



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

تعریف توان:

به تکرار جمع، ضرب و به تکرار ضرب، توان می‌گوییم.

$$\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ بار}} = n \times a$$

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

قواعد و قوانین و خواص کلی توان:

$$\left. \begin{array}{l} 1) a^m \times a^n = a^{m+n} \\ 2) a^m \times b^m = (ab)^m \end{array} \right\} \text{ضرب اعداد تواندار}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) a^m \div a^n = a^{m-n} \\ 4) a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \end{array} \right\} \text{تقسیم اعداد تواندار}$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \quad \text{قاعده توان منفی}$$

$$7) (((a^m)^n)^p = a^{mnp} \quad \text{قاعده توان در توان}$$

$$6) \frac{1}{a^{-1}} = a^1 \quad \text{قاعده توان منفی}$$

$$8) a^{m^n} = (a)^{m^n} \quad \text{قاعده توان توان}$$

$$9) a^{\cdot} = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$11) a^2 = \text{مجدور}$$

$$10) 1^a = 1$$

$$12) a^3 = \text{مکعب}$$

$$13) \text{عدد مثبت} = \text{زوج} (\text{عدد منفی})$$

$$14) \text{عدد منفی} = \text{فرد} (\text{عدد منفی})$$

$$15) (a^m)^n \neq a^{mn}$$

$$16) \frac{a^m}{b^n} = a^m \times b^{-n}$$

$$17) (a \pm b)^x \neq a^x \pm b^x$$

$$18) (a \times b)^x = a^x \times b^x$$

جدول توانی زیر را باید حفظ باشید.

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$	$10^2 = 100$	$16^2 = 256$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$6^3 = 216$	$11^2 = 121$	$17^2 = 289$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$18^2 = 324$
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$	$7^3 = 343$	$13^2 = 169$	$19^2 = 361$
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$	$5^2 = 25$	$8^2 = 64$	$14^2 = 196$	$20^2 = 400$
$2^7 = 128$		$5^3 = 125$	$8^3 = 512$	$15^2 = 225$	
$2^8 = 256$		$5^4 = 625$	$9^2 = 81$		
$2^9 = 512$			$9^3 = 729$		
$2^{10} = 1024$					

۱ حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

$$\text{الف) } 32^2 \times 16^2 \times 2^5 \times 4^7 =$$

$$\text{ب) } 2^7 \times 6^5 \times 3^3 \times 8^3 \times 12^7 \times 4^5 =$$

$$\text{ج) } 3^{2^2} \times (2^2)^3 \times 4 =$$

$$\text{د) } \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{4}{6}\right)^7 =$$

$$\text{ه) } 5^{24} \times 3^{36} \times 2^{12} =$$

$$\text{و) } 16^{-2} \div \frac{1}{\frac{4}{8}} =$$

$$\text{ز) } 2^5 \div 3^{-5} \times 6^3 \times 7^8 =$$

$$\text{ح) } (7 \times 27^4 + 2 \times 9^6) \times 5^7 =$$

$$\text{ط) } \frac{5^{16} + 5^{18} + 5^{20} + \dots + 5^{36}}{25^5 + 25^6 + 25^7 + \dots + 25^{15}} =$$

$$\text{ی) } (2/5)^{-7} \times (0/4)^5 \times (3/2)^{15} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 =$$

$$\text{ک) } 81^3 + 2 \left(3^{12} + 3^{13} + 3^{14} + \dots + 3^{22} \right) =$$

۲- حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

$$\text{الف)} \frac{27^5 \times 81^2}{9^4 \times 3^6} =$$

$$\text{ب)} 64^{2^4} \times 128^{5^2} \times (16^4)^{50} =$$

$$\text{ج)} \left(\frac{4}{5}\right)^7 \times \left(\frac{16}{25}\right)^8 \times \left(\frac{12}{15}\right)^9 =$$

$$\text{د)} 2^{172} \times 5^{129} =$$

$$\text{ه)} \frac{512^3 \times 256^2}{64^5 \times 16^7} =$$

$$\text{و)} \frac{625^7 \times 25^9}{125^4 \times 5^6} =$$

۳- ثلث عدد 243^{14} را بدست آورید.

۴- ربع مجذور 16^{28} را بدست آورید.

۵- ثلث عدد 9^{4n-2} را بدست آورید.

محاسبه‌ی تعداد ارقام و تعداد صفرهای سمت راست یک عدد تواندار:

در ابتدا اعداد تواندار را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم و سپس به ازای هر عامل ۲ و ۵ یک صفر قرار می‌دهیم. یعنی با مساوی کردن توان های عوامل ۲ و ۵ و تبدیل آن ها به توان هایی از ۱۰ ، می‌توان به محاسبه‌ی تعداد ارقام و تعداد صفرهای سمت راست یک عدد رسید.

۶- حاصل هریک از اعداد زیر چند رقمی است و چند صفر جلوی آنها قرار دارد؟

$$= 4^2 \times 5^7 \text{ (الف)}$$

$$= 20^3 \times 25^2 \times 50^4 \text{ (ب)}$$

$$= 36^2 \times 100^3 \times 625 \text{ (ج)}$$

$$= 625^4 \times 128^2 \times 200^7 \text{ (د)}$$

$$= 250^{11} \times 40^{19} \text{ (ه)}$$

$$= 32^3 \times 25^6 \text{ (و)}$$

$$= 625^{15} \times 512^7 \times 6 \text{ (ز)}$$

$$= 125^{12} \times 128^5 \text{ (ح)}$$

محاسبه‌ی رقم یکان اعداد توان‌دار

۱- اگر رقم عدد پایه هر عددی بود و توان آن عددی طبیعی باشد، به جای توان آن، ابتدا توانش را بر ۴ تقسیم می‌کنیم سپس باقی مانده تقسیم را بجای توان عدد قرار می‌دهیم و در نهایت یکان عدد حاصل را حساب می‌کنیم.

(تذکر: اگر باقی مانده صفر شد ، بجای صفر عدد ۴ را قرار می‌دهیم.)

۲- در حالت خاصی که رقم یکان پایه برابر صفر ، ۱ و ۵ و ۶ باشد، رقم یکان آن عدد تواندار هم به ترتیب صفر، ۱ ، ۵ و ۶ خواهد شد.

۳- در حالت خاصی که رقم یکان پایه برابر ۴ یا ۹ باشد ، رقم یکان آن عدد تواندار :

اگر توان زوج باشد : به ترتیب برابر ۶ و ۱ می‌شود. اگر توان فرد باشد: به ترتیب برابر ۴ و ۹ می‌شود.

تذکر: اگر بین چند عدد تواندار جمع و تفریق و یا ضرب قرار داشت ابتدا رقم یکان هر عدد را جداگانه حساب کرده و سپس ارقام یکان بدست آمده

را باهم جمع و تفریق و یا ضرب می‌کنیم.

۷- رقم یکان هر یک از اعداد و عبارت زیر را بدست آورید.

$$= 125^{124} \text{ (الف)}$$

$$= 234^{56} \text{ (ب)}$$

$$= 1397^{99} \text{ (ج)}$$

$$= 528^{35} + 123^{35} \text{ (د)}$$

$$= 321^{321} - 66^{66} \text{ (ه)}$$

$$= 209^{929} \times 929^{209} \text{ (و)}$$

نوشتن عددی بین دو عدد توان‌دار

برای این کار ابتدا باید دو عدد تواندار را طوری تفکیک کنیم که اعداد خواسته شده بین دو عدد قرار بگیرد.

۸- بین دو عدد 5^{17} و 5^{18} ، چهار عدد طبیعی بنویسید.

۹- بین دو عدد 6^{1396} و 6^{1397} ، سه عدد بنویسید که بر ۵ بخش پذیر باشد.

۱۰- بین دو عدد 7^{201} و 7^{202} ، عددی بنویسید که بر ۹ و ۲۱ بخش پذیر باشد.

توان های مجهول :

در بعضی از مسائل، توان یک عدد، مجهول است و از ما می خواهند حاصل عبارات را بدست آوریم. به سوالات زیر توجه بفرمایید.

۱۱- اگر $3^x = 4$ باشد، حاصل هریک از عبارات های زیر را بر حسب x بدست آورید.

الف) $3^{2x} =$

ب) $3^{2x} + 3^{2x} + 3^{2x} =$

ج) $9^{2x+1} =$

د) $27^{x-1} =$

هـ) $3^{5-2x} =$

و) $3^{2^x} =$

ز) $81^{-x} =$

۱۲- اگر $2^a = k$ باشد، حاصل عبارات زیر را بر حسب k حساب کنید.

الف) $2^{a+2} =$

ب) $(\frac{1}{25})^{2-a} =$

ج) $2^{a-1} =$

د) $(\frac{1}{125})^a =$

هـ) $2^{3a+1} =$

و) $(\frac{1}{16})^{2-a} =$

❓- اگر $5^a = 7$ و $3^b = 5$ باشد، حاصل $(9^{b+1} - 100)^{a-1}$ چقدر است؟

مقایسه اعداد تواندار:

اعداد بین صف و یک هر چه به توان برسند کوچکتر می شوند.

برای مقایسه اعداد تواندار باید پایه یا توان های آنها را باهم برابر کرد.

۱۳- هر دسته از اعداد زیر را به ترتیب از کوچک به بزرگ، مرتب کنید.

$$= 9^9 \text{ و } 243^2 \text{ و } 27^5 \text{ (الف)}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \text{ و } \left(\frac{4}{9}\right)^5 \text{ و } \left(\frac{8}{12}\right)^{15} \text{ (الف)}$$

$$= (-8)^6 \text{ و } (-16)^3 \text{ و } (-4)^5 \text{ (ج)}$$

$$= 9^{20} \text{ و } 25^{10} \text{ و } 33^6 \text{ (د)}$$

$$= 2^{110} \text{ و } 5^{72} \text{ و } 7^{55} \text{ و } 8^{36} \text{ (د)}$$

مربع و مکعب کامل:

تعریف مربع کامل:

توان دوم یک عدد را مربع یا مجذور گویند. هرگاه در تجزیه‌ی عددی به عوامل اول، تمام توان‌ها اعدادی زوج باشند، آن عدد یک مربع کامل است.

نکته تعریف مکعب کامل:

توان سوم یک عدد را مکعب گویند. هرگاه در تجزیه‌ی عددی به عوامل اول، تمام توان‌ها مضربی از ۳ باشند، آن عدد یک عدد مکعب کامل می‌باشد.

۱۴- هریک از عبارت‌های زیر را حداقل در چه عددی ضرب کنیم، تا مربع کامل شود؟

الف) $4^3 \times 7^5 \times 121 =$

ب) $6^7 \times 81^4 \times 50 =$

ج) $15^3 \times 55 \times 27 \times 343 =$

۱۵- هریک از عبارت‌های زیر را حداقل بر چه عددی تقسیم کنیم، تا مکعب کامل شود؟

الف) $2^3 \times 25^2 \times 52 \times 10^4 =$

ب) $441 \times 28 \times 55 \times 121 =$

ج) $100 \times 135 \times 32 =$

د) $6^{15} \times 8^7 \times 9^{12} \times 11^4 =$

❖ - مکعب عددی برابر $64a^6$ است. مجذور آن را بدست آورید.

حل معادلات توانی:

$$a^m = a^n \gg m = n$$

۱- پایه های برابر با توان های متفاوت

$$m^a = n^a \gg m = n$$

۲- پایه های متفاوت با توان های برابر:

۳- پایه های متفاوت با توان های متفاوت:

اگر نه توانها و نه پایه ها و همچنین اگر پایه ها قابل تجزیه و تبدیل به هم نباشند، می توان توان هریک از پایه ها را مساوی صفر قرار داد و مقدار مجهول را بدست آورد.

۱۶- معادلات توانی زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 7^{3x-1} \times 7^{3x} \times 7^{3x+1} = 2401$$

$$\text{ب) } 5^{3x-2} + 5^{3x-2} + 5^{3x-2} = 1875$$

$$\text{ج) } 7^{3x-1} + 7^{3x} + 7^{3x+1} = 2793$$

$$\text{د) } \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1}}{\left(\frac{4}{9}\right)^{x+2}} = \left(1\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$$

$$\text{ه) } \frac{2^{a+3} - 2^{a+1}}{5^{x-2} + 5^{x-3}} = \frac{64}{50}$$

$$\text{و) } 32^{x-1} \times (0/25)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$$