



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)



تابع

تعریف تابع:

تابع، مجموعه‌ای است شامل زوج‌های مرتب، که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نباشند.

اگر دو زوج با مؤلفه‌های اول یکسان وجود داشته باشد، باید مؤلفه‌ی دوم آنها نیز با هم برابر باشد.

$$\forall (x, y) \in f, \quad (x, z) \in f \rightarrow y = z$$

اگر f تابع باشد آنگاه: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

اگر $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ آنگاه f تابع نیست.

هر رابطه که هر عضو مجموعه‌ی A را دقیقاً به یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت دهد، یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B می‌نامیم.

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

در این تابع، مجموعه‌ی A را دامنه‌ی تابع D_f و مجموعه‌ی B را برد تابع R_f می‌نامیم:

$$f: A \rightarrow B$$

که اگر f تابع باشد m را بدست آورید.

$$f = \{(-1, -3), (2, 3m), (m, 6), (7, -1), (2, m^2 - 4)\}$$

که اگر رابطه‌ی $R = \{(2, a^2 + b^2), (3, ab), (4, -1), (7, 2), (3, 4)\}$ یک تابع باشد آنگاه مقدار $a+b$ را حساب کنید.

که تابع بودن یا تابع نبودن هریک از روابط زیر را بررسی کنید.

1) $y = \sin x$

2) $y^3 = |x|$

3) $y^2 = x^3$

4) $y = x^3$

5) $y^2 = -x^2$

6) $y^2 = x^2$

7) $|y| = x$

8) $y^4 = x^3 + 1$

9) $-(x-1)^2 = |y^3 - 8|$

10) $x^2 + (y-1)^2 = 1$

11) $x = \cos^2 y$

12) $x = \sin y$

13) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 9 = 0$

14) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$

15) $y^3 - 3y^2 + x = 0$

16) $y + y^3 = x^3 + 1$



📖 تشخیص تابع از روی نمودار:

هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

📖 تابع ثابت:

$$f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \{a\}$$

تابعی که برد آن فقط یک عضو دارد.

نمودار تابع ثابت، خطی موازی محور x ها است.

📖 تابع همانی:

تابعی که هر عضو دامنه را به همان عضو از برد نظیر کند.

$$f(x) = x \quad \text{یا} \quad y = x$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

نمودار تابع همانی، نیم سازه ربع اول و سوم است.

📖 تابع خطی:

هر تابع به فرم $f(x) = mx + b$ که در آن m شیب و b عرض از مبدأ است، تابع خطی می گوییم.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

📖 توابع چند ضابطه ای:

در تابع $f(x) = 3x^2 + x$ به ازای تمام مقادیر x از رابطه $y = 3x^2 + x$ استفاده می کنیم اما در تابع $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ x^2-1 & x < 0 \end{cases}$ به ازای مقادیر $x \geq 0$ داریم: $y = 2x+1$ و به ازای مقادیر $x < 0$ از رابطه $y = x^2-1$ استفاده خواهیم کرد.

$$f(-f(x)) \text{ که اگر } f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \text{ مطلوب است:}$$



کدام در هر یک از حالت‌های زیر ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابید.

$$1) f\left(\frac{x+2}{x}\right) = x^2$$

$$2) f\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^6 + \frac{1}{x^6}$$

$$3) f(\cos 2x) = 3\sin^2 x - 4\cos^4 x + 1$$

$$4) f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$5) f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$



چه اگر $g(x) = x^3$ و $f(g(x)) = \frac{x}{x-1}$ آنگاه $f(x)$ را حساب کنید.

چه اگر $f(x) = \frac{4x+7}{2}$ و $f(g(x)) = \frac{2x-3}{4}$ آنگاه ضابطه ی $g(x)$ را بیابید.

چه اگر $f(x) = 2^x$ باشد حاصل عبارت $f(x+1) - f(x-1)$ را بیابید.



دامنه‌ی توابع:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

$$\rightarrow D = \mathbb{R}$$

توابع چند جمله‌ای: ☒

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$$

دامنه‌ی توابع کسری: تمام اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های مخرج ☒

$$f(x) = \sqrt[2k]{u}, k \in \mathbb{N} \rightarrow u \geq 0$$

توابع رادیکالی: ☒

$$g(x) = \sqrt[2k+1]{u} \Rightarrow D_g = D_u$$

$$y = \log_b^a \rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$$

دامنه‌ی توابع لگاریتمی: ☒دامنه‌ی توابع مثلثاتی: ☒

$$y = \sin x, y = \cos x \rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos x \neq 0, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \sin x \neq 0$$

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \rightarrow D = \mathbb{R}$$

تابع قدرمطلق: ☒

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \rightarrow D = \mathbb{R}$$

تابع علامت: ☒



$$y = [x] \rightarrow D = \mathbb{R}$$

☑ تابع جزء صحیح:

$$[3/7] = 3, [2/9] = 2, [2/01] = 2, [0/8] = 0, [5] = 5$$

$$[-3/7] = -4, [-2/9] = -3, [-2/01] = -3, [-0/8] = -1, [0] = 0$$

$$x - 1 < [x] \leq x, [x + k] = [x] + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = 0, \forall x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1, 0 \leq x - [x] < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow [nx] = [x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots$$

📖 تابع یک به یک:

تابع را وقتی یک به یک می‌نامند که به ازای هر عضو از بردش، یک و فقط یک عضو از دامنه‌اش وجود داشته باشد. یعنی تابع، مؤلفه‌ی دوم یکسان نداشته باشد.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

📖 تابع معکوس (وارون):

هرگاه جای مؤلفه‌های اول و دوم را عوض کنیم، وارون تابع (f^{-1}) بدست می‌آید.

$$D_f = R_{f^{-1}}, R_f = D_{f^{-1}}, (a, b) \in f \Rightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

شرط وارون‌پذیری یک تابع آن است که یک به یک باشد.



انتقال و تبدیل نمودار توابع:

هر یک از حالت‌های زیر را بررسی کنید و مثال بزنید:

1) $y = -f(x)$

2) $y = f(-x)$

3) $y = f(x + a)$

4) $y = f(x) + b$

5) $y = f(x + a) + b$

6) $y = f(kx)$

7) $y = kf(x)$

8) $y = f(|x|)$

9) $y = |f(x)|$

10) $|y| = f(x)$

11) $y = [f(x)]$

12) $y = f([x])$

13) $[y] = f(x)$



📖 تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) دامنه‌ی دو تابع مساوی باشند $D_f = D_g$

ب) به ازای هر عضو از دامنه، دو تابع مقادیر یکسانی داشته باشند:

$$\forall x \in D_{f,g} \rightarrow f(x) = g(x)$$

📖 برد توابع: به مؤلفه‌های دوم، برد تابع می‌گوییم.

که برد هریک از توابع زیر را بنویسید.

1) $y = u^{2n}$

2) $y = \sqrt[2n]{u}$

3) $y = |u|$

4) $y = \sin x$

5) $y = \cos x$

6) $y = \sin^{2n} x, n \in \mathbb{N}$

7) $y = \cos^{2n} x$

8) $y = a^u, a > 0, a \neq 1$

9) $y = u + \frac{1}{u}, u > 0$

10) $y = u + \frac{1}{u}, u < 0$



کمی برد هریک از توابع زیر را محاسبه کنید.

1) $y = x^2 - 4x$

2) $y = -x^2 + 6x - 1$

3) $y = 3x^2 + 6x - 1$

4) $y = x^6 - x^3$

5) $y = -2x^8 + x^4$

6) $y = x - 6\sqrt{x}$

7) $y = x - \sqrt{x-2}$

8) $y = \frac{3}{x^2 + 2x + 5}$

9) $y = \frac{2-x}{2x+3}$

10) $y = x + \frac{1}{x+5}$

11) $y = \frac{1}{\sqrt{2\sin x - 1}}$

12) $y = \frac{x^2 + 2x + 25}{(x+1)^2}$

13) $y = -2x^2 + 3x + 4$

14) $y = \frac{2|x| - 1}{|x| + 2}$



اعمال جبری روی توابع و دامنه‌ی آن‌ها:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) , \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g=0\} , \quad D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{f=0\}$$

ترکیب توابع:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) , \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

اگر f و g معکوس هم باشند $f \circ g(x) = x$

اگر f و g معکوس پذیر باشند $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

تابع زوج و فرد:

$$\forall x \in D_f \rightarrow -x \in D_f$$

شرط اول: برای زوج یا فرد بودن تابع، متقارن بودن دامنه‌ی تابع است.

شرط دوم:

$$f(-x) = f(x) \text{ : تابع زوج است اگر:}$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ : تابع فرد است اگر:}$$

نمودار تابع زوج نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.

نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

تابعی که شرط اول را نداشته باشد نه زوج است و نه فرد.

تابع صفر هم زوج است و هم فرد.

که زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.



1) $y = x^2 + x^4 + |x|$

2) $y = x^3 - x$

3) $y = \cos x$

4) $y = \sin x - x^5$

اگر دو تابع f و g زوج باشند، ترکیب آنها نیز تابعی زوج خواهد بود.
 اگر دو تابع f و g فرد باشند، ترکیب آنها نیز فرد خواهد بود.
 اگر دو تابع f و g یکی زوج و دیگری فرد باشد، ترکیب آنها تابعی زوج است.
 توابع زوج معکوس پذیر نیستند.

توابع صعودی و نزولی:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \geq f(x_2) & \text{نزولی} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{نزولی اکید} \\ f(x_1) \leq f(x_2) & \text{صعودی} \\ f(x_1) < f(x_2) & \text{صعودی اکید} \end{cases}$$

که برای هر یک از شرایط بالا یک تابع رسم کنید.



چند نکته:

توابع صعودی یا توابع نزولی را یکنوا گوئیم.

توابع صعودی اکید یا نزولی اکید را یکنوای اکید گوئیم.

توابعی که در بخشی از دامنه‌ی خود نزولی و در بخشی دیگر صعودی باشند، غیر یکنوا هستند.

اگر $y' > 0$ آنگاه تابع y صعودی اکید است.

اگر $y' \geq 0$ آنگاه تابع y صعودی است.

اگر $y' < 0$ تابع y نزولی اکید و اگر $y' \leq 0$ نزولی می‌باشد.

مجموع دو تابع صعودی، یک تابع صعودی است.

مجموع دو تابع نزولی، یک تابع نزولی است.

ترکیب دو تابع صعودی یا دو تابع نزولی، در صورت وجود یک تابع صعودی است.

ترکیب یک تابع صعودی با یک تابع نزولی در صورت وجود، یک تابع نزولی است.

اگر f و g هر دو صعودی و مثبت باشند، آنگاه $f \times g$ صعودی است.

اگر f صعودی و g نزولی باشد، آنگاه تابع $(g-f)$ نزولی است.

اگر f تابعی صعودی باشد، آنگاه $-f$ نزولی است.

اگر f تابعی نزولی باشد، آنگاه $-f$ صعودی است.

تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.



1- رابطه‌ی $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ چند زوج مرتب دارد؟

5 (1) 6 (2) 8 (3) 9 (4)

2- رابطه‌ی $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ چند زوج مرتب دارد؟

4 (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4)

3- رابطه‌ی $f = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

-2 (1) -1 (2) 2 (3) 4 (4) هیچ مقدار m

4- اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟

(1) $x \leq -1$ (2) $x \geq -1$ (3) $x \leq 1$ (4) $x \geq 1$

5- اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(1) $[-1, +1]$ (2) $(-\infty, 0)$ (3) $(-\infty, +\infty)$ (4) $(0, +\infty)$

6- اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$ به کدام صورت است؟

(1) $\mathbb{R} - (-1, 1)$ (2) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (3) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (4) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

7- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x - \sqrt{x+3}}$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌باشد؟

(1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3



8- برد رابطی $f(x) = \begin{cases} x^2 : & x \neq 0 \\ 2 : & x = 0 \end{cases}$ کدام است؟

- (1) R (2) $(0, +\infty)$ (3) $[0, +\infty)$ (4) $(-\infty, 0)$

9- برد تابع $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ کدام است؟

- (1) $[3\sqrt{2}, +\infty)$ (2) $[\sqrt{3}, +\infty)$ (3) $[2, +\infty)$ (4) $[4, +\infty)$

10- برد تابع $y = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x}}$ کدام است؟

- (1) $(0, \sqrt{2}]$ (2) $[0, \sqrt{2})$ (3) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (4) $[0, \sqrt{2}]$

11- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

- (1) صفر (2) $4x$ (3) $2x^2$ (4) $4x^2$

12- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{1-x^2}$ (2) $\frac{2x}{1-x^2}$ (3) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (4) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

13- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول 1 و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 6-

قطع می‌کند و از نقطه $(-2, -6)$ می‌گذرد. $f(-1)$ کدام است؟

- (1) -8 (2) -7 (3) -5 (4) -4

14- نمودار دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-a}{2x+1}$ و $g(x) = x^2 + bx + 3$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول 2، روی خط

$y = x - 1$ قطع می‌کنند. $a+b$ کدام است؟

- (1) -6 (2) -5 (3) 4 (4) 8



15- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟

- (1) $x^2 + 1$ (2) $x^2 + 3$ (3) $x^2 + 4x + 5$ (4) $x^2 - 4x + 5$

16- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها، غیر منفی باشد؟

- (1) 1 (2) 1/5 (3) 2 (4) 3

17- نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را 4 واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (1) -3/5 (2) -3 (3) -2/5 (4) -2

18- نمودار تابع $y = \log \frac{2-x}{2+x}$ نسبت به کدام یک متقارن است؟

- (1) مبدأ مختصات (2) محور x ها (3) محور y ها (4) نیمساز ناحیه‌ی اول

19- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه‌ی تابع $f(3-x)$ کدام است؟

- (1) $[0, 2]$ (2) $[0, 3]$ (3) $[1, 2]$ (4) $[1, 3]$

20- اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ و $g(x) = \text{Log} \frac{x+1}{1-x}$ باشند، دامنه‌ی تابع $\frac{2g}{f}$ کدام است؟

- (1) $[-1, 1]$ (2) $(-1, 1]$ (3) $(-1, 1)$ (4) $[-2, 1) - \{-1\}$

21- اگر $f = \{(0, 1), (-1, 4), (1, 2)\}$ و $g(x) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}x\right)$ باشند، حاصل $\frac{(f+g)(-1)}{(f-g)(0)}$ کدام است؟

- (1) -2 (2) -3 (3) 4 (4) 5



22- اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ باشد مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

- (1) تعریف نشده (2) صفر (3) 1 (4) $\sqrt{2}$

23- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

- (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9

24- اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل $(fog)(1 - \sqrt{2}) - (gof)(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- (1) $4(1 - \sqrt{2})$ (2) $4(\sqrt{2} - 1)$ (3) 4 (4) $4\sqrt{2}$

25- دو تابع $f(x) = x^2 + ax - 3b$ و $g(x) = b - x$ روی محور xها در نقطه‌ای به طول یک، متقاطع هستند. مقدار $(fog)(2)$ کدام است؟

- (1) صفر (2) 2 (3) -3 (4) -4

26- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

- (1) $1/75$ (2) $2/25$ (3) $2/5$ (4) $2/75$

27- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، عدد a کدام است؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

28- دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند، در حالت کلی، کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- (1) $f \cup g$ (2) $f \cap g$ (3) $f - g$ (4) fog

29- اگر $f(x) = [x]$ باشد، مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

- (1) $\{0\}$ (2) $\{1\}$ (3) $\{0, 1\}$ (4) $\{-1, 0, 1\}$



30- اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ باشند، نمودارهای دو تابع f و g با کدام طول، متقاطع اند؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{3}{2}$

31- تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای 6 و $-\frac{1}{4}$ قطع

کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

- (1) $\frac{1}{9}, 4$ (2) $\frac{1}{4}, 9$ (3) $4, \frac{1}{4}$ (4) 4, 9

32- اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ ، مجموعه ی طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور x ها قرار

می گیرند، برابر کدام بازه است؟

- (1) $(-5, 1)$ (2) $(-1, 5)$ (3) $(-2, 1)$ (4) $(1, 5)$

33- اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (1) x (2) $4 - x$ (3) $f(x)$ (4) $2 - f(x)$

34- اگر $f(x) = |x| - x$ باشد، ضابطه ی $f \circ f(x)$ کدام است؟

- (1) x (2) $|x|$ (3) $x + |x|$ (4) صفر

35- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (2) $-\frac{1}{2} \sin^2 2x$ (3) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$ (4) $\frac{1}{2} \cos^2 2x$

36- دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر

x کدام است؟

- (1) $R - Z$ (2) Z (3) R (4) ϕ



37- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ مقدار $f(5)$ کدام است؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

38- اگر $fog(x) = -f(x)$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، آنگاه $g(x)$ کدام است؟

- 1 (1) $\frac{1}{x}$ 2 (2) $\frac{2}{x}$ 3 (3) x 4 (4) $2x$

39- اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه است؟

- 1 (1) $x^2 - 1$ 2 (2) $x^2 + 1$ 3 (3) $x^2 - 2x$ 4 (4) $x^2 + 2x$

40- اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

- 1 (1) $x^2 - 4x + 3$ 2 (2) $x^2 - 4x + 5$ 3 (3) $x^2 - 2x + 5$ 4 (4) $x^2 - 2x + 3$

41- اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟

- 1 (1) $2x^2 - 3x + 7$ 2 (2) $2x^2 - 7x + 3$ 3 (3) $4x^2 - 2x + 13$ 4 (4) $4x^2 - 4x + 11$

42- اگر $g(x) = 2x - 1$ و $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- 1 (1) -4 2 (2) -2 3 (3) 2 4 (4) 4

43- دو تابع $f = \{(1,7), (2,1), (3,2), (4,5)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض‌اند، اگر

$(4,1) \in \text{gof}$ ، $(4,2) \in \text{fog}$ باشند، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

- 1 (1) $(3,4)$ 2 (2) $(4,3)$ 3 (3) $(4,5)$ 4 (4) $(5,4)$

44- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- 1 (1) $D_{\text{fog}} = \mathbb{R}$ 2 (2) $D_{\text{fog}} = [-2, 2]$ 3 (3) $D_{\text{gof}} = \mathbb{R}$ 4 (4) $D_{\text{gof}} = [-1, 1]$



45- اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $g \circ f(x)$ کدام است؟

- (1) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (2) $[-1, 1]$ (3) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (4) $[-1, 1]$

46- اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ ، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (1) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (2) $\mathbb{R} - \{0, 8\}$ (3) $\mathbb{R} - \{0\}$ (4) $(0, +\infty)$

47- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \tan x; |x| < \frac{\pi}{2}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (1) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (2) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (3) $\left[\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ (4) $[-1, 0) \cup (0, 1]$

48- حدود a برای آن که تابع $y = (a-2)x^2 - x$ در فاصله‌ی $[+1, +\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟

- (1) $a \geq \frac{5}{2}$ (2) $2 < a \leq \frac{5}{2}$ (3) $a < \frac{5}{2}$ (4) $a > 2$

49- اگر f و g دو تابع صعودی اکید روی $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

- (1) صعودی اکید، نزولی اکید
(2) نزولی اکید، صعودی اکید
(3) صعودی اکید، نامشخص
(4) نزولی اکید، نزولی اکید

50- اگر رابطه‌ی $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشند، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (1) $(-1, 1)$ (2) $(-1, 3)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 3)$

51- اگر $f = \{(m+1, 4), (-m+3, 4), (3, m)\}$ وارون‌پذیر و $g(x) = 2x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $(g \circ f)(3)$ کدام است؟

- (1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3

52- هرگاه $f\left(\frac{2}{x}\right) = 8 + x$ و تابع $g(x) = (a-1)x^2 + 2x - a$ وارون‌پذیر باشد، مقدار $2f + g$ به ازای $x=1$ کدام است؟

- (1) 11 (2) 15 (3) 18 (4) 21



53- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

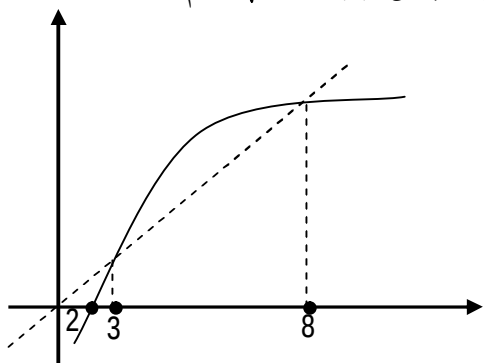
- (1) -8 (2) -5 (3) -2 (4) تعریف نشده

54- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر

$g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

- (1) -4 (2) -1 (3) 2 (4) 4

55- شکل روبرو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم‌ساز ربع اول و سوم است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



- (1) $[0, 2]$ (2) $[2, 3]$

- (3) $[2, 8]$ (4) $[3, 8]$

56- اگر دو خط به معادلات $ax + by = 8$ و $2x - 3y = b$ نسبت به نیم‌ساز ربع اول، متقارن باشند، $a+b$ کدام است؟

- (1) ± 3 (2) ± 2 (3) $2, -3$ (4) $-2, 3$

57- ضابطه‌ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (1) $y = x^2 - 4x + 5 : x \leq 2$ (2) $y = -x^2 + 4x - 5 : x \leq 2$

- (3) $y = x^2 - 4x + 5 : x \geq 1$ (4) $y = -x^2 + 4x - 5 : x \geq 1$

58- معکوس تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{x-2} - \sqrt{x-1}$ با شرط $x > 2$ کدام است؟

- (1) $y = x^2 - 2x + 2$ (2) $y = x^2 - 2x$

- (3) $y = x^2 + 2x, x > 0$ (4) $y = x^2 + 2x + 2, x > 0$



59- اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ باشد، آنگاه $f^{-1}(x+2)$ کدام است؟

$$\frac{2x-5}{x+1} \quad (4)$$

$$\frac{3x+7}{x+1} \quad (3)$$

$$\frac{2x-5}{x} \quad (2)$$

$$\frac{3x+7}{x} \quad (1)$$

60- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه، کدام است؟

$$\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4 \quad (3)$$

61- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

$$\frac{1}{3}x + 2, x > 3 \quad (2)$$

$$-x + 7, x > 8 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}x - 1, -4 < x < 8 \quad (4)$$

$$x + 7, x > -4 \quad (3)$$

62- نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

$$-x + 5, x > 2 \quad (2)$$

$$-x + 6, x < -4 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2}x + 1, -4 < x < 10 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2}x + 1, -4 < x < 3 \quad (3)$$

63- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x - 2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

$$1 - \sqrt{1 - x}, x < 1 \quad (2)$$

$$1 - \sqrt{1 + x}, x < 0 \quad (1)$$

$$1 - \sqrt{1 - x}, 0 < x < 1 \quad (4)$$

$$1 + \sqrt{1 - x}, 0 < x < 1 \quad (3)$$

64- ضابطه‌ی معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ کدام است؟

$$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (2)$$

$$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y = x|x| : x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$y = x|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3)$$



65- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2}$ و $f(0)=0$ ، ضابطه‌ی تابع وارون کدام است؟
 (1) $f(x)$ (2) $-f(x)$ (3) $xf(x)$ (4) $-xf(x)$

66- ضابطه‌ی وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$$y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1 \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1 \quad (4)$$

$$y = \frac{x}{|x|-1}, |x| > 1 \quad (3)$$

67- دو تابع $f = \{(1,2), (2,3), (4,5), (3,4)\}$ و $g = \{(2,1), (3,2), (5,4)\}$ مفروض‌اند، تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟
 (1) $\{(4,4), (1,1), (3,4)\}$ (2) $\{(3,3), (5,5), (4,3)\}$
 (3) $\{(2,2), (1,1), (4,4)\}$ (4) $\{(2,2), (3,3), (5,5)\}$

68- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه‌ی $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه، متقاطع هستند؟
 (1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) غیر متقاطع

69- معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} - 1$ ، خود تابع را در چند نقطه قطع می‌کند؟
 (1) هیچ نقطه (2) بی‌شمار نقطه (3) یک نقطه (4) دو نقطه

70- هرگاه $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، حاصل $f(x) \times f(-\frac{1}{x})$ کدام است؟
 (1) x (2) $-x$ (3) -1 (4) 1

71- اگر $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ باشد، آن گاه $f(f(-144))$ کدام است؟
 (1) تعریف نشده (2) 6 (3) 8 (4) 12



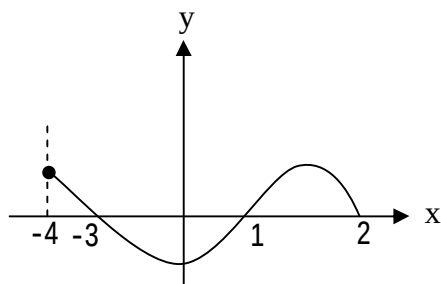
72- اگر $2f(1+x) + 3f(1-x) = 5x - 1$ باشد ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

(4) $25x + 1$

(3) $-5x + \frac{24}{5}$

(2) $5x - \frac{24}{5}$

(1) $-25x - 1$



73- شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(2) $[-3, 2]$

(1) $[0, 2]$

(4) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

(3) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

74- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{3 - \sqrt{1 - 4x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(4) 5

(3) 4

(2) 2

(1) 3

75- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{4 - |x - 1|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(4) 5

(3) 9

(2) 7

(1) 8

76- دامنه‌ی تابع $\frac{\log(x-1)}{\log(4-x^2)}$ کدام است؟

(4) $\{x | x > 1\}$

(3) $\{x | 1 < x < 2\}$

(2) $\{x | 1 < x < 2, x \neq \sqrt{3}\}$

(1) $\{x | -2 < x < 2\}$

77- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_{10}(x-1)}$ به کدام صورت است؟

(4) $(1, 11]$

(3) $[1, 11]$

(2) $[2, 10]$

(1) $(1, 2]$

78- اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ ، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟

(4) $[1, +\infty)$

(3) $[-1, 1]$

(2) $[0, 1]$

(1) $[-1, 0]$



79- اگر برد تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ به صورت مجموعه‌ی $\{-1, 1, 2\}$ باشد، دامنه‌ی این تابع برابر کدام مجموعه است؟
 (1) $\{-4, -2, 0\}$ (2) $\{-2, 0, 3\}$ (3) $\{-4, -1, 0\}$ (4) $\{-1, 1, 4\}$

80- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ضابطه‌ی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟
 (1) $\frac{1}{1-x^2}$ (2) $\frac{2x}{x^2-1}$ (3) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (4) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

81- اگر $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$ و $g(x) = \log \frac{x-1}{x-4}$ باشد، تابع $f+g$ در کدام بازه تعریف شده است؟
 (1) $[0, 1]$ (2) $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (3) $[\pi, 4]$ (4) $(4, \frac{3\pi}{2}]$

82- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ ، دامنه‌ی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟
 (1) $(-3, +\infty) - \{1\}$ (2) $R - \{1\}$ (3) $(-3, +\infty)$ (4) $(-3, +\infty) - \{0\}$

83- اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ آن گاه $(fog)(\sqrt{2})$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)
 (1) -4 (2) -3 (3) -2 (4) -1

84- اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟
 (1) $\{(1, 3), (0, 0)\}$ (2) $\{(2, 4), (3, 5)\}$ (3) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$ (4) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

85- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟
 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4



86- فرض کنیم $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ در این صورت $f(x)$ کدام است؟

- (1) $x^2 - 4$ (2) $x^2 - 2$ (3) x^2 (4) $x^2 + 2$

87- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

88- اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ باشد آن گاه $D_{f \circ g} \cap D_{g \circ f}$ کدام است؟

- (1) $[0,1]$ (2) $\{0\}$ (3) $(-1,1)$ (4) $\emptyset$

89- اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ مقدار $g(-2)$ کدام است؟

- (1) صفر (2) 1 (3) -1 (4) 2

90- اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، آن گاه دامنه‌ی تعریف $(f+g) \circ f$ کدام است؟

- (1) $[0,1]$ (2) $[-1,1]$ (3) $[-1,0]$ (4) $[0,+\infty]$

91- اگر دامنه‌ی $f(x)$ برابر $D_f = [-2,6]$ باشد دامنه‌ی $3f(2x+1)$ شامل چند عدد صحیح است؟

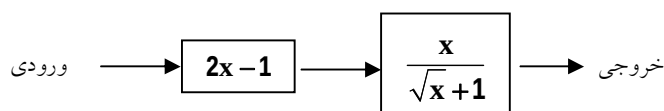
- (1) 4 (2) 17 (3) 9 (4) 25

92- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y - |x| = 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

- (1) اول و دوم (2) دوم و سوم (3) اول و سوم (4) اول و دوم

93- اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

- (1) $\frac{11}{9}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) 3 (4) 4





94- اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$ ، ضابطه‌ی تابع g برابر کدام است؟

$$\frac{x+1}{x} \quad (4)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (3)$$

$$\frac{x-1}{x} \quad (2)$$

$$\frac{x}{x+1} \quad (1)$$

95- اگر $x \neq 1$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، ضابطه‌ی تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

$$\frac{2x}{x-1} \quad (4)$$

$$\frac{x-1}{x+1} \quad (3)$$

$$-x \quad (2)$$

$$x \quad (1)$$



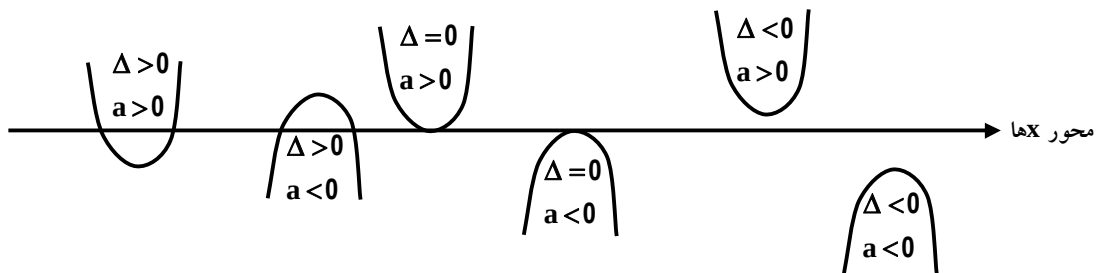
📖 تابع درجه‌ی دوم

فرم کلی تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ است.

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مبین Δ مشخص کننده‌ی تعداد ریشه‌هاست: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta > 0 \rightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} , x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} , \Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} , \Delta < 0 \rightarrow \text{Error}$$

نمودار عبارت درجه‌ی دوم به شکل سهمی است.



شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد $\Delta < 0$, $a > 0$

شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم همواره منفی باشد $\Delta < 0$, $a < 0$

📖 رأس سهمی:

$$S\left(x_s = \frac{-b}{2a}, y_s = \frac{-\Delta}{4a}\right) \quad \text{یا} \quad S\left(x_s = \frac{-b}{2a}, y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b , \quad y' = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \quad \rightarrow x = \frac{-b}{2a} \quad \text{طول رأس سهمی}$$

$$x = x_s = \frac{-b}{2a} \quad \text{محور تقارن سهمی:}$$

☑ در سهمی:

$$\text{اگر } a > 0 \rightarrow \text{Min}(y) = y_s = \frac{-\Delta}{4a} \quad \rightarrow R_y = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$$\text{اگر } a < 0 \rightarrow \text{Max}(y) = y_s = \frac{-\Delta}{4a} \quad \rightarrow R_y = \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$$

خط $y = \frac{-\Delta}{4a}$ تنها خطی است که بر سهمی مماس می‌شود.



در معادله‌ی درجه‌ی دوم اگر b زوج باشد می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$b' = \frac{b}{2}, \Delta' = (b')^2 - ac, x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}, \Delta = 4\Delta'$$

روش مجموع ضرایب در حل معادله‌ی درجه‌ی دوم:

$$a + b + c = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$$

$$b = a + c \rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$$

$$a \times c + 1 = b \Rightarrow x_1 = -c, x_2 = \frac{-1}{a} \quad a \times c + 1 = -b \Rightarrow x_1 = c, x_2 = \frac{1}{a}$$

اگر $\Delta > 0$ باشد: معادله دارای دو ریشه حقیقی است و سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و از 3 یا 4 ناحیه‌ی مختصات عبور می‌کند.

اگر $\Delta = 0$ باشد: معادله دارای یک ریشه حقیقی (ریشه مضاعف) است و سهمی از دو ناحیه عبور می‌کند و بر محور x ها عمود است.

اگر $\Delta < 0$ باشد: معادله ریشه ندارد و محور x ها را قطع نمی‌کند و از 2 ناحیه عبور می‌کند.

در تابع درجه‌ی دوم اگر $c > 0$ باشد نمودار محور y را با عرض مثبت و اگر $c < 0$ باشد با عرض منفی قطع خواهد کرد و اگر $c = 0$ باشد نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد.

در تابع درجه‌ی دوم اگر $b > 0$ نمودار محور y را با شیب مثبت و اگر $b < 0$ باشد محور y را با شیب منفی قطع می‌کند. اگر $b = 0$ باشد با شیب صفر قطع خواهد کرد.

که در مورد هریک از حالت‌های زیر بحث کنید:

$$\frac{-b}{a} > 0$$

$$\frac{c}{a} = 0$$

$$\frac{-b}{a} < 0$$

$$\frac{c}{a} > 0$$

$$\frac{c}{a} < 0$$



در معادله‌ی درجه‌ی دوم اگر $\Delta > 0$ باشد آنگاه دو ریشه‌ی متمایز α و β خواهد داشت:

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

که روابط بالا را اثبات کنید.

با توجه به $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad \text{جمع ریشه‌ها}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{ضرب ریشه‌ها}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم:

$$\text{اگر } S = 0 \rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \rightarrow b = 0 \Rightarrow \text{دو ریشه قرینه‌اند}$$

$$\text{اگر } P = 1 \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow c = a \Rightarrow \text{دو ریشه معکوس‌اند}$$

$$\text{اگر } P = -1 \rightarrow \frac{c}{a} = -1 \rightarrow c = -a \Rightarrow \text{دو ریشه قرینه‌ی معکوس‌اند}$$

$$\text{اگر یک ریشه } k \text{ برابر دیگری باشد آنگاه: } \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

اگر در یک معادله با ضرایب گویا یکی از ریشه‌ها $a + \sqrt{b}$ باشد ریشه‌ی دیگر $a - \sqrt{b}$ خواهد بود.

ساختن معادله‌ی درجه‌ی دوم با معلوم بودن ریشه‌ها:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$



📖 در معادله‌ی درجه‌ی دوم:

اگر بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید تشکیل دهیم:

- ✓ ریشه‌هایش قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی قبل باشد کافی است x را به $-x$ تبدیل کنیم و یا به جای b ، $-b$ قرار دهیم.
- ✓ ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی قبل باشد، کافی است x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم و یا جای a و c را عوض کنیم.
- ✓ ریشه‌هایش قرینه‌ی معکوس معادله‌ی قبل باشد به جای x عبارت $-\frac{1}{x}$ قرار دهیم و یا جای a و c را عوض و b را قرینه کنیم.
- ✓ ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله‌ی قبل باشد به جای x عبارت $\frac{k}{x}$ قرار دهیم.
- ✓ ریشه‌هایش k واحد از ریشه‌های معادله‌ی اول بیشتر باشد x را به $x-k$ تبدیل می‌کنیم.
- ✓ ریشه‌هایش k واحد از ریشه‌های معادله‌ی اول کمتر باشد x را به $x+k$ تبدیل می‌کنیم.

📖 بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی دو مجذوری:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0 \quad \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

چهار ریشه‌ی متمایز $\Rightarrow \frac{-b}{a} > 0, \frac{c}{a} > 0, \Delta > 0$ اگر

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Rightarrow -\frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0, \Delta > 0$ اگر

دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه $\Rightarrow \frac{c}{a} < 0, \Delta > 0$ اگر

دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه $\Rightarrow \frac{-b}{a} > 0, \Delta = 0$ اگر

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Rightarrow -\frac{b}{a} < 0, \Delta = 0$ اگر

که عبارت‌های زیر را رسم کنید، سپس رأس و محل برخورد با محورهای x و y را بیابید.

الف) $y = x^2 - 2x - 3$

ب) $y = x^2 + 4x + 4$

پ) $y = -x^2 + 4x - 3$

ت) $y = -x^2 + 4x - 6$



که حدود m را چنان بیابید تا سهمی $y = (m+2)x^2 + 4x + m - 1$ محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند.

که اگر $2x^2 - 7x + 6 = 0$ و α و β ریشه‌های آن باشند. مطلوب است حاصل مقادیر زیر :

الف) $|\alpha - \beta| =$

ب) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} =$

پ) $\alpha^4 + \beta^4 =$

ت) $\alpha^6 + \beta^6 =$

ث) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2} + \frac{\beta+1}{\beta^2} =$

ج) $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} =$

که اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ باشد حاصل عبارت $2\alpha^2 + \beta^2 - \alpha$ را حساب کنید.

که معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش از نصف ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - kx - 3 = 0$ به اندازه‌ی یک واحد بیشتر باشد.

که کمترین مقدار تابع $y = x + \frac{2}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x بدست آورید.

که معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش الف) نصف ب) معکوس پ) سه برابر ت) مجذور ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد.



1- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- (1) -4 (2) -1 (3) 1 (4) 4

2- محیط مستطیلی 100 متر است. حداکثر مساحت آن کدام است؟

- (1) 2500 (2) 1250 (3) 625 (4) 225

3- بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می توان با a متر نرده محصور کرد، چندمتر مربع است؟

- (1) a^2 (2) $\frac{a^2}{2}$ (3) $\frac{a^2}{4}$ (4) $\frac{a^2}{8}$

4- اگر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول 2 قطع کند، طول‌های دو نقطه‌ی تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام‌اند؟

- (1) $-1, -\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}, 1$ (3) $-\frac{3}{2}, -1$ (4) $-\frac{1}{2}, 3$

5- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر 2 باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

- (1) -2 (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{2}$

6- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر 6 می‌باشد؟

- (1) $-\frac{9}{5}$ (2) 1 (3) $-\frac{9}{5}, 1$ (4) $-\frac{9}{5}, -1$

7- در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر 3 واحد بیشتر است. m کدام است؟

- (1) 9 (2) 10 (3) 12 (4) 15



8- به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی عددی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

(1) 3 (2) -3 (3) 4 (4) -4

9- به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

(1) $a > 6$ یا $a < 2$ (2) $a > 4$ یا $a < 3$
(3) $2 < a < 6$ (4) $3 < a < 4$

10- منحنی به معادله‌ی $y = (x-1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت است؟

(1) $-4 < a < 0$ (2) $0 < a < 2$ (3) $0 < a < 4$ (4) $a > 4$

11- اگر منحنی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

(1) $m > 3$ (2) $3 < m < 4$ (3) $3 < m < 5$ (4) $4 < m < 9$

12- با کدام مقادیر m منحنی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x هاست؟

(1) $m > -2$ (2) $-2 < m < -1$ (3) $-2 < m < 2$ (4) $-1 < m < 2$

13- با کدام مقادیر m منحنی به معادله‌ی $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟

(1) $m < -2$ (2) $m < -1$ (3) $-2 < m < -1$ (4) $-4 < m < -2$

14- به ازای کدام مقادیر a منحنی $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(1) $a \leq 2$ (2) $a > 0$ (3) $a \leq -2$ (4) $-2 \leq a < 0$

15- منحنی به معادله‌ی $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟

(1) $5 < m < 13$ (2) $15 < m < 23$ (3) $7 < m < 15$ (4) $9 < m < 25$



16- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

5(1) 6(2) 7(3) 9(4)

17- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟

27(1) 28(2) 29(3) 31(4)

18- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$ است؟

$$(1) \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(2) \quad 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(3) \quad 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$(4) \quad 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

19- اگر معادله‌ی $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای 4 ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

(1) $m > -4$ (2) $m > 4$ (3) $-4 < m < 4$ (4) $4 < m < 9$

20- به ازای کدام مقدار a ، معادله‌ی $3x^4 + 5x^2 + a^2 = 1$ فقط دو جواب قرینه‌ی هم، برای x دارد؟

(1) $0 < a < 2$ (2) $-1 < a < 1$ (3) $|a| > 1$ (4) برای هر مقدار a

21- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^4 = 16(2x^2 - 9)$ کدام است؟

(1) صفر (2) -5 (3) 4 (4) 5

22- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

(1) -4 (2) -2 (3) 2 (4) 4



23- به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

$$0 < m < 2 \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} < m < 2 \quad (1)$$

$$2 < m < \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2} \quad (3)$$

24- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه ی اول محورهای مختصات نمی گذرد؟

$$0 < a < 3 \quad (4)$$

$$2 < a < 3 \quad (3)$$

$$0 < a \leq 2 \quad (2)$$

$$a \leq 2 \quad (1)$$

25- به ازای کدام مقدار m عدد $\sqrt{2}$ واسطه ی هندسی بین ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

$$-3 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

26- اگر معادله $x^4 - 4x^2 + a = 0$ دارای دو ریشه ی حقیقی یکی مثبت و دیگری منفی باشد، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

$$0 < a < 3 \quad (4)$$

$$a > 1 \quad (3)$$

$$a < 3 \quad (2)$$

$$a < 0 \quad (1)$$

27- دو برابر عددی از عدد دیگر 6 واحد بیشتر است، اگر حاصل ضرب آنها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

28- به ازای کدام مقدار k در معادله ی درجه ی دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه ها رابطه ی $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار است؟

$$6 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$-10 \quad (2)$$

$$-12 \quad (1)$$

29- خط به معادله $y = mx + 4$ با منحنی به معادله $y = -x^2 + 2x$ هیچ نقطه ی مشترکی ندارد، مجموعه ی m به کدام صورت است؟

$$-2 < m < 6 \quad (4)$$

$$-1 < m < 4 \quad (3)$$

$$m > 4 \quad (2)$$

$$m < 0 \quad (1)$$

30- اگر a و b ریشه های معادله $x^2 - 10x + 0/1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$



31- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + x + 1$ باشند و $\beta > \alpha$ ، مقدار $5\alpha^2 + 3\beta^2$ کدام است؟
 (1) $12 + \sqrt{5}$ (2) $12 - \sqrt{5}$ (3) $24 + \sqrt{5}$ (4) $24 - \sqrt{5}$

32- به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟
 (1) -2 (2) -1 (3) -1 (4) 1

33- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟
 (1) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (2) $x^2 + 3x + 1 = 0$
 (3) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (4) $x^2 + 5x + 2 = 0$

34- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند، کدام است؟
 (1) $x^2 - 10x - 27 = 0$ (2) $x^2 + 10x + 27 = 0$
 (3) $x^2 + 10x - 27 = 0$ (4) $x^2 - 10x + 27 = 0$

35- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟
 (1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 9

36- اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟
 (1) -14 (2) -12 (3) -8 (4) -6

37- اگر منحنی به معادله‌ی $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟
 (1) $m > 3$ (2) $3 < m < 4$ (3) $3 < m < 5$ (4) $4 < m < 5$

38- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه‌ی به طول‌های منفی قطع می‌کند؟



(1) $a < -9$ (2) $a < -3$ (3) $a > -1$ (4) $-3 < a < 0$

39- به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

(1) $a < -4$ (2) $a > -4$ (3) $a < 4$ (4) $a > 4$

40- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت 40 درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت 70 درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به 50 درصد می‌رسد؟

(1) 0/4 (2) 0/5 (3) 0/6 (4) 0/8

41- مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ در بازه‌ی (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{2}$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(1) 4 (2) 5 (3) 5/5 (4) 6

42- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ؛ $x > -1$ در بازه‌ی (a, b) زیر محور x ها است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

43- در کدام فاصله از x ، نمودار تابع با ضابطه $y = x^3 - 3x$ بالاتر از نمودار تابع با ضابطه $y = 2x^2 + x - 8$ قرار دارد؟

(1) $(-\infty, -2)$ (2) $(-\infty, 2)$

(3) $\{-2, +\infty\}$ (4) $(-3, +2)$

44- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ در بازه‌ی (a, b) پایین‌تر از خط به معادله $y = 2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(1) 4 (2) 6 (3) 8 (4) ∞

45- اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 3 (4) جواب دیگر ندارد



46- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- (1) -2 (2) 1 (3) 2 (4) 4

47- منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله‌ی $y = 7$ مماس است. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6

48- به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله‌ی $y = 2x - 4$ بر منحنی $y = (m + 3)x^2 + mx$ مماس است؟

- (1) -2, 8 (2) -2, 22 (3) 2, 22 (4) 4, 11

49- حدود m کدام باشد تا می‌نیم تابع درجه‌ی دوم $y = mx^2 + 2x + 2m - 1$ در ناحیه‌ی سوم قرار گیرد؟

- (1) $m > 0$ (2) $0 < m < 1$ (3) $-\frac{1}{2} < m < 1$ (4) $-1 < m < \frac{1}{2}$

50- اگر عبارت $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (1) $1 < a < 5$ (2) $a < 1$ (3) $\varnothing$ (4) R

51- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، نمودار $f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- (1) $0 < a \leq 2$ (2) $a \leq 2$ (3) $2 < a < 3$ (4) $0 < a < 3$

52- نمودار تابع $y = x^2 - (m - 3)x + 2m$ فقط از ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد. m در کدام بازه‌ی زیر، می‌تواند قرار گیرد؟

- (1) $1 \leq m < 4$ (2) $0 \leq m < \frac{1}{4}$ (3) $-1 \leq m < 0$ (4) $2 \leq m < 3$

53- معادله‌ی $-3x^2 + x + k^2 + 1 = 0$ دارای:

- (1) دو ریشه‌ی مثبت است. (2) دو ریشه‌ی منفی است.



(4) ریشه نیست.

(3) دو ریشه‌ی مختلف علامت است.

54- معادله‌ی $(x-1)(x-3)+2+k^2=0$ چه وضعی دارد؟

(2) دو ریشه‌ی منفی دارد.

(1) دو ریشه‌ی مثبت دارد.

(4) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

(3) دو ریشه‌ی مختلف علامت دارد.

55- ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^3-2x+1=0$ چگونه‌اند؟

(1) ریشه‌ی مضاعف مثبت - یک ریشه‌ی منفی

(2) ریشه‌ی مضاعف منفی - یک ریشه‌ی مثبت

(3) یک ریشه‌ی مثبت - دو ریشه‌ی منفی

(4) دو ریشه‌ی مثبت - یک ریشه‌ی منفی

56- اگر منفی به معادله‌ی $y=2x^2-4x+m-3$ ، محور xها را در دو نقطه‌ای مثبت قطع کند، آنگاه حدود m کدام است؟(4) $4 < m < 5$ (3) $3 < m < 5$ (2) $3 < m < 4$ (1) $m > 3$ 57- به ازای کدام مقدار m معادله‌ی درجه دوم $mx^2+5x+m^2-6=0$ دو ریشه‌ی حقیقی و معکوس هم دارد؟

(4) 3

(3) 2

(2) -2

(1) -3

58- به ازای کدام مقدار a، عبارت $x^2-(a+2)x+2a$ به صورت مربع کامل یک دو جمله‌ای درمی‌آید؟

(4) -1

(3) 1

(2) 2

(1) -2

59- به ازای کدام مقادیر a عبارت $ax^2+2x+4a$ همواره مثبت است؟(4) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ (3) $0 < a < \frac{1}{2}$ (2) $a < -\frac{1}{2}$ (1) $a > \frac{1}{2}$



60- اگر معادله $(x-a)(x-b)+1=0$ دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد، کدام معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$$(b-x)(x-a)-2=0 \quad (2)$$

$$(x-a)(x-b)+2=0 \quad (1)$$

$$x^2-ab=0 \quad (4)$$

$$(x-a)(x-b)-2=0 \quad (3)$$

61- مجموع ریشه‌های $ax^2+bx+c=0$ با حاصل ضرب معکوس ریشه‌های این معادله برابر است کدام رابطه بین a و b برقرار است؟

$$b^2+ac=0 \quad (4)$$

$$b^2-ac=0 \quad (3)$$

$$a^2-bc=0 \quad (2)$$

$$a^2+bc=0 \quad (1)$$

62- به ازای کدام مقدار k ، ریشه‌های حقیقی معادله $x^2+x+k=0$ در رابطه $kx_1x_2+x_1+x_2=3$ صدق می‌کنند؟

$$k=\pm\sqrt{2} \quad (4)$$

$$k=\pm 2 \quad (3)$$

$$k=2 \text{ فقط} \quad (2)$$

$$k=-2 \text{ فقط} \quad (1)$$

63- در معادله‌ی درجه دوم $x^2-ax+a+2=0$ تفاضل دو ریشه برابر 2 است. a کدام است؟

$$6, 2 \quad (4)$$

$$6, -2 \quad (3)$$

$$-6, 2 \quad (2)$$

$$-6, -2 \quad (1)$$

64- معادله $x\sqrt{x-2}-x=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

$$(4) \text{ ریشه حقیقی ندارد}$$

$$(3) \text{ یک ریشه مثبت}$$

$$(2) \text{ یک ریشه منفی}$$

$$(1) \text{ دو ریشه}$$

65- نقطه‌ی می‌نیمم تابع با ضابطه $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

66- معادله‌ی محور تقارن منحنی $x+y=x^2$ کدام است؟

$$2y+1=0 \quad (4)$$

$$2x-1=0 \quad (3)$$

$$2y-1=0 \quad (2)$$

$$2x+1=0 \quad (1)$$

67- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

$$6 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$



68- در ازای کدام مقادیر m نمودار تابع با ضابطه $y = mx^2 + (m-1)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی گذرد؟

$$1 \leq m \leq 2 \quad (4)$$

$$m \geq 1 \quad (3)$$

$$0 \leq m \leq 1 \quad (2)$$

$$m \leq 1 \quad (1)$$



$$y = \sqrt{x^2} \Rightarrow y = |x| \Rightarrow y = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

📖 قدر مطلق:

که عبارتهای زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید، سپس آنها را رسم کنید.

1) $y = |x - 3|$

2) $y = |x + 2| + |x - 1|$

3) $y = |x - 3| - |x + 2|$

4) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}, x \in (0, 2\pi)$

📖 چند نکته در مورد قدر مطلق:

1) $|u| \geq 0$

2) $\sqrt{u^2} = |u|$

3) $|-u| = |u|$

4) $|u| \leq a \rightarrow -a \leq u \leq +a$

5) $|u| \geq a \rightarrow u \geq +a$ یا $u \leq -a$

6) $-|u| \leq u \leq +|u|$

7) $|u|^2 = |u^2| = u^2$

8) $|x + y| \leq |x| + |y|$

9) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy > 0$

10) $|x + y| < |x| + |y| \Leftrightarrow xy < 0$

11) $|x - y| \geq |x| - |y|$

12) $|xy| = |x| |y|$

13) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

14) $|x| = a \rightarrow x = \pm a$

15) $|x| = |y| \rightarrow x = \pm y$



که مساحت محدود به نمودار تابع $y = 2 - \frac{|x|}{2}$ و محور x ها را بدست آورید.

که مقدار ریشه‌های معادله $|x^2 - 2|x|| = \frac{1}{3}$ را بیابید.

📖 تابع گلدانی $y = |x - a| + |x - b|$

$$R_f = [|a - b|, +\infty)$$

کمترین مقدار این تابع $|a - b|$ است. خط $x = \frac{a+b}{2}$ محور تقارن تابع است.

$$|x - a| + |x - b| = k > 0$$

📖 ریشه‌های معادله‌ی

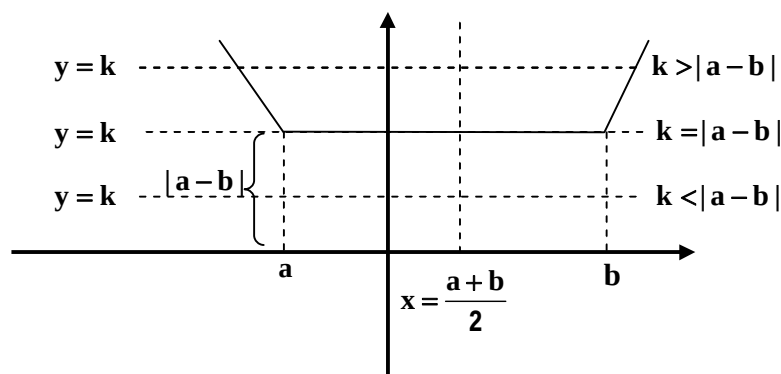
معادله‌ی فوق از حل دستگاه $\begin{cases} y = |x - a| + |x - b| \\ y = k \end{cases}$ به دست می‌آید.

برای حل این معادله ابتدا نمودار تابع $y = |x - a| + |x - b|$ را رسم نموده و بعد با خط $y = k$ قطع می‌دهیم با توجه به نمودار به راحتی می‌توان نتیجه گرفت:

$$k > |a - b| \rightarrow \text{معادله دو ریشه دارد} \Rightarrow x = \frac{a+b \pm k}{2}$$

$$k = |a - b| \rightarrow \text{معادله بی شمار ریشه دارد} \Rightarrow a \leq x \leq b$$

$$k < |a - b| \rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$





$$y = |x - a| - |x - b| \quad \text{تابع سرسره‌ای}$$

$$R_f = [-|a - b|, |a - b|]$$

بیشترین مقدار تابع، $|a - b|$ و کمترین مقدار آن $-|a - b|$ است.

نقطه‌ی $w\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ مرکز تقارن این تابع است. (دقت کنید این تابع محور تقارن ندارد)

$$|x - a| - |x - b| = k$$

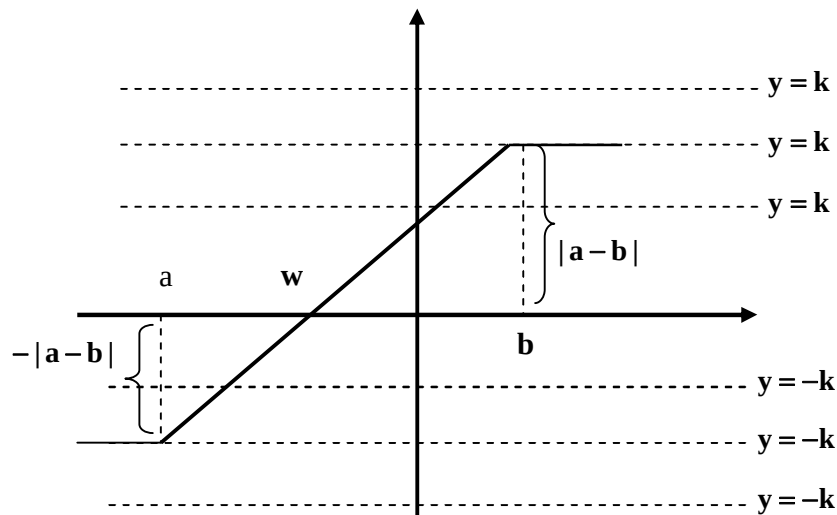
ریشه‌های معادله

ابتدا نمودار تابع $y = |x - a| - |x - b|$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را با خط $y = k$ و $y = -k$ قطع می‌دهیم با توجه به نمودار به راحتی می‌توان نتیجه گرفت:

معادله جواب ندارد $\rightarrow |k| > |a - b|$

معادله بی‌شمار جواب دارد $\rightarrow |k| = |a - b|$

معادله یک ریشه دارد $\rightarrow |k| < |a - b|$: $x = \frac{a+b+k}{2}$ یا $x = \frac{a+b-k}{2}$





اگر $a \leq u \leq b$ باشد آنگاه داریم:

$$a \leq u \leq b \text{ یا } -b \leq u \leq -a$$

که در نامعادله‌ی $1 < |3x - 2| < 5$ حدود x را بدست آورید.

که اگر $1 < x < 2$ باشد آنگاه حاصل $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} + |2 - x|$ را بیابید.

که اگر $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد حاصل عبارت $|\sin x + \cos x| + |\sin x - \cos x|$ را بنویسید.

که اگر x در ناحیه‌ی اول مثلثاتی باشد حاصل عبارت $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x}$ را حساب کنید.

📖 اگر a و b دو عدد حقیقی (دو تابع) دلخواه باشند.

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

$$\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$$



که معادله ی $\max\{x^2, 2x\} = 3$ چند جواب دارد؟

که نامعادله ی $|x+1| + |x-5| \leq 6$ را حل کنید.

که به ازای چه مقادیری از m معادله ی $|x-3m+1| + |x+2m-3| = 6$ جواب ندارد؟

که معادله ی $|x + \sin^2 \theta| + |x - \cos^2 \theta| = 2$ چند جواب دارد؟

که به ازای چه مقادیری m خط $x = m$ نمودار $|x-2| + |y+3| = 5$ را قطع نمی کند.



1- اگر $-1 < x < 2$ باشد، حاصل $|x+1| + |x^2 - 4|$ کدام است؟

- (1) $x-4$ (2) $4-x$ (3) $2x^2 + x - 4$ (4) $4+x$

2- اگر $x^2 < x$ باشد حاصل $\sqrt{x^2 + x - 2x\sqrt{x}} + \sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (1) $1-\sqrt{x}$ (2) $1+\sqrt{x}$ (3) $1-x$ (4) $1+x$

3- نمودار تابع $y = |x+1| - 3$ محور x ها را با کدام مجموعه‌ی طولها قطع می‌کند؟

- (1) $\{2, -3\}$ (2) $\{-1, 5\}$ (3) $\{2, 3\}$ (4) $\{-4, 2\}$

4- معادله‌ی $|x-4| - 3x = x$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (1) صفر (2) 2 (3) 3 (4) 4

5- اگر رابطه‌ی $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود، الزاماً سه عدد x و y و z چگونه‌اند؟

- (1) مساوی هم (2) هم علامت (3) مثبت (4) منفی

6- اگر $|a-b| = |a| + |b|$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (1) $ab > 0$ (2) $ab < 0$ (3) $ab \geq 0$ (4) $ab \leq 0$

7- نامساوی $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ در کدام شرایط زیر برقرار است؟

- (1) همواره برقرار است (2) اصلاً برقرار نیست (3) $xy < 0$ (4) $xy > 0$

8- اگر $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} = 0$ باشد، آنگاه چه تعداد از موارد زیر نادرست است؟

- (الف) $|a+b| < |a| + |b|$ (ب) $|a-b| > ||a| - |b||$ (پ) $|a-b| = ||a| - |b||$
(1) هیچ (2) 1 (3) 2 (4) 3



9- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = 1$ و $x = -1$ کدام است؟

- (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{5}{2}$ (4) 3

10- مساحت محدود به نمودار تابع $y = 2x + |x|$ و خط $y = x + 3$ کدام است؟

- (1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 12

11- به ازای چه مقدار m ، خط $x = -2$ ، محور تقارن تابع $y = |4m - x| + |x + m + 1|$ است؟

- (1) -1 (2) 1 (3) $-\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$

12- منحنی $y = |x - 2| + |x - 3|$ با خط $y = m > 1$ ، یک چهار ضلعی به مساحت 8 می‌سازد، m چقدر است؟

- (1) 3 (2) $\sqrt{15}$ (3) 4 (4) $\sqrt{17}$

13- چند نقطه روی منحنی $y = |x + 2|$ وجود دارد که از مبدأ مختصات به فاصله‌ی 3 باشند؟

- (1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3

14- مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - |x|$ کدام است؟

- (1) $[0, 3]$ (2) $[0, 1]$ (3) $\{0, 3\}$ (4) $\varnothing$

15- مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2 - 2x < |x - 2|$ به صورت کدام بازه است؟

- (1) $(-1, 1)$ (2) $(-1, 2)$ (3) $(0, 2)$ (4) $(1, 2)$

16- در کدام بازه، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -x^2 + \frac{1}{2}(3x + 15)$ بالاتر از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |2x - 3|$ قرار می‌گیرد؟

- (1) $(-1, 3)$ (2) $(-1, 5)$ (3) $(1, 3)$ (4) $(1, 5)$



17- در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y = 5 - |x - 1|$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = |2x|$ قرار دارد؟

- (1) $(-\frac{4}{3}, 1)$ (2) $(-\frac{2}{3}, 1)$ (3) $(-\frac{4}{3}, 2)$ (4) $(-\frac{2}{3}, 2)$

18- در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y_1 = \sqrt{x+3}$ ، بالای نمودار تابع $y_2 = |x-1| - 2$ قرار دارد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9

19- در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $y = \sqrt{5+4x-x^2}$ ، بالای نمودار تابع $y = |x-3| + 2$ قرار دارد؟

- (1) $(\frac{3-\sqrt{17}}{3}, 5)$ (2) $(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ (3) $(2, \frac{4+\sqrt{15}}{2})$ (4) $(2, 2+\sqrt{15})$

20- مجموعه جواب نامعادله $|x-2| - 2 < x$ کدام است؟

- (1) $(2, +\infty)$ (2) $(1, 10)$ (3) $(1, +\infty)$ (4) $(0, +\infty)$

21- مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟

- (1) $(0, 1)$ (2) $(0, 3)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(1, 3)$

22- نامعادله $|x| + |1-4x| + |2x+1| < x-2$ چند جواب حقیقی دارد؟

- (1) 2 (2) 3 (3) صفر (4) بی شمار

23- مجموعه جواب نامعادله $|\frac{x-2}{2x+1}| > 1$ به صورت کدام بازه است؟

- (1) $(-3, \frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ (2) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ (3) $(-3, \frac{1}{2})$ (4) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$



24- در بازه‌ی (a, b) نمودار تابع $y = |x^2 - 4x + 6|$ ، پایین‌تر از نمودار $y = |x^2 - 4x - 6|$ قرار دارد. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- 6 (1) 4 (2) 3 (3) 5 (4)

25- اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{|x-3|}$ به صورت $\{b\} - (a, +\infty)$ باشد، $x \in$ باشد، $b+a$ کدام است؟

- 2 (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4)

26- اگر نامساوی‌های $|x-1| < 0/1$ و $A < 2x - 3 < B$ معادل هم باشند، آنگاه $A+B$ کدام است؟

- 2/1 (1) -2 (2) -1/1 (3) -1 (4)

27- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ |(2x-1)| < |x| \end{cases}$ کدام است؟

- (1) $\{x: -1 < x < 1\}$ (2) $\{x: -2 < x < 2\}$
(3) $\{x: 0 < x < 2\}$ (4) $\{x: -2 < x < 1\}$

28- نمودار تابع $y = 4 - |x|$ در بازه‌ی (a, b) بالاتر از خط به معادله‌ی $2y + x = 5$ قرار دارد. بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- 3 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4)

29- مجموعه جواب نامعادله‌ی $5 - 2x < |x-4|$ به کدام صورت است؟

- (1) $(1, 5)$ (2) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$
(3) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ (4) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

30- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x+6| < x^2$ را به صورت $|x-\alpha| < \beta$ نمایش داده‌ایم. α چقدر است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $-\frac{5}{2}$

31- بزرگترین بازه‌ای که در آن مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه‌ی $y = |x-2|$ است، کدام است؟



(0 و 1) (4)

(-1 و 1) (3)

(-1 و 0) (2)

(1 و -2) (1)

32- مجموعه جواب نامعادله $x + |x| \leq \frac{1}{2}x + 3$ به کدام صورت است؟

[-2,6] (4)

[-6,2] (3)

[-6,1] (2)

[-4,2] (1)



📖 تابع جزء صحیح (تابع براکتی):

$$\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow x = n + p, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq p < 1$$

$$x = 2/7 \rightarrow n = 2, p = 0/7$$

$$x = 5 \rightarrow n = 5, p = 0$$

$$x = -4/8 \rightarrow n = -5, p = 0/2$$

که قسمت صحیح هر عدد حقیقی مانند x را با $[x]$ نمایش می‌دهیم و آنرا جزء صحیح می‌نامیم.

$$[x] = \max\{n \mid n \leq x, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[-6/8] = \max\{n \mid n \leq -6/8, n \in \mathbb{Z}\} = \{-7\}$$

$$[+4/7] = 4$$

$$[0/8] = 0$$

$$[7] = 7$$

$$[-3/14] = -4$$

$$[-0/5] = -1$$

$$[-6] = -6$$

📖 چند خاصیت تابع جزء صحیح

$$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$[x \pm n] = [x] \pm n, n \in \mathbb{Z}$$

$$[kx] \neq k[x], k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right], n \in \mathbb{N}$$

$$[-x] = -[x], [x] + [-x] = 0, x \in \mathbb{Z}$$

$$[-x] = -[x] - 1, [x] + [-x] = -1, x \notin \mathbb{Z}$$

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \dots + \left[x + \frac{1}{n}\right]$$

$$[x] = [y] = n \rightarrow \left[\frac{x+y}{2}\right] = n$$

$$[x] + [y] \leq [x+y]$$



که اگر $[x] = [y] = 5$ آنگاه حاصل $\left[\frac{2x+7y}{9} \right]$ را حساب کنید.

که حاصل عبارت $[\log_8^5] + [\log_5^8]$ را حساب کنید.

که اگر $[a] = [b] = m$ حاصل $\left[\frac{a+b}{m} \right]$ را بر حسب m بیابید.

که نمودار تابع $y = x[x]$ را در بازه $(-1, 2)$ رسم کنید.

که معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\left[\frac{3x+1}{x} \right] = 5$$

$$[x] - [-x] = 3$$

$$[x+2] + [x-4] + [5-x] = 8$$



که نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$[x] \geq \sqrt{3}$$

$$\left[\frac{2x-3}{5} \right] < -4$$

که دامنه‌ی هر یک از عبارات زیر را بیابید.

$$y = \frac{1-x^2}{8-4[-x]}$$

$$y = \sqrt{[x]-3}$$

که نمودار رابطه‌ی $[x][y] = -1$ چه شکلی است؟



1- برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، حاصل $\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right]$ کدام است؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

2- اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

- 1 (1) -2 (2) 3 (3) صفر (4) 1

3- اگر جز صحیح $(x^2 + x)$ برابر 1- باشد، آن گاه $[x^{20}]$ کدام است؟

- 1 (1) -1 (2) صفر (3) 1 (4) 2

4- اگر $|x + 2| < 1$ باشد آن گاه $\left[4x + \frac{1}{4} \right]$ چند مقدار مختلف می تواند اختیار کند؟

- 1 (1) 8 (2) 9 (3) 10 (4) 11

5- مجموعه ی جواب معادله ی $4[3x + 2] = 3$ کدام است؟

- 1 (1) ϕ (2) $\left[-\frac{5}{12}, -\frac{1}{12} \right]$ (3) $\left[-\frac{5}{12}, -\frac{1}{12} \right)$ (4) $\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12} \right)$

6- معادله ی $[x] = 4x$ چند ریشه دارد؟

- یک (1) سه (2) بیش از سه (3) دو (4)

7- مجموعه ی جواب نامعادله ی $|4 - x| \leq 2$ کدام است؟

- 1 (1) (2و6) (2) (1و7) (3) (2و6) (4) (1و7)

8- مجموعه ی جواب معادله ی $[x] - [-x] = 7$ کدام است؟

- 1 (1) $\left\{ \frac{7}{2} \right\}$ (2) $\left(\frac{5}{7}, \frac{7}{2} \right)$ (3) (3و4) (4) (3و4)



9- اگر $f(x) = [x]$ مجموعه‌ی مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

- (1) $\{0\}$ (2) $\{1\}$ (3) $\{0, 1\}$ (4) $\{-1, 0, 1\}$

10- چه تعداد از گزاره‌های زیر، درست است؟

الف) اگر $f(x) = [x+2] + [-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ آن‌گاه $f(x) = 1$ است.

ب) به ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y داریم، $[x+y] \geq [x] + [y]$

ج) اگر $0 < x$ باشد، آن‌گاه محدوده‌ی تغییرات کسر $\frac{[x]}{x}$ ، بازه‌ی $[0, 1]$ است.

د) به ازای هر x حقیقی، همواره داریم: $[x] - x = -1$

- (1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3

11- نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه‌ی $x \in (-2, 2)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7

12- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ ؛ $x \in [-2, 6]$ از چند پاره‌خط مساوی هم تشکیل شده است؟

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6

13- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x}{[x+1]}$ روی فاصله‌ی $[-1, 1]$ به صورت:

- (1) دو خط است (2) یک پاره‌خط است (3) دو پاره‌خط است (4) سه پاره‌خط است

14- اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + [x]$ با خط $y = k$ هیچ برخوردی نداشته باشد، k می‌تواند کدام باشد.

- (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{9}{2}$

15- اگر (x_0, y_0) محل تلاقی نمودار تابع $y = \left[\frac{x}{2}\right] + x$ و $2x + y = 1$ باشد مقدار $x_0 + y_0$ کدام است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$



16- مساحت نمودار رابطه‌ی $x^2 + y^2 = 2$ کدام است؟

- (1) 2π (2) π (3) 4π (4) $\frac{\pi}{2}$

17- اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ باشد برابر 1- باشد آن گاه $[x^{20}]$ کدام است؟

- (1) -1 (2) صفر (3) 1 (4) 2

18- اگر $11 < 2x - 3$ باشد $\left[\frac{x}{3}\right]$ چند مقدار صحیح خواهد داشت؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است)

- (1) 3 (2) 6 (3) 4 (4) 5

19- تابع $f(x) = [x+2] - [-x]$ را در نظر بگیرید مقدار این تابع به ازای $x = \sqrt{3} + \log\sqrt{2}$ کدام است؟

- (1) 2 (2) -1 (3) 1 (4) -2

20- دو تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد. مجموعه مقادیر x کدام است؟

- (1) $R - Z$ (2) Z (3) R (4) φ

21- نمودار تابع $x \in [-2, 3]$ و $y = x - [x]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه‌ی L تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n, L) کدام است؟

- (1) $(4, 1)$ (2) $(2, \sqrt{2})$ (3) $(1, 5)$ (4) $(2, \sqrt{5})$

22- نمودار تابع $x \in [-2, 6]$ و $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ از چند پاره‌خط مساوی هم تشکیل شده است؟

- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6

23- دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x^3[-2x]}$ بازه‌ی $(a, b]$ است. $b-a$ کدام است؟

- (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\frac{3}{2}$



- 24- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)$ کدام است؟
- (1) -1 (2) 1 (3) صفر (4) تعریف نشده

- 25- با کدام ضابطه‌ی $f(x)$ همواره تساوی $f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟
- (1) $\sin \pi x$ (2) $\cos \pi x$ (3) $\sin 2\pi x$ (4) $\cos 2\pi x$

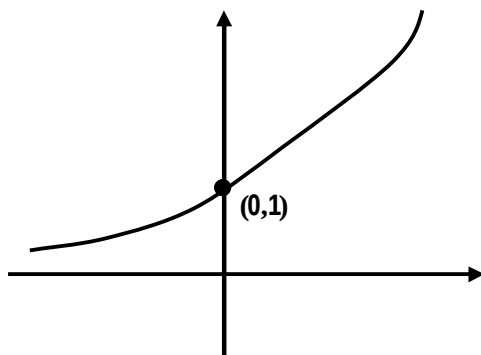
- 26- هرگاه P عددی اول باشد، معادله‌ی $\left[\frac{P}{x-1}\right] + \left[\frac{P}{1-x}\right] = 0$ چند جواب صحیح دارد؟
- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) بی‌شمار

- 27- اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \frac{1-x}{x}$ برد تابع gof کدام بازه است؟ ([] نماد جزء صحیح است)
- (1) $(0, +\infty)$ (2) $[0, -\infty)$ (3) $(1, +\infty)$ (4) $[1, -\infty)$

- 28- نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] : x \in [-2, 6)$ از چند پاره‌خط مساوی هم تشکیل شده است؟ ([] نماد جزء صحیح است)
- (1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 6

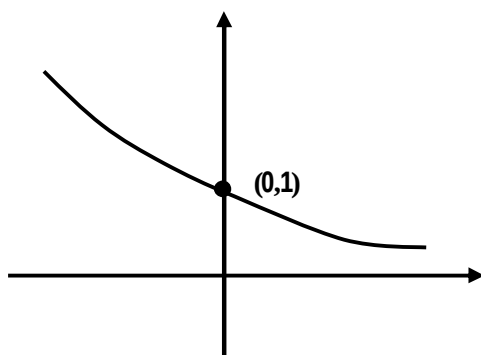


📖 تابع نمایی و لگاریتم:

تعریف تابع نمایی: $a \neq 1$ و $a \neq 0$ و $a > 0$ و $y = a^x$ ✓ اگر $a > 1$:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

✓ اگر $0 < a < 1$:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

✓ در تابع نمایی $f(x) = a^x$ داریم: $D_f = \mathbb{R}$, $R_y = (0, +\infty)$

تابع نمایی یک به یک و وارون پذیر است.

✓ در تابع نمایی، دامنه یک دنباله‌ی حسابی و برد یک دنباله‌ی هندسی تشکیل می‌دهد.

اگر دامنه‌ی تابع، یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d و برد آن با قدر نسبت q باشد آنگاه داریم:

$$f(x) = a^x \leftrightarrow q = a^d$$

که در جدول زیر $f(x)$ یک تابع نمایی است حداقل $m+n$ را بیابید.

x	1	4	7	10	13
$f(x)$	4	6	9	m	$\frac{81}{n}$



کعبه ازای چه مقادیری از a ، $f(x) = (2a-1)^x$ تابع نمایی است؟

که اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد دامنه ی $y = \sqrt{xf(x)}$ را حساب کنید.



لگاریتم

معکوس تابع نمایی، تابعی لگاریتمی است.

$$f(x) = a^x \leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a^x$$

$$\log_a^b = x \leftrightarrow b = a^x$$

✓ اگر $f(x) = \log_a^x$ و $a > 1$:

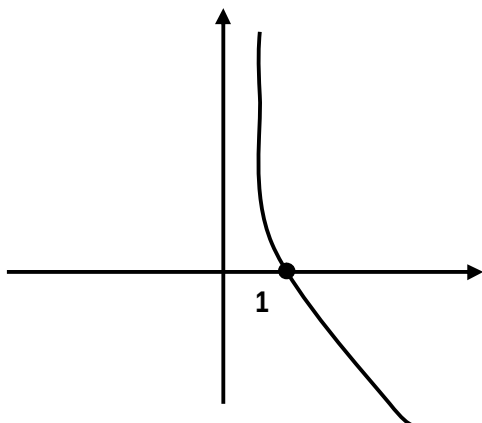
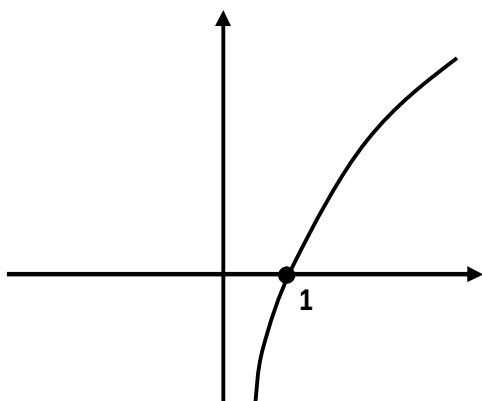
$$x > 1 \rightarrow y > 1$$

$$0 < x < 1 \rightarrow y < 0$$

✓ اگر $f(x) = \log_a^x$ و $0 < a < 1$:

$$x > 1 \rightarrow y < 0$$

$$0 < x < 1 \rightarrow y > 0$$



که برای هر یک از شرایط بالا مثال بنزید و نمودار تقریبی آنرا رسم کنید.

✓ در تابع $y = \log_a^x$ داریم:

$$D_y = (0, +\infty), R_y = R, a > 0, a \neq 1$$

در تابع نمایی خط $y = 0$ مجانب افقی است.در تابع لگاریتمی خط $x = 0$ مجانب قائم است.در توابع نمایی و لگاریتمی اگر $a > 1$ باشد تابع صعودی و اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع نزولی است.

کدام هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

ب) $y = 5^x + 3$

پ) $y = \log_3^{x+2} + 1$

ت) $y = \log_{\frac{1}{3}}^{x-2} - 3$



فرمولهای پرکاربرد لگاریتم

$$\log_a^1 = 0, \log_a^a = 1, \log_{10}^a = \log^a$$

$$\log_c^{a \times b} = \log_c^a + \log_c^b, \log_c^{a/b} = \log_c^a - \log_c^b$$

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a, \log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$$

$$\log_e^a = \text{Lna}$$

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} = \frac{\text{Lna}}{\text{Lnb}}, \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

$$b^{\log_b^a} = a, e^{\text{Lnx}} = x$$

$$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}, \log_{m \times n}^a = \frac{1}{\log_m^a + \log_n^a}$$

نامساوی های مهم

$$\log_b^a \geq \log_b^c \xleftarrow{b>1} a \geq c$$

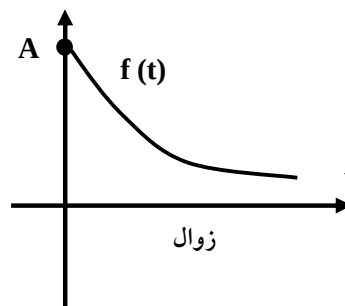
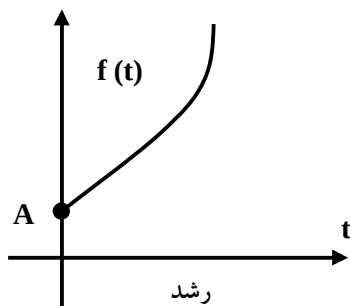
$$\log_b^a \geq c \xleftarrow{b>1} a \geq b^c$$

$$\log_b^a \geq \log_b^c \xleftarrow{0<b<1} a \leq c$$

$$\log_b^a \geq c \xleftarrow{0<b<1} a \leq b^c$$

تابع رشد و زوال

اگر A, K عددهای مثبت و بزرگتر از صفر باشند و $t \geq 0$ تابع $f(t) = Ae^{kt}$ تابع رشد و $f(t) = Ae^{-kt}$ تابع زوال خواهد بود.





که اگر $2^{x-1} - 2^{5-x} = 31/5$ باشد لگاریتم $x+2$ در مبنای 4 چند است؟

که معادله $4^{2-x} = 5^x$ را حل کنید.

که دامنه و برد تابع $y = \log_{10} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right)$ را بدست آورید.

که حاصل عبارت $\log_{50}^2 + \log_{50}^{3/2} + \log_{50}^{4/3} + \dots + \log_{50}^{49/50}$ چند است؟

که معادله $\log^{(10-x)} - \log^{(x+2)} = \log^2$ را حل کنید.

که نامعادله $\log^x + \log^{(x-1)} < \log^2$ را حل کنید.



1- در تابع با ضابطه $f(x) = ab^x$ ، $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$.

مقدار $f\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

24 (4)

12 (3)

8 (2)

6 (1)

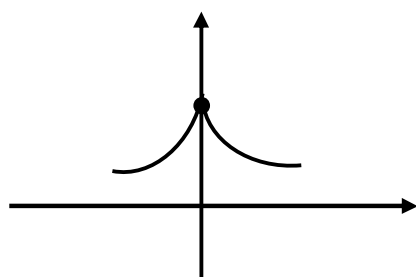
2- تابع نمایی f با دامنه R و ضابطه $f(x) = k^6 \times a^x$ مفروض است. اگر $f(3) = 4$ و $f(7) = 64$ باشد، مقدار $f(5)$ کدام است؟

32 (4)

30 (3)

16 (2)

8 (1)



3- شکل مقابل، نمودار کدام تابع است؟

$$y = 2^{-|x|} \quad (2)$$

$$y = |2^x| \quad (1)$$

$$y = |2^{-x}| \quad (4)$$

$$y = 2^{|x|} \quad (3)$$

4- کدام یک از نمودارهای زیر در ناحیه اول، بالای سایرین است؟

$$y = 3 \times 4^{x-1} \quad (4)$$

$$y = 4^x \quad (3)$$

$$y = 2^{2x+1} \quad (2)$$

$$y = 2^{2x-1} \quad (1)$$

5- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2^{ax-1}$ از نقطه $(4, 2\sqrt{2})$ می‌گذرد. نمودار f خط $y = 4\sqrt{2}$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

$$\frac{11}{3} \quad (4)$$

$$\frac{14}{13} \quad (3)$$

$$\frac{18}{5} \quad (2)$$

$$\frac{26}{5} \quad (1)$$

6- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه $A(0, 4)$ ، کدام است؟

صفر (4)

4 (3)

3 (2)

2 (1)



7- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟

- (1) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (2) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (3) $(0 \text{ و } -2)$ (4) $(-1, \frac{1}{2})$

8- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟

- (1) $[-4, 2)$ (2) $[-2, 0]$ (3) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (4) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

9- اگر $\log_3^4 = \alpha$ و $\log_2^5 = \beta$ باشد، آنگاه $3^{\alpha\beta}$ کدام است؟

- (1) 9 (2) 16 (3) 25 (4) 20

10- اگر $\log_2^{12} = \alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟

- (1) $\frac{9}{2}$ (2) 6 (3) 9 (4) 18

11- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$ ، محور xها را در نقطه‌ای به طول 1- و نیم‌ساز ناحیه‌ی چهارم را در نقطه‌ای به عرض 1- قطع کرده است. b کدام است؟

- (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{5}{2}$ (4) 3

12- اگر $x = 8\log_4^{2\sqrt{2}}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه‌ی x کدام است؟

- (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) 3

13- تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد، آنگاه $f(-\frac{4}{9})$

کدام است؟

- (1) -2 (2) -1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1



14- نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ، نسبت به هم چگونه اند؟

- (1) $f(x)$ بالاتر (2) $g(x)$ بالاتر (3) منطبق (4) فقط در نقطه، متقاطع

15- اگر $3^a = A$ باشد، $\log_3 9A^2$ کدام است؟

- (1) $2+2a$ (2) $3+2a$ (3) $2+a^2$ (4) $3+a^2$

16- اگر $x = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{37})$ باشد، لگاریتم $x^2 + 3x + 1$ در پایه 4 کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

17- اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه 8 کدام است؟

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $\frac{3}{2}$

18- اگر لگاریتم عدد $2\sqrt[3]{0/25}$ در مبنای 8، برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(\frac{1}{A} - 1)$ در پایه 4 کدام است؟

- (1) -3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

19- اگر $\log^5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟

- (1) $1-4k$ (2) $2-5k$ (3) $1-2k$ (4) $1-k$

20- اگر $\log^2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

- (1) $2k$ (2) $4k$ (3) $1+k$ (4) $2+4k$



21- از تساوی $\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)}$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی 4 کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

22- از دو معادله‌ی $4^x + 2^x = 72$ و $\log^{(x+1)} + \log^{(2y+x^2)} = 2$ مقدار y کدام است؟

- (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9

23- چند مقدار قابل قبول x ، دترمینال $\begin{vmatrix} \log^{6x-1} & \log^{1-x} \\ \log^{1-x} & \log^{6x-1} \end{vmatrix}$ را صفر می‌کند؟

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

24- از معادله‌ی لگاریتمی $2\log^x = 1 + \log(x + \frac{12}{5})$ ، مقدار عبارت $\log_5(2x+1)$ کدام است؟

- (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) 2

25- از تساوی $\log_x^{(x^2+4)} = 1 + \log_x^5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی 2 کدام است؟

- (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

26- جواب نامعادله‌ی $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x+1}{x-1}} > 4$ کدام است؟

- (1) $(1, +\infty)$ (2) $(-\frac{5}{3}, -1)$ (3) $(-\frac{5}{3}, 1)$ (4) $(-1, 1)$

27- در یک نوع کشت، تعداد باکتری‌ها پس از گذشت t دقیقه برابر $f(t)$ است که $f(t) = 2000e^{0.012t}$ ، پس از چه مدت تعداد

باکتری‌ها 1000 می‌شود؟ ($\ln 5 = 1/68$)

- (1) 2 ساعت و 10 دقیقه (2) 2 ساعت و 20 دقیقه (3) 2 ساعت و 25 دقیقه (4) 2 ساعت و 35 دقیقه



28- کارایی کارگر عادی، در کارخانه‌ای پس از t ماه، روزانه به تعداد $f(t) = 90 - 40e^{-0.02t}$ واحد است. پس از چند ماه تجربه‌ی کاری روزانه 70 واحد را کامل می‌کند. ($\ln 2 = 0.68$)

17 (1) 34 (2) 51 (3) 68 (4)

29- در شهری با جمعیت 50000 با نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت 2/5 درصد، با توجه به $f(t) = Ae^{it}$ پس از چند سال، جمعیت این شهر 60000 نفر می‌شود ($\ln 1/2 = 0.68$)

6/2 (1) 6/7 (2) 6/8 (3) 7/2 (4)

30- در شروع یک نوع کشت، 1400 باکتری موجود است. تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{0.04t}$ است. پس از چند دقیقه، 7000 باکتری موجود است. ($\ln 5 = 1.68$)

21 (1) 28 (2) 35 (3) 42 (4)

31- جمعیت کشوری پس از 8 سال، 1/2 برابر برآورد می‌شود. اگر ضریب تناسب، ثابت بماند این جمعیت پس از 16 سال چند برابر خواهد شد.

2/4 (1) 1/8 (2) 1/56 (3) 1/44 (4)

32- تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت، بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$ است. اگر تعداد این باکتری‌ها در شروع کشت 800 و در دقیقه‌ی بیستم، برابر 3200 باشد. در دقیقه‌ی سی‌ام، تعداد آن‌ها کدام است.

4800 (1) 5600 (2) 6400 (3) 7200 (4)

33- در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t دقیقه پس از شروع از مدل $V(t) = Be^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر پس از 3 دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر شود، با این روند در پایان دقیقه‌ی 12، تعداد آن‌ها چند برابر تعداد شروع آزمایش می‌شود؟

4 (1) 6 (2) 8 (3) 16 (4)

34- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ ، از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد $f(-1)$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4)



35- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

- 1 (1) $\sqrt{2}$ (2) 2 (3) $2\sqrt{2}$ (4)

36- مجموعه جواب نامعادله $(0/04)^{x^2-5x+4} < 625$ کدام است؟

- 1 (1) $2 < x < 3$ (2) $-3 < x < -2$ (3) $x > -2$ یا $x < -3$ (4) $x > 3$ یا $x < 2$

37- مجموع ریشه‌های معادله $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$ کدام است؟

- 1 (1) $\ln 35$ (2) $\ln \frac{35}{2}$ (3) $\ln \frac{35}{4}$ (4) $\ln \frac{35}{8}$

38- کدام گزینه درست است؟

- 1 (1) $\log_{\frac{1}{2}}^{100} > \log_{\frac{1}{2}}^{100}$ (2) $\log_{\frac{3}{2}}^2 > \log_{\frac{3}{2}}^3$ (3) $\log_5^3 > \log_3^5$ (4) $\log_{\frac{3}{2}}^3 > \log_{\frac{2}{2}}^2$

39- اگر $\log_2^{5\sqrt{e^2}} = A$ حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{32}$ کدام است؟

- 1 (1) $\frac{A}{4}$ (2) $\frac{A}{2}$ (3) $\frac{2}{A}$ (4) $\frac{4}{A}$

40- اگر $\log_b^a = \frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab^2}$ کدام است؟

- 1 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7

41- اگر $\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log(81)^k$ آن‌گاه لگاریتم $\frac{5}{k}$ در پایه‌ی 2 کدام است؟

- 1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

42- از معادله $\log(2x-1) + \log(x+3) = \log 30 - \log 2$ ، مقدار $\log_8^x$ کدام است؟

- 1 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$



43- از معادلات $\log x = \log 2 + \log y$ و $2^x \times 8^y = 4$ مقدار x کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

44- اگر $\log \frac{2}{x} + \log (x+1) = 1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه‌ی 8 کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

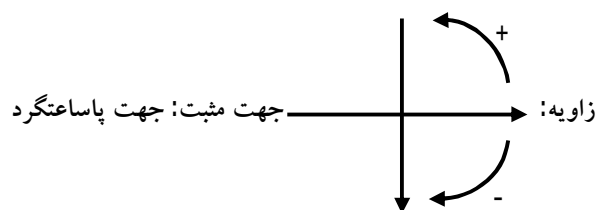
$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$



مثلات



که زاویه‌های زیر را در موقعیت استاندارد رسم کنید:

الف) -400° ب) -1010° پ) -220°

ت) $\frac{4}{5}$ دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

واحدهای اندازه‌گیری زاویه:

درجه:

رادیان:

رابطه‌ی بین درجه و رادیان:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

درجه	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
رادیان										

که یک π رادیان چند درجه است؟

که یک رادیان چند درجه است؟

$$L = r\theta$$

طول کمان: اگر L طول کمان، r شعاع دایره و θ زاویه‌ی مرکزی برحسب رادیان باشد داریم،



دایره مثلثاتی:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$r > 0$ شعاع دایره و

نسبت های مثلثاتی:

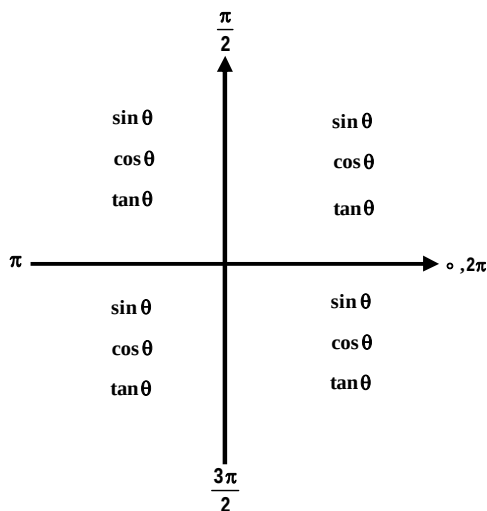
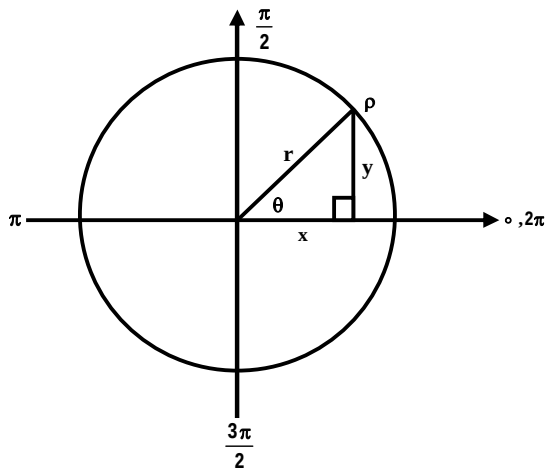
$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

چون $r > 0$ است پس:

$\sin \theta$ با y هم علامت است و $\cos \theta$ با x .

علامت $\tan \theta$ و $\cot \theta$ از ضرب علامت های x و y بدست می آید.



بحث در مورد کمانهای مختلف:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) =$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) =$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) =$$

$$\cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) =$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) =$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) =$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) =$$

$$\cot \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) =$$



$$\sin(\pi - \theta) =$$

$$\tan(\pi - \theta) =$$

$$\cos(\pi - \theta) =$$

$$\cot(\pi - \theta) =$$

$$\sin(\pi + \theta) =$$

$$\tan(\pi + \theta) =$$

$$\cos(\pi + \theta) =$$

$$\cot(\pi + \theta) =$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) =$$

$$\sin(2\pi - \theta) =$$

$$\tan(2\pi - \theta) =$$

$$\cos(2\pi - \theta) =$$

$$\cot(2\pi - \theta) =$$

$$\sin(2k\pi + \theta) =$$

$$\tan(2k\pi + \theta) =$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(2k\pi + \theta) =$$

$$\cot(2k\pi + \theta) =$$

$$\sin(-\theta) =$$

$$\tan(-\theta) =$$

$$\cos(-\theta) =$$

$$\cot(-\theta) =$$



یادآوری:

	0	30	45	60	90	180	270	360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\sin 570^\circ =$$

$$\cos(-210) =$$

$$\tan \frac{11\pi}{3} =$$

$$\cot \frac{19\pi}{4} =$$

$$\frac{\cos(\frac{3x}{2} + \theta) - \cos(x + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(7\pi - \theta)}$$

اگر $\tan \theta = 0/3$ مطلوب است حاصل

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

اگر α در ربع چهارم باشد، حاصل عبارت را بیابید.

$$\cos \alpha \times \cot \alpha > 0 \text{ و } \sin \alpha \times \tan \alpha < 0$$

اگر α را بیابید.

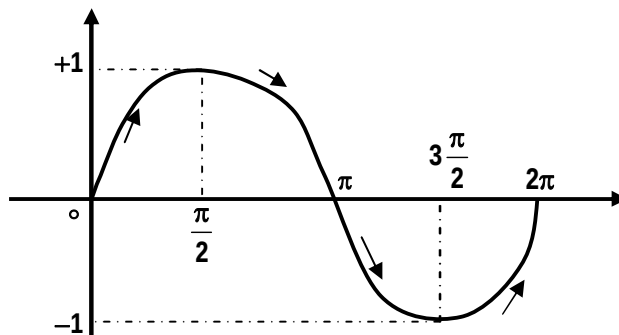
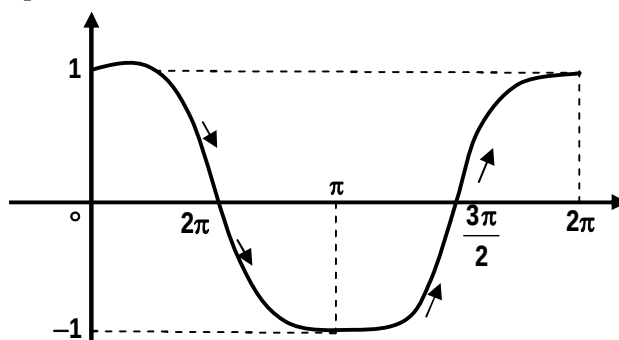
یادآوری:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta, \quad \tan \alpha = \cot \beta$$

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta, \quad \cos \alpha = -\cos \beta \longrightarrow \tan \alpha = -\tan \beta, \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$



توابع مثلثاتی:

✓ تابع $y = \sin x$ دوره تناوب $T = 2\pi$, $\min(y) = -1$, $\max(y) = +1$ $D_y = \mathbb{R}$, $R_y = [-1, +1]$, $-1 \leq \sin x \leq +1$ ✓ تابع $y = \cos x$ دوره تناوب $T = 2\pi$, $\min(y) = -1$, $\max(y) = +1$ $D_y = \mathbb{R}$, $R_y = [-1, +1]$, $-1 \leq \cos x \leq +1$  $y = a \sin bx$, $y = a \cos bx$

فرم کلی توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس:

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$, $\min(y) = -|a|$, $\max(y) = +|a|$ دامنه $D = \mathbb{R}$, $R = [-|a|, +|a|]$ ✓ تابع $y = \tan x$: $D = \mathbb{R} - \left[k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$, $k \in \mathbb{Z}$, $R = (-\infty, +\infty)$ $T = \pi$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan x$	0	$+\infty$	0	$-\infty$	0

آیا می توان گفت تابع مثلثاتی تانژانت همواره صعودی است؟ چرا؟

✓ تابع $y = \cot x$:

$$D = \mathbb{R} - [k\pi], k \in \mathbb{Z}, \mathbb{R} = (-\infty, +\infty), T = \pi$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\tan x$	0	$+\infty$	0	$-\infty$	0

آیا می توان گفت تابع مثلثاتی کتانژانت همواره نزولی است؟ چرا؟

توابع مثلثاتی $y = \tan x$, $y = \cot x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) + 1$

ب) $y = 3\cos(2x - \frac{\pi}{3}) - 2$

اگر $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ و $\cos \alpha = 3m - 1$ باشد، حدود m را بیابید.

اگر $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ و $\cos \alpha = 2 - 3m$ باشد، حدود m را بیابید.

اگر $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ و کمان α در ربع دوم باشد، مقدار عددی $\tan(\frac{9\pi}{2} + \alpha)$



✎ اگر $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ حاصل $\sin(\alpha - \frac{13\pi}{2})$ را حساب کنید.

✎ اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد حدود $\tan \alpha + \cot \alpha$ را بیابید.

✎ اگر α حاده باشد حدود $\sin \alpha + \cos \alpha$ را بدست آورید.

✎ بیشترین و کمترین مقدار عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$A = \sqrt{3} \sin^4 x + 1$$

$$B = -6 \cos^3 \frac{x}{3} + 6$$

$$C = \sin^2 x - 3 \sin x + 5$$

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \pm \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) \quad , \quad \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad , \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad , \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad , \quad \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad , \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad , \quad \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$1 + \sin \theta = (\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2})^2$$



نسبت‌های مثلثاتی $22/5$ درجه را بدست آورید.

حاصل عبارت $\frac{\cot 15}{1 + \cot^2 15}$ را بدست آورید.

عبارت $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را بر حسب $\tan x$ کدام است؟

اگر $\tan(\alpha + 15) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\cot(60 - 2\alpha)$ کدام است؟

اگر $\tan(x + y) = \frac{1}{3}$ و $\tan(x - y) = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

عبارت $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ را بر حسب $\sin x$ بنویسید.



کدام ثابت کنید $\tan 20(1 + \cos 40)$ برابر است با $\sin 40^\circ$.

کدام حاصل عبارت $\sin 16^\circ + \cos 16^\circ \times \tan 37^\circ$ کدام است؟

کدام حاصل عبارت $\sin 7 / 5 \sin 97 / 5 \cos 15^\circ$ چقدر است؟

کدام اگر $\frac{2\cos x}{\sin x + 3\cos x} = 2$ آنگاه $\cot 2x$ کدام است؟



معادلات مثلثاتی

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, \quad x = 2k\pi + \pi - \alpha$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالت‌های خاص که باید به خاطر سپرده شوند.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$\sin^2 x = \sin^2 \alpha, \quad \cos^2 x = \cos^2 \alpha, \quad \tan^2 x = \tan^2 \alpha, \quad \cot^2 x = \cot^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

جواب کلی معادله‌های مثلثاتی زیر را بدست آورید.

الف) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

ب) $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$

پ) $\tan 5x \tan x = -1$

ت) $\cos 3x = \sin x$

ث) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{6} - x) = \sqrt{2}$

ج) $\cos 2x + 5\sin x - 4 = 0$

چ) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



بعضی نامعادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید.

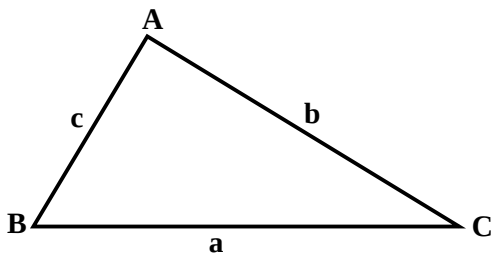
الف) $y = 2\cos x < 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

ب) $y = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x < 0$, $x \in [0, 2\pi]$

پ) $y = (\cos x + 1)(\cos x - \sin x) < 0$



📖 کاربرد مثلثات:



قضیه کسینوسها (ض ض ض)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

قضیه مسامت‌ها (ض ض ض)

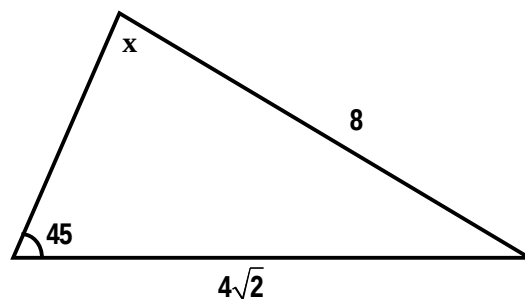
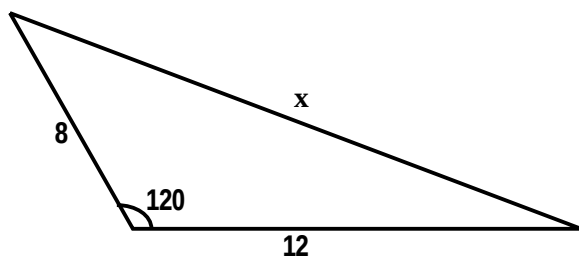
$$S = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$$

قضیه سینوسها:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

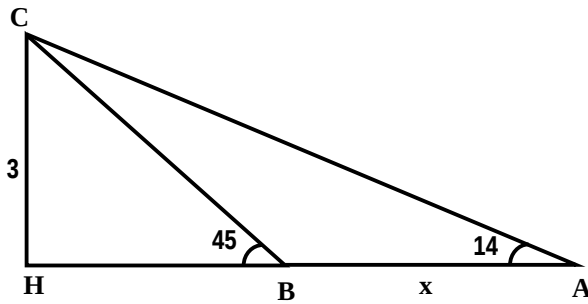
که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع 10 را بدست آورید.

که در شکل‌های زیر مقدار x را بیابید.





که اگر $\tan 76^\circ \approx 4$ باشد مقدار x را حساب کنید.



که اگر در مثلث غیرمتساوی الساقینی رابطه‌ی $a^3 - b^3 = c^2(a - b)$ برقرار باشد، زاویه‌ی $\hat{C}$ چند درجه است؟

که اگر در مثلث ABC رابطه‌ی $a^3 + b^3 = c^2(a + b)$ برقرار باشد زاویه‌ی A چند درجه است؟



1- اگر $a + b = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟

- (1) $\sin b$ (2) $\cos a$ (3) $\frac{1}{\sin a}$ (4) $\frac{1}{\cos b}$

2- یکی از جواب‌های معادله $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟

- (1) $\frac{3\pi}{3}$ (2) $\frac{5\pi}{6}$ (3) $\frac{7\pi}{6}$ (4) $\frac{4\pi}{3}$

3- جواب کلی معادله $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ مثلثاتی کدام است؟

- (1) $k\pi$ (2) $2k\pi + \pi$ (3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (4) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

4- خلاصه شده عبارت $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \cdot \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cdot \cos(-\alpha)$ کدام است؟

- (1) $-\sin 2\alpha$ (2) $\sin 2\alpha$ (3) $\cos 2\alpha$ (4) 0

5- حاصل عبارت $\cos 165^\circ \cdot \cos 105^\circ$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

6- اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $8\cos a \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - b)$ کدام است؟

- (1) $\sin 4a$ (2) $\cos 4b$ (3) $\sin^2 2a$ (4) $\cos^2 2a$

7- جواب کلی معادله $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است مجموعه‌ی مقادیر i کدام است؟

- (1) 9, 7 (2) 5, 3, 1 (3) 7, 4, 1 (4) 9, 5, 1



8- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟

- (1) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (2) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (3) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (4) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

9- اگر $\tan 20 = 0/36$ باشد حاصل $\frac{\sin 160 - \cos 200}{\cos 110 + \sin 70}$ کدام است؟

- (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{15}{8}$ (3) $\frac{17}{8}$ (4) $\frac{31}{16}$

10- اگر α زاویه‌ی منفرجه و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- (1) -7 (2) $-\frac{1}{7}$ (3) $\frac{1}{7}$ (4) 7

11- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

- (1) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (2) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (4) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

12- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

- (1) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (2) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

13- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

- (1) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (2) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (3) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (4) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

14- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x \cdot \sin(3\pi - x) - \sin 3x \cdot \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

- (1) $\frac{k\pi}{4}$ (2) $\frac{k\pi}{2}$ (3) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (4) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

15- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{2} + x) \cdot \sin(\pi + x) = 0$ به کدام صورت است؟



$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

16- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3\cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$ به کدام صورت است؟

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

17- اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد آنگاه $\tan 2\alpha$ کدام است؟

$$2/8 \quad (4)$$

$$2/4 \quad (3)$$

$$1/8 \quad (2)$$

$$1/5 \quad (1)$$

18- اگر $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$ باشد آنگاه $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است.

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$

19- اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$

20- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$ به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

21- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$



22- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos \frac{4\pi}{3} = \tan(\frac{3\pi}{2} - x)(\sin x - \tan x)$ کدام است؟

- (1) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (2) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (4) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

23- اگر $\tan(15 + a) = \frac{3}{4}$ باشد، آنگاه $\cot(30 - a)$ کدام است؟

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (7) 7

24- جواب کلی معادله مثلثاتی $3 = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2x) + 5 \cos x$ به کدام صورت است؟

- (1) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (2) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (3) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (4) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

25- ساده شده‌ی کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$ کدام است؟

- (1) $8 \cos^{-2} 2\theta$ (2) $8 \sin^{-2} 2\theta$ (3) $16 \cos^{-4} 2\theta$ (4) $16 \sin^{-4} 2\theta$

26- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ به کدام صورت است؟

- (1) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (2) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (3) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

27- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (1) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (3) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (4) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

28- نمودار تابع $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5



29- اگر $2a + b = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟

- (1) $\cos b$ (2) $\cos a$ (3) $\frac{1}{\cos a}$ (4) $\frac{1}{\cos b}$

30- از معادله $\tan x - \cot x = 4$ مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) 2

31- خلاصه شده ی کسر $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{54}$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1 (4) $\sqrt{3}$

32- اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

- (1) -2 (2) $1/2$ (3) 2 (4) 3

33- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

- (1) $\frac{k\pi}{3}$ (2) $\frac{2k\pi}{3}$ (3) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (4) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

34- نمودار تابع $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ روی بازه ی $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

35- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- (1) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (2) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (4) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$



36- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

0/8 (4)

0/6 (3)

0/4 (2)

0/3 (1)

37- اگر $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ باشد، حاصل $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ کدام است؟

1 (4)

4 (3)

2 (2)

3 (1)

38- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

 $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (4) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (2) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (1)

39- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟

 $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (2) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (1)

40- در متوازی‌الاضلاع، اندازه‌ی دو قطر 12 و 8 واحد و زاویه‌ی بین دو قطر 135 درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است.

36 (4)

32 (3)

24 (2)

18 (1)

41- از تساوی $\frac{2\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2$ ، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

1/5 (4)

2 (3)

1/5 (2)

-2 (1)

42- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، سینوس یکی از زاویه‌ها $\frac{5}{7}$ و اندازه‌ی وتر 14 واحد است. کوچکترین ضلع مثلث کدام است؟

 $5\sqrt{2}$ (4) $4\sqrt{6}$ (3) $3\sqrt{7}$ (2) $2\sqrt{3}$ (1)



43- در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = 45^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ اگر ارتفاع $AH = \sqrt{3}$ باشد طول ضلع AB چقدر است؟

- (1) $\sqrt{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{3}$ (4) $1 + \sqrt{3}$

44- طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای برابر $\sin x$ و $\cos x$ است ارتفاع مثلث به ازای کدام مقدار x ماکزیمم است؟

- (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{8}$

45- کدام یک از نامساوی های زیر درست است؟

- (1) $\sin 20^\circ > \sin 170^\circ$ (2) $\cos 20^\circ < \cos 160^\circ$ (3) $\tan 20^\circ < \sin 20^\circ$ (4) $\cot 20^\circ < \cos 20^\circ$

46- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، $g(x) = \tan x$ ، ضابطه ی تابع $\log(x)$ در بازه ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ برابر کدام است؟

- (1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) $-\sin x$ (4) $-\cos x$

47- اگر $\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه ی چهارم دایره ی مثلثاتی باشد مقدار $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

48- حاصل عبارت مثلثاتی $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha}$ کدام است؟

- (1) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (2) $\sin \alpha - \cos \alpha$ (3) $1 - \tan \alpha$ (4) $1 - \cot \alpha$

49- اگر $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\sin x + \cos x$ چقدر است؟

- (1) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{6}$



50- مقدار عددی $\tan 50^\circ + \tan 85^\circ - \tan 50^\circ \tan 85^\circ$ برابر است با:

- (1) 3 (2) 1 (3) -1 (4) -3

51- حاصل عبارت $\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ برابر کدام است؟

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{3}{16}$

52- اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $8 \cos a \cos b \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos(\frac{\pi}{2} - b)$ کدام است؟

- (1) $\sin 4a$ (2) $\cos 4a$ (3) $\sin^2 2a$ (4) $\cos^2 2a$

53- اگر $1 + \sin 10^\circ = 2a$ باشد، $\cos 40^\circ$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

- (1) $\sqrt{a}$ (2) $\sqrt{2a}$ (3) $2a$ (4) $2\sqrt{a}$

54- خلاصه شده ی عبارت $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$ برابر کدام است؟

- (1) $\sin 20^\circ$ (2) $\sin 40^\circ$ (3) $\cos 20^\circ$ (4) $\cos 40^\circ$

55- مقدار عبارت $4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

56- اگر $\tan x = 3 \cot x$ ، کدام جواب‌ها برای x در فاصله ی $(0, \pi)$ به دست می‌آید؟

- (1) $\pm \frac{\pi}{3}$ (2) $\pm \frac{\pi}{6}$ (3) $\pm \sqrt{3}$ (4) $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

57- معادله ی $2\sin^3 x - \sin x = 0$ کدام جواب را ندارد؟

- (1) $k\pi$ (2) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (3) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{4}$



58- از معادله $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ تعداد جواب‌ها در فاصله $(-\pi, \pi)$ کدام است؟

- (1) صفر (2) 1 (3) 2 (4) 3

59- معادله $\sin^2 x - \cos^2 x + 2 = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) صفر

60- معادله $(2\sin x + 1)(3\sin x + 2) = 0$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) 1

61- جواب کلی معادله $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ مثلثاتی کدام است؟

- (1) $k\pi$ (2) $2k\pi + \pi$ (3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (4) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

62- معادله $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (1) 4 (2) 1 (3) 2 (4) صفر

63- معادله $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$ در فاصله $[0, 4\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (1) صفر (2) 2 (3) 3 (4) 4

64- معادله $6\sin^2 4x + \cos 8x = 4$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

- (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9

65- در مثلثی زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{B} = 75^\circ$ و ضلع $a = 2$ است. اندازه ضلع b برابر است با:

- (1) $2\sqrt{2} - 1$ (2) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{2} + 1$ (4) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$



66- دوره‌ی تناوب تابع $y = \left| \sin \frac{\pi x}{7} \right|$ کدام است؟

- (1) $\frac{7}{2}$ (2) 7 (3) 14 (4) $\frac{7}{4}$

67- دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \cot x - \tan x$ کدام است؟

- (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) 2π

68- دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \frac{\tan ax}{1 - \tan^2 ax}$ برابر $\frac{3}{2}$ است. a کدام است؟

- (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{2\pi}{3}$ (3) 3 (4) 3π

69- ناظری به فاصله‌ی 35 متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رویت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ($\tan 40^\circ = 0.8$)

- (1) 6 (2) $\frac{6}{4}$ (3) 7 (4) $\frac{7}{2}$

70- اگر $\cot a = 3$ باشد، حاصل $A = \frac{\cos a + \cos^3 a}{\sin a}$ چقدر است؟

- (1) $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{7}{5}$ (4) $\frac{7}{4}$

71- بیشترین مقدار $\sin(\pi x) + \sin(\pi y)$ کدام است؟

- (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{3}$ (4) 2

72- اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin^2 x + 2\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{6} + \cot x}$ چه قدر است؟

- (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 1



73- اگر $\frac{-4\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ باشد، حداقل عبارت $y = \frac{1}{2 + \cos^2 \frac{x}{2}}$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{4}{11}$ (4) $\frac{4}{9}$

74- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \cos(\frac{101\pi}{6}) + \sin(\frac{4\pi}{3}) \tan(\frac{101\pi}{6})$ کدام است؟

- (1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) -2

75- حاصل عبارت $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$ با فرض $\tan 20^\circ = 0/4$ کدام است؟

- (1) $-\frac{3}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{7}{3}$ (4) $\frac{5}{8}$

76- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ کدام است؟

- (1) $-\frac{16}{9}$ (2) $-\frac{9}{16}$ (3) $\frac{9}{16}$ (4) $\frac{16}{9}$

77- اگر $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{2}$ باشد مقدار $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

- (1) $\frac{11}{16}$ (2) $\frac{7}{16}$ (3) $-\frac{7}{16}$ (4) $-\frac{11}{16}$

78- حاصل $\cos x + \sqrt{3} \sin x$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟

- (1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{6}$

79- حاصل $\tan 115^\circ + \tan 20^\circ - \tan 115^\circ \times \tan 20^\circ$ کدام است؟

- (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) -1 (4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



80- اگر $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

- (1) $-\frac{2}{9}$ (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{2}{9}$

81- اگر $\tan \alpha = 2$ ، $\tan \beta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(2\alpha - \beta)$ کدام است؟

- (1) -3 (2) -2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

82- اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

- (1) $-\frac{3}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

83- اگر $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ باشد، کمترین مقدار $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2(45^\circ - \alpha)}$ کدام است؟

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $-\sqrt{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

84- اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (1) $0/45$ (2) $0/6$ (3) $0/75$ (4) $0/8$

85- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3 + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (1) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (3) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (4) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

86- مجموع جواب‌های معادله‌ی $2\sin^3 x + \sin x = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (1) 7π (2) 8π (3) 5π (4) 6π



87- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(1) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (3) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (4) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

88- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(1) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (2) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (3) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (4) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

89- در معادله ی مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ ، مجموع تمام جوابها در بازه ی $[0, \pi]$ کدام است؟

(1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{5\pi}{4}$ (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) $\frac{7\pi}{4}$

90- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

(1) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (2) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (3) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

91- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(1) $\frac{k\pi}{2}$ (2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (3) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (4) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

92- نقاط پایانی کمان جوابهای معادله ی $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره ی مثلثاتی، رأسهای کدام چند ضلعی است؟

(1) مربع (2) مستطیل (3) مثلث قائم الزاویه (4) مثلث متساوی الساقین

93- در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ در زاویه های $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{C} = 45^\circ$ اندازه ی ضلع AC کدام است؟

(1) 3 (2) 4 (3) $2\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{2}$



94- مساحت مثلثی با دو ضلع 16 و 9 واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

24 (4)

23 (3)

22 (2)

21 (1)

95- معادله $\sin x - \sqrt{x} \cos x = 0$ در بازه $(0, 3\pi)$ چند ریشه دارد؟

3 (4)

4 (3)

1 (2)

2 (1)

96- معادله $x \sin x - 1 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند ریشه حقیقی دارد؟

6 (4)

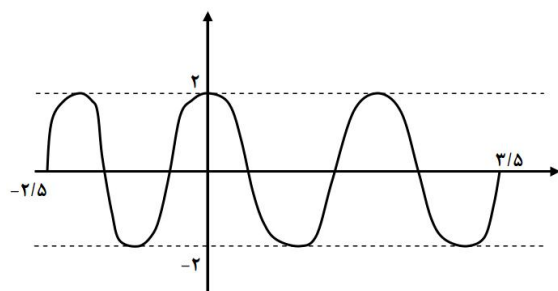
5 (3)

4 (2)

2 (1)

97- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2} + bx\right)\right)$ است.

a, b کدام است؟



3/5 (4)

3 (3)

2/5 (2)

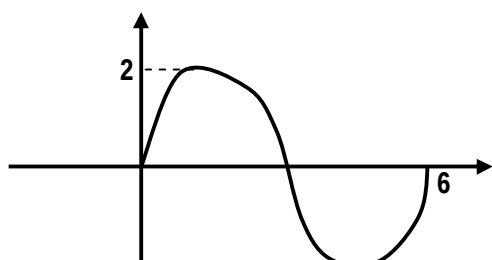
2 (1)

98- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟

 $\frac{8}{3}$ (4)

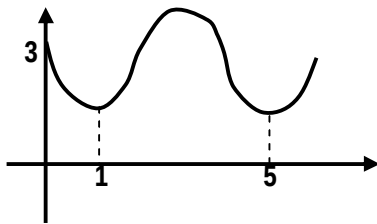
 $\frac{7}{3}$ (3)

 $\frac{5}{3}$ (2)

 $\frac{4}{3}$ (1)




99- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



3/5 (4)

3 (3)

2/5 (2)

2 (1)

100- دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \frac{\tan 2mx}{1 - \tan^2 2mx}$ برابر $\frac{2}{3}$ است. m کدام می‌تواند باشد؟

 $\frac{8\pi}{3}$ (4) $\frac{3\pi}{8}$ (3) $\frac{3\pi}{4}$ (2) $\frac{3}{8}$ (1)



..... * فقط رشته ریاضی *

101- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin 4x - \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$ به کدام صورت است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{6} \quad (1)$$

102- ساده شده‌ی عبارت $2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

$$1 - \sin 2\alpha \quad (4)$$

$$1 + \sin 2\alpha \quad (3)$$

$$\cos 2\alpha \quad (2)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha \quad (1)$$

103- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

104- عبارت $\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

$$-2\sin 4x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2)$$

$$2\sin 4x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$-4\sin 4x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$4\sin 4x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \quad (3)$$

105- حاصل عبارت $4\cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ برابر کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

106- ساده شده‌ی عبارت $\cos 40^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ برابر کدام است؟

$$2\cos 20^\circ \quad (4)$$

$$2\sin 20^\circ \quad (3)$$

$$\cos 20^\circ \quad (2)$$

$$\sin 20^\circ \quad (1)$$



107- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

108- حاصل عبارت $\cos 20 \cdot \cos 40 + \cos^2 80$ برابر کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \sin 70 \quad (2) \quad \cos 10 \quad (1)$$

109- در معادله‌ی $2\sin x \cos 3x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$ مجموعه‌ی جواب‌ها به کدام صورت است؟

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

110- حاصل عبارت $\frac{1}{\cos 20} + 2$ برابر کدام است؟

$$4\sin 40 \quad (4) \quad 2\cos 40 \quad (3) \quad 4\cos 40 \quad (2) \quad 2\sin 40 \quad (1)$$

111- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 5x \cdot \cos 3x = \cos^2 x$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

112- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad -\frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (1)$$

113- ساده شده‌ی $\frac{\sin^2 40 - \sin^2 10}{\cos 70 + \cos 10}$ کدام است؟

$$\cos 50 \quad (4) \quad \sin 50 \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$



114- عبارت $(\cos 10 - \cos 70)(\tan 70 - \cot 100)$ برابر کدام است؟

- 1 (1) $2\cos 20$ (2) $-\sqrt{3}$ (3) $\sin 80$ (4)

115- از رابطه‌ی $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2 - 2\sin 2x$ مقدار $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- 1 (1) $-1, \frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}, 0$ (3) $1, \frac{1}{2}$ (4) $-1, 0$

116- حاصل $1 - \sin^2 10 - \sin^2 70$ برابر کدام است؟

- 1 (1) $\frac{1}{2}\sin 10$ (2) $\cos 10$ (3) $\frac{1}{2}\sin 20$ (4) $\cos 20$

117- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\cos 5x \cos 3x - \sin^3 x \sin x}{\cos 2x} = 1$ به کدام صورت است؟

- 1 (1) $\frac{k\pi}{3}$ (2) $\frac{k\pi}{2}$ (3) $\frac{2k\pi}{5}$ (4) $\frac{2k\pi}{3}$

118- اگر $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ باشد حاصل $\tan a \cdot \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a$ کدام است؟

- 1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3