مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

ترکیبیات

۱-۱ اصل ضرب

اصل ضرب (اصل شمارش): اگر عملی به n_1 طریق مختلف انجام شود و پس از آن عمل دومی به n_2 طریق مختلف انجام گیرد و... و عمل k اُمی به n_k طریق مختلف صورت پذیرد، این k عمل با هم (پشت سرهم) به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق مختلف صورت می‌گیرند.

مثال۱: می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن ها یکی از حروف {ا،ب،ج،د} و در سمت چپ آن ها عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود. چند کارت متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب:

$\boxed{۹}\ \boxed{۹}\ \boxed{۴} = ۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴$

۱	۱	ا
۲	۲	ب
⋮	⋮	ج
۹	۹	د

مثال۲: یک ساختمان ۸ طبقه و ۵ رنگ مختلف داریم. به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، به طوری که هیچ دو طبقه مجاوری هم رنگ نباشند. (شبیه تمرین ص۱۸۲ ریاضی ۲)

۱) $۵^۸$ ۲) ۵×۴^۷ √ ۳) $۵\times۴\times۳^۶$ ۴) ۵×۳^۷

جواب:

طبقه اول طبقه دوم طبقه سوم طبقه هشتم

$\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \ldots \times \boxed{۴} = ۵ \times ۴^۷$

طبقه اول	طبقه دوم	طبقه سوم
(سبز)	(آبی)	سبز
آبی	قرمز	قرمز
قرمز	زرد	زرد
زرد	نارنجی	نارنجی
نارنجی		

مثال۳: یک اتوبوس دارای ۸ مسافر است و در ۵ ایستگاه متوقف می‌شود. مسافرین این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

۱) ۴۰ ۲) 8^5 ۳√) 5^8 ۴) $\frac{8!}{5!}$

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{5}}_{\substack{\text{ایستگاه اول}\\ \vdots \\ \text{ایستگاه پنجم}}}}^{\text{مسافر اول}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{5}}_{\substack{\text{ایستگاه اول}\\ \vdots \\ \text{ایستگاه پنجم}}}}^{\text{مسافر دوم}} \times \dots \times \overbrace{\underbrace{\boxed{5}}_{\substack{\text{ایستگاه اول}\\ \vdots \\ \text{ایستگاه پنجم}}}}^{\text{مسافر هشتم}} = \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{\text{۸ تا}} = 5^8$$

مثال۴: در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سؤال متفاوت اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه ی سؤال‌ها پاسخ دهند، چند پاسخنامه‌ی متفاوت می‌توانیم داشته باشیم (تعداد دانش‌آموزان از تعداد سؤالات بیشتر است) شبیه تمرین در کلاس ۴ ص ۱۸۰ ریاضی۲.

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{\text{گزینه ۱}\\ \text{گزینه۲}\\ \text{گزینه ۳}\\ \text{گزینه۴}}}}^{\text{سوال اول}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{\text{گزینه ۱}\\ \text{گزینه۲}\\ \text{گزینه ۳}\\ \text{گزینه۴}}}}^{\text{سوال دوم}} \times \dots \overbrace{\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{\text{گزینه ۱}\\ \text{گزینه۲}\\ \text{گزینه ۳}\\ \text{گزینه۴}}}}^{\text{سوال دهم}} = 4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$$

مثال۵: ۲ نفر برای ریاست اداره‌ای نامزد شده‌اند به چند طریق ۱۵ نفر از کارمندان می‌توانند به آن ها رأی دهند، به طوری که هر فرد حداکثر به یک نفر رأی دهد؟

۱) 2^{15} ۲) 15^2 ۳√) 3^{15} ۴) 15^3

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\text{کاندید } A\\ \text{کاندید } B\\ \text{هیچکدام}}}}^{\text{نفر اول}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\text{کاندید } A\\ \text{کاندید } B\\ \text{هیچکدام}}}}^{\text{نفر دوم}} \times \dots \overbrace{\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{\text{کاندید } A\\ \text{کاندید } B\\ \text{هیچکدام}}}}^{\text{نفر پانزدهم}} = \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{\text{۱۵تا}} = 3^{15}$$

تمرین۱: سؤال قبل را در حالتی که هر فرد دقیقا به یک نفر رأی دهد حل کنید.

جواب: 2^{15}

مثال ۶: با اعداد ۰ و ۱ چند ماتریس ۳×۳ می‌توان ساخت به طوری که همه‌ی درایه‌های روی قطر فرعی آن، ۰ باشند؟

جواب: درایه‌های روی قطر فرعی فقط یک انتخاب دارند (عدد صفر)بقیه درایه‌ها که ۶درایه هستند دوانتخاب دارند (صفر و یک) پس داریم:

$$\underset{\substack{0\\1}}{\boxed{2}} \times \underset{\substack{0\\1}}{\boxed{2}} \times \underset{\substack{0\\1}}{\boxed{2}} \times \underset{\substack{0\\1}}{\boxed{2}} \times \underset{\substack{0\\1}}{\boxed{2}} \times \underset{\substack{0\\1}}{\boxed{2}} = 2^6 = 64$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} \end{bmatrix}_{3\times 3} \longleftarrow \text{قطر فرعی}$$

مثال۷: با حروف کلمه‌ی «جمهوری» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آن ها نقطه‌دار نباشد؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(\text{و})\\ \text{ر}\\ \text{ج}\\ \text{ی}}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(\text{ه})\\ \text{و}\\ \text{ر}\\ \text{ج}\\ \text{ی}}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(\text{م})\\ \text{ه}\\ \text{و}\\ \text{ر}}} = 4 \times 5 \times 4 = 80$$

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود از خانه های شروع به شمارش حالات می کنیم که محدودیت در آن باشد. (بخصوص وقتی تکرار مجاز نیست)

برای پیدا کردن تعداد اعداد مطمئن ترین روش اصل ضرب می باشد.

چند محدودیت مهم:

۱) اگر صفر در بین ارقام داده شده باشد نمی‌توان صفر را در سمت چپ عدد قرار داد.

۲) اگر صفر در بین اعداد داده شده باشد مجبوریم از اصل ضرب استفاده کنیم.(نمی توان از جایگشت وترکیب استفاده کرد.)

۳)عددی مضرب ۲ (بخش‌پذیر بر ۲) است که رقم سمت راست آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

۴) عددی مضرب ۳ است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

۵) عددی مضرب ۵ (بخش‌پذیر بر ۵) است که رقم سمت راست آن ۰یا ۵ باشد.

۶)عددی مضرب ۶ است که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳

نکته: قبل از انجام هر کاری مجاز بودن یا مجاز نبودن تکرار ارقام را مشخص می کنیم سپس سوال را حل می کنیم.

مثال۸: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت(تکرار ارقام مجازاست)؟

جواب: (اگر تکرار مجاز باشد از هرجا شروع به شمارش حالات کنیم ایراد ندارد.)

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{۳} & \times & \boxed{۴} & \times & \boxed{۴} & = & ۴۸ \\ ۱ & & ۰ & & ۰ & & \\ ۲ & & ۱ & & ۱ & & \\ ۳ & & ۲ & & ۲ & & \\ & & ۳ & & ۳ & & \end{array}$$

مثال۹: چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۰، ۱ وجود دارد؟ (سراسری تجربی)

جواب:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \boxed{۱} & \times & \boxed{۲} & \times & \boxed{۲} & \times & \boxed{۲} & \times & \boxed{۲} & \times & \boxed{۲} & = ۲^{۵} = & ۳۲ \\ ۱ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & \\ & & ۱ & & ۱ & & ۱ & & ۱ & & ۱ & & \end{array}$$

مثال۱۰: چند عدد چهار رقمی بدون رقم ۷ داریم؟ (شبیه تمرین ۵ ص ۱۸۲ریاضی۲)

جواب:

$$\begin{array}{ccccccccc} \underbrace{\boxed{۸}} & \times & \underbrace{\boxed{۹}} & \times & \underbrace{\boxed{۹}} & \times & \underbrace{\boxed{۹}} & = & ۵۸۳۲ \\ & & ۰ & & ۰ & & ۰ & & \\ ۱ & & ۱ & & ۱ & & ۱ & & \\ ۲ & & ۲ & & ۲ & & ۲ & & \\ ۳ & & ۳ & & ۳ & & ۳ & & \\ ۴ & & ۴ & & ۴ & & ۴ & & \\ ۵ & & ۵ & & ۵ & & ۵ & & \\ ۶ & & ۶ & & ۶ & & ۶ & & \\ ۸ & & ۸ & & ۸ & & ۸ & & \\ ۹ & & ۹ & & ۹ & & ۹ & & \end{array}$$

مثال۱۱: چه تعداد عدد چهار رقمی زوج وجود دارد؟

جواب:

مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

$$\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۴\\۶\\۸}} = ۴۵۰۰$$

مثال۱۲: با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟(تکرار ارقام مجاز است)

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۵\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۰\\۱\\۵\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۰\\۵}} = ۲۴$$

مثال۱۳: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگتراز ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب: $۴۹۹ = ۱ - ۵۰۰ = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۴$ (عدد ۲۰۰۰هم در بین این ۵۰۰ عدد قرار دارد که باید حذف شود.)

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۲\\۳\\۴\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۳\\۴\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۳\\۴\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۲\\۳\\۴\\۷}} = ۵۰۰$$

نکته: کد با عدد متفاوت است و رقم سمت چپ آن و حتی رقم‌های بعدی آن می‌تواند صفر باشد.

مثال۱۴: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند کد سه رقمی می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} = ۱۲۵$$

نکته: کد شهرستان الزاماً رقم سمت چپ آن را صفر قرار می‌دهیم (یک حالت) و رقم کناری آن غیر صفر

مثال۱۵: با ارقام ۰، ۱، ۳، ۶، ۷ چند کد چهار رقمی تلفن شهرستان می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۱}}_{۰} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۳\\۶\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۳\\۶\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۳\\۶\\۷}} = ۱ \times ۴ \times ۵ \times ۵ = ۱۰۰$$

مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

مثال۱۶: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(2)\\3\\4\\5}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(3)\\4\\5\\0}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{4\\5\\0}} = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

مثال۱۷: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی و بزرگتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(5)\\7\\9}}}^{\text{شروع}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(7)\\9\\1\\3}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(9)\\3\\1}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{1\\3}} = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$$

مثال ۱۸: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کمتر از ۷۰۰۰ می توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(3)\\5}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(5)\\7\\9\\1}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(7)\\9\\1}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{9\\1}} = 48$$

مثال۱۹: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و زوج، بزرگتر از ۴۰۰۰ وجود دارد(ارقام زوج‌اند نه خود عدد)؟

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(4)\\6\\8}}}^{\text{شروع}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(2)\\6\\8\\0}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(6)\\8\\0}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{8\\0}} = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$$

نکته: وقتی در مسئله ای ذکر می شود ارقام زوج، یعنی برای تمام خانه ها از اعداد زوج استفاده می کنیم. اما وقتی ذکر می شود عدد زوج فقط رقم یکان آن باید زوج باشد باقی ارقام هم می توانند زوج باشند و هم فرد.

مثال۲۰: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ √ ۴) ۱۰۸

جواب: گزینه ۳

برای نوشتن عدد چهار رقمی بزرگ تر از ۳۰۰۰ و با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام، از اصل ضرب کمک می گیریم. کافی است تک تک خانه های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان را شمارش حالت کرده و در هم ضرب کنیم. دقت کنید شروع شمارش حالت ها از خانه ای انجام می شود که محدودیت رقم گذاری در آنجاست. پس شمارش حالت ها را از هزارگان انجام می دهیم. داریم:

مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

$$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

مثال۲۱: با ارقام $\{۸،۵،۲،۱،۰\}$ چند عدد چهار رقمی می توان ساخت به طوری که رقم یکان و صدگان یکسان باشند؟

جواب: $۱۰۰ = \boxed{۱} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴}$

برای رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم(صفر در سمت چپ عدد قرار نمی گیرد) برای رقم دهگان ۵ انتخاب داریم، چون قرار است رقم صدگان و یکان مثل هم باشند آن ها را یکی در نظر می گیریم و ۵ انتخاب دارند. یا این که می گوییم رقم صدگان ۵ انتخاب دارد، چون می خواهیم رقم صدگان و یکان یکسان باشند برای رقم یکان تنها یک انتخاب داریم(باید همان رقم قرار گرفته در صدگان را قرار دهیم).

نکته: هرگاه مسئله دارای سه شرط زیر به صورت همزمان باشد

شرط۱: در بین ارقام داده شده، صفر وجود داشته باشد.

شرط۲: تعداد اعداد زوج (مضرب ۲) یا مضرب ۵ (بخشپذیر بر ۵) را از ما بخواهد.

شرط۳: تکرار ارقام مجاز نباشد.

آن را در دو حالت بررسی می کنیم

حالت ۱: فقط رقم صفر در یکان باشد. حالت ۲: رقم صفر در یکان نباشد.

مثال۲۲: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که هیچکدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد؟ (شبیه تمرین ۴ ص ۱۸۶ ریاضی ۲)

جواب:$۱۵۶ = ۹۶ + ۶۰$

حالت۱:

$$\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۱)\\ ۲\\ ۳\\ ۴\\ ۷}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۳\\ ۴\\ ۷}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۳\\ ۴\\ ۷}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۱}}_{(۰)}}^{\text{شروع}}$$

حالت۲:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۴)\\ ۱\\ ۳\\ ۷}}}^{\text{شروع ۲}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۱)\\ ۳\\ ۷\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۳\\ ۷\\ ۰}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۴}}}^{\text{شروع ۱}} = ۹۶$$

مثال۲۳: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)

جواب: $۱۰ = ۴ + ۶$

مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

حالت۱:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۳\\ ۵}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\ ۵}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۵} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۰} = ۶$$

حالت۲:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۳}}}^{\text{شروع ۲}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۳} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۱}}_{۵}}^{\text{شروع ۱}} = ۴$$

۱-۱-۱ احتمال‌های مربوط به اصل ضرب

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}} = \frac{\text{خواسته ی احتمال}}{\text{کل اعداد خواسته شده}}$$

مثال ۲۴: اگر با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　√ ۳) $\frac{۳}{۴}$　　۴) ۱

جواب:

$$n(S) = \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۱\\ ۴\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \quad \text{و}\ n(A) = \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۴\\ ۶}}}^{\text{شروع}}$$

$$P(A) = \frac{۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۲۵: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید احتمال آن که این عدد زوج باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۳}{۸}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۳}{۵}$　　√ ۴) $\frac{۵}{۸}$

جواب:

$$n(S) = \overbrace{\boxed{۴}}^{\text{شروع}}_{\substack{(۱)\\۲\\۳\\۴}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\۲\\۳\\۴}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۳\\۴}} = ۴۸$$

$$n(A) = \left\{ \underbrace{\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۲}}_{\text{۲ یا ۴}} \right\} = ۳۰ \rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{۳۰}{۴۸} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین۲: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟ (سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

جواب: $\frac{۵}{۹}$

تمرین۳: چهار رقم ۹، ۷، ۵،۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی

الف) مضرب ۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۱۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب۵ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

مثال۲۶: با استفاده از اعداد مجموعه {۱،۲،۵،۸،۹}به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته‌ایم با چه احتمالی این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

√۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

جواب:

$$n(S)=۵!=۱۲۰\ ,n(A)=\boxed{۱}\,\boxed{۴}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}\,\boxed{۱}=۲۴,\mathrm{P}(A)=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

مثال۲۷: از بین اعداد طبیعی سه رقمی به تصادف یک عدد برداشته‌ایم با کدام احتمال

الف) رقم ۲ در این عدد ظاهر نشده است؟

جواب:

$$n(S):\boxed{۹}\times\boxed{۱۰}\times\boxed{۱۰}\qquad,\qquad n(A):\boxed{۸}\times\boxed{۹}\times\boxed{۹}$$

۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۳	۳	۳
۳	۳	۳	۴	۴	۴
۴	۴	۴	۵	۵	۵
۵	۵	۵	۶	۶	۶
۶	۶	۶	۷	۷	۷
۷	۷	۷	۸	۸	۸
۸	۸	۸	۹	۹	۹
۹	۹	۹			

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(S)}=\frac{۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰}=\frac{۱۸}{۲۵}$$

ب) لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است(سراسری ریاضی ۸۶).

جواب: $P(B)=۱-\frac{۱۸}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$

مثال۲۸: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد.(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی‌رود) (سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$S=\{۱,۲,۳,\dots,۹\}\ ,n(A)=۹$

$A=$ پلاک مضرب۳ یا بیشتر از ۴ نیست.

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹\},n(A)=۶\rightarrow\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۲-۱-۱ پیدا کردن تعداد توابع با استفاده از اصل ضرب

مثال۲۹: تعداد کل توابعی که از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان به مجموعه ی $B = \{a,b,c\}$ تعریف کرد چندتاست؟

۱) ۸۱ √   ۲) ۱۴   ۳) ۱۲   ۴) ۷

جواب:

قانون ازدواج در اسلام

$$\overbrace{\boxed{\begin{matrix}۱\\۲\\۳\end{matrix}}}^{\text{زن ها}} \quad \rightleftarrows \quad \overbrace{\boxed{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}}^{\text{مرد ها}}$$

$$\overset{\text{زن شماره ۴}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} \times \overset{\text{زن شماره ۳}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} \times \overset{\text{زن شماره ۲}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} \times \overset{\text{زن شماره ۱}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} = ۸۱$$

مثال ۳۰: تعداد کل توابعی که از مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان به مجموعه ی $B = \{a,b,c\}$ تعریف کرد به طوری که:

الف) شامل زوج مرتب $(۲,b)$ باشد.

جواب:

$$\underbrace{A}\boxed{\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\end{matrix}} \rightarrow \underbrace{B}\boxed{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}$$

$$\overset{\text{زن شماره ۴}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} \times \overset{\text{زن شماره ۳}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} \times \overset{\text{زن شماره ۲}}{\underset{b}{\boxed{۱}}} \times \overset{\text{زن شماره ۱}}{\underset{a,b,c}{\boxed{۳}}} = ۲۷$$

ب)شامل زوج مرتب $(۳,a)$ نباشد.

جواب:

زن شماره ۴   زن شماره ۳   زن شماره ۲   زن شماره۱

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{a\\b\\c}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{b\\c}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{a\\b\\c}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{a\\b\\c}} = ۵۴$$

پ) شامل زوج مرتب $(۲, b)$ باشد ولی شامل زوج مرتب $(۳, a)$ نباشد.

جواب:

شروع دوم   شروع اول

زن شماره ۴   زن شماره ۳   زن شماره ۲   زن شماره۱

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{a\\b\\c}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{b\\c}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{b} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{a\\b\\c}} = ۱۸$$

مثـال۳۱: چنـد تـابع از مجموعـه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ در $B = \{۹,۷,۵,۲\}$ مـی‌تـوان تعریـف کـرد در صـورتی که $f(b) = ۷, f(c) \neq ۲$ باشند.

جواب:

زن e زن d زن c زن b زن a

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۲\\۵\\۷\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۲\\۵\\۷\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۵\\۷\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۷} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۲\\۵\\۷\\۹}} = ۱۹۲$$

۳-۱-۱ پیدا کردن توابع یک به یک با استفاده از اصل ضرب

تعریف: تابعی که هیچ دو عنصری از دامنه به یک عضو از برد نظیر نشود به بیان ساده تردر نمودار پیکانی بـه هـیچ عضـوی از بردش بیش از یک فلش نمی‌رسد را تابع یک به یک می گویند.

مثال۳۲: از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ مجموعه‌ی $B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند تابع یک به یک می‌توان نوشت.

جواب: $۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۳۶۰$

$$\underbrace{A}_{\boxed{\substack{a\\b\\c\\d}}} \rightarrow \underbrace{B}_{\boxed{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}}$$

انسان d		انسان c		انسان b		انسان a
$\boxed{۳}$	×	$\boxed{۴}$	×	$\boxed{۵}$	×	$\boxed{۶}$
۴ ۵ ۶		(۳) ۴ ۵ ۶		(۲) ۳ ٤ ٥ ٦		(۱) ۲ ۳ ۴ ۵

مثال۳۳: از مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند تابع یک به یک می‌توان نوشت. به طوری که:

الف) شامل زوج مرتب $(b,۳)$ باشد.

جواب: $۳\times۴\times۱\times۵=۶۰$

انسان d		انسان c		$\overbrace{\text{انسان } b}^{\text{شروع}}$		انسان a
$\boxed{۳}$	×	$\boxed{۴}$	×	$\boxed{۱}$	×	$\boxed{۵}$
۴ ۵ ۶		(۲) ۴ ۵ ۶		(۳)		(۱) ۲ ۴ ۵ ۶

ب) شامل زوج $(c,۵)$ نباشد.

جواب: $۳\times۵\times۵\times۴=۳۰۰$

انسان d		$\overbrace{\text{انسان } c}^{\text{شروع}}$		انسان b		انسان a
$\boxed{۳}$	×	$\boxed{۵}$	×	$\boxed{۵}$	×	$\boxed{۴}$
۴ ۵ ۶		(۱) ۲ ۳ ۴ ۶		(۲) ۳ ٤ ٥ ٦		(۳) ۴ ۵ ۶

پ) شامل زوج مرتب $(b,۳)$ باشد ولی شامل زوج $(c,۵)$ نباشد.

جواب: $۳\times۴\times۱\times۴=۴۸$

انسان d		$\overbrace{\text{انسان } c}^{\text{شروع دوم}}$		$\overbrace{\text{انسان } b}^{\text{شروع اول}}$		انسان a
$\boxed{۳}$	×	$\boxed{۴}$	×	$\boxed{۱}$	×	$\boxed{۴}$
۴ ۵ ۶		(۱) ۲ ۴ ۶		(۳)		(۲) ۴ ۵ ۶

تمرین۴: چندتابع یک به یک $A=\{a,b,c,d\}$ به $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ وجود دارد به طوری که $f(a)=۴, f(d)\neq۶$ باشد.

جواب: ۹۶

مثال۳۴: تعداد توابع روی مجموعه‌ی ۴ عضوی کدام است؟ (شبیه تمرین ۵ ص ۱۸۶ ریاضی۲)

۱) ۲۴ √ ۲) ۲۰ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

جواب: $\boxed{۱}\times\boxed{۲}\times\boxed{۳}\times\boxed{۴} = ۲۴$

$$\underbrace{A}_{\boxed{\begin{smallmatrix}a\\b\\c\\d\end{smallmatrix}}} \to \underbrace{B}_{\boxed{\begin{smallmatrix}۱\\۲\\۳\\۴\end{smallmatrix}}}$$

انسان a انسان b انسان c انسان d

$$\underbrace{\boxed{۶}}_{\begin{smallmatrix}(۱)\\۲\\۳\\۴\\۵\end{smallmatrix}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\begin{smallmatrix}(۲)\\۴\\۵\\۶\end{smallmatrix}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\begin{smallmatrix}(۳)\\۴\\۵\\۶\end{smallmatrix}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\begin{smallmatrix}۴\\۵\\۶\end{smallmatrix}}$$
توابع یک به یک

۲-۱ جایگشت

نحوه قرار گرفتن اشیا در کنار هم را جایگشت می نامیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های nشی از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{n!}{\text{حاصلضرب جایگشت‌های تکراری}}$$

دقت کنید در سوالاتی از جایگشت که نیاز به فضای نمونه ای(کل حالات) داریم از فرمول بالااستفاده می کنیم.

مثال۳۶: با حروف کلمه‌ی آبدانان چند کلمه‌ی ۷حرفی می‌توان ساخت؟

جواب:

$$\frac{۷!}{\underbrace{۲!}_{\text{۲ تا ن داریم.}} \times \underbrace{۳!}_{\text{۳ تا آ داریم.}}}$$

مثال۳۷: با حروف کلمه‌ی ATAXIAچند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۶!}{۳!}$

تمرین۵: با حروف کلمه‌ی شمشیر چند کلمه‌ی۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: ۶۰

مثال۳۸: با حروف کلمه‌ی شاهزاده چند کلمه‌ی

الف) ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{۲!\times ۲!}$

مثال۳۹: با حروف کلمه‌ی $APADANA$ چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۱۰ √　　۲) ۳۰　　۳) ۴۰　　۴) ۱۰

جواب: $۲۱۰ = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = \frac{۷!}{۴!}$

مثال۴۰: با حروف کلمه ستایش چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: تکراری نداریم که بر تکرار تقسیم کنیم پس برابر است با **!۵**

مثال۴۱: به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در یک صف پشت سرهم قرار داد؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۲۴۰　　۳) ۳۶۰　　۴) ۷۲۰ √

جواب: ۷۲۰=!۶

مثال۴۲: ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

جواب: !۱۰

مثال۴۳: با ارقام شماره تلفن «۲۲۵۷۵۵» چند شماره تلفن ۶ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰　　۲) ۴۰　　۳) ۶۰　　۴) ۱۲۰

جواب: $\frac{۶!}{۲!\times۳!}$

مخصوص صددرصدی ها

*مثال۴۴: با ارقام ۲، ۰، ۰، ۳ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۱　　۲) ۴　　۳) ۸ √　　۴) ۱۰

جواب: $\frac{۲\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳!}$

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\۳}}\times\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\۰\\۳}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۰)\\۰\\۲}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\۲}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۲}$$

نکته: اگر در بین اعداد صفر داشتیم ابتدا فرض می‌کنیم رقم‌های داده شده متمایز هستند وبا استفاده از اصل ضرب جواب را به‌دست می‌آوریم و در آخر جواب به‌دست آمده را بر جایگشت تکرارها تقسیم می‌کنیم.

*مثال۴۵: با ارقام ۲، ۲، ۲، ۰، ۰، ۱، ۴، ۳ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۱) !۸　　۲) $\frac{۸!}{۲!\times۳!}$　　۳) $\frac{۷!}{۲!}$ √　　۴) $\frac{۷!}{۲!\times۳!}$

جواب: $\frac{7!}{2!} = \frac{6\times 7!}{2!\times 3!}$

$$\underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(2)\\2\\2\\1\\4\\3}} \times \underbrace{\boxed{7}}_{\substack{(2)\\2\\1\\4\\3\\0}} \times \underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(2)\\1\\4\\3\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(1)\\4\\3\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(4)\\3\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(3)\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(0)\\0}} \times \underbrace{\boxed{1}}_{0}$$

*مثال۴۶: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $\frac{8!}{2!\times 4!}$ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ $\surd$

جواب: $20 = \frac{4\times 6!\times 4}{4!\times 4!}$

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(3)\\3\\3\\3}} \times \underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(3)\\3\\3\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(3)\\3\\0\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(3)\\0\\0}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(0)\\0}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(0)\\0}} \times \underbrace{\boxed{1}}_{0} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(0)\\0\\0\\0}}$$

۳-۱ جایگشت های خاص(کنارهم بودن چند شیء، یک در میان قرار گرفتن اشیاءو...)

۱-۳-۱ قرار گرفتن چند شیءِ درکنار هم:

> نکته: اگر در جایگشت چند شیءِ قرار شد تعدادی از اشیاء کنار هم باشند، آن ها را با طناب بـه هـم بسـته و یـک شـی در نظـر می گیریم.
>
> تذکر: اگر در جا دادن این اشیاءِ ترتیبی ذکر نشود، جایگشت خود این اشیاءِ را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می کنیم.

مثال۴۷: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق ممکن می‌توان کنار هم در یک قفسه قـرار داد بـه طوری که:

الف) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند. (سراسری تجربی و ریاضی)

جواب: کتاب‌های ریاضی را به هم می‌بندیم و یک کتاب در نظر می گیریم $5! \times 3!$

کتاب های ادبی کتاب های ریاضی

$\boxed{\wr\wr\wr}$ $\wr\wr\wr\wr$

ب)کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند.

جواب: $4! \times 4!$

پ) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم و کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند؟

جواب: $۴! \times ۳! \times ۲!$

مثال۴۸: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند تعداد ۵ رقمی‌های حاصل کدام است. (سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۱۱۲ ۲) ۲۴ √ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

جواب: $۳! \times ۳!$

$\boxed{۱,۳,۵}\ , ۲, ۴$

مثال۴۹: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره در آن عدد ۱۲۵ به کار رفته باشد تعداد ۵ رقمی-های حاصل کدام است؟

جواب: ۶= !۳

$\boxed{۱۲۵}\ , ۳, ۴$

مثال۵۰: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف c, m, o به صورت com قرار گرفته باشند چندتاست؟(تمرین کتاب)

۱) ۵۰۴۰ √ ۲) ۷۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۳۶۰

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$\boxed{\text{com}}, \text{p}, \text{u}, \text{t}, \text{e}, \text{r}$

مثال ۵۱: با حروف کلمه‌ی مهتاب چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که «الف» بلافاصله بعد «ت» بیاید؟

۱) ۱۲ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰ جواب: ۲۴ = !۴

$\boxed{\text{تا}}$ م ه ب

مثال۵۲: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum

الف)عبارت op وجود دارد؟

جواب: $\frac{۶!}{۲!}$

$\boxed{\text{op}}\ , \text{i} , \text{s} , \text{s} , \text{u} , \text{m}$

ب)عبارت osوجود دارد.

جواب: !۶

پ)oو sکنارهم هستند.

جواب: $۶! \times ۲!$

مثال۵۳: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum عبارت op وجود ندارد؟

جواب: جایگشت های کنارهم قرار نگرفتن چند شیء کنارهم برابر است با کل جایگشت ها منهای جایگشت های کنارهم قرار گرفتن چند شیء

$$\frac{۷!}{۲!}-\frac{۶!}{۲!}$$

مثال۵۴: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می دهیم در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ √ ۴) ۱۴۴۰

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$$\boxed{AA}\ ,\boxed{GG}\ , L , R , N , E$$

مثال۵۵: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می دهیم در چند حالت، حروف یکسان کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

جواب: $\frac{۸!}{۲!\times۲!}-۶!$

تمرین۶: تعداد جایگشت های حروف کلمه ی SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند،کدام است؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ √ ۴) ۳۶۰

جواب: گزینه ۳

مثال۵۶: تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید در چند حالت دو حروف w , a کنار هم قرار ندارند؟(تمرین کتاب)

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲ √ ۳) ۴۸ ۴) ۸۲

جواب:

کل جایگشت ها − جایگشت هایی که a, w کنار هم هستند $= ۵! - (۴! \times ۲!) = ۷۲$

مثال۵۷: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که:

الف) حروف صدادار کنار هم باشند (o, u, e).

جواب: $۶! \times ۳!$

ب) در آن ها کلمه‌ی $comp$ وجود داشته باشد.

جواب: $۵!$

پ) حروف r, e, t, p کنار هم نباشند.

جواب: $۸! - (۵! \times ۴!)$

مثال۵۸: افراد A , B , C , D , E , F به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند که A , B کنار هم باشند و E , F کنار هم نباشند؟

۱) ۱۶۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۴۴

جواب: حالت‌هایی که A, B کنار هم هستند را منهای حالت‌هایی که A , B کنار هم هستند و $E\ , F$ نیز کنار هم هستند می کنیم.

مثال۵۹: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) حروف یکسان کنار هم باشند.

جواب:

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶!}{\frac{۸!}{۲! \times ۲!}} = \frac{۶! \times ۲! \times ۲!}{۸!}$$

ب) حروف یکسان کنار هم نباشند.

جواب: $\frac{۱۳}{۱۴}$

تمرین۷: حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال سه حرف Aکنار هم قرار می گیرند؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مثال۶۰: اعداد ۹، ۶، ۲ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ √

جواب: $p(A) = \frac{۲!\times۲!}{۳!} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند - ۱ =احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

مثال۶۱: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر می‌باشند را در یک ردیف قرار می‌دهیم مطلوبست احتمال آن‌که برادرها کنار هم نباشند.(شبیه مثال ص ۱۶ ریاضی ۳)

جواب:

(احتمال برادرها کنار هم باشند − ۱)= احتمال برادرها کنار هم نباشند

$$۱ - \frac{۵! \times ۲!}{۶!} = ۱ - \frac{۵! \times ۲}{۶ \times ۵!} = ۱ - \frac{۲}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

مثال۶۲: از بین تمام کلمات پنج حرفی که از جایگشت حروف کلمه TEACH حاصل می شود یک کلمه به تصادف انتخاب می کنیم در چند حالت بین دو حرف A وE حداقل یک حرف قرار می گیرد ؟

جواب: بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار گیرد یعنی دو حرف A,E کنارهم نباشند. بنابراین از متمم کمک می گیریم.

$$۵! - (۴! \times ۲!)$$

مثال۶۳: با ارقام ۰و۱و۱و۲و۳ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم،احتمال آن که دو رقم ۱ کنار هم قرار گیرند کدام است؟

جواب: در جایگشت های این ۵ رقم دو تای آن ها یکسان هستند در ضمن صفر سمت چپ قرار نمی گیرد بنابراین داریم:

$$n(S) = \frac{۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۲!} = ۴۸$$

اما برای یافتن تعداد حالت های مطلوب دو رقم ۱ را با هم در نظر می گیریم پس ۴ شیء متمایز داریم که صفر نمی تواند سمت چپ باشد:

$$n(A) = ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸ \to P(A) = \frac{۱۸}{۴۸} = \frac{۳}{۸}$$

۲-۳-۱ قرار گرفتن اشیاءِ در یک جای خاص:

مثال۶۴: با حروف کلمه‌ی TARANEH چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

۱) ۳۶۰		۲) ۲۴۰		۳) ۷۲۰ √		۴) ۱۴۴۰

جواب:

$$\boxed{۶} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \underset{\text{حرف}\,A}{\boxed{۱}} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = ۶!$$

مثال۶۵: با حروف کلمه‌ی $ARAYEHA$ چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{۶} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \underset{\text{حرف}\,A}{\boxed{۱}} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = \frac{۶!}{\underset{\text{تعداد}\,A\text{های تکراری}}{۲!}} = ۳۶۰$$

تمرین۸: با حروف کلمه گل بهار چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که با حرف گ شروع و به حرف ب ختم شود.

مثال۶۶: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حروف r , c در اول و آخر کلمه باشند.

جواب:

$$\underset{c}{\overset{\boxed{۲}}{(r)}} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{۶!} \times \underset{c}{\boxed{۱}} = ۶! \times ۲$$

مثال ۶۷: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر هستند را در یک ردیف قرار می‌دهیم مطلوبست احتمال آن که برادرها در اول و آخر صف باشند.(مثال ص ۱۶ ریاضی ۳).

جواب:

$$n(S) = ۶!, n(A) = \boxed{۲} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{۴!} \times \boxed{۱}$$

$$p(A) = \frac{۴! \times ۲}{۶!} = \frac{۴! \times ۲}{۶ \times ۵ \times ۴!} = \frac{۱}{۱۵}$$

مثال۶۸: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) حروف R, L در اول و آخر کلمه باشند.

جواب:

$$n(A) = \frac{۲ \times ۶!}{۲! \times ۲!} \;,\; n(S) = \frac{۸!}{۲! \times ۲!} \;, P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲\times۶!}{۸!} = \frac{۲\times۶!}{۸\times۷\times۶!} = \frac{۱}{۲۸}$$

ب)حروف R, G در اول و آخر کلمه باشند.

ج)حروف A, G در اول و آخر کلمه باشند.

۳-۳-۱ یک در میان قرار گرفتن اشیاءِ:

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند و $m = n$ باشد تعداد حالت‌هایی که:

الف)m, n شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

ب) فقط m شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

ج) فقط n شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

مثال۶۹: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف به طوری یک در میان قرار داد؟

۱) $۴! \times ۴!$ ۲) $۲\times۴! \times ۴!$ √ ۳) $۴! + ۴!$ ۴) $۲! \times ۴! + ۲! \times ۴!$

جواب: $۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال۷۰: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب:$۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال۷۱: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟(یعنی دخترها یک در میان باشند)

جواب: $۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال ۷۲: با جابجایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ۹　　۲) ۱۲ √　　۳) ۱۸　　۴) ۲۴

جواب: $\frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۳!} = \frac{۳! \times ۲}{۱} = ۶ \times ۲ = ۱۲$

تمرین۹: در ساختن یک کلمه شش حرفی باحروف کلمه PANAMA احتمال آن که حروف A یک در میان باشند کدام است.

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند $m = n + ۱$ باشد تعداد حالت‌هایی که:

الف) m , n شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$m! \times n!$$

ب) فقط m شیءِ(عدد بزرگتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با: $m! \times n!$

ج) فقط n شیءِ(عدد کوچکتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با: $۳ \times (m! \times n!)$

مثال۷۳: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد به طوری یک در میان قرار بگیرند؟

۱) $۴! \times ۳!$ √　　۲) $۲ \times ۴! \times ۳!$　　۳) $۴! + ۳!$　　۴) $۲ \times ۴! + ۲ \times ۴!$

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۷۴: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد به طوری که دخترها یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۷۵: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب: $۳ \times ۳! \times ۴!$

مثال۷۶: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۷۷: با جابجایی ارقام ۱۲۳۴۵۶۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که:

الف) ارقام فرد یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

ب) هیچ دو رقم فردی متوالی نباشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

ج) ارقام زوج یک در میان باشند؟

جواب: $۳ \times ۳! \times ۴!$

د) بین هر دو رقم فرد یک رقم زوج قرار گیرد؟

جواب: $۳! \times ۴!$

مثال۷۸: سه نوع کتاب علمی متمایز و چهار نوع کتاب ادبی متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های علمی یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۱۲۰		۲) ۱۴۴		۳) ۴۳۲ √		۴) ۵۷۶

جواب: $۴! \times ۳! \times ۳ = ۲۴ \times ۶ \times ۳ = ۴۳۲$

تمرین۱۰: ظرفی شامل ۵ مهره‌ی سفید متمایز و ۴ مهره‌ی سیاه متمایز است. مهره‌ها را یکی پس از دیگری به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم چقدر احتمال دارد:

الف) یکی در میان سیاه و سفید درآمده باشند.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۴!}{۹!}$

ب) مهره‌های سفید یک در میان باشند.

پ) دو مهره‌ی سفید متوالیاً خارج نشود.

ت) مهره‌های سیاه یک در میان باشند.

ج) بین دو مهره‌ی سیاه فقط یک مهره‌ی سفید قرار گیرد.

مثال۷۹: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟(سراسری تجربی ۹۲)

۱) ۰/۱ √		۲) ۰/۱۵		۳) ۰/۲		۴) ۰/۲۵

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۲!}{۵!} = \frac{۱۲}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$

مثال۸۰: در سؤال قبل اگر مهره‌ها با شماره زوج یک در میان باشند احتمال را به‌دست آورید.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۲! \times ۳}{۵!} = \frac{۶ \times ۲ \times ۳}{۱۲۰} = \frac{۳۶}{۱۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$

مثال۸۱: پنج نفر a , b , c , d , e می‌خواهند در یک همایش سخنرانی کنند به چند طریق این ۵ نفر می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که بین سخنرانی a , b فقط یک نفر سخنرانی کند؟(سراسری ریاضی)

جواب: $۳ \times (۳! \times ۲!)$

۴-۱ انتخاب اشیاء(ترتیب و ترکیب)

در انتخاب k از n شیء متمایز دو حالت وجود دارد:

الف) اگر اولویت(تقدم و تاخر) اشیاء مهم باشد این نوع انتخاب را ترتیب می نامند و تعداد حالت های آن را از فرمول زیر به‌دست می آوریم.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ب) اگر اولویت (تقدم وتاخر) اشیاء مهم نباشد این نوع انتخاب را ترکیب می نامیم و تعداد حالت های آن از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$c(n\,,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال۸۲: با حروف کلمه‌ی فردوسی چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}$

در این مثال تقدم و تاخر اشیاء (حروف)مهم است به عنوان مثال اگر سه حرف (ف –ر- د) را ازحروف کلمه فردوسی انتخاب کنیم می‌توان کلمه فرد و درف را باآن ساخت که باهم متفاوتند یعنی با جابجایی حرف کلمه جدیدی ساخته می شود. به همین دلیل از ترتیب استفاده می شود.

نکته:

- $\binom{n}{۰}=۱$
- اگر $a+b=n$ آنگاه $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}$.

مثال۸۳:

$$\binom{۸}{۲}=\binom{۸}{۶}\quad,\quad\binom{۵}{۵}=\binom{۵}{۰}\quad,\quad\binom{۱۰۰}{۹۸}=\binom{۱۰۰}{۲}$$

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۲}}=\frac{۵\times ۲}{۲\times ۱}\quad,\quad\binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۱}}=\frac{۱۰}{۱}\quad,\quad\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۳}}=\frac{۵\times ۴\times ۳}{۳\times ۲\times ۱}$$

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۵}}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱},\binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۲}}=\frac{۱۰\times ۹}{۲\times ۱},\binom{\boxed{۶}}{\boxed{۳}}=\frac{۶\times ۴\times ۳}{۳\times ۲\times ۱}$$

مثال۸۴: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه شش عضوی $\{a,b,c,d,e,f\}$ را به‌دست آورید.

جواب: در این مثال تقدم و تاخر اشیا (عضوها) مهم نیست برای مثال زیرمجموعه های $\{c,b,a\}$ و $\{a,b,c\}$ با هم تفاوت ندارند به همین دلیل از ترکیب استفاده می‌کنیم.　　$c(۶,۳)=۲۰$

مثال۸۵: هفت نقطه روی دایره ای قرار دارند حساب کنید که با این هفت نقطه:

الف)چند پاره خط ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ب)چند بردار ایجاد می‌شود؟

جواب: $P(۷,۲)$

ج)چند مثلث ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۳)$

چ) چند وتر ساخته می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ح)چند چهار ضلعی محدب که هر راس چهار ضلعی واقع بر یک نقطه باشد می توان ساخت؟

جواب: $C(۷,۴)$

مثال۸۶: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند. می خواهیم از بین آن ها:

الف)۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم نیست پس $C = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱} = ۲۲۰$

ب)یک رئیس ,یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم.این کار به چند طریق امکان پذیراست.

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم است پس $P = (۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = ۱۳۲۰$

مثال۸۷: به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به طوری که در هر کمیته ۲ دانش-آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ √

جواب: $\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۳} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$

مثال۸۸: به چند طریق از بین ۵ زن و ۴ مرد، انجمنی ۳ نفری می‌توان تشکیل داد به طوری‌که:

الف) فقط یک نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یکی از زنها و دوتا از مردها $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}$

ب) هر سه نفر همجنس باشند.

جواب: یعنی هر سه مرد باشند یا هرسه زن $\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳}$

پ) حداقل یک نفر آن ها مرد باشد.(شبیه تمرین ۲ ص ۱۹۰ ریاضی ۲)

جواب: یعنی یا یکی از مردها انتخاب بشه یا دوتا یا هرسه تا مرد باشند پس داریم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}$$

ت) حداکثر دو نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یا دو تا از آن‌ها زن باشه یا یکی یا هیچکدام از آن‌ها

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{4}{2}+\binom{5}{0}\binom{4}{3}$$

مثال۸۹: از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را بـرای کـار در آزمایشـگاه انتخاب کرد،به طوری که لا اقل دو نفراز آن ها دانش آموز تجربی باشند؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ $\surd$

جواب: $\binom{5}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{3}\binom{3}{0}=10\times 3+10\times 1=40$

مثال۹۰: به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی ، ۴مهره سبز و۲ مهره زرد۳ مهره انتخاب کنیم به طوری که

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد؟

جواب: $C(11,3)$

ب)هر ۳ مهره آبی باشند ؟

جواب: $C(5,3)$

ج) هر سه مهره سبز باشند؟

جواب: $C(4,3)$

چ) دو مهره آبی و یک مهره سبز باشد ؟

جواب: $C(5,2)\times C(4,1)$

ح) دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(5,2)\times C(6,1)$

خ) هر سه مهره همرنگ باشند؟

جواب: $C(5,3)+C(4,3)$

د) مهره ها همرنگ نباشند؟

جواب: $C(11,3)-[C(5,3)+C(4,3)]$

ز)حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(11,3)-[C(5,3)+C(4,3)]$

ذ) مهره ها متمایز باشند؟ (هیچ دو مهره ای همرنگ نباشد)

جواب: $C(5,1)\times C(4,1)\times C(2,1)$

ر) حداقل دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(11,3)-[C(5,1)\times C(4,1)\times C(2,1)]$

س) فقط از دو رنگ باشند؟

جواب:

$$C(۱۱,۳)-\left[C(۵,۳)+C(۴,۳)+\left(C(۵,۱)\times C(۴,۱)\times C(۲,۱)\right)\right]$$

ش) حداقل یک مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۰)\times C(۶,۳)]$

ل) حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۳)\times C(۶,۰)]$

م) حداکثر دو مهره زرد باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

مثال۹۱: تعداد قطر های یک n ضلعی محدب را به‌دست آورید.

جواب: تعداد کل پاره خط ها برابر $C(n,۲)$ است که برای تعداد قطرها بایستی تعداد اضلاع یعنی n را از کل پاره خط ها کم کنیم. $C(n,۲)-n$

مثال۹۲: از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن‌که:

الف) ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۴}\times\binom{۵}{۴}$

ب) ۵ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۵}\times\binom{۵}{۳}$

پ) حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟(سراسری ریاضی ۸۹)

جواب: $\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۳}$

ت) حداکثر ۳ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۳}\times\binom{۵}{۵}$

مثال۹۳: اگر $\frac{p(n,۴)}{c(n-۱,۴)}=۲۶$ باشد مقدار n کدام است؟(سراسری تجربی ۸۴ خارج ازکشور)

۱) ۵۲ √   ۲) ۵۳   ۳) ۵۴   ۴) ۵۵

جواب:

$$p\left(n,۴\right)=\frac{n!}{(n-۴)!}$$

$$c\left(n-۱,۴\right)=\frac{(n-۱)!}{\left(n-۱-۴\right)!\times ۴!}=\frac{(n-۱)!}{(n-۵)!\times ۴!}$$

$$\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)}=\frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۵)!\times ۴!}}=۲۶\Rightarrow\frac{n!\times(n-۵)!\times ۴!}{(n-۱)!\times(n-۴)!}=۲۶$$

$$\Rightarrow\frac{n\times(n-۱)!\times(n-۵)!\times ۲۴}{(n-۱)!\times(n-۴)(n-۵)!}=۲۶\Rightarrow\frac{۲۴\,n}{n-۴}=۲۶$$

$$\Rightarrow ۲۴\,n=۲۶n-۱۰۴\rightarrow ۲n=۱۰۴\rightarrow n=۵۲$$

مثال ۹۴: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $C(n,۱)=۵n-۸$

جواب:

$$C(n,۱)=n\rightarrow n=۵n-۸\rightarrow ۴n=۸\rightarrow n=۲$$

ب) $P(n,n)=P(n,n-۱)$

جواب:

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=n!$$

$$P(n,n-۱)=\frac{n!}{(n-(n-۱))!}=\frac{n!}{۱!}=n!$$

مثال۹۵: از میان ۴ جفت کفش متمایز، به چند طریق می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ جفتی در میان آن ها نباشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب سه جفت کفش}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت اول}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت دوم}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت سوم}}$$

ب) در میان آن ها یک جفت وجود داشته باشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک جفت (دو لنگه)}}\times\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه}}$$

مثال۹۶: ۶ زوج داریم به چند طریق می‌توان ۴ نفر از آن ها را به‌طور تصادفی انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ زن و شوهری در بین آن ها نباشد.

جواب: $\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۶}{۴}$

ب) فقط یک زوج در بین آن ها باشد.

جواب:

روش اول:

$$\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{یک زوج از بین ۶ زوج انتخاب می کنیم.}} \times \underbrace{\binom{۵}{۲}\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{از بین ۵ زوج باقیمانده ۲ زوج انتخاب کرده سپس از هر کدام یک نفر انتخاب می کنیم}}$$

روش دوم:

$$\binom{۶}{۱}\times\left(\binom{۱۰}{۲}-۵\right)$$

مثال۹۷: از هریک از مدارس $A\ ,B\ ,C\ ,D\ ,\ E$ چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز دو به دو غیر هم مدرسه ای انتخاب کرد.(سراسری تجربی ۹۲)

جواب: $\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۶۴۰$

۱-۴-۱ تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

مثال۹۸: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ √ ۴) ۱۶

جواب: $\binom{۶}{۴}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳}{۴\times۳\times۲\times۱}=۱۵$

مثال۹۹: تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ کدام است؟

جواب: $\binom{۶}{۰}+\binom{۶}{۲}+\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۶}$

مثال۱۰۰: تعداد زیر مجموعه‌های هریک از مجموعه های زیر را به‌دست آورید؟

الف) $A = \{a, b\}$

جواب: $\binom{۲}{۰} + \binom{۲}{۱} + \binom{۲}{۲} = ۲^۲ = ۴$

ب) $B = \{a, b, c\}$

جواب: $\binom{۳}{۰} + \binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۳} = ۲^۳ = ۸$

پ) $C = \{a, b, c, d\}$

جواب: $\binom{۴}{۰} + \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۲^۴ = ۱۶$

ت) $D = \left\{\underbrace{a, b, c, \dots}_{n \text{ تا}}\right\}$

جواب: $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$

مثال۱۰۱: حاصل عبارت $\binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲} + \cdots + \binom{۸}{۸}$ کدام است؟

۱) ۶۴　　۲) ۲۵۵ √　　۳) ۲۵۶　　۴) ۵۱۱

جواب:

$$\binom{۸}{۱} + \binom{۸}{۲} + \cdots + \binom{۸}{۸} = ۲^۸ - \binom{۸}{۰} = ۲^۸ - ۱ = ۲۵۶ - ۱ = ۲۵۵$$

مثال۱۰۲: اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه برابر ۴۵ باشد تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی آن کدام است؟

۱) ۵۶　　۲) ۱۲۰ √　　۳) ۲۱۰　　۴) ۴۶۵

جواب:

$$\binom{n}{۲} = ۴۵ \Rightarrow \frac{n \times (n - ۱)}{۲ \times ۱} = ۴۵ \rightarrow n(n - ۱) = ۹۰ \rightarrow n = ۱۰$$
$$\rightarrow \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

۲-۴-۱ ترکیب‌های خاص (شامل و فاقد)

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ rشیءِ را برداریم به طوری که حتماشاملm انتخاب اجباری باشد تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r-m}$

مثال۱۰۳: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که شخص به خصوصی حتما در میان آن ها باشد.

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ √ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵

جواب: $\binom{۸-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲\times۱} = ۲۱$

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که فاقد m شیءِ به خصوص باشد تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r}$

مثال۱۰۴: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که یک شخص به خصوصی حتما در میان آن ها نباشد.

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵ √

جواب: $\binom{۸-۱}{۳} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱} = ۳۵$

مثال۱۰۵: از بین ۱۰ نفر فوتبالیست به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد به طوری‌که بهترین بازیکن در بین آن ها باشد و بدترین بازیکن در بین آن ها نباشد؟

۱) $\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۹}{۳}$ ۳) $\binom{۹}{۴}$ ۴) $\binom{۸}{۴}$

جواب: حاصل برابر است با $\binom{۸}{۳}$ که جز گزینه های داده شده نیست ولی داریم اگر $a + b = n$ آنگاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$ دراین‌صورت:

$$\binom{۸}{۳} = \binom{۸}{۵}$$

مثال۱۰۶: تعداد زیر مجموعه سه عضوی مجموعه $\{a , b , c , d , e , f\}$ که:

الف) شامل a باشد کدام است؟(سراسری تجربی ۸۳)

جواب: $\binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲\times۱} = ۱۰$

ب) شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۵}{۳} = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = ۱۰$

ت) شامل a باشد ولی شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۴}{۲} = \frac{۴\times۳}{۲\times۱} = ۶$

مثال۱۰۷: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که اعداد ۲ و ۵ همزمان در آن ها نیستند.(یعنی اگر یکی از این اعداد داخل مجموعه باشد اشکال ندارد)

۱) ۳۵ ۲) ۲۵ √ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

جواب:

$$\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{کل مجموعه های ۴ عضوی}} - \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی شامل ۲ و ۵}}$$

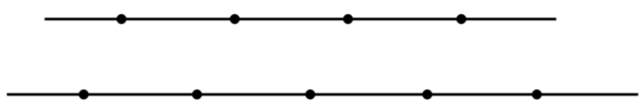
$$= \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} - \frac{۵ \times ۴}{۲ \times ۱} = ۳۵ - ۱۰ = ۲۵$$

مثال۱۰۸: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که شامل اعداد ۲ و ۵ نباشد؟

جواب: یعنی هم ۲ در آن نباشد و هم۵ پس برابر است با $\binom{۵}{۴}$

۳-۴-۱ مسائل هندسی ترکیب

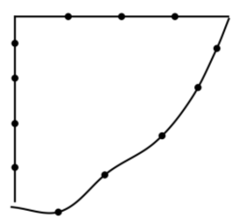
مثال ۱۰۹: با نقاط مشخص شده در شکل زیر چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ √ ۴) ۸۰

جواب: $\binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۱} = ۴ \times ۱۰ + ۶ \times ۵ = ۷۰$

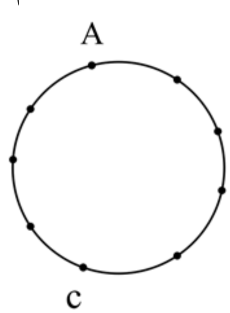
مثال ۱۱۰: با نقاط مشخص شده در شکل زیر، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۲۲۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۲۱۵ √ ۴) ۲۴۰

جواب: $\binom{۱۲}{۳} - \left[\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳}\right] = ۲۲۰ - (۱ + ۴) = ۲۲۰ - ۵ = ۲۱۵$

مثال ۱۱۱: در شکل مقابل چند چهار ضلعی با نقاط داده شده می‌توان رسم کرد که:



الف) Ac ضلع چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} = ۳ + ۶ = ۹$

ب) Ac قطر چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱} = ۳ \times ۴ = ۱۲$

۴-۴-۱ انتخاب همراه با جایگشت

در بعضی مسائل علاوه بر انتخاب اشیاءِ آن‌ها را در کنار هم می‌چینیم به این نوع مسائل انتخاب همراه با جایگشت گوئیم.

مثال۱۱۲: با حروف کلمه‌ی $computer$چند کلمه‌ی ۵ حرفی با معنی و بی معنی می‌توان ساخت به طوری که:

الف) در همه‌ی آن ها حرف r به کار رفته باشد.

جواب: $\binom{۷}{۴} \times ۵!$

ب) در همه‌ی آن ها حروف r , u به کار رفته باشد.

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۵!$

ج) در آن ها حروف r, u به کار نرفته باشد.

جواب: $\binom{۶}{۵} \times ۵!$

مثال ۱۱۳: انجمن فرهنگ و هنر دانشگاه ۶ نفر عضو دارد به چند طریق می‌توان از بین این ۶ نفر یک نفر رئیس، یک معاون اجرایی و یک مسئول امور مالی انتخاب کرد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰ √

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۳! = \frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱} \times ۶ = ۲۰ \times ۶ = ۱۲۰$

مثال ۱۱۴: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توانیم بسازیم به طوری که دو رقم از عدد سه رقمی ساخته شده زوج باشد؟

جواب:

$$\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو رقم از زوج ها}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک رقم از فرد ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ارقام}}$$

مثال ۱۱۵: با ارقام ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ چند عدد سه رقمی با شرط رقم صدگان> رقم دهگان > رقم یکان می‌توان نوشت.(سراسری ریاضی ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ √ ۴) ۱۲

$$\text{جواب:}۱۰ = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = \underbrace{۱}_{\text{فقط یک حالت وجود دارد که با سه رقم شرط برقرار شود.}} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ عدد از ۵ عدد}}$$

مولف:حبیب هاشمی ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱-۰۸۴۳۵۲۲۵۰۵۵

تمرین۱۱: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یکی در میان در قفسه‌ای چید؟

۱) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳!$ ۲) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

۳) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$ ۴) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

مثال ۱۱۶: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در قفسه‌ای چید به طوری که:

الف) کتاب‌های سال اول یکی در میان باشند.

جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۳$

ب) هیچ دو کتاب سال دومی متوالی نباشد.

جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$

مثال ۱۱۷: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۶ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{\dagger\dagger\dagger}}_{\text{سه فرزند}}\ \underbrace{\dagger}_{\text{پدر}}\ \underbrace{\dagger}_{\text{مادر}}$$

$$n(S) = P(۶,۵)\ \ , n(A) = \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۲}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۲}{P(۶,۵)} = \frac{۷۲}{۷۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

مثال ۱۱۸: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۷ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$n(S) = P(۷,۵)\ \ , n(A) = \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۳}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۳}{P(۷,۵)} = \frac{۱۰۸}{۲۵۲۰}$$

مثال ۱۱۹: هر یک از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم ردیف به تصادف قرار می‌دهیم با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$$n(S) = P(۶,۵)\ \ , n(A) = ۴! \times ۲! \times ۲$$

مثال۱۲۰: ۷ نفر که ۲ برادر در بین آن ها حضور دارندمفروضند.از بین آن ها ۵ نفر را انتخاب می کنیم و در یک ردیف کنار هم می نشانیم، با چه احتمالی دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف نشسته اند؟

جواب: درمحاسبه تعداد اعضای فضای نمونه ای، ابتدا ۵ نفر از ۷ نفر را انتخاب می کنیم و سپس آن ها را در یک ردیف می نشانیم که !۵ جایگشت دارند:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} \times ۵! = \frac{۷!}{۵! \times (۷-۵)!} \times ۵! = \frac{۷!}{۲} = ۲۵۲۰$$

برای آن که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند باید حتما در بین انتخاب شده ها باشند. در نتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقیمانده را انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند:

$$n(A) = \boxed{۲} \times \boxed{\binom{۵}{۳} \times ۳!} \times \boxed{۱} = ۱۲۰ \text{ و } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲۱}$$

تنها حالت جمع دو ترکیب

نکته : $\binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k} = \binom{n+۱}{k}$

مثال ۱۲۱: حاصل عبارت $\binom{۲۵}{۹} + \binom{۲۵}{۱۰}$برابر است با:

۱√) $\binom{۲۶}{۱۰}$ ۲) $\binom{۲۵}{۱۱}$ ۳) $\binom{۲۶}{۱۱}$ ۴) $\binom{۵۰}{۱۹}$

جواب: $\binom{۲۵}{۱۰} + \binom{۲۵}{۹} = \binom{۲۵+۱}{۱۰}$

مثال ۱۲۲: حاصل عبارت $\binom{۱۰}{۵} + ۲\binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۳}$ برابر است با:

۱√) $\binom{۱۲}{۵}$ ۲) $\binom{۱۲}{۶}$ ۳) $\binom{۱۱}{۶}$ ۴) $\binom{۱۰}{۶}$

جواب:

$$\binom{۱۰}{۳} + ۲\binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۵} = \underbrace{\binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۴}}_{\binom{۱۱}{۴}} + \underbrace{\binom{۱۰}{۴} + \binom{۱۰}{۵}}_{\binom{۱۱}{۵}}$$

$$= \binom{۱۱}{۴} + \binom{۱۱}{۵} = \binom{۱۲}{۵}$$