



RIA2ISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

به نام خداوندی که جهان را بر
اساس القوس دقیق آفریده

مجموعه ها - القوس و دنباله
فصل اول ریاضی ۱

تهیه و تنظیم
رسول سیف الدین

مجموعه ها:

یادآوری:

یک مجموعه دسته ای از اعداد ، اشیا و حروف می باشد که در کنار یکدیگر تشکیل یک مجموعه می دهند.

به عناصری که داخل مجموعه قرار می گیرند اعضای مجموعه گفته می شود.

در مجموعه ترتیب اعضا اهمیت ندارد ، مثلا مجموعه ی $\{۱ و ۲ و ۳\}$ و مجموعه ی $\{۳ و ۱ و ۲\}$ هیچ تفاوتی با هم ندارند.

در مجموعه تکرار اعضا اهمیت ندارد ، مثلا مجموعه ی $\{۴\}$ و مجموعه ی $\{۴ و ۴ و ۴ و ۴\}$ هیچ تفاوتی با هم ندارند.

دو مجموعه زمانی برابر هستند که تمام عضوهای آن دو مثل هم باشد.

زیر مجموعه:

یادآوری:

دو مجموعه ی A و B را در نظر بگیرید:

اگر تمامی عضوهای مجموعه ی A ، عضو مجموعه ی B نیز باشند، آن گاه می گوئیم مجموعه ی A زیرمجموعه ی B است و می نویسیم:

$$A \subseteq B$$

مجموعه های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{3, 4\}$ و $C = \{4, 5, 6\}$ را در نظر بگیرید:

چنانچه میبینیم تمامی اعضای مجموعه ی B در مجموعه ی A نیز هست پس:

$$B \subseteq A$$

$$B \not\subseteq C$$

➤ تهی زیر مجموعه ی تمامی مجموعه هاست.

➤ هر مجموعه زیر مجموعه ی خودش است.

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مجموعه ی اعداد:

مجموعه های اعداد عبارت اند از:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Q' = اعدادی که گویا نباشند.

$$R = Q \cup Q'$$

مجموعه ی اعداد طبیعی

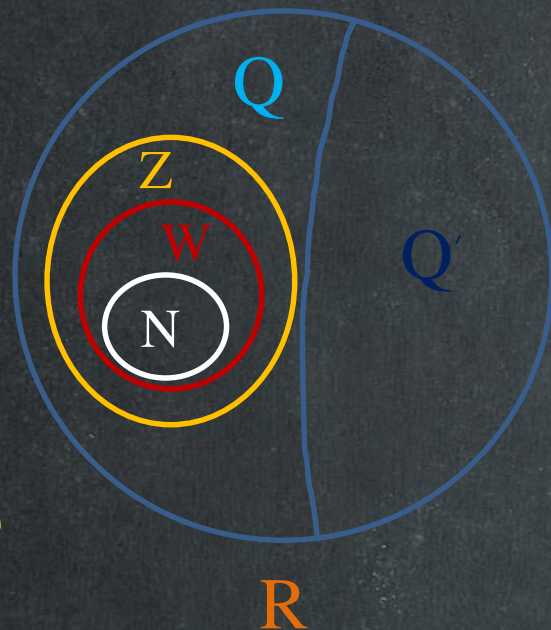
مجموعه ی اعداد حسابی

مجموعه ی اعداد صحیح

مجموعه ی اعداد گویا

مجموعه ی اعداد گنگ

مجموعه ی اعداد حقیقی

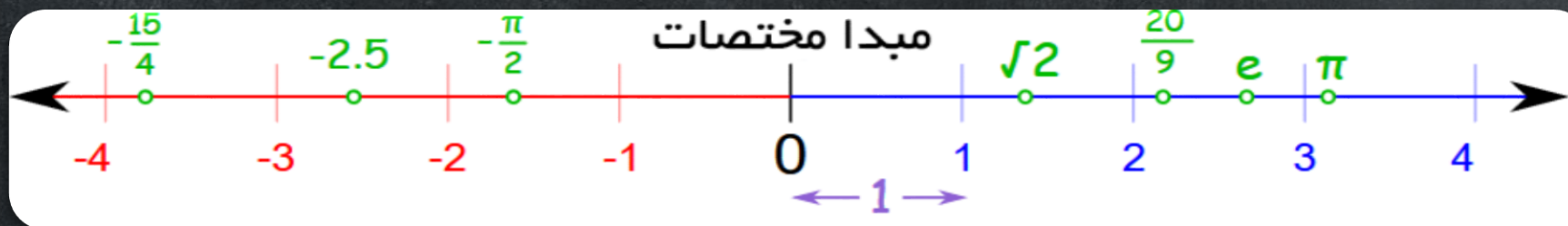


مجموعه ی اعداد:

رابطه زیر مجموعه بودن برای مجموعه ی اعداد به این شکل است:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

این رابطه به این معناست که همه ی مجموعه ی اعداد، زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی اند، یعنی هر عدد دلخواهی، درون مجموعه ی اعداد حقیقی و روی محور اعداد حقیقی قرار دارد، و هر نقطه روی محور اعداد حقیقی، بیانگر یک عدد حقیقی است.



بازه ها:

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

بازه ها، زیر مجموعه هایی از مجموعه ی اعداد حقیقی هستند که بیانگر تمامی اعداد بین دو عدد هستند و در واقع قطعه ای از محور را نشان می دهند.

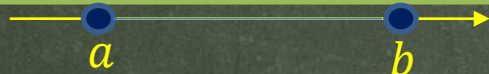
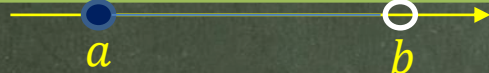
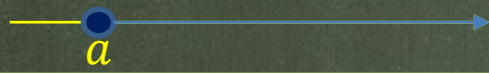
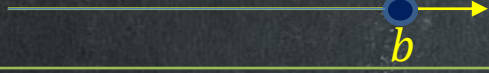
بازه ها زیر مجموعه های **پیوسته** ای از اعداد حقیقی هستند.

برای مثال مجموعه ی A را در نظر بگیرید:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

چنین مجموعه ای را می توان با بازه ی $[0, 3]$ نشان داد.

نمایش بازه ها:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$	
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$	

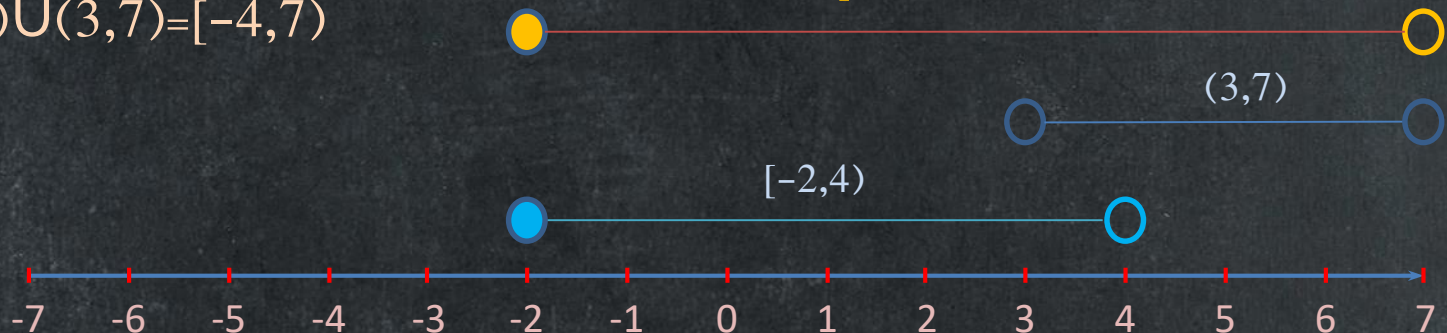
اعمال روی بازه ها:

با استفاده از مفهوم اجتماع ، اشتراک و تفاضل در مجموعه ها می توان اجتماع ، اشتراک و تفاضل بازه ها را به دست آورد. یکی از راه های ساده استفاده از محور اعداد است.

نکته: برای اجتماع ، اشتراک و تفاضل سه بازه ، ابتدا بین دو بازه عمل را انجام داده و حاصل را با بازه سوم در نظر می گیریم.

$$[-2,4) \cup (3,7) = [-4,7)$$

$$[-2,4) \cup (3,7)$$



مجموعه های متناهی و نامتناهی:

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دو مجموعه ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

به مجموعه هایی که تعداد آن ها قابل شمارش باشد و بتوان تعداد آن ها را با یک عدد حسابی نشان داد ، **مجموعه های متناهی** می گویند. مانند مجموعه ی A .

به مجموعه هایی که تعداد آن ها قابل شمارش نباشد ، **مجموعه های نامتناهی** می گویند. مانند مجموعه ی اعداد طبیعی.

نکته: تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد ؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.

مجموعه های متناهی و نامتناهی:

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین
دانلود از سایت (ریاضی سرا)
www.riazisara.ir

نکته ۱: اگر B مجموعه ای متناهی باشد و $A \subseteq B$ ، آن گاه A نیز مجموعه ای متناهی است.

نکته ۲: اگر B مجموعه ای نامتناهی باشد و $B \subseteq A$ ، آن گاه A نیز مجموعه ای نامتناهی است.

مثال هایی از مجموعه های متناهی و نامتناهی:

مجموعه اعداد طبیعی فرد: نامتناهی

مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۰: متناهی

مجموعه اعداد زوج: نامتناهی

مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۲۰۱۹: نامتناهی

مجموعه ی اعداد صحیح بین ۲- و ۱۰-: متناهی

مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و یک: نامتناهی (بی نهایت عدد حقیقی وجود دارد)

متمم یک مجموعه:

مجموعه ی مرجع:

مجموعه ای که تمام مجموعه های مورد بحث ما، زیرمجموعه ی آن باشند را، مجموعه ی مرجع می نامیم و آن را با U نشان می دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن گاه مجموعه ی $U-A$ را **متمم** A می نامیم و آن را با A' نشان می دهیم.

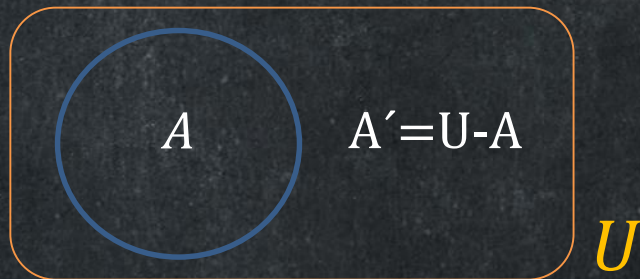
$$A' = U - A$$

A' شامل عضو هایی از U است که در A نیستند.

نکته ۱: اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $B' \subseteq A'$

نکته ۲: اگر دو مجموعه مساوی باشند آن گاه متمم های آن

ها نیز مساوی اند.



تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

متمم یک مجموعه:

ویژگی های مجموعه ی مرجع و متمم مجموعه:

$$(A')' = A$$

$$\emptyset' = U$$

$$U' = \emptyset$$

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

قوانین دمورگان

مجموعه های مجزا:

دو مجموعه ی $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{w, x, y, z\}$ را در نظر بگیرید.
این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند ، لذا :

$$A \cap B = \emptyset$$

به هر دو مجموعه ای که فاقد عضو مشترک باشند ، دو مجموعه ی جدا از هم یا دو مجموعه ی مجزا گفته می شود.



تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

همانطور که می دانیم مجموعه ی متناهی مجموعه ای است که تعداد اعضای آن قابل شمارش باشد. تعداد اعضای مجموعه ی A را با $n(A)$ نمایش می دهیم و به آن عدد اصلی مجموعه می گوئیم. اگر A و B دو مجموعه ی متناهی باشند ، تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه از رابطه زیر به دست می آید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه ی متناهی مجزا باشند آن گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

نکته ۲: اگر A و B ، دو مجموعه ی متناهی باشند هموار داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

الگو و دنباله:

بسیاری از پدیده های اطراف ما از روند خاصی پیروی میکنند و قالب خاصی دارند .
با بررسی برخی نمونه ها می توان روند توسعه ی آن هارا پیگیری و مشخص نمود.
این روند را **الگو** می نامیم.

نکته: اولین گام برای یافتن الگو در مسائل مختلف ، کشف نظم بین اشکال ، تصاویر و اعداد است.
جمله اول الگو را با a_1 ، جمله ی دوم را با a_2 و ... نشان می دهیم.
 a_n جمله ی n ام الگو است که به آن جمله عمومی الگو نیز می گوییم.

الگوهای خطی:

الگوی زیر را رد نظر بگیرید:

3, 9, 15, 21, 27, ...

$$a_n = 6n - 3$$

در این الگو هر جمله به اضافه ی عدد ثابتی (۶) شده و جمله ی بعدی را ساخته است. به چنین الگو هایی که در آن ها اختلاف دو جمله ی متوالی ، عددی ثابت است الگوهای خطی می گوئیم.

به طور کلی الگوهایی را که جمله ی عمومی آن ها به صورت $t_n = an + b$ است ، الگوهای خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواهی هستند.

اگر جملات الگوی خطی را در دستگاه مختصات رسم کنیم همگی بر روی یک خط قرار می گیرند.

الگوهای غیر خطی:

الگوی زیر را در نظر بگیرید:

2 , 5 , 10 , 15 , 26 , 37 , ...

همانطور که مشخص است ، اختلاف جملات متوالی این الگو ، عددی ثابت نیست.

$$5 - 2 = 3$$

$$10 - 5 = 5$$

$$26 - 15 = 11$$

چنین الگویی یک الگوی خطی نیست.

الگوهایی که خطی نباشند ، الگوهای غیر خطی لقب می گیرند.

دنباله:

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

به یک رشته از اعداد که پشت سر هم نوشته شوند ، یک دنباله از اعداد می گوییم.
یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشد.

جمله عمومی دنباله را با a_n نشان می دهیم و برای بدست آوردن هر جمله از دنباله کافیست شماره جمله را در جمله عمومی جایگذاری کنیم.

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

$$a_n = n^2$$

$$a_1 = 1^2 = 1$$

$$a_5 = 5^2 = 25$$

دنباله:

تهیه و تنظیم: رسول سیف الدین

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

جمله عمومی دنباله ای به قرار زیر است:

$$a_n = \frac{n^2}{5n + 18}$$

الف) جمله ششم دنباله چند است؟

$$a_6 = \frac{6^2}{5(6) + 18} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

ب) کدام جمله دنباله برابر ۳ است؟

$$\frac{n^2}{5n + 18} = 3 \rightarrow n^2 = 15n + 54 \rightarrow n^2 - 15n - 54 = 0$$

جمله ی هجدهم دنباله برابر ۳ است

$$n_1 = 18$$

$$n_2 = -18$$

دنباله ی حسابی:

هرگاه به جملات دنباله عدد ثابتی اضافه یا کم کنیم ، دنباله ی حسابی به دست می آید.
اختلاف دو جمله ی متوالی در دنباله حسابی ، عدد ثابتی است که به این عدد ثابت قدر نسبت دنباله می گوئیم و آن را با d نمایش می دهیم.
دنباله ی حسابی همان الگوی خطی است.
جمله ی عمومی دنباله حسابی به قرار زیر است:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

a_1 جمله اول دنباله و d قدر نسبت دنباله است.
فرم کلی یک دنباله حسابی به شکل زیر است:

$$a_1 , a_1 + d , a_1 + 2d , \dots , a_1 + (n - 1)d$$

دنباله ی حسابی:

کدام یک از دنباله های زیر حسابی هستند؟ جمله عمومی آن ها را بنویسید.

$$5, 9, 13, 17, \dots$$

دنباله حسابی است زیرا اختلاف جملات متوالی دنباله ، عددی ثابت است.

$$a_1 = 5$$

$$d = 4$$

$$a_n = 5 + (n - 1)4 \rightarrow a_n = 4n + 1$$

$$5, -8, 11, -14, \dots$$

دنباله حسابی نیست زیرا اختلاف جملات متوالی دنباله ، عددی ثابت نیست.

$$-8 - 5 = -13$$

$$11 - 8 = 3$$

واسطه ی حسابی:

اگر a, b, c سه جمله ی متوالی یک دنباله حسابی باشند آن گاه داریم:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

b را واسطه حسابی بین دو عدد a, c می گوئیم.

اعداد $5x - 1$ و $3x + 4$ و $2x + 3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

$$3x + 4 = \frac{2x + 3 + 5x - 1}{2} \rightarrow 3x + 4 = \frac{7x + 2}{2} \rightarrow x = 6$$

$$15, 22, 29, \dots$$

$$d = 22 - 15 = 7$$

دنباله ی هندسی:

اگر جملات دنباله در عددی خاص ضرب یا تقسیم شوند ، آن گاه دنباله هندسی شکل می گیرد.
در دنباله هندسی حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبل از خودش ، عددی ثابت است ، که این عدد ثابت را قدر نسبت نامیده و با r نمایش می دهیم.
جمله عمومی دنباله هندسی به قرار زیر است:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

اگر $|r| < 1$ دنباله از نظر قدر مطلق نزولی و اگر $|r| > 1$ دنباله از نظر قدر مطلق صعودی است.
فرم کلی یک دنباله هندسی به شکل زیر است:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}$$

دنباله ی هندسی:

کدام یک از دنباله های زیر هندسی هستند؟ جمله عمومی آن را بنویسید.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

دنباله هندسی است، زیرا جملا دنباله در عدد ثابتی $(\frac{1}{2})$ ضرب شده اند.

$$a_n = 1(\frac{1}{2})^{n-1} \rightarrow a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$2, 6, 24, 120, \dots$$

دنباله هندسی نیست، زیرا حاصل تقسیم جملات متوالی دنباله عددی ثابت نیست.

$$\frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{24}{6} = 4$$

$$\frac{120}{24} = 5$$

واسطه ی هندسی:

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه داریم:

$$b^2 = a \times c$$

b را واسطه ی هندسی بین دو عدد a, c می گوئیم.

اگر سه عدد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله ی متوالی یک دنباله هندسی باشند، واسطه حسابی بین دو عدد a, b را به دست آورید.

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \rightarrow 32 = 2^{a+b} \rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \rightarrow a + b = 5$$

$$a, b \text{ واسطه حسابی بین دو عدد } = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2/5$$

ج