



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

* بسم الله الرحمن الرحيم *

نکات مربوط تابع درجه دوم

نکته ۱: فرم کلی تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ و یا $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ می باشد

نکته ۲: به نمودار تابع درجه دوم سهمی می گویند.

نکته ۳: برای رسم نمودار توابع درجه دوم به صورت زیر عمل می کنیم:

الف) برای رسم $y = ax^2 + bx + c$ ابتدا به علامت a توجه می کنیم اگر a عددی مثبت

باشد دهانه سهمی رو به بالا و تابع دارای می نیمم (Min) است و اگر a عددی منفی

باشد دهانه سهمی رو به پایین و تابع دارای ماکزیمم (Max) است

نکته ۴: محور تقارن سهمی خط $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد و نقطه $(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ رأس سهمی می

باشد که البته با قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادله ی سهمی y مربوط به آنرا نیز می توان بدست

آورد. برای دقت نمودار می توانیم از نقاط کمکی استفاده کنیم که بهترین نقاط در صورت

امکان نقاط تلاقی با محورهاست.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $Y = 2x^2 - 4x$

ب) $y = x^2 + 2x - 3$ ج) $y = -x^2 - 2x + 4$

ب) برای رسم سهمی به فرم $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ نیز ابتدا به علامت a توجه می کنیم

اگر a عددی مثبت (منفی) باشد سهمی دارای می نیمم (ماکزیمم) است و نمودار آن روبه بالا (پایین) رسم می شود. نقاط کمکی به دقت می افزاید.

نکته ۵: محور تقارن خط $x=x_0$ و راس سهمی (x_0, y_0) می باشد.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = (x - 1)^2 + 2 \quad \text{ب) } y = -2(x + 1)^2 - 1$$

نکته ۶: دو معادله $y = ax^2 + bx + c$ و $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ قابل تبدیل به یکدیگرند.

مثال: معادله های زیر را به صورت های دیگر تبدیل کنید.

$$\text{الف) } y = 2x^2 - 4x + 6 \quad \text{ب) } y = -3(x - 1)^2 + 4$$

$$\text{الف) } y = 2(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 2 + 1) = 2(x - 2)^2 + 4$$

$$\text{ب) } y = -3(x^2 - 2x + 1) + 4 = -3x^2 + 6x - 3 + 4 = -3x^2 + 6x + 1$$

نکته ۷: بهترین روش برای حل معادله درجه دوم روش Δ می باشد که مقدار آن از رابطه

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

بدست می آید و جواب معادله بستگی به Δ دارد که در سه حالت

بررسی می شود.

۱) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دو ریشه حقیقی دارد. که از رابطه $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می آید.

۲) اگر $\Delta = 0$ باشد معادله ریشه مضاعف دارد این ریشه $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ می باشد.

۳) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد.

**** چند نکته ضروری در مورد تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$**

۱) اگر $a+b+c=0$ باشد معادله دو ریشه دارد یکی $x=1$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ می باشد

۲) هر گاه $a+c=b$ باشد یک ریشه -1 بوده و ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ می باشد.

۳) مجموع ریشه ها $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

۴) حاصلضرب ریشه ها $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

نکته ۸: فرض کنید α و β ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c$ باشند روابط زیر بر

قرار است

$$۱) \alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$$

$$۲) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3ps$$

$$۳) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{s + 2\sqrt{p}}$$

$$۴) |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \sqrt{s - 2\sqrt{p}}$$

مثال: اگر α و β ریشه های $2x^2 - 5x - 3 = 0$ باشند حاصل عبارات را بیابید.

$$\text{الف) } \alpha^3 + \beta^3 \rightarrow s^3 - 3ps = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} + \frac{45}{4} = \frac{215}{8}$$

$$\text{ب) } |\alpha - \beta| \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2|} = \frac{\sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2}$$

نکته ۹: هر گاه a و c مختلف علامه باشند معادله صد درصد دو ریشه مختلف علامه دارد

مثال: معادله $(m^2 + 1)x^2 + 3m(m - 2)x - m^2 - 5 = 0$ چند ریشه دارد؟

حل: چون a و c مختلف علامه می باشند معادله دو ریشه مختلف علامه دارد.

نکته ۱۰: شرط آنکه یک ریشه معادله درجه دوم K برابر ریشه دیگر باشد که $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$

مثال: به ازای چه مقدار m یک ریشه معادله $(m+2)x^2 + 4x + 1 = 0$ سه برابر ریشه دیگر

$$\text{است. حل: } \frac{16}{m+2} = \frac{(3+1)^2}{3} \rightarrow m = 1$$

نکته: شرط آنکه معادله دارای دو ریشه منفی باشد.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

نکته: شرط آنکه دو ریشه معادله مثبت باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

نکته: شرط آنکه دو ریشه معادله قرینه باشند:

$$\begin{cases} S = 0 \\ P < 0 \end{cases}$$

مثال: به ازای چه مقدار m معادله $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ دو ریشه مثبت دارد؟

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9 - 4m + 4 > 0 \\ 3 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m < \frac{13}{4} \\ m > 1 \end{cases} \rightarrow 1 < m < \frac{13}{4}$$

مثال: مجموع مربعات ریشه های معادله $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ برابر ۱۲ می باشد m کدام است؟ حل:

$$x_1^2 + x_2^2 = 12 \rightarrow S^2 - 2P = 4 - 2(m - 1) = 12 \rightarrow m = -3$$

نکته: شرط آنکه دو ریشه معادله درجه دوم عکس هم باشند: $\Delta > 0$ و $P = 1$

نکته: شرط آنکه دو ریشه معادله درجه دوم قرینه و عکس هم باشند: $p = -1$

نکته: نوشتن معادله درجه دوم با داشتن دو ریشه: $x^2 - sx + p = 0$

نکته: شرط آنکه دو ریشه معادله درجه دوم دو عدد زوج متوالی یا دو عدد فرد متوالی

$$\text{باشد: } |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2$$

نکته: شرط آنکه دو ریشه معادله درجه دوم دو عدد صحیح متوالی باشد:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1$$

نکته: هر گاه در معادله درجه دوم با ضرایب گویا یک ریشه معادله $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد. ریشه

دیگر $\alpha - \sqrt{\beta}$ خواهد بود.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که یک ریشه آن $\sqrt{5} - 2$ باشد.

حل: پس ریشه دیگر $2 - \sqrt{5}$ خواهد بود. $\rightarrow x^2 - sx$

$$\begin{cases} \text{دوریشه مجموع } s = -4 \\ \text{ضربدوریشه } p = -1 \end{cases} \rightarrow x^2 - sx + p = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$$

مثال: در معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 4 = 0$ حاصل $\sqrt{x''} + \sqrt{x'}$ کدام است؟

$$A = \sqrt{x'} + \sqrt{x''} \rightarrow A^2 = x' + x'' + 2\sqrt{x'x''} = S + 2\sqrt{P} = 7 + 4 = 11 \rightarrow A = \pm\sqrt{11} \rightarrow$$

$$A = \sqrt{11}$$

نکته: برای بدست آوردن ریشه مشترک دو معادله درجه دوم (در صورت وجود) x^2 را بین دو معادله حذف می کنیم.

مثال: ریشه مشترک دو معادله $2x^2 + x - 21 = 0$ و $4x^2 - 5x - 21 = 0$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 21 = 0 \\ 4x^2 - 5x - 21 = 0 \end{cases} \rightarrow -7x = -21 \rightarrow x = 3$$

نکته: شرط آنکه دو معادله درجه دوم ریشه های مشترک داشته باشند $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

نکته: هر گاه در معادله درجه دوم جای a را با c عوض کنیم معادله جدیدی بدست می آید که ریشه های آن عکس ریشه های معادله اول است.

$$5x^2 + 3x - 8 = 0 \rightarrow -8x^2 + 3x + 5 = 0$$

نکته: هر گاه در معادله درجه دوم علامت b عوض کنیم معادله جدیدی بدست می آید که ریشه های آن قرینه ریشه های معادله اول است.

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

نکته: هر گاه در معادله درجه دوم b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم معادله جدیدی بدست می آید که ریشه های آن k برابر ریشه های معادله اول است.

نکته: برای بدست آوردن معادله جدیدی که ریشه های آن با ریشه معادله داده شده رابطه ای داشته باشد ریشه های معادله مفروض را y در نظر گرفته آن را بر حسب x نوشته سپس به جای x مقدار بدست آمده بر حسب y را قرار می دهیم.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن از دو برابر ریشه های معادله

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ مقدار سه واحد کمتر باشد.}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 = 13 > 0 \rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ و } x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \rightarrow y^2 - 13 = 0$$

تهیه کننده: کاوس حوریزاد دبیر دبیرستانهای خورش رستم