بسم الله الرحمن الرحیم

دوره تناوب

و

تابع تانژانت

محمد کرمی دبیر ریاضی شهر ورزقان

پاییز ۹۷

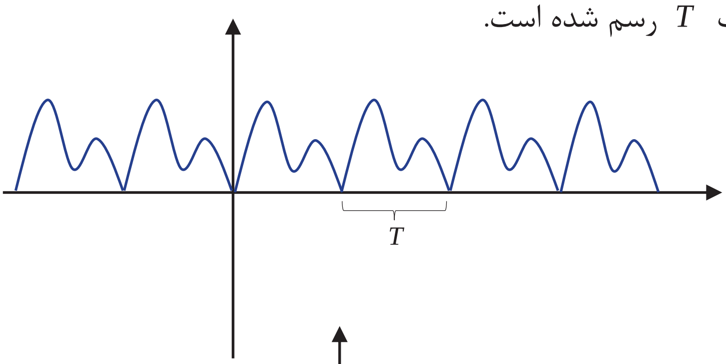
تناوب:

در زندگی روزمره بسیار به پدیده هایی برخورد می کنیم که با نظمی معین دقیقا تکرار می شوند شاید یکی از ساده ترین آن ها آمدن روز و شب یا فصل های سال باشد ، چنین حرکتی را حرکت متناوب می گوییم . به بیان دیگر هر حرکتی که در آن متحرک در بازه ی زمانی مشخصی یک مسیر تکراری را طی می کند را حرکت متناوب می گوییم .پدیده هایی مانند : روزهای هفته ، ماه های سال ، حرکت عقربه های ساعت ، حرکت آونگ ، حرکت زمین به دور خورشید حرکت زمین به دور خود و . . . پدیده هایی متناوب هستند. به واحد زمانی که این پدیده ها در آن تکرار می شوند دوره ی تناوب آن پدیده می گوییم مثلا دوره ی تناوب آمدن روز شنبه در یک هفته برابر ۷ روز است یعنی با گذشت هفت روز یا مضرب صحیحی از هفت روز دوباره روز شنبه خواهد بود.

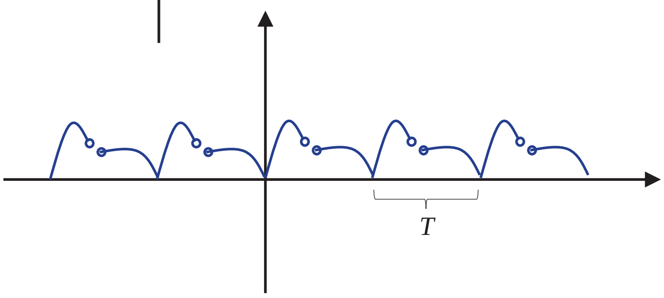
✍ دوره ی تناوب را با حرف T نشان می دهند.

تابع متناوب:

رفتار برخی از توابع به خصوص توابع مثلثاتی نیز همانند پدیده های متناوب تکرار شونده می باشد نمودار این توابع به گونه ای هستند که در یک دوره ی تناوب نمودار رسم می شود و برای دوره های دیگر این نمودار تکرار می شود نمودار مقابل نمونه ای از یک تابع متناوب می باشد که با دوره ی تناوب T رسم شده است.



نکته : همانطور که در شکل دیده می شود توابع متناوب از سمت راست تا $+\infty$ و از سمت چپ تا $-\infty$ ادامه داشته باشند البته این بدان معنی نیست که دامنه ی این توابع کل اعداد حقیقی می باشد نمودار بعدی گویا ی این مطلب می باشد

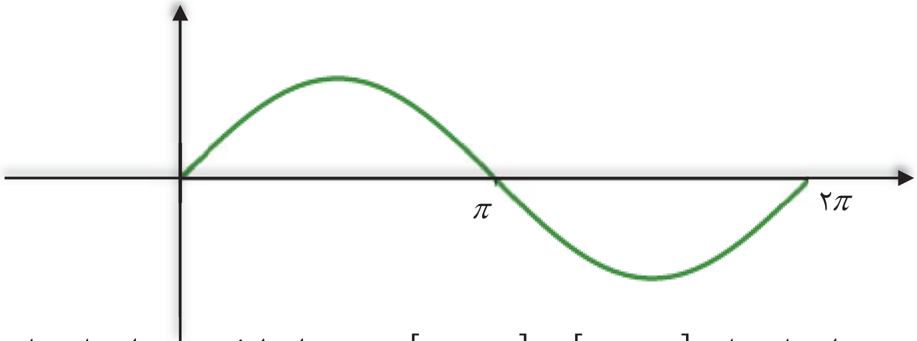


در سال گذشته با دو تابع مثلثاتی $y=\sin(x)$ و $y=\cos(x)$ آشنا شدیم همچنین در بررسی روابط مثلثاتی آموختیم که $\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$ و $\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$ ، این بدان معنی می باشد که با تکرار دورهای کامل روی دایرهٔ مثلثاتی خروجی های دو تابع سینوس و کسینوس دوباره تکرار می شوند به جدول زیر که مقادیر سینوس در آن به ازای چند زاویه آورده شده است دقت کنید:

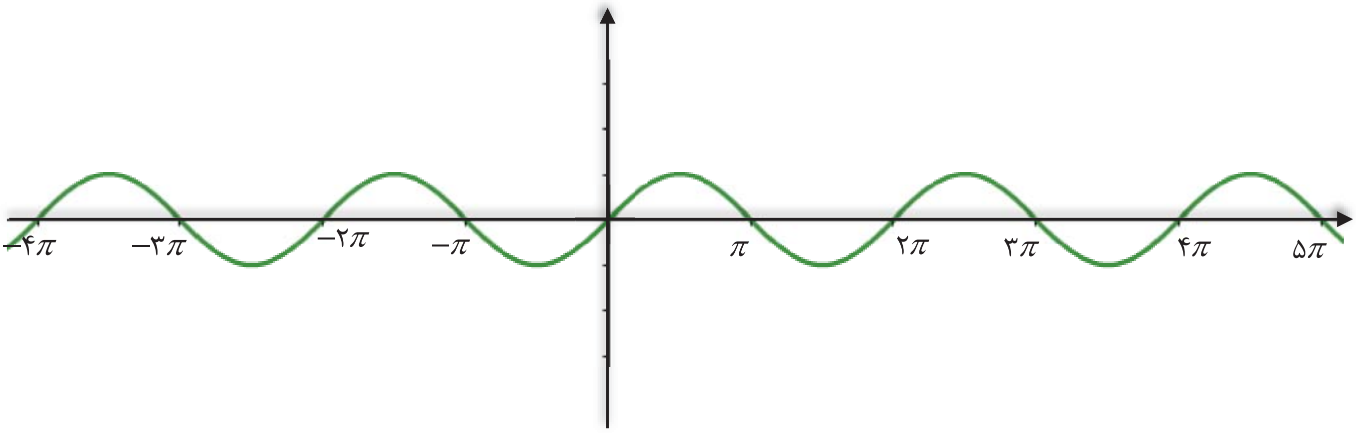
α	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۴\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$
$\sin\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\sin(۲\pi+\alpha)$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$

با توجه به جدول فوق می بینیم که با افزایش ضرایب زوجی از π به زاویه ی α مقادیر نسبت sin ثابت می ماند به عبارت دیگر اگر $\sin\alpha = x$ باشد در اینصورت $\sin(\alpha \pm ۲\pi) = x$ و $\sin(\alpha \pm ۴\pi) = x$ و $\sin(\alpha \pm ۶\pi) = x$ و . . . خواهد بود یعنی تابع سینوس دارای دوره ی تناوب $T = ۲\pi$ می باشد.

در سال گذشته با نمودار تابع $y = \sin(x)$ آشنا شدیم نمودار این تابع در بازه ی $[۰ , ۲\pi]$ بصورت زیر بود.

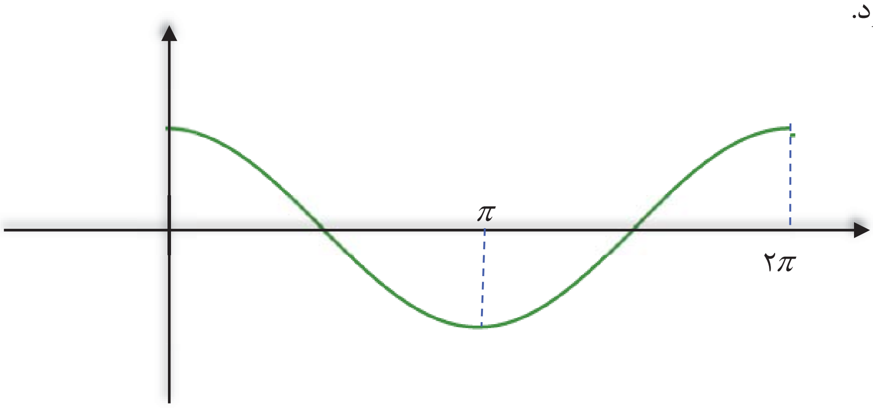


با تکرار نمودار بالا از طرف راست برای بازه های $[۲\pi , ۴\pi]$ و $[۴\pi , ۶\pi]$ و . . . و از طرف چپ برای بازه های $[-۲\pi , ۰]$ و $[-۴\pi , -۲\pi]$ و $[-۶\pi , -۴\pi]$ و . . . نمودار تابع سینوس با دامنه $\mathbb{R}$ بدست می آید که نمودار زیر خواهد بود:

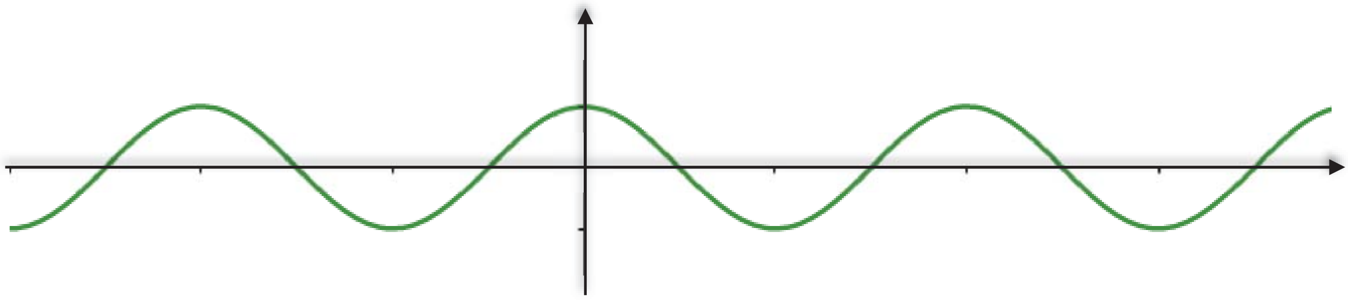


✍ تابع $y = \sin(x)$ یک تابع متناوب بوده و دوره ی تناوب آن $T = ۲\pi$ است.

همانند تابع سینوس ، تابع کسینوس نیز دارای دوره ی تناوب $T = ۲\pi$ می باشد نمودار این تابع در یک دوره ی تناوب و تکرار آن در ادامه رسم می شود.



✍ نمودار تابع کسینوس با تکرار دوره ی تناوب بصورت زیر خواهد بود :



✍ تابع $y=\cos(x)$ یک تابع متناوب بوده و دوره ی تناوب آن $T=2\pi$ است.

با بررسی توابع متناوب در بالا می توان نتیجه گرفت که اگر T دوره تناوب تابع $y=f(x)$ باشد در اینصورت به ازای هر $x\in D_f$ خواهیم داشت : $f(x+T)=f(x)$

✍ کوچکترین T که در رابطه ی $f(x+T)=f(x)$ صدق می کند را دوره ی تناوب اصلی تابع $f(x)$ می گوییم.

✍ برای دو تابع $f(x)=\sin(x)$ و $f(x)=\cos(x)$ می دانیم :

$$\begin{cases} f(x)=\sin(x) & \Rightarrow f(x+2\pi)=\sin(2\pi+x)=\sin(x)=f(x) \Rightarrow T=2\pi \\ f(x)=\cos(x) & \Rightarrow f(x+2\pi)=\cos(2\pi+x)=\cos(x)=f(x) \Rightarrow T=2\pi \end{cases}$$

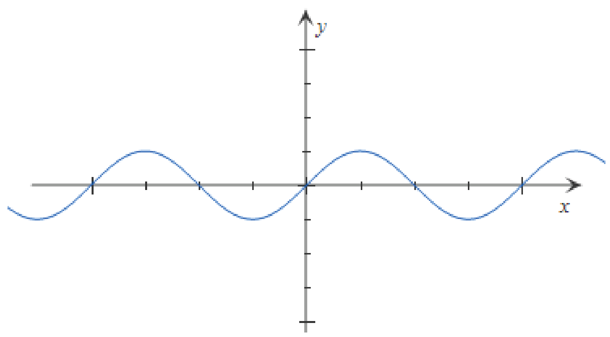
فصل اول کتاب آموختیم که نمودار یک تابع میتواند به چندین حالت انتقال یابد اگر داشته باشیم $y=af(bx+c)+d$ در اینصورت انتقال تابع $y=f(x)$ به صورت های زیر خواهد بود:

- ✓ انبساط یا انقباض عمودی (a)
- ✓ انبساط یا انقباض افقی (b)
- ✓ جابجایی افقی (c)
- ✓ جابجایی عمودی (d)

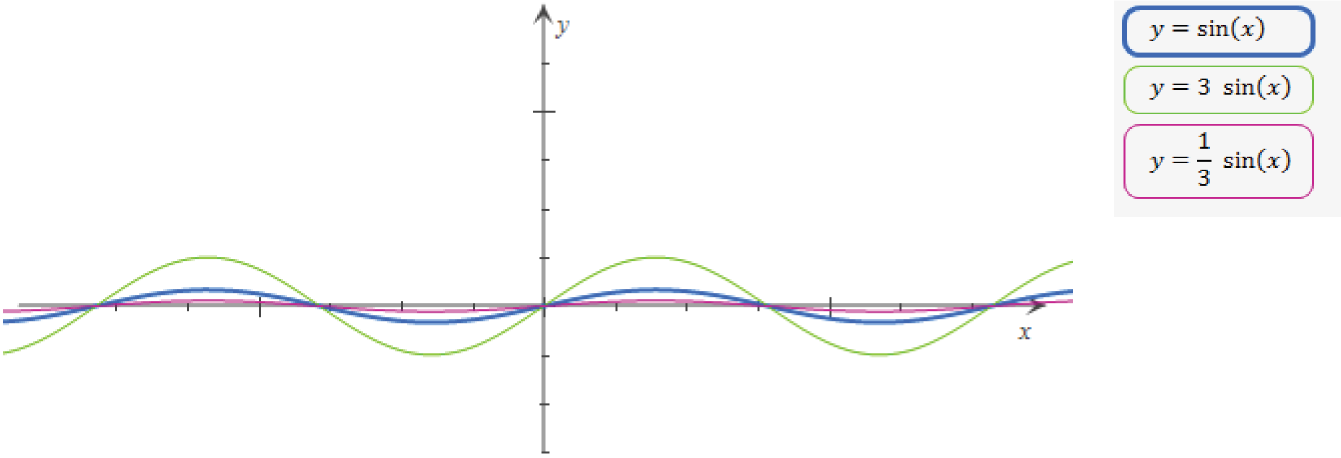
حال تأثیر این چهار نوع تغیر در نمودار تابع $f(x)$ را بر دوره تناوب تابع $f(x)$ بررسی می کنیم:

تابع مثال : $f(x)=\sin(x)$

-

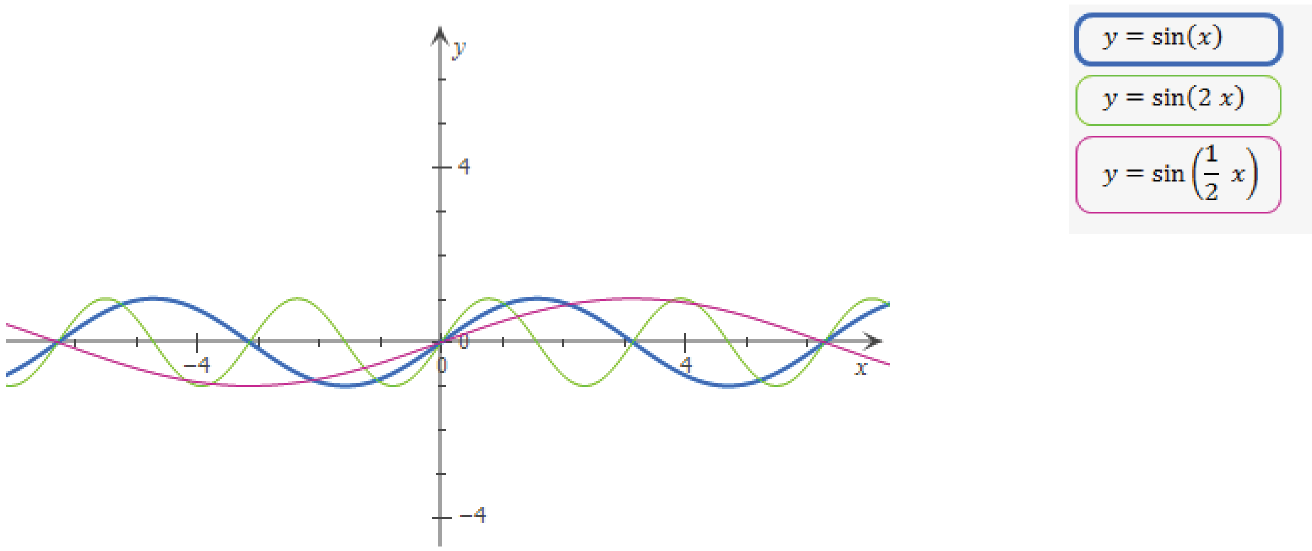


① تاثیر انبساط یا انقباض عمودی روی دوره ی تناوب



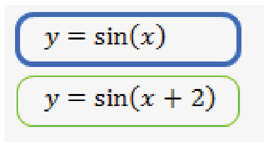
✍ نمودار فوق نشان می دهد که دوره ی تناوب تغییر نکرده است لذا انبساط یا انقباض عمودی تأثیری روی دوره تناوب یک تابع ندارد. (عدد a بی تأثیر)

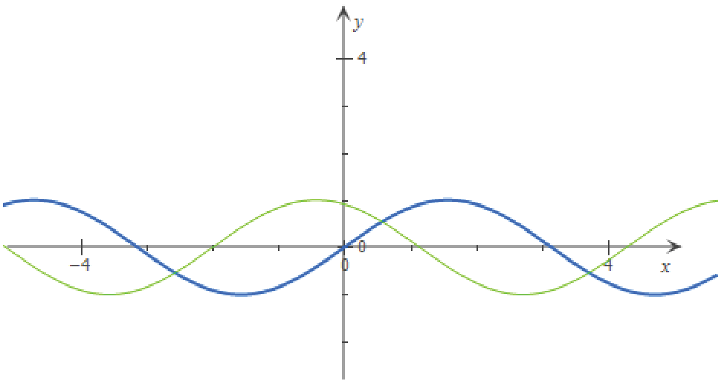
② تأثیر انقباض یا انبساط افقی روی دوره ی تناوب



✍ نمودار های بالا نشان میدهند که انبساط یا انقباض افقی روی دوره ی تناوب تابع تأثیر دارند و اگر دوره ی تناوب تابع $y=f(x)$ برابر T باشد دوره ی تناوب تابع $y=f(kx)$ برابر $T'=\frac{T}{|k|}$ خواهد بود یعنی دوره ی تناوب در $\frac{1}{k}$ ضرب خواهد شد. (عدد b تأثیر گذار)

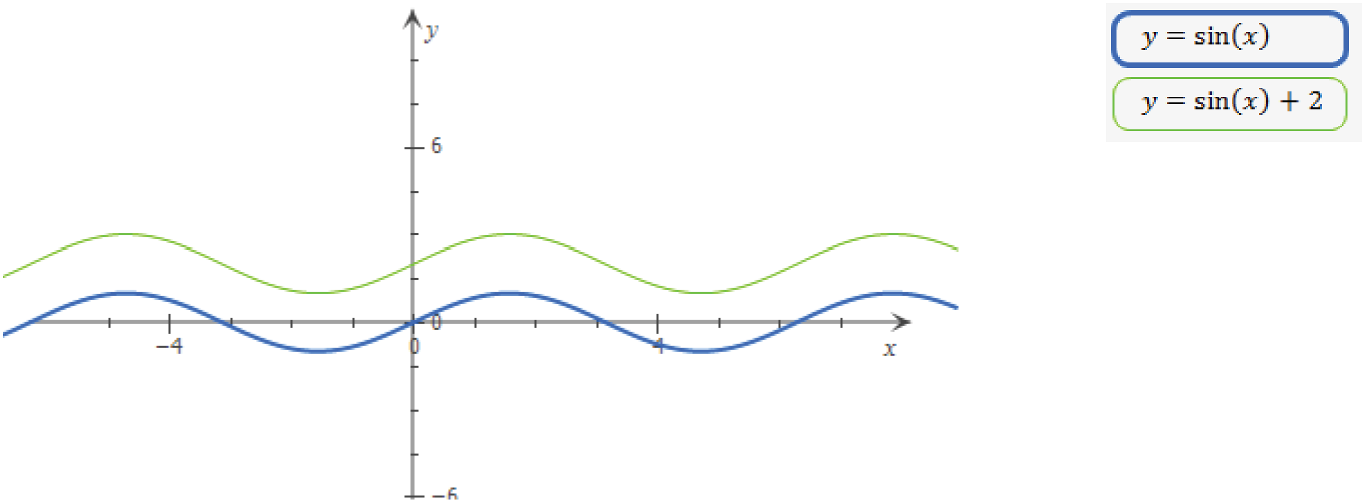
③ تأثیر جابجایی افقی روی دوره ی تناوب





✍ نمودار بالا نشان میدهد که جابجایی افقی تأثیری در دوره ی تناوب یک تابع ندارد (عدد c بی تأثیر)

④ تأثیر جابجایی عمودی روی دوره ی تناوب



✍ نمودار های بالا نشان میدهد که جابجایی عمودی نیز تأثیری روی دوره ی تناوب آن ندارد (عدد d بی تأثیر)

نتیجه : اگر $y=f(x)$ یک تابع متناوب با دوره ی تناوب T باشد در این صورت دوره ی تناوب تابع با ضابطه ی $y=af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ خواهد بود.

با توجه به نتیجه بالا چون دوره ی تناوب توابع $y=\cos(x)$, $y=\sin(x)$ برابر 2π است لذا :

$$y=a\sin(bx+c)+d \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

$$y=a\cos(bx+c)+d \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

✍ میدانیم که بیشترین مقدار (ماکزیمم (max و کمترین مقدار) مینیمم (min) توابع $y=\sin(x)$, $y=\cos(x)$ به ترتیب برابر ۱ و ۱- است اما بدیهی است که انبساط و انقباض عمودی و همچنین جابجایی عمودی بر مقادیر max و min تأثیر گذار خواهند بود.

✍ ✍ نکته :

$$\left.\begin{aligned} y&=a\sin(bx+c)+d \\ y&=a\cos(bx+c)+d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \max=|a|+d \qquad \min=-|a|+d$$

رسم نمودار توابع $y = a\sin bx + d$, $y = a\cos bx + d$:

برای رسم این نمودار ها ابتدا دوره ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع را بدست می آوریم با تقسیم دوره ی تناوب به چهار قسمت مساوی و پیدا کردن خروجی تابع به ازای این چهار نقطه نمودار تابع را در یک دوره ی تناوب رسم می کنیم با تکرار نمودار در بازه های به اندازه دوره ی تناوب به طرف مثبت و منفی نمودار کلی را رسم می کنیم.

🡸 مثال : دوره ی تناوب و مقادیر ماکزیمم ومینیمم تابع با ضابطه ی $f(x) = -2\sin(2\pi x) + 1$ را بدست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2\pi \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \\ \max = |a| + c = 3 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{cases}$$

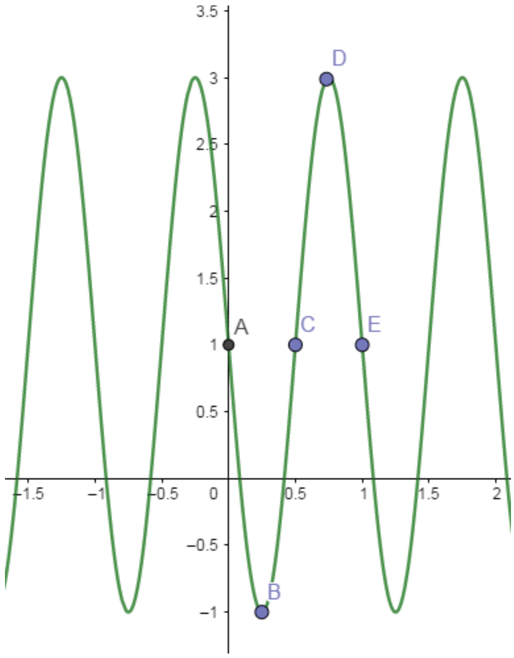
$A(0\,,1)$

$B\left(\dfrac{1}{4}\,,-1\right)$

$C\left(\dfrac{1}{2}\,,1\right)$

$D\left(\dfrac{3}{4}\,,3\right)$

$E(1\,,1)$

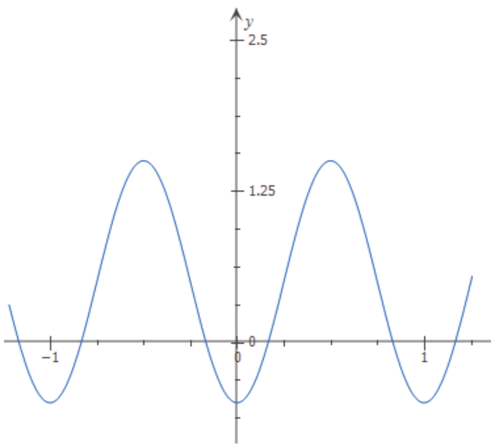


🡸مثال : دوره ی تناوب ومقادیر ماکزیمم ومینیمم تابع $y = \dfrac{1}{2} - \cos(-2\pi x)$ را بدست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

$$T = \frac{2\pi}{|-2\pi|} = 1$$

$$\max = |-1| + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\min = -|-1| + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$



✍ نکته : دوره ی تناوب دو تابع باید هم جنس و هم سنخ باشند تا مجموع و تفاضل آنها نیز متناوب باشد برای مثال :

$y = \sin 4x + \cos \pi x$ $\quad T_1 = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad T_2 = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow$ این تابع متناوب نیست. چون دوره ها هم جنس نیستند

✍ نکته : باری محاسبه دوره ی تناوب جمع یا تفاضل چند تابع ابتدا دوره ی تناوب تک تک تابع ها را بدست می آوریم و در صورت هم جنس بودن دوره ی تناوب تابع کل برابر با ک . م . م همه ی دوره های تناوب می باشد. برای مثال :

$$y=\cos ۳x+\sin ۴x \Rightarrow \begin{cases} T_۱=\frac{۲\pi}{۳} \\ T_۲=\frac{۲\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_۱=\frac{۴\pi}{۶} \\ T_۲=\frac{۳\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow T=[T_۱ , T_۲]=\frac{۱۲\pi}{۶}=۲\pi$$

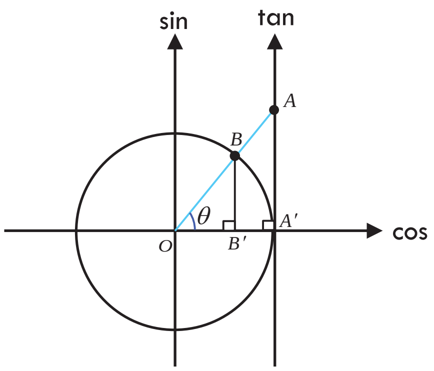
اثر قدر مطلق وتوان روی دوره ی تناوب sin , cos :

۱. اگر توابع sin , cos به توان عدد فردی برسند دوره ی تناوب آنها تغییر نمی کند و همان $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ می باشد .

۲. اگر توابع sin , cos به توان عددی زوج برسند دوره ی تناوب آنها برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ خواهد بود.

۳. اگر توابع sin , cos داخل قدر مطلق قرار بگیرند دوره ی تناوب آنها برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ خواهد بود.

نتیجه : توانهای زوج و قدر مطلق دوره تناوب sin , cos را نصف می کنند.



تابع تانژانت:

در دایره مثلثاتی دو مثلث OAA' , OBB' بنابه تساوی دو زاویه با هم متشابه هستند لذا می توانیم بنویسیم:

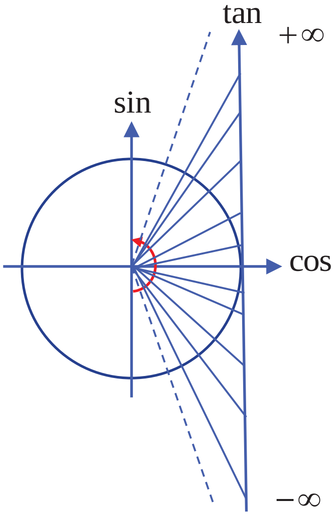
$$\tan\theta=\frac{BB'}{OB}$$

$$OBB'\sim OAA' \Rightarrow \frac{BB'}{AA'}=\frac{OB'}{OA'} \Rightarrow \frac{BB'}{OB'}=\frac{AA'}{OA'} \quad \tan\theta=\frac{AA'}{OA'} \xrightarrow{OA'=۱} \tan\theta=AA'$$

یعنی طول پاره خط AA' برابر با مقدار tan زاویه θ است .

تعریف : محور عمودی موازی با محور سینوس ها که در نقطه $(۱,۰)$ بر دایره مثلثاتی مماس می باشد محور تانژانت نام دارد زیرا اندازه جبری محل تقاطع ضلع انتهایی زاویه θ با این محور تا نقطه ی $(۱,۰)$ بیانگر مقدار تانژانت θ است.

تغییرات تانژانت :

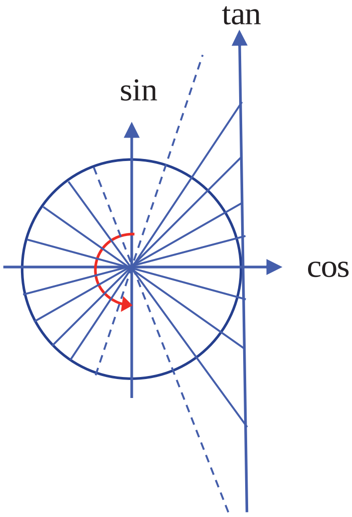


با توجه به دایره ی مثلثاتی مقابل می بینیم که با افزایش زاویه ی θ از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ مقادیر تانژانت نیز از $-\infty$ به سمت $+\infty$ تغییر می کنند.

چون مقدار تابع تانژانت برای $\theta = ۰$ برابر صفر می باشد لذا نمودار از مبدا میگذرد.

همچنین میدانیم که مقدار تانژانت برای مقادیر $\pm\frac{\pi}{۲} , \pm\frac{۳\pi}{۲} , \pm\frac{۵\pi}{۲}, \ldots$ که در حالت کلی بصورت $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ نمایش داده می شوند (مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$) تعریف نمی شود .لذا این نقاط جزو دامنه تعریف تابع تانژانت نمی باشند.

همچنین میدانیم که $\tan(\theta) = \tan(\pi + \theta)$ برابر می باشد لذا بدیهی است که تابع تانژانت دارای دوره ی تناوب $T = \pi$ می باشد توسط دایره مثلثاتی تغییرات تانژانت را زمانی که مقدار θ از $\frac{\pi}{۲}$ به سمت $\frac{۳\pi}{۲}$ در زیر بررسی می کنیم.

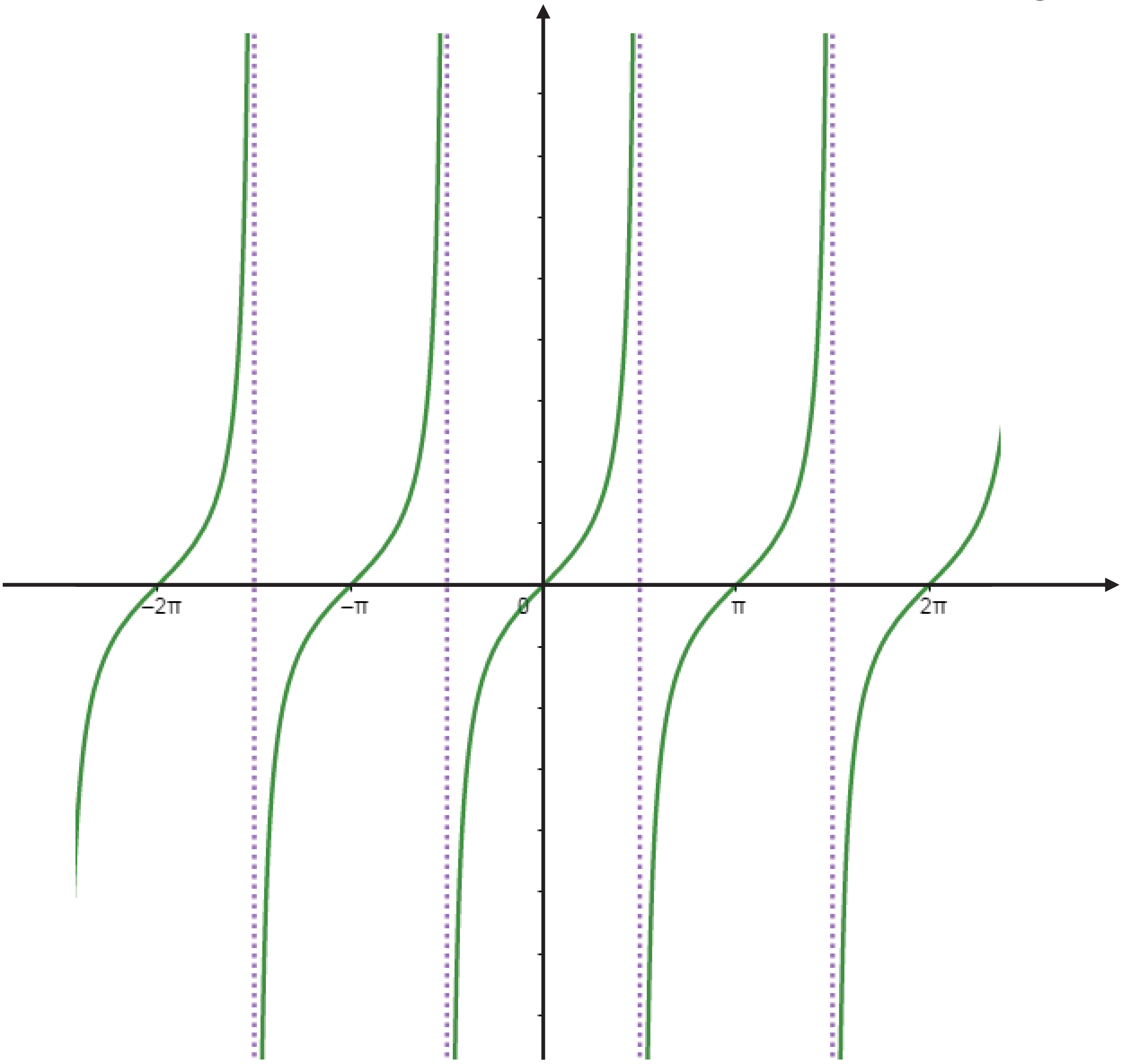


ملاحظه می شود که اگر θ از $\frac{\pi}{۲}$ به سمت $\frac{۳\pi}{۲}$افزایش پیدا می کند مقادیر $\tan\theta$ نیز از $-\infty$ به سمت $+\infty$ افزایش پیدا می کنند لذا تغییرات مقادیر دقیقا شبیه تغییرات بازه ی $\left[-\frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right]$ می باشد .

به طور کلی می توان چنین نتیجه گرفت که اگر θ متعلق به بازه ی $\left(k\pi - \frac{\pi}{۲} , k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)$ انتخاب شود در این بازه ها مقادیر تانژانت از $-\infty$ به سمت $+\infty$ افزایش خواهند یافت .

با توضیحات بالا می توان تابع $y = \tan x$ را یک تابع متناوب دانست که دوره ی تناوب آن $T = \pi$ می باشد. دامنه ی این تابع بصورت $D = \mathbb{R} - \left\{x \,\middle|\, x = k\pi + \frac{\pi}{۲} , k \in \mathbb{Z}\right\}$ می باشد.

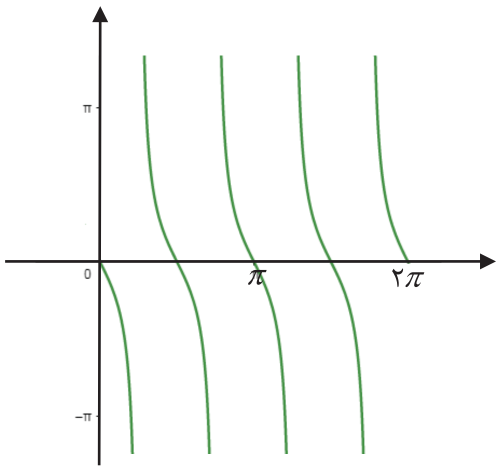
نمودار تابع $f(x) = \tan x$:



نمودار بالا نشان می دهد که تابع تانژانت متناوب بوده و در بازه های $\left(k\pi - \frac{\pi}{۲} \ , \ k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)$ نمودار تکرار می شود.

سوال: نمودار تابع $y = -\tan ۲x$ را در بازه $[\circ, ۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا دوره ی تناوب آنرا بدست می آوریم که برابر $\frac{\pi}{۲}$ می باشد نمودار رسم کرده و نسبت به محور طول ها قرینه می کنیم.



تمرینات تکمیلی:

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم ومینیمم هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

$y=۵\sin x$ $y=۲\cos(\pi x)-۱$

$y=۱-\sqrt{۲}\cos(۳x-۱)$ $y=\pi-\frac{۱}{۴}\sin(\frac{\pi}{۷}-\frac{۵\pi}{۴})$

۲) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y=\cos\pi x$ $y=۳-\sin\frac{x}{۴}$

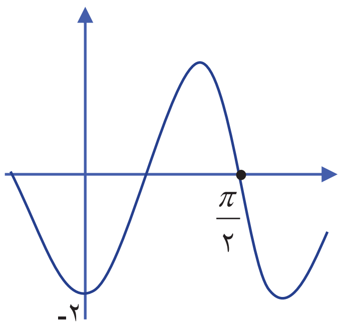
$y=\sin\frac{\pi x}{۲}$ $y=\tan(۲\pi x)$

۳) اگر دوره ی تناوب یک تابع مثلثاتی و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن بصورت زیر باشد ضابطه ی این تابع را بنویسید.

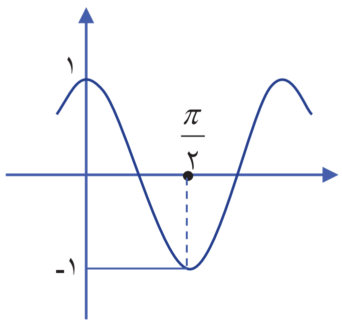
$T=\frac{۱}{۳}$ $\max=۸$ $\min=-۲$

۴) اگر طول اولین نقطه ی تلاقی نمودار تابع $f(x)=\cos(\pi ax)$ با سمت راست محور طول ها برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد ، طول پنجمین نقطه ی برخورد در سمت راست را بدست آورید.

۵) شکل زیر نمودار تابع $f(x)=a\sin(bx+\frac{\pi}{۲})$ می باشد مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ چقدر است؟



۶) شکل زیر قسمتی از نمودارتابع با ضابطه ی $y=a\cos(bx)$ است ، با شرط $b>۰$ حاصل $a+b$ را بدست آورید.



۷) دوره ی تناوب تابع $f(x)=\tan(\pi ax)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است ، مقدار $f(\frac{۴۱}{۸})$ را بدست آورید.

با آرزوی موفقیت وسربلندی شما عزیزان

پایان