



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

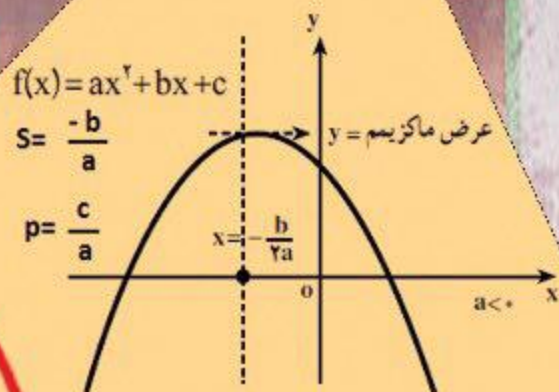


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

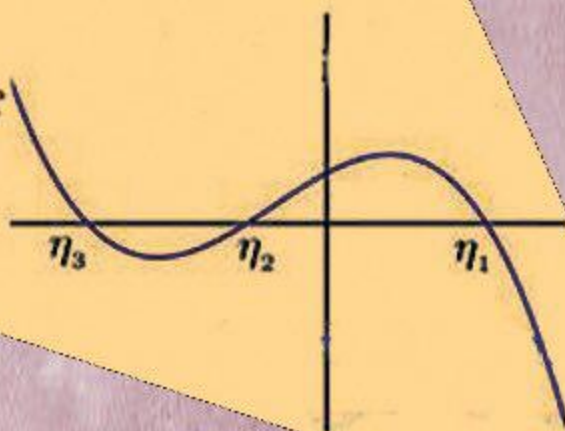
تابع درجه دو

ویژه کنکور ۹۸

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



مؤلف: مهندس حسن پور

تابع درجه دو: فرم کلی تابع درجه دو به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ است.

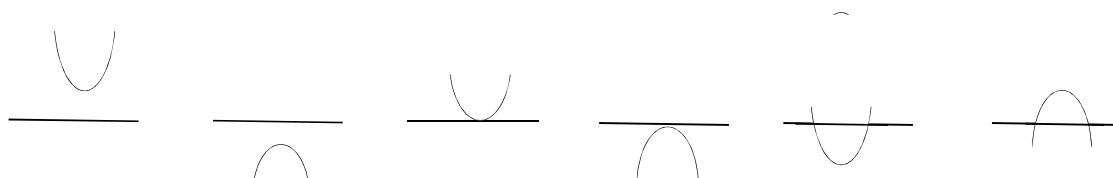
الف) اگر $a > 0$ باشد تقعر تابع رو به بالاست و تابع دارای min است.

ب) اگر $a < 0$ باشد تقعر تابع رو به پایین است و تابع دارای max است.

نکته: min یا max این تابع در رأس سهمی اتفاق می افتد که مختصات آن به صورت $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ یا $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ است. در نقطه min یا max خط $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ بر منحنی مماس است و معادله تلاقی این خط و تابع درجه دو دارای ریشه مضاعف است. ($\Delta = 0$)

نکته: محور تقارن تابع خط $x = -\frac{b}{2a}$ است که حتماً از نقطه اکسترمم تابع رد می شود.

نمودار تابع درجه دو به یکی از حالات زیر می باشد. (با توجه به a و Δ)

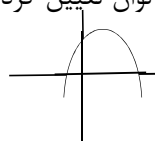


$a > 0, \Delta < 0$ (۱)
 $a < 0, \Delta < 0$ (۲)
 $a > 0, \Delta = 0$ (۳)
 $a < 0, \Delta = 0$ (۴)
 $a > 0, \Delta > 0$ (۵)
 $a < 0, \Delta > 0$ (۶)

نکته: اگر تابع به صورت $f(x) = a(x - x_1)^2 + k$ باشد، max یا min آن به صورت (x_1, k) (رأس سهمی) است.

نکته: اگر تابع به صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ باشد، اکسترمم آن به صورت $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$ است.

نکته: علامت a, b, c را می توان با توجه به نمودار تابع تعیین کرد. علامت a با توجه به دهانه منحنی، علامت c را با توجه به محل برخورد با محور y ها و علامت b را با توجه به طول رأس سهمی یا (شیب منحنی در محل تلاقی با محور y ها) می توان تعیین کرد.



$a < 0, -\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow b > 0$ ، $c > 0$ عرض از مبدأ مثبت، $a < 0$ دهانه رو به پایین

محاسبه max یا min به کمک تابع درجه دو:

می دانیم بیشترین یا کمترین مقدار عبارت $ax^2 + bx + c$ برای $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ یا $-\frac{\Delta}{4a}$ است که به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید. از این خاصیت برای پیدا کردن بیشترین و کمترین مقدار بعضی از کمیت ها استفاده می کنیم.

مثال) مجموع دو عدد ۱۲ است. بیشترین مقدار حاصل ضرب آن ها را بیابید.

$$x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x$$

$$p = xy \rightarrow p = x(12 - x) = -x^2 + 12x \rightarrow \text{بیشترین حاصل ضرب} = -\frac{144 - 0}{4(-1)} = 36$$

مثال) محیط یک مستطیل ۲۴ است. بیشترین مساحت بین مستطیل هایی که می توان با این ابعاد ساخت را بیابید.

$$2(x + y) = 24 \rightarrow x + y = 12$$

x



y

$$s = xy = x(12 - x) = 12x - x^2 \rightarrow \text{بیشترین مساحت} = -\frac{\Delta}{4a} = 36$$

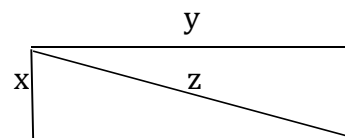
مثال) در بین مستطیل هایی با محیط ۱۰ واحد، اندازه کوتاه ترین قطر را بیابید.

$$2(x + y) = 10 \rightarrow x + y = 5 \rightarrow y = 5 - x$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow z^2 = x^2 + (5 - x)^2 = 2x^2 - 10x + 25$$

$$z_{\min}^2 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{100}{8} = \frac{25}{2}$$

$$\text{پس } z_{\min} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$



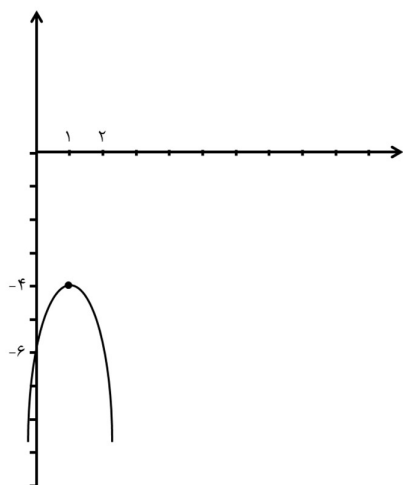
رسم تابع درجه دو

برای رسم نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، ابتدا مختصات راس سهمی نقطه $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ را می بایم سپس دو نقطه کمکی با طول های دلخواه (ترجیحا دو نقطه با طول های متقارن نسبت به طول راس) را مشخص کرده و در نهایت با توجه به علامت a، سهمی را رسم می کنیم.

نکته:

مثال) نمودار سهمی $y = -2x^2 + 4x - 6$ را رسم کنید.

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1 \rightarrow y_s = -2 + 4 - 6 = -4$$



x	0	1	2
y	-6	-4	-6

مثال) سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳، و محور x ها را در نقطه ای به طول ۳ قطع می

کند و از نقطه $(-1, 2)$ می گذرد، معادله سهمی را بنویسید.

سهمی از نقاط $(0, 3)$ و $(3, 0)$ و $(2, -1)$ می گذرد.

$$(0, 3) \rightarrow 3 = 0 + 0 + c = c = 3 \rightarrow y = ax^2 + bx + 3$$

$$(3, 0) \rightarrow 0 = 9a + 3b + 3 \xrightarrow{\div 3} 3a + b = -1 \quad (1)$$

$$(2, -1) \rightarrow -1 = 4a + 2b + 3 \xrightarrow{-3} 4a + 2b = -4 \quad (2)$$

از حل دستگاه مربوط به رابطه های (۱) و (۲) داریم:

$$a = 1, b = -4 \rightarrow y = x^2 - 4x + 3$$

صفرهای تابع درجه ۲: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم. برای پیدا کردن صفرهای تابع f باید معادله

$$f(x) = 0 \text{ را حل کنیم.}$$

نکته: اگر α, β صفرهای تابع درجه ۲ باشند، آنگاه ضابطه f به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است که با داشتن یک نقطه دیگر می توان مقدار a را پیدا کرد.

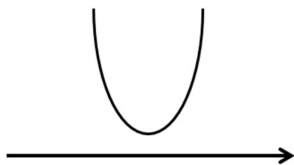
(مثال) صفرهای توابع زیر را بیابید.

$$۱) y = x^2 + x - ۱۲ \longrightarrow x^2 + x - ۱۲ = 0 \rightarrow (x + ۴)(x - ۳) = 0 \rightarrow x = -۴, x = ۳$$

$$۲) y = x^2 - ۴x \longrightarrow x^2 - ۴x = 0 \rightarrow x(x^2 - ۴) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm ۲$$

$$۳) y = x^2 + ۲x + ۵ \longrightarrow x^2 + ۲x + ۵ = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ صفر ندارد}$$

(مثال) حدود m برای آنکه نمودار تابع $f(x) = mx^2 + ۲mx + m + ۱$ با ضابطه $f(x)$ همواره بالای محور x ها قرار گیرد را مشخص کنید.



$$x^2 \text{ ضرب } m > 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (۲m)^2 - ۴(m)(m + ۱) < 0 \longrightarrow ۴m^2 - ۴m(m + ۱) < 0$$

$$\longrightarrow ۴m(m - m - ۱) < 0 \longrightarrow -۴m < 0 \rightarrow m > 0$$

از طرفی اگر $m = 0$ باشد نمودار تابع به صورت $f(x) = ۱$ در می آید که خط $y = ۱$ بالای محور x ها قرار می گیرد پس باید $m \geq 0$ باشد.

معادله سهمی

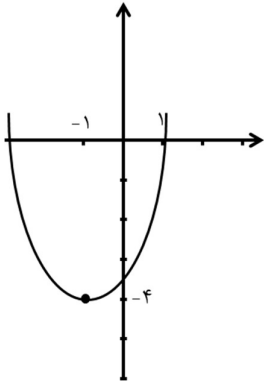
فرم کلی تابع درجه دو به صورت $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ است اگر نمودار تابع را به ما بدهند و ضابطه آن را از ما بخواهند معمولاً با یکی از سه حالت زیر مواجه می شویم:

(۱) اگر سه نقطه از سهمی را داشته باشیم باید با صدق دادن نقاط در ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ و حل دستگاه سه معادله سه مجهول ضرایب a, b, c را محاسبه کنیم.

(۲) اگر سهمی، محور x ها را در دو نقطه به طول های x_1, x_2 قطع کند، معادله آن به صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ است. خود سوال باید یک نقطه دیگر را به ما بدهد تا با صدق دادن آن a را نیز محاسبه کنیم.

۳) اگر مختصات راس سهمی $S(x_s, y_s)$ را به ما بدهند معادله آن را به صورت $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ می نویسیم و با اطلاعات اضافی مسئله، مقدار a را نیز محاسبه می کنیم.

مثال) اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، $f(3)$ کدام است؟



$$S = (-1, -4)$$

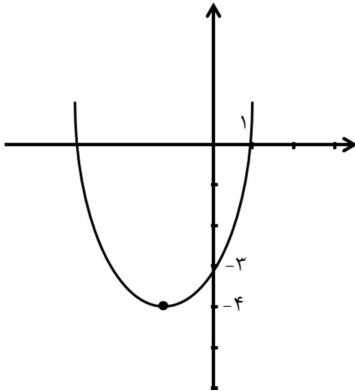
$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$f(x) = a(x + 1)^2 - 4$$

$$f(1) = 0 \longrightarrow 4a - 4 = 0 \longrightarrow a = 1$$

$$f(x) = (x + 1)^2 - 4 \longrightarrow f(3) = 12$$

مثال) نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است حاصل b کدام است؟



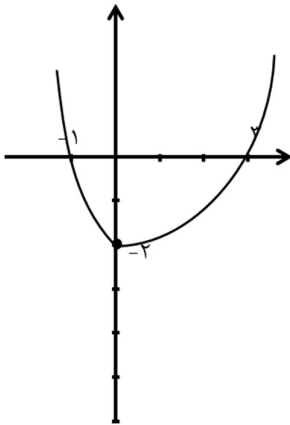
$$f(0) = -3 \rightarrow C = -3 \rightarrow f(x) = ax^2 + bx - 3$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b - 3 = 0 \rightarrow a = 3 - b \quad *$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -4 \rightarrow \Delta = 16a \rightarrow b^2 - 4ac = 16a \xrightarrow{C=-3} \rightarrow b^2 + 12a = 16a \rightarrow b^2 - 4a = 0$$

$$\text{غ ق ق } b = -6 \text{ ق ق } b = 2 \text{ ق ق } b^2 - 4(3 - b) = 0 \rightarrow b^2 + 4b - 12 = 0 \text{ با توجه به } *$$

مثال) نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است ضرایب a, b, c را بیابید.



$$f(x) = a(x+1)(x-3) \xrightarrow{f(0)=-2} -2 = a(1)(3) \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}(x+1)(x-3) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$$

$$c = -2, \quad b = -\frac{4}{3}, \quad a = \frac{2}{3}$$

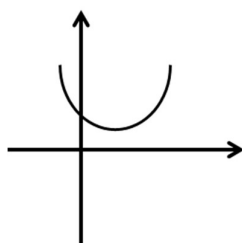
سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات

هر سهمی از دو یا چند ناحیه می گذرد بعضی وقت ها از ما می خواهند که یک پارامتر را طوری تعیین کنیم تا سهمی از ناحیه ای خاص عبور نکند یا سهمی از نواحی خاصی عبور کند. در این مدل سوال ها باید حواسمان به علامت های c و b و a و Δ باشد.

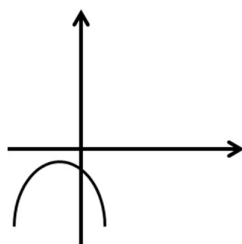
کل حالت های موجود برای نمودار سهمی به صورت زیر است:

حالت (۱) سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند:

الف) فقط از ناحیه ۱ و ۲ عبور کند $(\Delta < 0, a > 0)$. در این حالت هر نقطه از نمودار بالای محور X ها قرار می گیرد مقادیر و تابع همواره مثبت است.

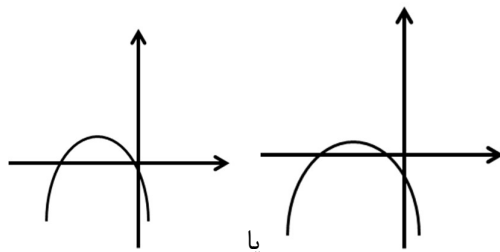


ب) فقط از ناحیه ۳ و ۴ عبور کند $(\Delta < 0, a < 0)$. در این حالت هر نقطه از نمودار زیر محور X ها قرار می گیرد مقادیر و تابع منفی است.

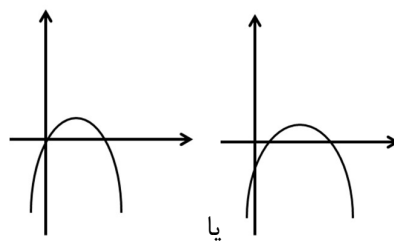


حالت (۲) سهمی دقیقا از سه ناحیه عبور کند (فقط از یکی از نواحی عبور نکند)

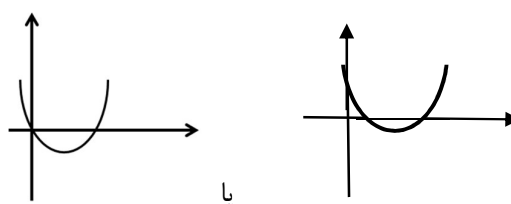
الف) سهمی فقط از ناحیه یک عبور نکند: چون دو ریشه دارد $\Delta > 0$ ، چون دهانه رو به پایین است $a < 0$ ، با توجه به شیب در $(X=0)$ $b < 0$ ، عرض از مبدا یا صفر یا منفی $c \leq 0$.



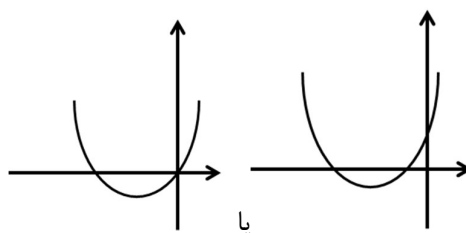
ب) سهمی فقط از ناحیه ۲ عبور نکند: شرط ها $(c \leq 0, b > 0, a < 0, \Delta > 0)$.



ج) سهمی فقط از ناحیه ۳ عبور نکند $(c \geq 0, b < 0, a > 0, \Delta > 0)$.

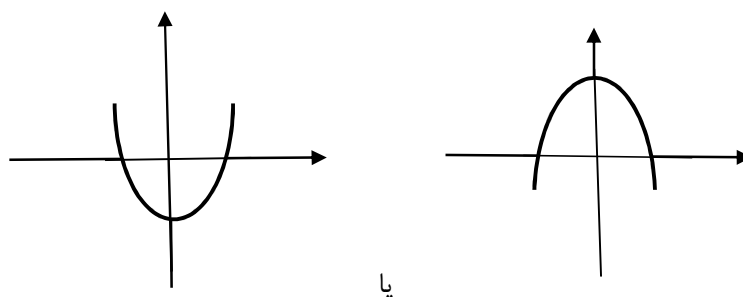


د) سهمی فقط از ناحیه ۴ عبور نکند $(c \geq 0, b > 0, a > 0, \Delta > 0)$.

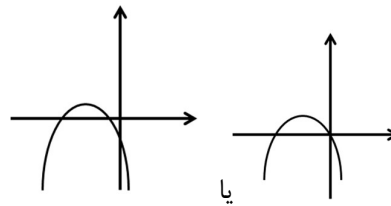


حالت ۳) سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند: اگر سهمی دارای دو ریشه مختلف علامت باشد، حتما از هر ۴ ناحیه عبور می کند به

عبارتی باید $(\frac{c}{a} < 0 \text{ or } ac < 0 \text{ or } P < 0)$.



مثال) به ازای چه مقداری از k نمودار سهمی $f(x) = (k-1)x^2 + 2(k+1)x + k + 2$ فقط از ناحیه اول عبور نمی کند؟



$$a < 0 \longrightarrow k - 1 < 0 \longrightarrow k < 1 \quad (۱)$$

$$b < 0 \longrightarrow 2(k+1) < 0 \longrightarrow k < -1 \quad (۲)$$

$$c \leq 0 \longrightarrow k + 2 \leq 0 \longrightarrow k \leq -2 \quad (۳)$$

$$\Delta > 0 \longrightarrow 4(k+1)^2 - 4(k-1)(k+2) > 0 \xrightarrow{+4} k^2 + 2k + 1 - k^2 - k + 2 > 0 \longrightarrow k > -3 \quad (۴)$$

اشتراک عبارات (۱) و (۲) و (۳) و (۴) برابر $2 < k \leq -3$ است

وضعیت دو سهمی یا وضعیت یک سهمی با یک خط نسبت به هم:

معادله حاصل از برخورد معادلات آنها (که یک معادله درجه دو است) به صورت $f(x) = g(x)$ (معادل تلاقی) است که یکی از حالات زیر را خواهیم داشت:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، f, g در دو نقطه متقاطع اند.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد f, g در یک نقطه بر هم مماس اند.

ج) اگر $\Delta < 0$ باشد f, g یکدیگر را قطع نمی کنند.

مثال) اگر خط $y + mx + 4 = 0$ بر سهمی $y = x^2 - 2x + 5$ در ناحیه اول بر هم مماس باشند مقدار m را بیابید

$$y = \text{خط} = y = \text{سهمی} \longrightarrow x^2 - 2m + 5 = -mx - 4 \longrightarrow x + x(m-2) + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (m-2)^2 - 36 = 0 \longrightarrow m-2 = \pm 6 \quad m = -4 \text{ ق ق} \quad m = 8 \text{ غ ق} \quad \text{غ ق ق} \quad m = -4$$

اگر $m = -4$ باشد معادله تلاقی به صورت $x^2 - 6x + 9 = 0$ می باشد که جواب آن $x = 3$ است (ناحیه اول)

اگر $m = 8$ باشد معادله تلاقی به صورت $x^2 + 6x + 9 = 0$ می باشد که جواب آن $x = -3$ است (ناحیه دوم)

تست های تابع درجه دو

۱- تابع $y = x^2 + ax + 4$ مینیممی برابر ۳ دارد. a کدام است؟

- (۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) ± 3 (۴) ± 4

$$y_{\min} = 3 \rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 3 \rightarrow -\frac{a^2 - 16}{4} \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

۲- نقطه min تابع $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) -4 (۴) 4

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2 - 4}{4}\right) \xrightarrow{y=x} -\frac{a^2 - 4}{4} = -\frac{a}{2}$$

$$a^2 - 2a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \rightarrow x_s = -2 \\ a = -2 \rightarrow x_s = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{ق ق} \\ \text{غ ق} \end{cases}$$

دقت شود در ربع سوم طول منفی است.

۳- به ازای کدام مقدار b نقطه min تابع $y = bx^2 - 2\sqrt{2}x + b$ روی خط $y=1$ واقع می شود؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 2 (۳) 1 (۴) -1

$$bx^2 - 2\sqrt{2}x + b = 1 \rightarrow bx^2 - 2\sqrt{2}x + b - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 4 - 4b(b-1) = 0$$

روش اول: $b^2 - b - 2 = 0 \rightarrow (b-2)(b+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} b=2 \text{ ق ق} \\ b=-1 \text{ ق ق} \end{cases}$

روش دوم: $-\frac{\Delta}{4a} = 1 \rightarrow -\frac{4 - 4b^2}{4b} = 1 \rightarrow 4b^2 - 4b - 4 = 0 \rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} b=2 \text{ ق ق} \\ b=-1 \text{ ق ق} \end{cases}$

۴- خط $y = -\frac{5}{2}x^2 - 3x + a$ محور تقارن تابع $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می کند a کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) -1 (۴) 1

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{5}{2} \rightarrow \Delta = 10a \rightarrow 9 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(a) = 5 \rightarrow 9 - 2a = 5 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

۵- نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقاطی به طول ۱- و ۳ قطع کرده و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱- عرض نقطه min تابع کدام است؟

$$(۱) -\frac{2}{3} \quad (۲) \frac{2}{3} \quad (۳) \frac{4}{3} \quad (۴) -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} (-1, 0) \rightarrow 0 = a - b + c \\ (3, 0) \rightarrow 0 = 9a + 3b + c \\ (0, -1) \rightarrow -1 = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} - b + c \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = -1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \rightarrow x_{\min} = 1 \rightarrow y_{\min} = -\frac{4}{3} + c$$

۶- نمودار تابع $y = ax^2 + 4x + a - 3$ از طرف بالا بر محور x مماس است. طول نقطه تماس کدام است؟

$$(۱) ۲ \quad (۲) -۲ \quad (۳) -\frac{1}{2} \quad (۴) \frac{1}{2}$$

$$a > 0, \Delta = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4a(a - 3) = 0 \rightarrow -4a^2 + 12a + 16 = 0 \xrightarrow{\div(-4)} a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 & \text{غ ق ق} \\ a = 4 & \text{ق ق} \end{cases} \rightarrow f(x) = 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

۷- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها است؟

$$(۱) m < -\frac{1}{2} \quad (۲) m > \frac{3}{2} \quad (۳) 1 < m < \frac{3}{2} \quad (۴) -\frac{1}{2} < m < 1$$



$$m - 1 < 0 \rightarrow m < 1$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 3 - 4(m-1)(m) < 0 \rightarrow -4m^2x + 4m + 3 < 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=64} m = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{m < 1} m < -\frac{1}{2}$$

۸- اگر مجموعه جواب $2x^2 + ax + 4 \geq 0$ به صورت $R - (k, 2)$ باشد، $a+k$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۵ (۳) -۴ (۴) ۴

یکی از ریشه های عبارت برابر ۲ است.

$$x = 2 \longrightarrow 4 + 2a + 4 = 0 \rightarrow a = -6 \rightarrow 2x^2 - 6x + 4 \geq 0$$

$$\longrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad \begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix} \rightarrow k = 1$$

$$a + k = -6 + 1 = -5$$

۹- محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه ای به عرض ۲- قطع می کند. طول پاره خطی که سهمی روی محور

x ها ایجاد می کند کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

$$x_s = -2 \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} (-2, -2) \xrightarrow{\text{صفق در تابع}} -2 = 4 - 8 + k \rightarrow k = 2$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 + \sqrt{2} \\ \beta = -2 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow |\alpha - \beta| = 2\sqrt{2}$$

۱۰- مجموع طول نقاط تقاطع نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^2 + mx - 1$ با نیمساز ربع دوم و چهارم برابر $\frac{3}{2}$ است. کمترین مقدار

$f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

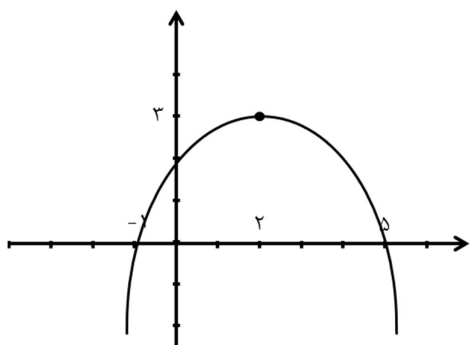
$$2x^2 + mx - 1 = -x \rightarrow 2x^2 + m(x+1) - 1 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه ها} = \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{m+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow -m - 1 = 3 \rightarrow m = -4 \rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x - 1 \rightarrow$$

$$\text{کمترین مقدار} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16 - 4(2)(-1)}{8} = -3$$

۱۱- نقطه $(2, 3)$ راس یک تابع درجه دوم است که نمودار آن پاره خطی به طول ۶ واحد روی محور x ها جدا می کند. نمودار این تابع محور عرض ها را با کدام عرض قطع می کند؟

(۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{25}{4}$



$$y = a(x - 5)(x + 1) \xrightarrow{(2, 3)} 3 = a(2 - 5)(2 + 1) \rightarrow 3 = -3a(3)$$

$$a = -\frac{1}{3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}(x - 5)(x + 1) \rightarrow f(0) = \frac{5}{3}$$

۱۲- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مختصات در آن ناحیه مماس است؟ (۹۳) خارج)

(۱) -4 (۲) $12, -4$ (۳) $-12, 4$ (۴) 12

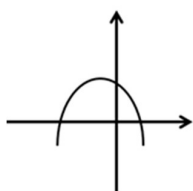
$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \xrightarrow{\Delta=0} x = 2x^2 + mx + x + m + 6$$

$$\rightarrow 2x^2 + mx + x + m + 6 = 0 \rightarrow \Delta = m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

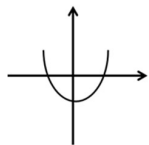
$$\rightarrow (m - 12)(m + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 12 \rightarrow 2x^2 + 13x + 18 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x = -3 \\ m = -4 \rightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

غ ق ق $x = -3$ ق ق $x = 1$

۱۳- علامت a, c چگونه است؟



(۱) $a, c > 0$ (۲) $a > 0, c < 0$ (۳) $a, c < 0$ (۴) $a < 0, c > 0$

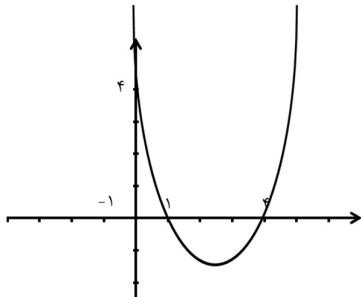


۱۴- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $ac > 0$ $b = 0$ (۲) $ac < 0$ $b = 0$

(۳) $ac > 0$ $b > 0$ (۴) $ac < 0$ $b < 0$

۱۵- معادله سهمی مقابل کدام است؟



(۱) $y = -x^2 - 5x + 4$ (۲) $y = -x^2 + 5x + 4$

(۳) $y = x^2 - 5x + 4$ (۴) $y = -x^2 - 3x + 4$

۱۶- پرتابگری وزنه ای را پرتاب می کند. ارتفاع وزنه بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = -5t^2 + 10t + 1$ به دست می آید. بعد از ثانیه

وزنه به بالاترین ارتفاع ممکن می رسد و ارتفاع نقطه اوج وزنه می باشد.

(۱) ۲۱,۲ (۲) ۱۹/۷۵, ۲/۵ (۳) ۱۶,۳ (۴) ۹/۷۵, ۳/۵

$$t_h = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{-10} = 1$$

به ازای $t = 1$ بیشترین ارتفاع وزنه حاصل می شود.

$$h(1) = -5(1)^2 + 10(1) + 1 = 6$$

۱۷- پنجره ای به شکل مربع داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی الساقین با زاویه راس 30° قرار دارد. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، طول ضلع مربع چقدر باشد تا پنجره کمترین نوردهی را داشته باشد.



$$(۱) \quad ۰/۶ \quad (۲) \quad ۰/۶۵ \quad (۳) \quad ۰/۷۲ \quad (۴) \quad ۰/۸۴$$

اگر پنجره کمترین مساحت را داشته باشد آنگاه دارای کمترین نوردهی است. x طول ضلع مربع و y طول ساق مثلث متساوی الساقین است.

$$مساحت مربع = x^2 \quad مساحت مثلث = $\frac{1}{2} y \times y \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4} y^2$$$

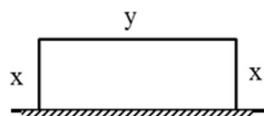
$$(۱) \quad مساحت پنجره = $s = x^2 + \frac{1}{4} y^2$$$

$$(۲) \quad محیط پنجره = $3x + 2y = 6 \rightarrow y = 3 - \frac{3}{2}x$$$

$$(۱), (۲) \rightarrow s = x^2 + \frac{1}{4} \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{9}{4}}{2\left(\frac{25}{16}\right)} = 0.72m$$

۱۸- قرار است در کنار رودخانه ای، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. بیشترین مساحت که می توانیم محصور کنیم کدام است؟



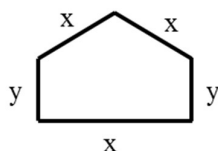
$$(۱) \quad ۱۲۵۰ \quad (۲) \quad ۱۵۰۰ \quad (۳) \quad ۲۲۵۰ \quad (۴) \quad ۲۵۰۰$$

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

$$S = xy = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

$$x_{\max} = -\frac{100}{-4} = 25 \rightarrow \text{مساحت} = S(25) = 1250$$

۱۹- اگر محیط پنجره ای برابر $2\sqrt{3}$ باشد به ازای کدام مقدار x بیشترین نوردهی را دارد؟



$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} \quad (۲)$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۱)$$

$$3x + 2y = 2\sqrt{3} \quad \text{محیط پنجره}$$

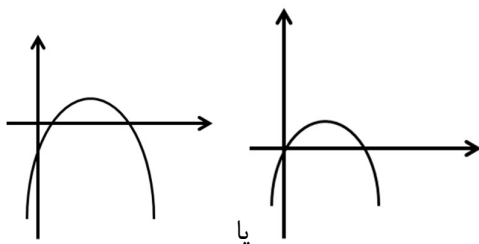
$$S = \Delta \text{ مساحت} + \square \text{ مساحت} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x\left(\frac{2\sqrt{3}-3x}{2}\right)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \sqrt{3}x - \frac{3}{2}x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + \sqrt{3}x$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{3}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}}$$

۲۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی گذرد. (ریاضی ۹۲).



(۴) $0 < a < 3$

(۳) $2 < a < 3$

(۲) $0 < a \leq 2$

(۱) $a \leq 2$

(۱) $x^2 < 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \rightarrow a < 3$

(۲) $x = 0 \Rightarrow b > 0 \rightarrow a > 0$

$ok \quad c \leq 0 \Rightarrow -1 < 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \rightarrow a^2 - 4a - 12 > 0 \rightarrow (a-6)(a+2) > 0$

(۳) $a > 2$ یا $a < -6$ بعد از تعیین علامت

اشتراک عبارات (۱)، (۲)، (۳) به جواب $2 < a < 3$ می رسیم.

۲۱- مجموعه مقادیر m کدام باشد تا منحنی $f(x) = (m-1)x^2 + m(x+1)$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات بگذرد.

(۴) $m < 0$ یا $m > 1$

(۳) $0 < m < 1$

(۲) $m < 1$

(۱) $m > 1$

$f(x) = (m-1)x^2 + mx + m$

برای اینکه منحنی تابع درجه دوم از هر ۴ ناحیه عبور کند $ac < 0$

$0 < m < 1 \rightarrow$ تعیین علامت $(m-1)m < 0$

۲۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها در دو نقطه با طول های منفی قطع می کند. (ریاضی ۹۵)

(۱) $m > 2$ (۲) $-1 < m < 2$ (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m

شرط ها ($s < 0, p > 0, \Delta > 0$)

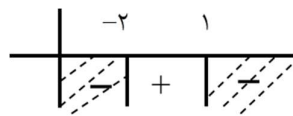
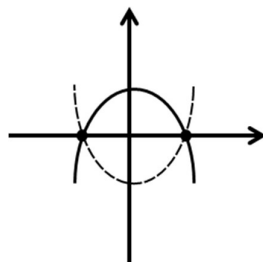
$$p > 0 \rightarrow \frac{a}{c} < 0 \rightarrow \frac{12}{m-2} < 0 \rightarrow m > 2 \quad (1)$$

$$S < 0 \rightarrow -\frac{b}{c} < 0 \rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \rightarrow -1 < m < 2 \quad (2)$$

با توجه به اینکه (۱) و (۲) اشتراکی ندارند نیاز به بررسی Δ نیست و پاسخ به ازای هیچ مقدار m است.

۲۳- به ازای کدام مقدار m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در دو طرف مبدا مختصات قطع می کند. (ریاضی خارج ۹۵)

(۱) $m > 1$ یا $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) فقط $m < -2$ (۴) فقط $m > 1$



$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

نکته مهم: وقتی در معادله درجه دوم یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد Δ خود به خود مثبت است و نیازی به بررسی ندارد.

۲۴- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x هاست. (خارج ۹۶)

$$(1) \quad a < 1 \quad (2) \quad a < -2 \quad (3) \quad a > 3 \quad (4) \quad -2 < a < 1$$



$$(1) \quad x^2 \text{ ضریب } > 0 \rightarrow 1-a > 0 \rightarrow a < 1$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 24 - 4(1-a)(-a) < 0 \xrightarrow{\div 4} 6 + a - a^2 < 0 \xrightarrow{\times (-1)} a^2 - a - 6 > 0$$

$$(2) \quad (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a < -2$$

۲۵- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار

حاصل با محور x ها غیر منفی باشد. (تجربی خارج ۹۳)

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 1/5 \quad (4) \quad 3$$

$$x^2 - 3x - 10 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \rightarrow x = 5, \quad x = -2$$

اگر حداقل نمودار تابع را دو واحد به راست منتقل کنیم ریشه ها غیرمنفی می شوند.

۲۶- نمودار تابع $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ از کدام نواحی عبور نمی کند؟

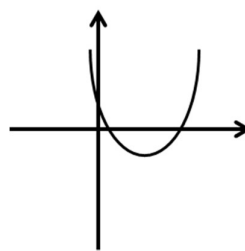
- (۱) فقط چهارم (۲) فقط سوم (۳) سوم و چهارم (۴) دوم و سوم

پس تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. $\Delta > 0 \rightarrow$

دهانه روبه بالا $a > 0 \rightarrow$

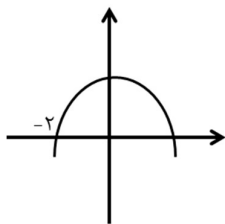
$$p = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} > 0 \text{ هر دو ریشه هم علامت اند}$$

$$s = -\frac{b}{a} > 0 \text{ هر دو ریشه مثبت اند}$$



پاسخ فقط ناحیه سوم است.

۲۷- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + 4$ به صورت مقابل است a کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) -2 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

محور y ها محور تقارن تابع است پس $x = 0$ معادله محور تقارن است.

$$x = -\frac{b}{2a} \xrightarrow{x=0} b = 0 \rightarrow f(x) = ax^2 + 4$$

$$f(-2) = 0 \rightarrow 4a + 4 = 0 \rightarrow a = -1$$

تمرین

۱- تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + ax + 3$ بر خط با معادله $y=7$ مماس است. فاصله دو نقطه تماس کدام است؟ (تجربی خارج ۸۵)

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۳

۲- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۱ (۴) ۱

۳- اگر یکی از منحنی های $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را در کدام طول مثبت قطع می کند؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶

۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر a هر نقطه از نمودار $y = (a-1)x^2 + 2\sqrt{x} + a$ بالای محور x ها است؟ (۸۹ خارج)

- (۱) $1 < a < 2$ (۲) $a > 2$ (۳) $a > 1$ (۴) $a < -1$

۵- نقطه $\min$ تابع با ضابطه $f(x) = 2x^2 - 3x + k$ روی خط $y=3$ قرار دارد، k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{21}{8}$ (۳) $\frac{15}{4}$ (۴) $\frac{33}{8}$

۶- تابع $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۲- و محور y ها را در نقطه ای به عرض یک قطع کرده و از نقطه $(-2, -3)$ می گذرد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $0/1$ (۳) $0/8$ (۴) $-0/8$

۷- به ازای کدام مجموعه مقادیر k خط $y = -2$ در بالاترین نقطه سهمی $f(x) = kx^2 + 2\sqrt{x} + k - 1$ بر سهمی مماس است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{-2\}$ (۳) $\{-2, 1\}$ (۴) $\emptyset$

۸- بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ است، معادله خط متقارن این تابع کدام است؟

- (۱) $x = 1$ (۲) $x = 3$ (۳) $x = 2$ (۴) $x = 4$

۹- فاصله نقطه $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ از راس سهمی $y = x^2 + x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۰- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = x(2x + m - 1) + 1$ مماس بر محور x ها است؟

- (۱) $1 \pm \sqrt{2}$ (۲) $1 \pm 2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} \pm 1$ (۴) $2\sqrt{2} \pm 1$

۱۱- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد. (ریاضی ۸۹)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a \geq 2$ (۳) $a < 0$ (۴) $-2 < a < 0$

۱۲- به ازای کدام مقادیر m ، منحنی تابع $y = \frac{m}{4}x^2 + (m-4)x + 1$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد.

- (۱) $m < 2$ (۲) $m > 8$ (۳) $m < 2$ (۴) $m < 8$

۱۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار $f(x) = ax^2 + (a+2)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه با طول های منفی قطع می‌کند.

(خارج ریاضی ۹۲).

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

۱۴- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار دلخواه x مثبت است. (خارج ۹۰)

- (۱) $m < -2$ (۲) $1 < m < 2$ (۳) $m > 2/5$ (۴) $1 < m < 2/5$

۱۵- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟ (خارج ۹۰)

- (۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

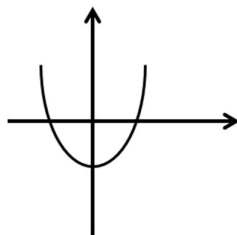
۱۶- اگر تابع درجه دو، $f(x) = (a+2)x^2 + 4x + (a-1)$ محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع کند. مقادیر a کدام است؟

- (۱) $-1 < a < 4, a \neq -2$ (۲) $-1 < a < 2$ (۳) $-2 < a < 3$ (۴) $-3 < a < 2, a \neq -2$

۱۷- منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خط $y = mx$ نقطه مشترکی ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

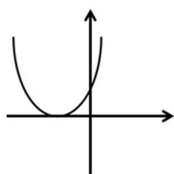
- (۱) $5 \leq m \leq 13$ (۲) $13 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $9 < m < 25$

۱۸- علامت a, b چگونه است؟

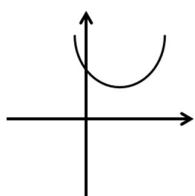


- (۱) $a, b > 0$ (۲) $a, b < 0$ (۳) $a > 0, b < 0$ (۴) $a < 0, b > 0$

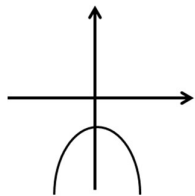
۱۹- به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $y = (a+2)x^2 + (a-1)x + 1$ به صورت زیر است؟

(۴) هیچ مقدار a (۳) $-1, 7$ (۲) 7 (۱) -1

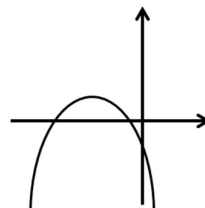
۲۰- در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ضرایب a, b, c هر علامت باشند. کدام نمودار می تواند نمودار این سهمی باشد.



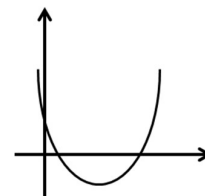
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۲۱- اگر سهمی $y = (m+1)x^2 + 5x - 2$ و خط $y = x - m$ همدیگر را در دو نقطه با طول های منفی قطع کنند محدوده m کدام است؟

(۴) $2 < m < 3$ (۳) $-1 < m < 2$ (۲) $-1 < m < 3$ (۱) $-2 < m < 3$