ریاضیات کنکور ۹۷

((مطابق با جدیدترین تغییرات کتاب درسی))

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

مهندس مهرپویان
۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

مهندس مهرپویان ۰۹۱۰۷۶۰۲۰۲۷

تابع

(تعیین علامت - معادلات و نامعادلات - قدرمطلق
جزء صحیح - معادلات درجه دوم - ریشه)

این فصل را با ما بخوان
تا از ما شَوی...

* تعیین علامت

1) $p = ax+b$ عبارت درجه اول $\Leftarrow$ $ax+b=0 \longrightarrow x = -\frac{b}{a}$

x		$-b/a$	
p	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

2) $p = ax^2+bx+c$ عبارت درجه دوم $\Leftarrow$ $ax^2+bx+c=0 \longrightarrow x_1 , x_2$

یادآوری: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\Delta = b^2-4ac$

x		x_1		x_2	
p	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

* نکته: شرط آنکه عبارت ax^2+bx+c همواره مثبت باشد $(ax^2+bx+c>0)$

$$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$$ اشتراک بگیر

$$\begin{cases}ax^2+bx+c\geq 0\\ \Delta\leq 0\\ a\geq 0\end{cases}$$

شرط آنکه عبارت ax^2+bx+c همواره منفی باشد $(ax^2+bx+c<0)$

$$\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$$ اشتراک بگیر

$$\begin{cases}ax^2+bx+c\leq 0\\ \Delta\leq 0\\ a\leq 0\end{cases}$$

* نکته: اگر معادله $P=ax^2+bx+c$ فاقد ریشه باشد یعنی $\Delta<0$

x	
p	موافق علامت a

مثال) به ازای کدام مقدار a عبارت $ax^2+2x+4a$ همواره مثبت است؟

۱) $a>\frac{1}{2}$ ۲) $a<-\frac{1}{2}$ ۳) $0<a<\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

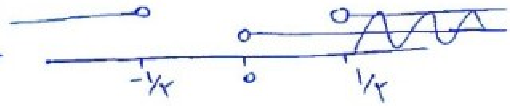
همواره مثبت $\begin{cases} \Delta<0 \longrightarrow b^2-4ac=2^2-4(a)(4a)=\underbrace{4-16a^2<0}_{\text{تعیین علامت}} \longrightarrow \\ a>0 \quad (1) \end{cases}$

$4-16a^2=0 \longrightarrow a=\pm\frac{1}{2} \longrightarrow$

	$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$	
$-$	0	$+$	0	$-$

$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ (2)

اشتراک (1) و (2) $\Rightarrow$



$a>\frac{1}{2}$ گزینه ۱ صحیح

تجربی ۸۹) مقادیر تابع $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ در بازه (a,b) بزرگتر از $\frac{7}{2}$ می باشد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $5{,}5$ ۲) 5 ۳) 4 ۴) 6

$-\frac{1}{2}x^2+2x+6>\frac{7}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2x+6-\frac{7}{2}>0 \xrightarrow{\times 2} -x^2+4x+12-7>0$

$x^2-4x-5<0 \longrightarrow$ تعیین علامت $\Rightarrow x^2-4x-5=0 \longrightarrow x=-1,5 \longrightarrow$

	-1		5	
$+$	0	$-$	0	$+$

$\longrightarrow \underset{a}{-1}<x<\underset{b}{5} \longrightarrow b-a=5-(-1)=6$

گزینه ۴ صحیح

نکته) اگر نامعادله هم صورت و هم مخرج داشته باشد هر کدام را جداگانه تعیین علامت (در یک جدول) می کنیم و سپس جواب و بازه های را مشخص می کنیم.

مثال) مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x: x<-1\}$ ۲) $\{x: x>-1\}$ ۳) $\{x: -1<x<$ [illegible] $\}$ ۴) $\{x: -2<x<-1\}$

$$\frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \longrightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0 \longrightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0 \longrightarrow$$

$$\begin{cases} -2x^2-x-1=0 \longrightarrow \Delta = b^2-4ac = 1-4(-2)(-1) = -7 < 0 \longrightarrow \text{ریشه ندارد} \\ x+1=0 \longrightarrow x=-1 \end{cases}$$

		-1	
$-2x^2-x-1$	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$
	$+$		$-$

$\Longrightarrow \{x<-1\}$

گزینه ۱ صحیح

مثال) مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3}$ به کدام صورت است؟

۱) $x<3$ ۲) $1<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $-2<x<3$

گزینه ۲ صحیح

ریاضی ۹۱) اگر عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a: 1<a<5\}$ ۲) $\{a: a<1\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) R

گزینه ۳ صحیح

ریاضی ۸۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{x^2+4}$ ، در بازه (a,b) پایین‌تر از خط به معادله $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۶   ۳) ۸   ۴) ∞

گزینه ۲ صحیح

مثال مجموعه جواب نامعادله $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x-1}\leq 2$ ، در دامنه خود، شامل چند عدد صحیح نمی‌شود؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

$$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}-2\leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)-x^2-2x(x-1)}{x(x-1)}\leq 0\longrightarrow\frac{x^2-1-x^2-2x^2+2x}{x(x-1)}\leq 0\longrightarrow$$

$$\frac{-2x^2+2x-1}{x(x-1)}\leq 0\rightarrow\begin{cases}-2x^2+2x-1=0\longrightarrow\Delta=b^2-4ac=4-4(-2)(-1)=-4<0 \\ x(x-1)=0\longrightarrow x=0,1\end{cases}$$

ریشه ندارد

x		0		1	
$-2x^2+2x-1$	$-$		$-$		$-$
$x(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$-$	‖	$+$	‖	$-$

$R-\{0<x<1\}$

توجه ویژه: به روی سوال دقت کنید، گفته در دامنه خود، درست که جواب $R-\{0<x<1\}$ است ولی ۰ و ۱ جزء دامنه نیست، پس تمام اعداد درون دامنه خود را می‌تواند داشته باشد یعنی گزینه ۱ صحیح است.

مثال معادله $\frac{3}{m+2}+\frac{2}{m}=\frac{4m-4}{m^2-4}$ چند ریشه دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\frac{3}{m+2}+\frac{2}{m}-\frac{4m-4}{m^2-4}=0 \longrightarrow \frac{3(m-2)m+2(m^2-4)-(4m-4)m}{m(m-2)(m+2)}=0$$

$$\frac{m^2-2m-8}{m(m-2)(m+2)}=0 \longrightarrow m^2-2m-8=0 \longrightarrow m=-2,4$$

$m=-2$ ریشه مخرج هست یعنی مخرج را صفر می‌کند پس ریشه معادله نیست در نتیجه فقط $m=4$ پاسخ است.

گزینه ۲ صحیح

تذکر ریشه مخرج هیچوقت پاسخ نمی‌باشد.

مثال بزرگترین ریشه معادله $\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{5}{2x-1}+5$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) -2

باید معادله را حل کرده و سنجیم کدام ریشه بزرگتر است ولی بهتر است:

در گزینه های ریشه ها داده شده اند یعنی ریشه ها ($\underbrace{\text{ریشه ها}}_{\text{گزینه ها}}$) را در معادله قرار می‌دهیم تا بسنجیم کدام گزینه صدق کرده و بزرگتر است. فقط گزینه ۳ و ۴ در معادله صادق می‌کند در این صورت گزینه ۳ صحیح است زیرا دنبال بزرگترین ریشه هستیم.

مبحث:

* قدر مطلق

عدد از قدر مطلق به صورت مثبت خارج می‌شود یعنی

$|5|=5$

$|-5|=5$

$|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$

$|\sqrt{3}-1|=\sqrt{3}-1$

$|O|\geq 0$

$$|O| \rightarrow \begin{cases} O & O\geq 0 \\ -O & O<0 \end{cases}$$

* نکته: خیلی از مسائل قدر مطلق را می‌توان بدون حل کردن پاسخ داد مثلاً با جایگذاری گزینه‌ها.

* مثال: اگر $a<0$ باشد، حاصل $\sqrt{a^2+1+2\sqrt{a^2}}$ کدام است؟

۱) $-(a-1)$ ۲) $a+1$ ۳) $a-1$ ۴) $-(a+1)$

در سؤال گفته شده $a<0$ مثلاً $a=-1$ ← جایگذاری

$\sqrt{(-1)^2+1+2\sqrt{(-1)^2}}=2$

حال عدد $a=-1$ را در گزینه‌ها قرار می‌دهیم و می‌بینیم کدام گزینه حاصلش ۲ می‌شود ← گزینه ۱ صحیح

* مثال: اگر $-2<x<3$، حاصل $|x-5|-|x+4|$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) $-1-2x$ ۳) $1-2x$ ۴) $9-2x$

گفته $-2<x<3$ مثلاً $x=0$ ←

$|0-5|-|0+4|=5-4=1$

عدد $x=0$ را در گزینه‌ها قرار می‌دهیم ← فقط گزینه ۳ صحیح است.

* مثال) حاصل $\sqrt{x^2+9-6x}$ به ازای مقادیر $x<2$ کدام است؟

۱) $x-3$ ۲) $x-2$ ۳) $2-x$ ۴) $3-x$

گزینه ۴ صحیح

گفته $x<2$ مثلاً $x=0$ ←

* مثال) اگر $|y|+|x|>|x+y|$ باشد، x و y چگونه‌اند؟

۱) هردو مثبت ۲) یکی مثبت و دیگری منفی ۳) هردو منفی ۴) هم علامت

گزینه ۲ صحیح

* مثال) اگر رابطه $|x|+|y|\geq|x+y|$ به تساوی تبدیل شود، دو عدد حقیقی x و y قطعاً چگونه‌اند؟

۱) یکی از آن‌ها صفر است ۲) مثبت ۳) منفی ۴) هم علامت

گزینه ۴ صحیح

* نکته: یادمان باشد که $k \geq 0$ باید باشد

$$|\bigcirc| = k \longrightarrow \bigcirc = \pm k$$

* مثال: معادله قدرمطلق زیر را حل کنید.

$$|2x-3| = 3-2x \longrightarrow \begin{cases} 2x-3 = 3-2x \longrightarrow 4x = 6 \longrightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x-3 = -(3-2x) \longrightarrow 2x-3 = 2x-3 \longrightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

رابطه بدیهی یعنی x هر عددی می‌تواند باشد.

باید $3-2x \geq 0$ باشد $\leftarrow 2x \leq 3 \leftarrow x \leq \frac{3}{2} \Leftarrow$ پاسخ : اشتراک ۳ جواب

بدست آمده می‌باشد یعنی $x \leq \frac{3}{2}$

* مثال: معادله $2x + |x-1| = 3$ چند ریشه دارد؟

۱) ریشه ندارد ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

$$|x-1| = 3-2x \longrightarrow \begin{cases} x-1 = 3-2x \longrightarrow 3x = 4 \longrightarrow x = \frac{4}{3} \\ x-1 = -(3-2x) \longrightarrow x = 2 \end{cases}$$

باید $3-2x \geq 0$ باشد پس $2x \leq 3 \longrightarrow x \leq \frac{3}{2} \longrightarrow$ پاسخ : اشتراک جواب های باشد

یعنی فقط $x = \frac{4}{3}$ جواب است $\leftarrow$ گزینه ۲ صحیح

* نکته:

$$|\bigcirc| = |\square| \longrightarrow \bigcirc = \pm \square$$

مبحث :

* نکته

$$|\bigcirc| \pm |\square| \begin{matrix}\geq\\=\\\leq\end{matrix} k$$

ابتدا تعیین علامت می کنیم و بعد معادله یا نامعادله را بصورت بدون قدرمطلق حل می کنیم.

* مثال مجموعه جواب نامعادله $|x|+|x-1|\leq 5$ را بصورت بازه $[a,b]$ می نویسیم. $b-a$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$x=0$

$x-1=0 \to x=1$

		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$

۱) $x<0 \to -x-x+1\leq 5 \to -2x\leq 4 \to x\geq -2 \to \underline{-2\leq x<0}$

۲) $0\leq x<1 \to x-(x-1)\leq 5 \to 1\leq 5 \to$ جواب بدیهی $\to \underline{0\leq x<1}$

۳) $x\geq 1 \to x+x-1\leq 5 \to 2x\leq 6 \to x\leq 3 \to \underline{1\leq x\leq 3}$

پاسخ $-2\leq x\leq 3 \to b-a=3-(-2)=5$ گزینه ۱ صحیح

* مثال معادله $|x+1|+|x-3|=4$ چند جواب دارد؟ ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

$x+1=0 \to x=-1$

$x-3=0 \to x=3$

		-1		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$

۱) $x<-1 \to -(x+1)-(x-3)=4 \to x=-1$ غ ق ق زیرا $x<-1$ باید باشد

۲) $-1\leq x<3 \to (x+1)-(x-3)=4 \to 4=4 \to$ جواب بدیهی $\to -1\leq x<3$

یعنی هر عددی در این بازه ، جواب می باشد.

۳) $x\geq 3 \to (x+1)+(x-3)=4 \to \underline{x=3}$

با توجه به بند ۲ $(-1\leq x<3)$ ، معادله بیشمار جواب در این بازه دارد. گزینه ۴ صحیح

مثال معادله زیر چند ریشه دارد؟ $x-2+|x-3|=5$

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

$1)\ x>3 \rightarrow x-2+(x-3)=5 \rightarrow x=5$ ✓

$2)\ x<3 \rightarrow x-2-(x-3)=5 \rightarrow 1=5$ ✗

پس فقط $x=5$ جواب است $\leftarrow$ گزینه ۲ صحیح

مثال در معادله $|x-2|+|y+5|=0$ حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) -5 ۴) 2

مجموع دو مقدار مثبت برابر صفر شده است پس باید هر دو بصورت جداگانه صفر باشند یعنی

$$\left.\begin{array}{l} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ y+5=0 \rightarrow y=-5 \end{array}\right\} \rightarrow x+y=2+(-5)=-3$$

گزینه ۱ صحیح

* نکته: ولی بیان حل بهتر است ابتدا به تعیین علامت کنیم و سپس نامعادله را حل کنیم.

۱) $|\bigcirc| \le k \longrightarrow -k \le \bigcirc \le k$

۲) $|\bigcirc| \ge k \longrightarrow \bigcirc \ge k$ یا $\bigcirc \le -k$

۳) $|\bigcirc| \le |\square| \longrightarrow$ طرفین را به توان ۲ برسان $\longrightarrow \bigcirc^2 \le \square^2$

۴) $\sqrt{\bigcirc} \gtreqless \sqrt{\square} \longrightarrow$ طرفین را به توان ۲ برسان $\longrightarrow \bigcirc^2 \gtreqless \square^2$

* مثال: مجموعه جواب نامعادله $|2x+1| < |x+3|$ به کدام صورت است؟

۱) $(2, 4)$ ۲) $(-\frac{4}{3}, 2)$ ۳) $(-2, \frac{4}{3})$ ۴) $(-2, -\frac{4}{3})$

$|2x+1| < |x+3| \longrightarrow$ به توان ۲ $\longrightarrow 4x^2+4x+1 < x^2+6x+9 \longrightarrow$

$3x^2-2x-8<0 \longrightarrow x = -\frac{4}{3}, 2 \longrightarrow$

x		$-\frac{4}{3}$		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$-\frac{4}{3} < x < 2$

گزینه ۲ صحیح

* تست (۹۲): مجموعه جواب نامعادله $1 < \left|\frac{x-2}{2x+1}\right|$ به صورت کدام بازه‌ها است؟

۱) $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ۲) $(-2, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$ ۳) $(-3, -\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$|x-2| > |2x+1| \longrightarrow$ به توان ۲ $\longrightarrow x^2-4x+4 > 4x^2+4x+1 \longrightarrow$

$3x^2+8x-3 < 0 \longrightarrow x = -3, \frac{1}{3} \longrightarrow$

		-3		$\frac{1}{3}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$(-3, \frac{1}{3})$

ولی ریشه مخرج نمی‌تواند جواب باشد یعنی $2x+1=0 \longrightarrow x = -\frac{1}{2} \longrightarrow (-3, \frac{1}{3}) - \{-\frac{1}{2}\}$

گزینه ۱ صحیح

* ریاضی ۹۲

مجموعه جواب نامعادله $|x|(x-4) < 2x-5$ به کدام صورت است؟

۱) $(1,5)$ ۲) $(1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6})$ ۳) $(1+\sqrt{6}, +\infty) \cup (1,5)$ ۴) $(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1,5)$

$x \geq 0 \to (x-4)x < 2x-5 \to x^2-6x+5<0 \to x=1,5 \to$

	1		5	
+		−		+

$x<0 \to (x-4)(-x) < 2x-5 \to x^2-2x-5>0 \to x=1\pm\sqrt{6}$

	$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$	
+		−		+

$\to$ باید $x<0$ را قبول کنیم $\to (-\infty, 1-\sqrt{6})$

جواب کل: $(-\infty, 1-\sqrt{6}) \cup (1,5)$ گزینه ۴ صحیح

* تجربی ۹۲

مجموعه جواب نامعادله $x^2-2x < |x-2|$ به کدام صورت است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(1,2)$

$x-2=0 \to x=2 \to$

$x \geq 2 \to x^2-2x < x-2 \to x^2-3x+2<0 \to x=1,2$

x	1		2	
+		−		+

$\to (1,2)$ ✗ زیرا $x \geq 2$ قابل قبول است

$x<2 \to x^2-2x < -(x-2) \to x^2-x-2<0 \to x=-1,2$

x	−1		2	
+		−		+

$\to (-1,2)$ ✓

جواب گزینه ۲ صحیح

*مثال) مجموعه جواب نامعادله $|x^2-1| \leq |x+1|$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$|x^2-1| \leq |x+1| \to |x-1||x+1| - |x+1| \leq 0 \to \underbrace{|x+1|}_{\text{همیشه} +}(|x-1|-1) \leq 0$$

$$1)\ |x+1| = 0 \to x=-1$$

$$2)\ |x-1|-1 \leq 0 \to |x-1| \leq 1 \to -1 \leq x-1 \leq 1 \to 0 \leq x \leq 2$$

در نتیجه جواب های صحیح برابر است با $\{-1, 0, 1, 2\}$ گزینه ۳ صحیح

*مثال) جواب نامعادله $\left|\frac{2x-5}{x+2}\right| > 3$ کدام است؟

۱) $(-11, -2) \cup (-2, -\frac{1}{5})$ ۲) $(-11, -\frac{1}{5})$ ۳) $(-9, -\frac{1}{5})$ ۴) $(-2, \frac{1}{5}) \cup (-9, -2)$

$$\frac{|2x-5|}{|x+2|} > 3 \to |2x-5| > 3|x+2| \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2}$$

گزینه ۱ صحیح

*ریاضی ۸۸) نمودار تابع $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+4}$ در بازه (a, b)، پایین تر از خط به معادله $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ∞

$$\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2 \to 3x^2-2x < 2x^2+8 \to \dots$$

گزینه ۲ صحیح

* مثال: جواب نامعادله $x+|3x-5|<8$ کدام بازه است؟

۱) $(\frac{5}{3}, \frac{13}{4})$ ۲) $(-\infty, -\frac{3}{2})$ ۳) $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}) \cup (\frac{13}{4}, +\infty)$ ۴) $(-\frac{3}{2}, \frac{13}{4})$

گزینه ۴ صحیح

ابتدا تعیین علامت $\longrightarrow \dots$

* ریاضی ۸۶: نمودار تابع $y=4-|x|$ در بازه (a,b) بالاتر از خط به معادله $2y+x=5$ قرار دارد. بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۳ ۴ ۵ ۶

معادله خط را بصورت $y=\dots$ می‌نویسیم $\Rightarrow$ $2y+x=5 \longrightarrow y=\frac{5-x}{2}$

بنابه گفته مسئله نمودار $y=4-|x|$ بالاتر از $\frac{5-x}{2}$ قرار دارد $\Rightarrow$ $4-|x|>\frac{5-x}{2}$

تعیین علامت $\Rightarrow$ $\begin{cases} x>0 \longrightarrow 4-x>\frac{5-x}{2} \longrightarrow \dots \\ x<0 \longrightarrow 4-(-x)>\frac{5-x}{2} \longrightarrow \dots \end{cases}$

گزینه ۲ صحیح

* مثال) در کدام بازه نمودار تابع $f(x)=|x^2-x|$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x)=2x-|x|$ قرار دارد؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

f پایین‌تر از g قرار دارد ← یعنی $f < g$ ⇐

$|x^2-x| < 2x-|x| \rightarrow |x^2-x|+|x| < 2x \rightarrow$ تعیین علامت ← ...

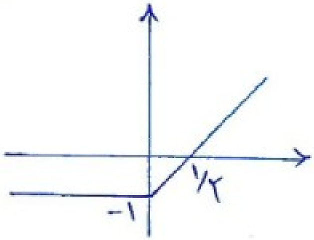
گزینه ۳ صحیح

نکته $a \leq |\bigcirc| \leq b \longrightarrow a \leq \bigcirc \leq b$ یا $-b \leq \bigcirc \leq -a$

نکته برای رسم توابع دارای قدرمطلق، با استفاده از تعریف قدرمطلق، عبارت معادله را ساده نموده و در حالت‌های مختلف (بازه‌های مختلف) نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y = |x| + x - 1 \quad \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = 2x - 1 \\ x < 0 \rightarrow y = -1 \end{cases}$

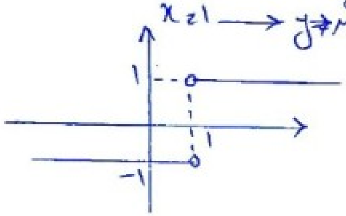


$y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

$x > 1 \longrightarrow y = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

$x < 1 \longrightarrow y = \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$

$x = 1 \longrightarrow y$ ∄ مخرج صفر شد



نکته $y = |x-a| + |x-b| \longrightarrow$ تابع گلدانی $\rightarrow$  $R_y = [|a-b|, +\infty)$

$y = |x-a| - |x-b| \longrightarrow$ تابع سرسره‌ای $\rightarrow$  یا  $R_y = [-|a-b|, |a-b|]$

نکته خیلی مهم در بعضی از سؤالات پرسیده می‌شود که نمودار تابع $f(x)$ کدام گزینه است، در اینگونه سؤالات جایگذاری عدد در $f(x)$ و بررسی گزینه‌ها بسیار مؤثر است.

* نکته: برای تعیین min تابع $y=|a_1x+b_1|+\dots+|a_nx+b_n|$ کافیست min تابع را به ازای ریشه هر یک از عبارت های شامل قدر مطلق بدست آوریم.

* مثال: مینیمم تابع $y=|x|+|x-1|+|x-4|$ کدام است؟

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \longrightarrow y=0+1+4=5 \\ x=1 \longrightarrow y=1+0+3=4 \\ x=4 \longrightarrow y=4+3+0=7 \end{array}\right\} \min y=4 \longrightarrow R_y=[4,+\infty)$$

* مثال: ماکزیمم مقدار $y=3-|2x-3|$ کدام است؟

$y=3-\underline{|2x-3|}$

همواره منفی است $\Leftarrow$ پس max مقدار y زمانی اتفاق می افتد عبارت درون قدر مطلق صفر شود یعنی $y=3-0 \rightarrow R_y=(-\infty,3]$

* نکته: محور تقارن $y=|x-a|\pm|x-b|$ برابر است با $x=\frac{a+b}{2}$

مثلاً محور تقارن $y=|x-2|-|x+3|$ برابر است با: $x=\frac{2+(-3)}{2}=-\frac{1}{2}$

مبحث :

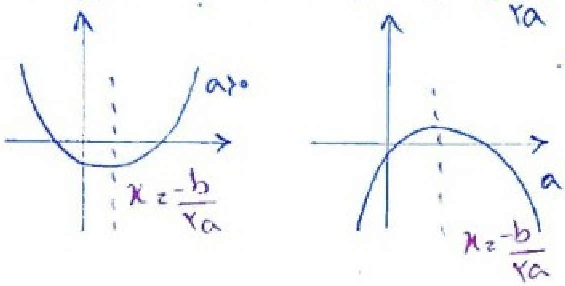
* تابع درجه دوم

$f(x)=ax^2+bx+c$

$\Delta=b^2-4ac$

الف) $\Delta>0$ ← معادله دو ریشه دارد $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ← $f(x)$ مثبت یا منفی است.

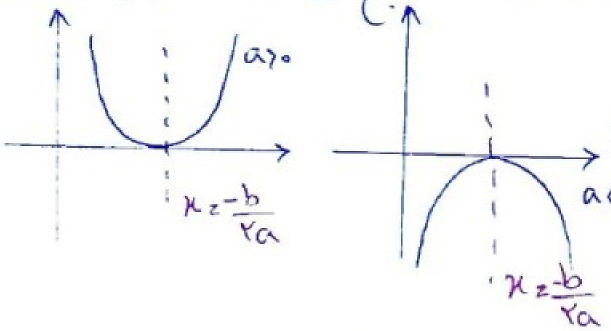
نمودار محور طول ها را در دو نقطه قطع می کند.



ب) $\Delta=0$ ← معادله یک ریشه (مضاعف) دارد - معادله مربع کامل است - نمودار بر محور xها مماس است.

$x=-\frac{b}{2a}$

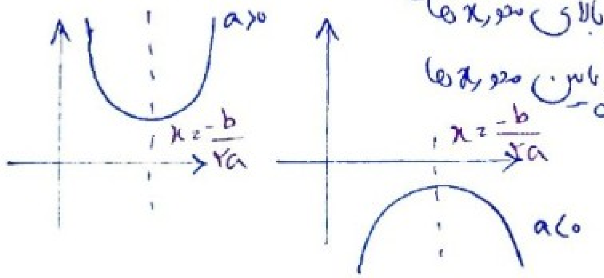
نمودار محور طول ها را در یک نقطه قطع می کند.



ج) $\Delta<0$ ← معادله ریشه ندارد ← محور طول ها را قطع نمی کند

$a>0$ ← $f>0$ ← نمودار بالای محور xها

$a<0$ ← $f<0$ ← نمودار پایین محور xها



* نکات ۶۷

$a>0 \leftarrow$ تابع min دارد

$a<0 \leftarrow$ تابع max دارد

⇐ مختصات max و min $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

ضمنا $x=\frac{-b}{2a}$ همیشه محور تقارن است

* تمرین ۸۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

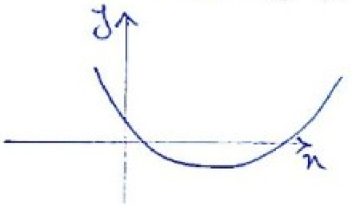
$-3<m<5$ $\quad -3<m<4$ $\quad -2<m<4$ $\quad -1<m<5$

$\Delta<0 \to b^2-4ac=(m+1)^2-4(2)(\frac{1}{2}m+2)=m^2+2m+1-4m-16<0 \to$

$m^2-2m-15<0 \to (m-5)(m+3)<0 \to$ تعیین علامت $\to -3<m<5$

گزینه ۱ صحیح

* مثال: معادله تابعی که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است کدام گزینه است؟



۱) $y=x^2-5x+7$ $\quad$ ۲) $y=x^2+3x+4$

۳) $y=x^2-4x-3$ $\quad$ ۴) $y=x^2-2\sqrt{5}x+3$

✓ به ازای $x=0$ نمودار مثبت است ← گزینه ۳ اشتباه است

✓ ضمنا محور تقارن $x=\frac{-b}{2a}$ مثبت است یعنی باید b منفی باشد ← گزینه ۲ اشتباه است

✓ نقطه min منفی است یعنی $\frac{-\Delta}{4a}<0$ پس باید $\Delta>0$ باشد.

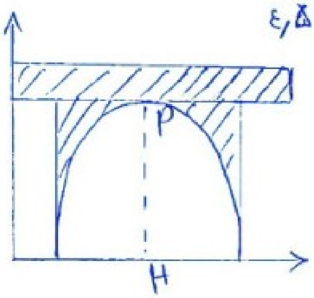
گزینه ۱ ⇐ $\Delta=25-4(1)(7)=-3<0$

گزینه ۴ ⇐ $\Delta=20-4(1)(3)=8>0$

→ گزینه ۴ صحیح است

مثال) مطابق شکل معادله منحنی طاقی بصورت $y=-x^2+6x-5$ است. طول ارتفاع طاق (PH) کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳,۵ ۳) ۴ ۴) ۴,۵

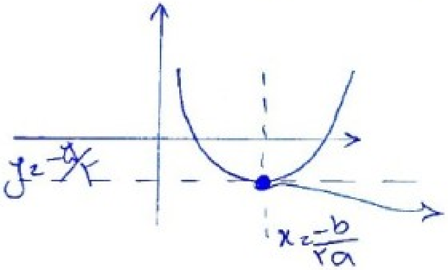


PH همان عرض نقطه max هست یعنی $\frac{-\Delta}{4a}$

$\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{(6^2-4(-1)(-5))}{4(-1)}=4>0 \to$ گزینه ۳ صحیح

مثال) خط به معادله $y=\frac{-5}{2}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه $y=\frac{1}{2}x^2-3x+a$ را بر روی خود منحنی قطع می کند. a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲



همان نقطه min است $\to \frac{-\Delta}{4a}=\frac{-5}{2}\to$

$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-((-3)^2-4(\frac{1}{2})(a))}{4(\frac{1}{2})}=\frac{-9+2a}{2}=\frac{-5}{2}\to a=2\to$ گزینه ۴ صحیح

ریاضی ۸۳) اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۴

$\frac{-\Delta}{4a}=0\to \Delta=0\to$

$(-4)^2-4(k+3)(k)=0\to k^2+3k-4=0\to k=1$ و $k=-4$

برای اینکه نمودار max داشته باشد باید $a<0$ باشد یعنی $k+3<0\to k<-3\to$

پس گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به رابطه $k<-3$ می توان نتیجه گرفت فقط گزینه ۱ می تواند صحیح باشد.

مثال) به ازای چه مقادیر m، منحنی تابع $y=(3-\frac{x}{m})(mx-1)$ مماس بر محور xها است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۳

$3mx-3-x^2+\frac{x}{m}=0 \xrightarrow{\times m}$

$3m^2x-3m-mx^2+x=0 \to mx^2-(3m^2+1)x+3m=0 \to$

مماس بر محور x $\to \Delta=0 \to b^2-4ac=(3m^2+1)^2-4(m)(3m)=0 \to$

$9m^4-6m^2+1=0 \to (3m^2-1)^2=0 \to 3m^2-1=0 \to m^2=\frac{1}{3} \to m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲ مقدار $\to$ گزینه ۱ صحیح

مثال) به ازای کدام مقدارهای m، نمودار تابع $y=mx^2+(m-1)x+2$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\leq 1$ ۲) $0\leq m\leq 1$ ۳) $m\geq 1$ ۴) $1\leq m\leq 2$

برای اینکه از ناحیه سوم نگذرد

نمودار باید min داشته باشد $a>0$

محور تقارن باید مثبت باشد $\frac{-b}{2a}>0$

$a>0 \to m>0$

$\frac{-b}{2a}>0 \to \frac{-(m-1)}{2m}>0 \to -m+1>0 \to m<1 \to 0<m<1$

گزینه ۲ صحیح

* نکته: از ناحیه سوم و چهارم نگذرد $\Leftarrow$ نمودار باید بالای محور xها باشد $\leftarrow \frac{-\Delta}{4a}>0$

* " " اول و دوم " " " پایین " " " $\leftarrow \frac{-\Delta}{4a}<0$

* " " اول نگذرد $\Leftarrow \begin{cases} a<0 \\ \frac{-b}{2a}<0 \end{cases}$

* " " دوم " $\Leftarrow \begin{cases} a<0 \\ \frac{-b}{2a}>0 \end{cases}$

* " " چهارم " $\Leftarrow \begin{cases} a>0 \\ \frac{-b}{2a}<0 \end{cases}$

* ریاضی ۸۹ — به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادله $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq 2$ ۲) $a>-2$ ۳) $a>0$ ۴) $-2<a<0$

از ناحیه دوم نگذرد: $a<0$ ، $\frac{-b}{2a}\geq 0$

$$\begin{cases} a<0 & (1) \\ \frac{-b}{2a}=\frac{a+2}{2a}\geq 0 \rightarrow (-\infty,-2]\cup[0,+\infty) & (2) \end{cases}$$

$(1)\cap(2) \longrightarrow a\leq -2 \longrightarrow$ گزینه ۱ صحیح

سخت

* ریاضی ۹۲ — به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-3)x^2+ax-1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $a\leq 2$ ۲) $0<a\leq 2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $0<a<3$

پس از حذف ریشه‌های معادله درجه دوم حل شود.

(1) $a-3<0 \rightarrow a<3$

(2) $\rightarrow$ آن مقادیری از a که به ازای آن نمودار از ناحیه اول می‌گذرد را از $a<3$ کم می‌کنیم در این صورت مقادیری بدست می‌آید که از ناحیه اول نمی‌گذرد یعنی

(I) $\Delta>0 \rightarrow$ ۲ ریشه داشته باشد $\rightarrow a^2-4(a-3)(-1)>0 \rightarrow a>2$ یا $a<6$

(II) ضرب ریشه‌ها مثبت: $\frac{c}{a}>0 \rightarrow \frac{-1}{a-3}>0 \rightarrow a<3$

(III) جمع ریشه‌ها مثبت: $\frac{-b}{a}>0 \rightarrow \frac{-a}{a-3}>0 \rightarrow 0<a<3$

$(I)\cap(II)\cap(III):\ 2<a<3 \longrightarrow$ یعنی اگر $2<a<3$ را از $a<3$ کم کنیم، نمودار از ناحیه اول نمی‌گذرد پس $a\leq 2$ جواب است. گزینه ۱ صحیح

تمرینات اضافی ویژه

مثال نقطه min نمودار تابع $y=x^2-2x$ کدام است؟

۱) $(-2,8)$ ۲) $(2,0)$ ۳) $(1,-1)$ ۴) $(-1,3)$

$\min\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ ✓

$y=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(4-4(1)(0))}{4(1)}=-1 \longrightarrow$ گزینه ۳ صحیح

مثال به ازای کدام مقدار m معادله درجه دوم $x^2-m-x=0$ ریشه مضاعف دارد؟

۱) هیچ مقدار ۲) $\frac{-1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۱

$\Delta=0 \longrightarrow$ گزینه ۲ صحیح

مثال به ازای کدام مقدار m، معادله درجه دوم $x^2-mx+m-1=0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

۱) $m>2$ ۲) $\mathbb{R}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $m\neq 2$

$\Delta>0 \longrightarrow$ گزینه ۴ صحیح

مثال به ازای کدام مقدار m معادله درجه دوم $x^2-mx+m=0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

۱) $m<4$　　۲) $m<0$　　۳) $0<m<4$　　۴) $\varnothing$

$\Delta<0$ ← گزینه ۳ صحیح

مثال محور تقارن تابع درجه دوم $y=x-x^2-1$ دارای کدام معادله است؟

۱) $x=-1$　　۲) $x=1$　　۳) $x=-\frac{1}{2}$　　۴) $x=\frac{1}{2}$

معادله محور تقارن $x=-\frac{b}{2a}$ ← گزینه ۴ صحیح

مثال منحنی به معادله $y=ax^2+bx+c$ محور طول‌ها را در ۳ و ۱ و محور عرض‌ها را در ۶ قطع می‌کند. کمترین مقدار y کدام است؟ ۱) ۱-　۲) ۲-　۳) ۳-　۴) ۴-

کمترین مقدار y را داشته یعنی $\frac{-\Delta}{4a}$ بنابراین باید a و b و c را داشته باشیم ⇐ نقاط (۳و۰) و (۱و۰) و (۰و۶) در معادله صدق می‌کنند

$(3,0) \rightarrow 0=a(3)^2+b(3)+c \rightarrow 9a+3b+c=0$

$(1,0) \rightarrow 0=a(1)^2+b(1)+c \rightarrow a+b+c=0$

$(0,6) \rightarrow 6=a(0)+b(0)+c \rightarrow c=6 \rightarrow$ جایگذاری در دو معادله فوق ←

$$\begin{cases}9a+3b=-6\\ a+b=-6\end{cases} \rightarrow a=2,\ b=-8 \Rightarrow y=2x^2-8x+6 \Rightarrow$$

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=-2$$

گزینه ۲ صحیح

مبحث:

* حل معادله $ax^2+bx+c=0$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta=b^2-4ac \end{cases}$$

(در واقع برای اینکه یک معادله درجه ۲، دو ریشه داشته باشد، باید $\Delta>0$ باشد)

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد داریم:

جمع $S=\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}$

ضرب $P=\alpha.\beta=\dfrac{c}{a}$

$\dfrac{c}{a}>0$ ریشه‌ها هم علامت (هر دو مثبت یا هر دو منفی)

$\dfrac{c}{a}<0$ ریشه‌ها غیر هم علامت (یکی مثبت و دیگری منفی)

تفاضل $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$ax^2+bx+c=0 \longrightarrow x^2-Sx+P=0 \longrightarrow x^2-$(مجموع دو ریشه)$x+$(ضرب دو ریشه)$=0$

* نکته: اگر در سوالی گفته شد دو ریشه منفی یعنی:

$$\begin{cases} \Delta>0 \rightarrow \text{۲ ریشه داشته باشد} \\ S<0 \qquad \cap \\ P>0 \end{cases}$$

اگر در سوالی گفته شد دو ریشه مثبت یعنی:

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \qquad \cap \\ P>0 \end{cases}$$

* ریاضی ۹۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$، محور xها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟ ۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

مسئله گفته ۲ ریشه منفی ⇐

$$S<0 \longrightarrow \frac{-b}{a}=\frac{-(a+3)}{a}<0 \longrightarrow \underline{a<-3 \ \cup \ a>0}$$

$$P>0 \longrightarrow \frac{c}{a}=\frac{-1}{a}>0 \longrightarrow \underline{a<0}$$

$$\Delta>0 \longrightarrow b^2-4ac=(a+3)^2-4(a)(-1)=a^2+10a+9>0 \longrightarrow \underline{a>-1 \ \cup \ a<-9}$$

باید اشتراک بگیریم ⇐ $a<-9$ گزینه ۱ صحیح

* مثال اگر در معادله $x^2-3x+1=0$، α و β ریشه های معادله باشند، حاصل مقادیر زیر را بدست آورید.

(با توجه به معادله $P=1$ و $S=3$)

1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P=3^2-2(1)=7$

2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS=3^3-3(1)(3)=18$

3) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \longrightarrow A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P} \Rightarrow$

$$A^2=3+2\sqrt{1}=5 \longrightarrow A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$$

4) $\alpha^2-4\alpha-\beta \longrightarrow$ α ریشه معادله هست. پس در خود معادله صدق می کند یعنی به جای x، α قرار بده ⇐

$$\alpha^2-3\alpha+1=0 \longrightarrow \alpha^2=\underline{3\alpha-1} \Longrightarrow \alpha^2-4\alpha-\beta=(3\alpha-1)-4\alpha-\beta=$$

$$-(\alpha+\beta)-1=-3-1=-4$$

*مثال) اگر تفاضل ریشه‌های معادله $x^2-5x+m=0$ برابر ۱ باشد، m کدام است؟

۱) ۶- ۲) ۴- ۳) ۶ ۴) ۴

گزینه ۳ صحیح $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{25-4(1)(m)}}{1}=1 \rightarrow 25-4m=1 \rightarrow m=6$

*مثال) هرگاه در معادله درجه دوم $x^2-4x+3m=0$ یکی از ریشه‌ها سه برابر دیگری باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

یکی از ریشه‌ها، ۳ برابر دیگری $\rightarrow \alpha=3\beta \Rightarrow$

$S=\alpha+\beta=4\beta=\frac{-b}{a}=4 \rightarrow \beta=1$

$P=\alpha\beta=3\beta^2=3=\frac{c}{a}=\frac{3m}{1} \Rightarrow 3=3m \rightarrow m=1 \Rightarrow$ گزینه ۱ صحیح

*مثال) به ازای چه مقدار m، معادله $(m^2+1)x^2+(m^2-1)x+(m^2+3m-2)=0$ دارای دو ریشه حقیقی قرینه خواهد بود؟

۱) ± 1 ۲) ۲ و ۱ ۳) ۱- ۴) ۱

$\alpha=-\beta$ دو ریشه قرینه یعنی $\Rightarrow S=\alpha+\beta=0 \rightarrow \frac{-b}{a}=0 \rightarrow -\frac{m^2+1}{m^2+1}=0 \rightarrow m=\pm 1$

در گزینه‌ها ۱+ و ۱- هر دو وجود دارد پس باید معادله را به ازای $m=1$ و $m=-1$ بررسی کنیم.

$m=1 \rightarrow 2x^2+2=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow$ معادله ریشه ندارد $\rightarrow$ یعنی به ازای $m=1$ $\rightarrow$

پس فقط $m=-1$ جواب است $\Leftarrow$ گزینه ۳ صحیح

* مثال: حدود k برای آنکه معادله $x^2+2kx+k^2=0$ دو ریشه حقیقی عکس یکدیگر داشته باشد؟

۱) $k<0$ ۲) $k=1$ ۳) $0<k<1$ ۴) $k>1$

دو ریشه عکس هم $\rightarrow \alpha=\frac{1}{\beta} \rightarrow p=\alpha\beta=1=\frac{c}{a} \rightarrow \frac{k^2}{1}=1 \rightarrow k=\pm1$

گزینه ۲ صحیح

* مثال: به ازای چه مقدار m مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله $2x^2-mx+m-1=0$ برابر ۴ می باشد؟

۱) -6 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 6

$\alpha^2+\beta^2=4 \rightarrow \alpha^2+\beta^2=\underbrace{(\alpha+\beta)^2}_{S}-2\underbrace{\alpha\beta}_{P} \rightarrow 4=S^2-2P \rightarrow$

$(\frac{m}{2})^2-2(\frac{m-1}{2})=4 \rightarrow \frac{m^2}{4}-m+1=4 \rightarrow m^2-4m-12=0 \rightarrow m=-2,6$

هر دو جواب در گزینه‌ها وجود دارد پس گزینه‌ای درست است که $\Delta>0$

$m=6 \rightarrow \Delta=-4<0 \rightarrow m=-2$

گزینه ۲ صحیح

* دکتری ۹۳: به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می باشد؟

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) 1 ۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و -1

گزینه ۱ صحیح

مثال: در معادله $x^2-4x+1=0$ حاصل $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ چقدر است؟ (x_1 و x_2 جواب‌های معادله اند)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{6}$

$$A=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} \longrightarrow A^2=(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}=S+2\sqrt{P}=4+2\sqrt{1}=6 \longrightarrow A=\sqrt{6}$$

گزینه ۴ صحیح

مثال: در معادله درجه دوم $x^2+2x-1=0$ حاصل $x_1^4+4x_2^2-4x_2$ چقدر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

x_1 که ریشه معادله است در معادله اصلی صدق می‌کند $x_1^2+2x_1-1=0 \longrightarrow x_1^2=-2x_1+1$

$$x_1^4=(-2x_1+1)^2=4x_1^2-4x_1+1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} x_1^4+4x_2^2-4x_2=$$

$$4x_1^2-4x_1+1+4x_2^2-4x_2=1+4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)=1+4(S^2-2P)-4S$$

$$=1+4((-2)^2-2(-1))-4(-2)=33$$

گزینه ۲ صحیح

تجربی ۸۹: اگر a و b ریشه‌های معادله $x^2-10x+0/1=0$ باشند، حاصل $\log_{10}^a+\log_{10}^b-\log_{10}^{(a+b)}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

$$\log a+\log b-\log(a+b)=\log\frac{ab}{a+b}=\log\frac{P}{S}=\log\frac{0/1}{10}=\log 10^{-2}=-2$$

گزینه ۱ صحیح

* (ریاضی ۹۰) اگر α و β ریشه های معادله $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله $4x^2-kx+25=0$ به صورت $(\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2})$ است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

$$S=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{k}{4}$$

$P=?$ و $S=?$

جایگذاری $x(5x+3)=2 \rightarrow 5x^2+3x-2=0 \rightarrow S=\frac{-3}{5}$ و $P=\frac{-2}{5} \rightarrow$

$$\frac{(\frac{-3}{5})^2-2(\frac{-2}{5})}{(\frac{-2}{5})^2}=\frac{29}{4}=\frac{k}{4} \rightarrow k=29$$

گزینه ۳ صحیح

* (مثال) در معادله درجه دوم $x^2-7x-5=0$ مجموع مربعات ریشه ها کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۴۳ ۳) ۵۴ ۴) ۳۹

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=7^2-2(-5)=59$$

گزینه ۱ صحیح

* (مثال) جواب های معادله $\sqrt{2x+5}-2x=5$ چگونه است؟

۱) یک ریشه منفی
۲) دو ریشه منفی
۳) دو ریشه مثبت
۴) یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت

باید معادله را به فرم استاندارد تبدیل کنیم $\leftarrow$ $\sqrt{2x+5}=2x+5 \rightarrow$ به توان ۲ $\rightarrow$

$2x+5=4x^2+20x+25 \rightarrow 4x^2+18x+20=0 \rightarrow \Delta=4>0 \rightarrow$ دو ریشه دارد

$P=\frac{c}{a}=\frac{20}{4}=5>0 \rightarrow$ دو ریشه هم علامت

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-18}{4}=-4{,}5<0 \rightarrow$ هر دو ریشه منفی $\Rightarrow$

گزینه ۲ صحیح

به سؤال تجربی ۸۷ (دو صفحه بعد) توجه کنید.

مثال) مجموع ریشه های معادله $(x+\frac{1}{x})^2=8$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲- ۴) صفر

باید به فرم استاندارد تبدیل کنیم ⇐

$(\frac{x^2+1}{x})^2=8 \longrightarrow$ جذر بگیریم $\longrightarrow \frac{x^2+1}{x}=\pm 2\sqrt{2}$

$1)\ \frac{x^2+1}{x}=2\sqrt{2} \longrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+1=0 \longrightarrow S=\frac{-b}{a}=2\sqrt{2}$

$2)\ \frac{x^2+1}{x}=-2\sqrt{2} \longrightarrow x^2+2\sqrt{2}x+1=0 \longrightarrow S=\frac{-b}{a}=-2\sqrt{2}$

مجموع ۴ ریشه برابر صفر است ⇐ گزینه ۴ صحیح

مثال) به ازای کدام مقدار m، مجموع معکوس ریشه های متمایز معادله $x^2-m^2x+(m+2)=0$ برابر ۱ است؟

۱) ۱- و ۲ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \longrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1 \longrightarrow \frac{S}{P}=\frac{\frac{m^2}{1}}{\frac{m+2}{1}}=\frac{m^2}{m+2}=1 \longrightarrow$

$m^2-m-2=0 \longrightarrow m=2,-1 \longrightarrow$ باید بررسی کنیم که به ازای کدام یک، $\Delta>0$ است ←

$m=-1 \longrightarrow \Delta<0$ ✗ ریشه ندارد

$m=2 \longrightarrow \Delta=0$ ✗ ۱ ریشه دارد (در سؤال گفته شده ۲ ریشه) ⇐ گزینه ۴ صحیح

تجربی ۹۰) مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۶

$x^2+x=t \longrightarrow t^2-18t+72=0$

$t=6,12 \longrightarrow \begin{cases} x^2+x=12 \longrightarrow x^2+x-12=0 \longrightarrow S_1=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \\ x^2+x=6 \longrightarrow x^2+x-6=0 \longrightarrow S_2=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \end{cases} \Rightarrow$

مجموع ۴ ریشه برابر است با $(-1)+(-1)=-2$ گزینه ۲ صحیح

* ریاضی ۸۷ اگر منحنی به معادله $y=2x^2-4x+m-3$ محور xها را در دو نقطه با طول های مثبت قطع کند، آن گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

۱) $m>3$ ۲) $3<m<4$ ۳) $3<m<5$ ۴) $4<m<9$

گزینه ۳ صحیح

1) $\Delta>0$

2) $\frac{c}{a}>0$

3) $-\frac{b}{a}>0$

* تجربی ۸۷ معادله $3x-2+\sqrt{4x-3}=0$ از نظر تعداد جواب ها چگونه است؟

۱) یک جواب ۲) دو جواب هم علامت ۳) دو جواب با علامت مخالف ۴) جواب ندارد

با توجه به اینکه در گزینه ها (جواب ندارد) هم وجود دارد باید از نظر دامنه بررسی کنیم

$\sqrt{4x-3}=2-3x \longrightarrow 2-3x\geq 0 \longrightarrow x\leq \frac{2}{3}$

$4x-3\geq 0 \longrightarrow x\geq \frac{3}{4}$

اشتراک $\longrightarrow \emptyset \longrightarrow$ جواب ندارد

گزینه ۴ صحیح

* نکته: اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، مجموع ضرایب صفر باشد $(a+b+c=0)$ یک ریشه معادله 1 و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ می باشد. (در حالت کلی اگر مجموع ضرایب در یک معادله صفر باشد، $x=1$ یکی از ریشه های معادله است)

* نکته: اگر در معادله درجه دوم $a+c=b$ ، باشد، یک ریشه معادله (-1) و ریشه دیگر $(\frac{-c}{a})$ است.

* نکته: اگر عدد اصم $\alpha+\sqrt{\beta}$ ریشه معادله درجه دومی با ضرایب گویا باشد، در اینصورت ریشه دیگر $\alpha-\sqrt{\beta}$ خواهد بود.

* نکته: هرگاه در معادله درجه دوم یک ریشه k برابر دیگری باشد داریم: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

* نکته: اگر یک ریشه، k واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد (یا کمتر باشد) داریم: $\Delta=k^2a^2$

* نکته مهم: دقت داشته باشید که ریشه معادله در خود معادله نیز صدق می کند مثلاً اگر $x=1$ ریشه معادله $x^2-2x+1=0$ باشد، اگر بجای x ، مقدار 1 را در معادله قرار دهیم ، این مقدار در معادله صدق می کند.

* تجربی ۸۷ اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادله $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگر ندارد

$x=4$ در خود معادله صدق می‌کند یعنی $4+a=\sqrt{5(4)-4^2} \rightarrow a=-2 \rightarrow$ یافتن ریشه دیگر:

$x-2=\sqrt{5x-x^2} \rightarrow$ به توان ۲ $\rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2 \rightarrow 2x^2-9x+4=0 \rightarrow$

$x=4$ و $\frac{1}{2} \rightarrow$ باید بررسی کنیم که $x=\frac{1}{2}$ در معادله صدق می‌کند یا نه $\rightarrow$

$\frac{1}{2}-2=\sqrt{5(\frac{1}{2})-(\frac{1}{2})^2} \rightarrow$ صدق نمی‌کند $\rightarrow$ گزینه ۴ صحیح

* ریاضی ۸۷ اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2-x-5)=2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$x=2$ در معادله صدق می‌کند یعنی $2(a(2^2)-2-5)=2 \rightarrow a=2 \rightarrow$

$x(2x^2-x-5)-2=0 \rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=0$

$x=2$ ریشه معادله فوق است پس می‌توان معادله را برای $(x-2)$ تجزیه کرد یعنی

$$2x^3-x^2-5x-2 \;\big|\; \frac{x-2}{2x^2+3x+1} \quad \text{باقیمانده } 0$$

$\Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(\underbrace{2x^2+3x+1})=0$

مجموع دو ریشه دیگر $\frac{-b}{a}=\frac{-3}{2} \rightarrow$ گزینه ۲ صحیح

* مثال اگر یک جواب معادله $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد، حاصلضرب جواب‌های دیگر این معادله کدام است؟

۱) -4 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۴ گزینه ۲ صحیح

* نکته: یافتن ریشه مشترک بین دو معادله :

باید دو معادله را با هم برابر قرار دهیم و x^2 را از طرفین حذف کنیم تا ریشه مشترک بدست آید

و اگر در سؤالی گفته شد دو معادله ریشه مشترک ندارند یعنی دو معادله را با هم برابر قرار داده و باید $\Delta<0$ شود

* مثال: اگر $a\neq 0$ باشد، ریشه مشترک بین دو معادله $x^2+2x+a=0$ و $x^2-x-2a=0$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

ریشه مشترک پیدا شد: $x^2+2x+a=x^2-x-2a \to 3x+3a=0 \to x=-a \to$

ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند (در یکی از معادله قرار می‌دهیم) $\Leftarrow$

$x^2+2x+a=0 \to (-a)^2+2(-a)+a=0 \to \begin{cases} a=0 & \times \\ a=1 & \checkmark \end{cases}$ زیرا $a\neq 0$ باید باشد $\to$

ریشه مشترک برابر است با $x=-a=-1$ گزینه ۲ صحیح

* تمرین ۸۶: خط به معادله $y=mx+4$ با منحنی به معادله $y=-x^2+2x$ هیچ نقطه مشترکی ندارد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ ۱) $m<0$ ۲) $m>4$ ۳) $-1<m<4$ ۴) $-2<m<6$

$y_1=y_2 \to -x^2+2x=mx+4 \to x^2+(m-2)x+4=0 \to \Delta<0 \to$

$\Delta=(m-2)^2-4(1)(4)=m^2-4m+4-16=m^2-4m-12<0 \to -2<m<6$

گزینه ۴ صحیح

نکته: تشکیل معادله درجه دوم جدید:

هرگاه معادله ax^2+bx+c مفروض باشد و بخواهیم معادله درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه هایش با ریشه های معادله اول رابطه های خاصی داشته باشد، S و P معادله جدید را تشکیل می دهیم. $(x^2-Sx+P=0)$

مثال: معادله درجه دومی بیابید که ریشه هایش مربع ریشه های معادله $x^2+5x+2=0$ باشد؟

$S_{جدید} = \alpha^2+\beta^2 = S^2-2P = (-5)^2-2(2) = 21$

$P_{جدید} = \alpha^2\beta^2 = P^2 = 2^2 = 4$

$x^2-Sx+P = x^2-21x+4=0$

مثال: معادله $x^2-mx+1=0$ مفروض است. اگر α و β ریشه های معادله فوق باشند، معادله ای که ریشه هایش $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد، را بیابید؟

$S_{جدید} = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2-2P}{P} = \frac{m^2-2(1)}{1} = m^2-2$

$P_{جدید} = \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha} = 1 \longrightarrow x^2-Sx+P = x^2-(m^2-2)+1=0$

مثال: ریشه های کدام معادله از ریشه های معادله $x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^2-x-3=0$ ۲) $x^2-x-5=0$ ۳) $x^2-5x+1=0$ ۴) $x^2-5x-1=0$

$S_{جدید} = (\alpha-1)+(\beta-1) = (\alpha+\beta)-2 = 3-2 = 1$

$P_{جدید} = (\alpha-1)(\beta-1) = (\alpha\beta)-(\alpha+\beta)+1 = (-1)-(3)+1 = -3$

$x^2-Sx+P = x^2-x-3=0$ گزینه ۱ صحیح

* تجربی ۹۴ سنجش — ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است؟

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$

۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

جدید $S=(\frac{1}{\alpha}-1)+(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2=-5$

جدید $P=(\frac{1}{\alpha}-1)(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha\beta}-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})+1=\frac{1}{\alpha\beta}-(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta})+1=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}})+1=2$

$x^2-Sx+P=x^2-(-5)x+2=x^2+5x+2=0 \rightarrow$ گزینه ۴ صحیح

* تجربی ۸۷ سنجش — ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

$$x^2+ax+b=0 \rightarrow \begin{cases} S=-a=(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=-\frac{7}{3}+2=-\frac{1}{3} \\ P=b=(\alpha+1)(\beta+1)=(\alpha\beta)+(\alpha+\beta)+1=\frac{1}{3}+-\frac{7}{3}+1=-1 \end{cases}$$

گزینه ۲ صحیح (البته a نیاز نبود)

* تجربی ۸۶ سنجش — اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2+ax+b=0$ دو برابر معکوس هر یک از ریشه‌های معادله $4x^2-7x+3=0$ باشد، a کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6

$3x^2+ax+b=0 \rightarrow S=-\frac{a}{3}=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{2(\frac{7}{4})}{\frac{3}{4}}=\frac{14}{3} \rightarrow$

$-\frac{a}{3}=\frac{14}{3} \rightarrow a=-14$ گزینه ۱ صحیح

مثال: ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله $3x^2+5x=\frac{1}{4}$ به مقدار $\frac{1}{2}$ بیشتر است؟ (سراسری)

۱) $3x^2-x+2=0$ ۲) $3x^2+2x-2=0$ ۳) $3x^2+2x-1=0$ ۴) $3x^2+x-4=0$

$3x^2+5x-\frac{1}{4}=0$

جمع $S=(\alpha+\frac{1}{2})+(\beta+\frac{1}{2})=(\alpha+\beta)+1=\frac{-5}{3}+1=\frac{-2}{3}$

ضرب $P=(\alpha+\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})=(\alpha\beta)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}=(\frac{-\frac{1}{4}}{3})+\frac{1}{2}(\frac{-5}{3})+\frac{1}{4}=\frac{-2}{3}$

$x^2-Sx+P=x^2-(\frac{-2}{3})x+(-\frac{2}{3})=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2+2x-2=0$

گزینه ۲ صحیح

مثال: ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-bx+c=0$ دو واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $x^2-x-1=0$ می‌باشد. b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

$x^2-bx+c=0 \to S=b=(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=1+4=5$ گزینه ۳ صحیح

مثال: ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله $2x^2-5x+1=0$ یک واحد کمتر است؟ (سراسری)

۱) $x^2-3x-1=0$ ۲) $x^2-3x-2=0$ ۳) $2x^2-3x+1=0$ ۴) $2x^2-x-2=0$

جمع $S=(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2=2(\frac{5}{2})-2=3$

ضرب $P=(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=4(\frac{1}{2})-2(\frac{5}{2})+1=-2$

$x^2-Sx+P=0 \to x^2-3x-2=0$ گزینه ۲ صحیح

* جزء صحیح

$x = 1{,}25 \to [x] = 1$

$x = -1{,}25 \to [x] = -2$

$x = n + p$: n صحیح، p اعشاری

$0 \leq \bigcirc - [\bigcirc] < 1$

1) $[x+2] = [x] + 2$

2) $[x] = n \to n \leq x < n+1 \Longrightarrow [\bigcirc] = n \to n \leq \bigcirc < n+1$

3) $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \to [x] + [-x] = 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \to [x] + [-x] = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{array}{l} x = 2 \to [2] + [-2] = 0 \\ x = 2{,}2 \to [2{,}2] + [-2{,}2] = -1 \end{array}$

* نکته مهم: خیلی از مسائل جزء صحیح را می‌توان توسط جایگذاری و عددگذاری حل نمود.

* مثال: اگر $[4x] = [2x^2+2]$ ⟸ $[(x+1)^2]$ کدام است؟

۱) $[3x]$ ۲) $[4x]$ ۳) $[x^2+1]$ ۴) $[2x^2+3]$

باید دنبال عددی بگردیم که در رابطه $[4x] = [2x^2+2]$ صدق کند ⟸ مثلاً $x = 1$ ⟸ $[(x+1)^2] = 4$

گزینه‌ای درست است که به ازای $x = 1$ حاصل آن ۴ شود ⟸ گزینه ۲ صحیح

* تجربی ۹۱) برای هر عدد طبیعی $n>2$ حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

در مسئله گفته شده $n>2$ مثلاً $n=3$ ⟸ $[\underbrace{\sqrt{4(3)^2-3(3)+1}}_{5}]-2[\underbrace{\sqrt{3^2-2(3)}}_{1}]=3$

گزینه ۳ صحیح

* تجربی ۸۹) تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{[\cos\pi x]}$ در کدام بازه قابل تعریف است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

در واقع دامنه دارای خواهد بود یعنی $R-\{\text{ریشه مخرج}\}$ ⟸ $[\cos\pi x]=0$ ⟸ $0\le\cos\pi x<1$

یعنی گزینه‌ای درست است که $[0,\frac{1}{2}]$ جزء آن نباشد $0<x\le\frac{1}{2}$ ⟶ $0<\pi x\le\pi/2$

فقط گزینه ۳ صحیح است.

* تجربی ۸۸) اگر جزء صحیح (x^2+x) برابر (۱-) باشد، آنگاه $[x^{20}]$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

$[x^2+x]=-1$ ⟸ $-1\le x^2+x<0$ ⟸ کدام عدد را بجای x قرار دهیم تا در این بازه صدق کند.

دقت کنید که باید دنبال x منفی باشیم و در ضمن باید کوچکتر از ۱- ~~باشد~~ تا توان ۲۰ آن از ۱ کوچکتر شود. مثلاً $x=-0.5$ ⟸ $[x^{20}]=[(-0.5)^{20}]=0$ گزینه ۲ صحیح

مثال) اگر جزء صحیح $x+x^2$ برابر (۱-) باشد، حاصل $[x^3]+[x^2]-[x]$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۲-   ۴) ۲

گزینه ۳ صحیح

مثال) حاصل $\left[\frac{x}{1-x}\right]$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟ ۱) ۱-   ۲) ۲-   ۳) ۳-   ۴) ۴-

$x=\sqrt{2}=1.4 \longrightarrow$ جایگذاری $\longrightarrow \left[\frac{1.4}{1-1.4}\right]=\left[\frac{1.4}{-0.4}\right]=[-3.5]=-4$

گزینه ۴ صحیح

مثال) حاصل $\left[\sqrt{n^2+4n+5}\right]$ به ازای مقادیر طبیعی n کدام است؟

۱) $n+1$ ۲) $n+2$ ۳) $n+3$ ۴) $n+4$

گزینه ۲ صحیح

مثال) حاصل $2x-2[x]$ کدام بازه است؟

۱) $[1,2)$ ۲) $\{0,2\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) صفر یا ۲-

گزینه ۲ صحیح

مثال) جواب‌های معادله $[3x-2]=-4$ کدام است؟

۱) $[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ ۲) $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}]$ ۳) $(-1,-\frac{2}{3}]$ ۴) $[-1,-\frac{2}{3})$

$-4\le 3x-2<-3 \xrightarrow{+2} -2\le 3x<-1 \longrightarrow -\frac{2}{3}\le x<-\frac{1}{3}$

گزینه ۱ صحیح

مثال: اگر $[3x+1]=-1$ ، آنگاه حاصل $[x]-[-x]$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -2 ۳) -1 ۴) 1

$-1 \le 3x+1 < 0 \xrightarrow{-1} -2 \le 3x < -1 \longrightarrow -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{3} \xrightarrow[\text{مثلاً } x=-\frac{2}{3}]{\text{جایگذاری در رابطه}}$

$[-\frac{2}{3}]-[+\frac{2}{3}] = -1-0=-1$

گزینه ۳ صحیح

مثال: با فرض $0\le x<2$ ، $[x^2]$ چند مقدار مختلف می‌پذیرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$0\le x<2 \longrightarrow 0\le x^2<4 \longrightarrow \begin{cases} 0\le x^2<1 \longrightarrow [x^2]=0 \\ 1\le x^2<2 \longrightarrow [x^2]=1 \\ 2\le x^2<3 \longrightarrow [x^2]=2 \\ 3\le x^2<4 \longrightarrow [x^2]=3 \end{cases}$$

۴ مقدار مختلف می‌گیرد ← گزینه ۴ صحیح

مثال: بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $-x+3$ کدام است؟

۱) $3+[-x]$ ۲) $[x]+3$ ۳) $3-[x]$ ۴) $[-x]$

درواقع جزء صحیح عبارت فوق را می‌خواهد ← $[-x+3]=[-x]+3$ ← گزینه ۱ صحیح

مثال: اگر $y=x-3[\frac{x}{3}]$ در اینصورت حدود y کدام است؟

۱) $0\le y\le \frac{1}{3}$ ۲) $0\le y<3$ ۳) $1\le y<3$ ۴) $-1\le y<3$

$y=x-3[\frac{x}{3}]=3(\underbrace{\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}]}_{0\le \bigcirc<1}) \Rightarrow 0\le y<3 \longrightarrow$ گزینه ۲ صحیح

* نکته) نمودار تابع $y=[nx]$ در بازه $(0,1]$ از n پاره خط تشکیل شده است.

* مثال) نمودار $y=x-[x]$ در فاصله $-1\le x<3$ از چند پاره خط ساخته شده است؟

بازه $-1\le x<3$ از چند زیر بازه تشکیل شده

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\left.\begin{array}{l}-1\le x<0\\ 0\le x<1\\ 1\le x<2\\ 2\le x<3\end{array}\right\} \longrightarrow$$

بنابراین $y=x-[x]$ از ۴ پاره خط تشکیل شده ⟵ گزینه ۳ صحیح

(اگر بصورت $[3x]$ بود، می‌نتیجه از $4\times3=12$ پاره خط تشکیل شده است)

* تجربی ۸۶) نمودار تابع $y=2[\frac{x}{2}]+1$ ، $x\in[-2,6)$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

بازه $-2\le x<6$ از ۸ زیر بازه تشکیل شده است پس می‌شود از ۴ پاره خط زیرا $[\frac{x}{2}]$ داریم یعنی $\frac{1}{2}\times 8=4$

گزینه ۲ صحیح

* تجربی ۸۹) نمودار تابع $y=[x^2]$ روی بازه $x\in(-2,2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

$-2<x<2 \longrightarrow$ نمودار x^2 در بازه ⟵

ولی در بازه $(-1,1)$ حاصل ۰ می‌شود

پس از ۷ پاره خط تشکیل شده است گزینه ۴ صحیح

(در واقع می‌توان گفت $[x^2]$ در بازه $0\le x<2$ از ۴ پاره خط و در بازه $-2<x\le 0$ نیز از ۴ پاره خط تشکیل شده ولی در بازه $-1<x<1$ حاصل $[x^2]$ صفر می‌شود پس در مجموع از ۷ پاره خط تشکیل شده)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots , \qquad -\infty < x < \infty$$

$$A = \pi r^2$$

سوابق تحصیلی

- ✔ مدرس رسمی آموزش و پرورش
- ✔ مولف کتابهای کنکور
- ✔ عضو هیات مدیره موسسه تیزهوشان
- ✔ عضو انجمن ریاضیدانان و فیزیکدانان ایران
- ✔ مشاور تحصیلی در برنامه های تلویزیونی تلویزیون جوان، اقتصاد و رادیو فرهنگ و شبکه ۴ صدا و سیما جمهوری اسلامی ایران
- ✔ تنها دارنده مدرک برنامه ریزی و مشاوره تحصیلی از دانشگاه آکسفورد انگلستان در استان
- ✔ مدرس برتر ریاضیات و فیزیک المپیاد و کنکور
- ✔ دارنده پروانه اشتغال از سازمان نظام مهندسی کشور
- ✔ برگزار کننده همایش های طلایی ضربتی کنکور در استان های تهران - تبریز و گیلان
- ✔ عضو باشگاه مهندسان ایران
- ✔ عضو انجمن علمی مهندسان برق ایران
- ✔ عضو مرجع متخصصین ایران
- ✔ عضو انجمن علمی نخبگان جوان
- ✔ عضو انجمن مهندسی بهره وری صنعت برق ایران
- ✔ عضو انجمن علمی پژوهشگران جوان
- ✔ عضو انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران
- ✔ عضو انجمن نخبگان کشور