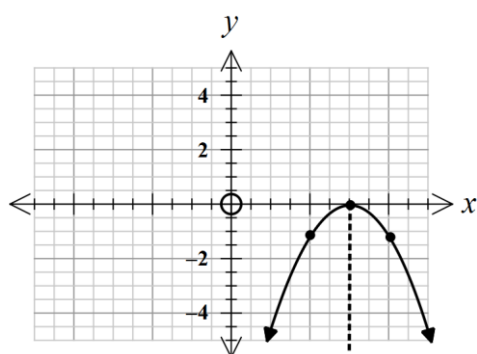
$$a = -1 \quad b = 6 \quad c = -9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-9) = 36 - 36 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

با توجه به اینکه $a = -1$ و منفی است، بنابراین علامت P به صورت زیر مشخص می‌شود:

x	3
P	- $\circ$ -



نمودار سهمی $y = -x^2 + 6x - 9$ در شکل زیر رسم شده است. به کمک نمودار نیز می‌توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد.

برای $x < 3$ و $x > 3$ ، نمودار پایین محور X هاست، پس y علامت منفی دارد و برای $x = 3$ ، نمودار مماس با محور X هاست، پس y برابر صفر است.

تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = 2x^2 - 4x + 2$

ب) $P = -(x - 5)^2$

3) اگر معادله $P(x) = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد ($\Delta < 0$)، آن‌گاه جدول تعیین علامت P به صورت زیر است:

x	به ازای همه مقادیر حقیقی x
P	موافق علامت a

مثال:

$P(x) = x^2 + 5x + 7$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

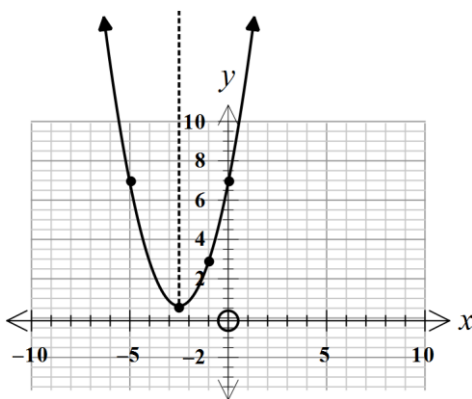
ابتدا ریشه‌های معادله $P(x) = x^2 + 5x + 7$ را به دست می‌آوریم. برای این منظور معادله درجه دوم $P = 0$ را حل می‌کنیم.

$$a = 1 \cdot b = 5 \cdot c = 7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(7) = 25 - 28 = -3 < 0$$

Δ عددی منفی است، پس معادله $P = 0$ ریشه ندارد و با توجه به اینکه $a = 1$ و مثبت است، عبارت $P(x) = x^2 + 5x + 7$ همواره مثبت است و جدول تعیین علامت P به صورت زیر است:

x	به ازای همه مقادیر حقیقی x
P	+



نمودار سهمی $y = x^2 + 5x + 7$ در شکل روبرو رسم شده است. به کمک نمودار نیز می توان علامت y را برای x های مختلف تعیین کرد.

به ازای همه مقادیر حقیقی x ، نمودار بالای محور X هاست، پس y علامت مثبت دارد.

تمرین:

هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = -x^2 + 4x - 9$

ب) $P = 2x^2 + x + 3$

نکته:

- اگر $\Delta = 0$ و $a > 0$ ، آن گاه همواره داریم $ax^2 + bx + c \geq 0$.
- اگر $\Delta = 0$ و $a < 0$ ، آن گاه همواره داریم $ax^2 + bx + c \leq 0$.
- اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ ، آن گاه همواره داریم $ax^2 + bx + c > 0$.
- اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ ، آن گاه همواره داریم $ax^2 + bx + c < 0$.

مثال:

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ثابت کنید:

الف) $x^2 + 7x + 21 > 0$

ب) $-x^2 + 3x - 5 < 0$

پ) $2x^2 - 8x + 9 > 0$

ت) $-x^2 + mx - m^2 - 5 > 0$

پاسخ:

الف) $a = 1$. $b = 7$. $c = 21$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(1)(21) = 49 - 84 = -35 < 0$$

چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ عبارت $x^2 + 7x + 21$ همواره مثبت است.

ب) $a = -1$. $b = 3$. $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-1)(-5) = 9 - 20 = -11 < 0$$

چون $\Delta < 0$ و $a < 0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ عبارت $x^2 + 7x + 21$ همواره منفی است.

پ) $a = 2$. $b = -8$. $c = 9$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(9) = 64 - 72 = -8 < 0$$

چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ عبارت $x^2 + 7x + 21$ همواره مثبت است.

ت) $a = -1$. $b = m$. $c = -m^2 - 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m)^2 - 4(-1)(-m^2 - 5) = m^2 - 4m^2 - 20 = -3m^2 - 20 < 0$$

چون $\Delta < 0$ و $a < 0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ عبارت $x^2 + 7x + 21$ همواره منفی است.

تذکر

برای تعیین علامت عبارتهایی که به صورت حاصل ضرب و یا تقسیم چند عبارت دیگر باشد، باید هر یک از عبارت‌ها را جداگانه تعیین علامت کرده و نتیجه را در یک جدول مشخص کنیم، سپس علامت عبارت اولیه را از ضرب و تقسیم علامت‌ها به دست می‌آوریم.

مثال:

عبارت $P = \frac{-x(x+2)}{x^2-5x+6}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

برای تعیین علامت، ابتدا ریشه هر یک از عبارت‌ها را به دست می‌آوریم. عبارت داده شده، از سه عبارت $-x$ ، $x+2$ و x^2-5x+6 تشکیل شده است.

$$-x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ . } x = 3$$

عبارت فوق دارای چهار ریشه 0 ، -2 ، 2 و 3 می‌باشد. برای هر عبارت یک سطر در نظر می‌گیریم و با توجه به ریشه یا ریشه‌های هر عبارت، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x	-2	0	2	3
$-x$	+	+	-	-
$x+2$	-	+	+	+
x^2-5x+6	+	+	-	+
P	-	+	-	-

تعریف
تعریف
 نشده نشده

$$\Rightarrow \begin{cases} P > 0 & ; \quad -2 < x < 0 \text{ . } 2 < x < 3 \\ P < 0 & ; \quad x < -2 \text{ . } 0 < x < 2 \text{ . } x > 3 \\ P = 0 & ; \quad x = -2 \text{ . } x = 0 \end{cases}$$

تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $y = -x^2 + x + 2$

ب) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

پ) $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

ت) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

ث) $B = \frac{x^3 + x}{(x^2 + 4)(x - 2)}$

ج) $y = (x + 3)(2x - 1)$

چ) $A = 3x + 7$

ح) $A = x^3(4 - x)$

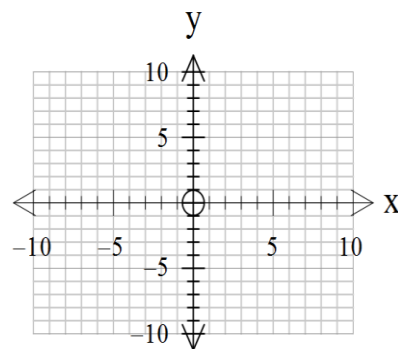
خ) $y = \frac{-x^2 - 1}{x^2 + x - 12}$

د) $A = (-x^2 + 2x)(x + 2)^2$

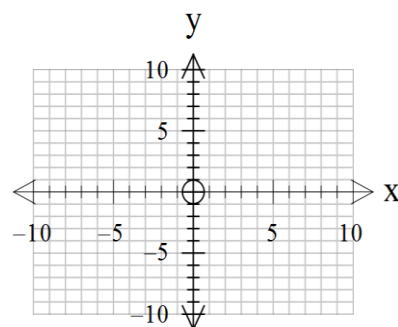
تمرین:

با رسم هر یک از سهمی‌های زیر y را تعیین علامت کنید.

ذ) $y = -x^2 + 6x$



ر) $y = (2x - 1)(x + 2)$



نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادلاتی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچکتر از B است.
$A \leq B$	A کوچکتر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگتر از B است.
$A \geq B$	A بزرگتر یا مساوی B است.

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

(1) خاصیت جمع:

برای عبارت‌های جبری A ، B و C ، اگر $A < B$ ، آن‌گاه $A + C < B + C$.

(2) خاصیت ضرب:

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ ، آن‌گاه $AC > BC$. (اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی مثبت ضرب کنیم، جهت نامعادله عوض نمی‌شود.)

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ ، آن‌گاه $AC < BC$. (اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی منفی ضرب کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود.)

مثال:

نامعادله $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل کنید و مجموعه جواب به دست آمده را روی محور نمایش دهید.

پاسخ:

روش اول:

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

به دو طرف نامعادله $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

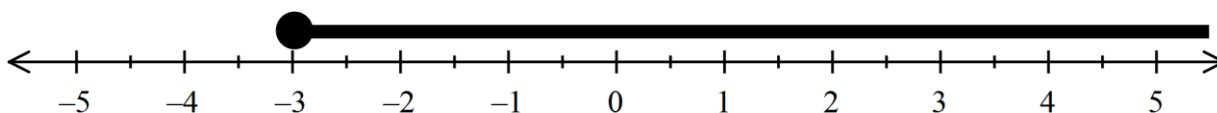
$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

$$2x - 1 \geq -7 \quad \rightarrow \quad 2x \geq -6$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}(2x) \geq \frac{1}{2}(-6) \quad \Rightarrow \quad x \geq -3$$

مجموعه جواب $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$



روش دوم:

$$5x - 1 \geq 3x - 7 \quad \Rightarrow \quad 5x - 3x \geq -7 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \geq -6 \xrightarrow{\text{طرفین بر 2 تقسیم}} x \geq -3$$

نامعادلات دوگانه:

نامعادلاتی به فرم $-2 \leq 3x - 1 \leq 8$ را نامعادلات دوگانه می‌گوییم. برای حل نامعادلات دوگانه می‌توانیم به دو روش عمل کنیم:

روش اول:

نامعادلات را به صورت دو نامعادله جدا از هم در یک دستگاه نامعادلات نوشته و جواب هر کدام را پیدا می‌کنیم، سپس بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} -2 \leq 3x - 1 & \Rightarrow & -3x \leq -1 + 2 & \Rightarrow & -3x \leq 1 & \xrightarrow{\text{طرفین بر 3- تقسیم}} & x \geq \frac{-1}{3} \\ 3x - 1 \leq 8 & \Rightarrow & 3x \leq 8 + 1 & \Rightarrow & 3x \leq 9 & \xrightarrow{\text{طرفین بر 3 تقسیم}} & x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک} \quad \frac{-1}{3} \leq x \leq 3$$

روش دوم:

نامعادله را به همین شکل داده شده و با استفاده از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها حل می‌کنیم:

$$-2 \leq 3x - 1 \leq 8 \xrightarrow{\text{طرفین را با (+1) جمع می‌کنیم}} -2 + 1 \leq 3x \leq 8 + 1$$

$$-1 \leq 3x \leq 9 \xrightarrow{\text{طرفین را بر (+3) جمع می‌کنیم}} \frac{-1}{3} \leq x \leq 3$$

همانطور که می‌بینید جواب به دست آمده از هر دو روش، یکسان است.

تمرین:

در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x +$

پ) $4x + 11 \geq 5x + 3$

ت) $x + 1 < 4 - x \leq 3x$

نکته

برای حل نامعادله غیر درجه اول، ابتدا نامعادله را به یکی از صورت‌های $P(x) > 0$ یا $P(x) \geq 0$ یا $P(x) < 0$ یا $P(x) \leq 0$ می‌نویسیم. سپس با تعیین علامت $P(x)$ و با توجه به علامت نامساوی، محدوده جواب را مشخص می‌کنیم.

مثال:

نامعادله $2x^2 - 5x \geq -3$ را حل کنید.

پاسخ:

نامعادله را به صورت $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ می نویسیم، سپس عبارت $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ را تعیین علامت می کنیم.

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad a = 2 \quad b = -5 \quad c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه حقیقی است

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{5 - 1}{4} = 1$$

x	1	$\frac{3}{2}$
$P(x)$	+ ○ -	○ +

$$\Rightarrow P(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 \quad \text{یا} \quad x \geq \frac{3}{2}$$

نکته

برای حل نامعادله درجه دوم می توان از روش هندسی (رسم نمودار) نیز استفاده کرد. برای این کار نمودار $y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ را رسم کرده و با توجه به نمودار، محدوده x را مشخص می کنیم.

مثال:

نامعادله $x^2 - 2x - 3 < 0$ را حل کنید.

پاسخ:

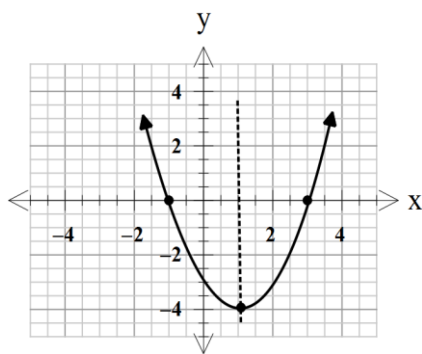
نمودار $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم می کنیم. برای این کار ابتدا رسم سهمی و سپس محل تلاقی نمودار با محور X ها را تعیین می کنیم.

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow A(1, -4)$$

محل تلاقی نمودار با محور X ها را تعیین می کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \quad x = -1$$



می خواهیم $y < 0$ باشد. بنابراین باید x هایی را مشخص کنیم که

به ازای آن ها نمودار پایین محور X ها باشد. با توجه به نمودار در

بازه $[-2, 4]$ ، $y < 0$ می باشد. پس جواب نامعادله

$x^2 - 2x - 3 < 0$ ، بازه $[-2, 4]$ است.

تمرین:

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^2 \leq 4$

ب) $3x^2 - x - 2 \geq 0$

پ) $x^2 - 4x < 0$

نامعادلات قدرمطلق:

برای حل نامعادلات قدرمطلق از نکته زیر استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت

$$(1) \text{ اگر } |u| \leq a, \text{ آن گاه } -a \leq u \leq a$$

$$(2) \text{ اگر } |u| \geq a, \text{ آن گاه } u \geq a \text{ یا } u \leq -a$$

تذکر:

در هر یک از این نامعادلات، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچکدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

مثال:

هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $|3x - 5| \leq 4$

ب) $|2 - x| > 4$

پاسخ:

(الف)

$$-4 \leq 3x - 5 \leq 4 \xrightarrow{+5} -4 + 5 \leq 3x \leq 4 + 5 \rightarrow 1 \leq 3x \leq 9 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت $[\frac{1}{3}, 3]$ است.

(ب)

$$\begin{cases} 2 - x > 4 \\ 2 - x < -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - 4 > x \\ 2 + 4 < x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 > x \\ 6 < x \end{cases} \rightarrow$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$ است.

نکته

(1) اگر a عددی منفی باشد، آن گاه نامعادله $|x| \leq a$ جواب ندارد. (مانند $|x| \leq -4$)

(2) اگر a عددی منفی باشد، آن گاه نامعادله $|x| \geq a$ همواره جواب دارد. (مانند $|4x + 3| \geq -2$)

(3) برای حل نامعادلات $|u| \leq |v|$ یا $|u| \geq |v|$ ، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان 2 برسانیم و با توجه به تساوی $|u|^2 = u^2$ ، قدرمطلق را حذف کرده و سپس نامعادله را حل کنیم.

مثال ✎

نامعادله $|x+2| \leq |x-1|$ را حل کنید.

پاسخ ✎

$$|x+2| \leq |x-1| \Rightarrow |x+2|^2 \leq |x-1|^2 \Rightarrow (x+2)^2 \leq (x-1)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 4x + 2x \leq 1 - 4 \Rightarrow 6x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

تمرین ۲ ✎

هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^2 - 5x \leq 0$

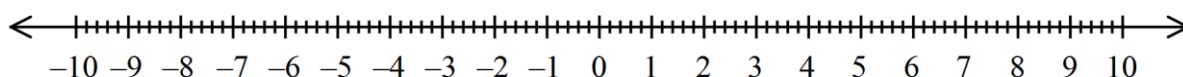
ب) $\frac{x+2}{4-3x} \geq 0$

پ) $\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x-7} > 0$

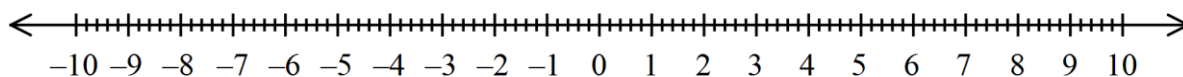
تمرینات تکمیلی فصل 4

1- در هر یک از نامعادلات زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید. سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$



ب) $|5 - 2x| \geq 1$



2- در هر یک از قسمت‌های زیر، مجموعه جواب یک نامعادله قدرمطلقى نوشته شده است. نامعادله را مشخص کنید.

الف) (1.9)

الف) (-1.5)

الف) $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$

الف) $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

3- به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

4- به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور X ها است؟

5- در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $x(x^2 + 4) < 0$

ب) $-2 \leq \frac{5-x}{2} < 0$

پ) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

ت) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

$$|7 - 2x| < 1 \quad \text{ث)}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

6- یک جسم از بالای یک ساختمان که 13 متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از 13 متر خواهد بود؟

7- تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از 110 بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبولند؟

8- یک جسم از بالای ساختمان به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -4t^2 + 20t + 15$ به دست آید، آن‌گاه:
الف) ارتفاع ساختمان را به دست آورید.

ب) در چه فاصله زمانی ارتفاع جسم از سطح زمین بیشتر از 15 متر خواهد بود؟

پ) در چه فاصله زمانی ارتفاع جسم از سطح زمین کمتر از 31 متر خواهد بود؟

تست‌های فصل 4

(1) ریشه بزرگتر معادله $x^2 + 2x - 63 = 0$ کدام است؟

- (1) 9 (2) 7 (3) 3 (4) 21

(2) در معادله $(x - \alpha)^2 = \beta^2$ مجموع مربعات جوابها چقدر است؟

- (1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^2 - \beta^2$ (3) $2(\alpha^2 - \beta^2)$ (4) $2(\alpha^2 + \beta^2)$

(3) اگر $x = 1$ ، یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه دیگر آن کدام است؟

- (1) -0.4 (2) -0.3 (3) 0.3 (4) 0.4

(4) مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی 925 است. مجموع این دو عدد کدام است؟

- (1) 41 (2) 43 (3) 45 (4) 47

(5) معادله خط تقارن سهمی به معادله $y = -4x^2 + 12x - 8$ کدام است؟

- (1) $x = 3$ (2) $x = \frac{3}{2}$ (3) $x = -\frac{3}{2}$ (4) $x = -3$

(6) مختصات رأس سهمی به معادله $y = x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

- (1) $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$ (2) $(\frac{-3}{2}, \frac{1}{4})$ (3) $(\frac{1}{4}, \frac{-3}{4})$ (4) $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4})$

(7) برای آن که خط $y = \frac{-6x+5}{3}$ بالای محور Xها قرار داشته باشد، باید x در چه بازه‌ای باشد؟

- (1) $x < \frac{5}{6}$ (2) $x > \frac{5}{6}$ (3) $x < \frac{6}{5}$ (4) $x > \frac{6}{5}$

(8) مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-1} > 2$ کدام است؟

- (1) $1 < x < 2$ (2) $0 < x < 1$ (3) $x > 1$ یا $x < 0$ (4) $x > 2$ یا $x < 1$

(9) مجموعه جواب نامعادله $|1 + \frac{3x}{2}| \leq \frac{5}{2}$ شامل کدام عدد زیر نیست؟

- (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

پایان ترم اوّل

با آرزوی موفقیت

پریسا استواری

۱۳۹۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir