



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی**

**سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور**

**نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نرم افزارهای ریاضیات**

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

از سری کتاب های آموزشی مبحثی ریاضیات

**تابع**

**و ویژگی های آن**

**مؤلف:**

**مهندس مازیار احمدی ناو**

**۱۳۹۶**

دانلود از سایت ریاضی سرا  
**[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)**



|                      |   |                                                     |
|----------------------|---|-----------------------------------------------------|
| سرشناسه              | : | احمدی ناو، مازیار، ۱۳۵۶-                            |
| عنوان و نام پدیدآور  | : | تابع و ویژگی های آن / مولف مازیار احمدی ناو         |
| مشخصات نشر: رشت      | : | رشت: انتشارات رمه، ۱۳۹۶.                            |
| مشخصات ظاهری         | : | ۵۶ ص.: مصور، نمودار.                                |
| شابک                 | : | ۶۰۰۰ ریال ۵-۳۷-۶۸۹۲-۶۰۰-۹۷۸:                        |
| وضعیت فهرست نویسی    | : | فیپا                                                |
| یادداشت              | : | چاپ قبلی: کتیه گیل، ۱۳۸۴.                           |
| موضوع                | : | توابع -- راهنمای آموزشی (متوسطه)                    |
| موضوع                | : | Functions—Study and teaching (Secondary)            |
| موضوع                | : | توابع -- آزمون ها و تمرین ها (متوسطه)               |
| موضوع                | : | Functions—Examinations, questions, ect. (Secondary) |
| موضوع                | : | توابع -- مسائل، تمرین ها و غیره (متوسطه)            |
| موضوع                | : | Functions—Problems, exercises, ect. (Secondary)     |
| رده بندی کنگره       | : | ۱۳۹۶ ت ۳ الف / ۳۳۱ QA                               |
| رده بندی دیویی       | : | ۵۱۵ / ۰۷۶                                           |
| شماره کتاب شناسی ملی | : | ۴۶۹۰۴۴۴                                             |

- عنوان کتاب: کتاب های مبحثی آموزش ریاضیات، تابع دوم دبیرستان
- مولف: مازیار احمدی ناو
- ناشر: انتشارات رمه
- نوبت چاپ: اول - ۱۳۹۶
- چاپ و صحافی: معراج
- شمارگان: ۱۰۰۰ عدد
- بهاء: ۶۰۰۰ ریال
- شابک: ۵-۳۷-۶۸۹۲-۶۰۰-۹۷۸

---



---

کلیه حقوق برای مولف محفوظ است و هرگونه کپی برداری به موجب قانون پیگرد قانونی دارد.

تلفن دفتر فروش: ۳۳۱۲۳۳۷۸ - ۰۱۳

## مقدمه:

کتابی که پیش روی شماست از سری کتاب های مبحثی آموزش ریاضیات، مبحث تابع می باشد. همان طوری که می دانید تابع جزء سر فصل هایی است که در مقطع دهم و یازدهم و دوازدهم و نیز قبل از تغییر کتب درسی در کتاب های سال دوم و سوم و چهارم دبیرستان آموزش داده می شد. در این کتاب سعی کرده ایم تا بیشتر مباحث تابع نظیر عملیات بین توابع، دامنه، برد، تعیین مقدار تابع، بررسی تابع بودن، رسم نمودار و ... را بررسی نماییم. در آینده جلد دوم این مبحث نیز چاپ خواهد شد که در آن سایر مباحث تابع آموزش داده خواهد شد.

در این مجموعه از مفاهیم اولیه ی تابع اقدام به تدریس و حل نمونه سوالات مختلف کنکورهای سراسری، آزاد، داخل و خارج کشور و نیز کنکورهای آزمایشی معتبر نموده ایم. هدف در این کتاب آشنایی دانش آموزان با سبک های مختلف سوالات امتحانی و تست های کنکور بوده تا با مطالعه دقیق این مجموعه قادر به پاسخگویی هر سوالی از این مبحث باشند. امید است مجموعه ی فوق بتواند راهگشای حل مشکلات درسی داوطلبان عزیز در مبحث تابع باشد. در انتها از زحمات خانم تازی که در امر تایپ، ویرایش و طراحی این مجموعه بنده را یاری نموده اند، تشکر می نمایم.

مازیار احمدی ناو

فروردین ۹۶

تقدیم به

پدر بزرگوارم

که بعد از خدای مهربان

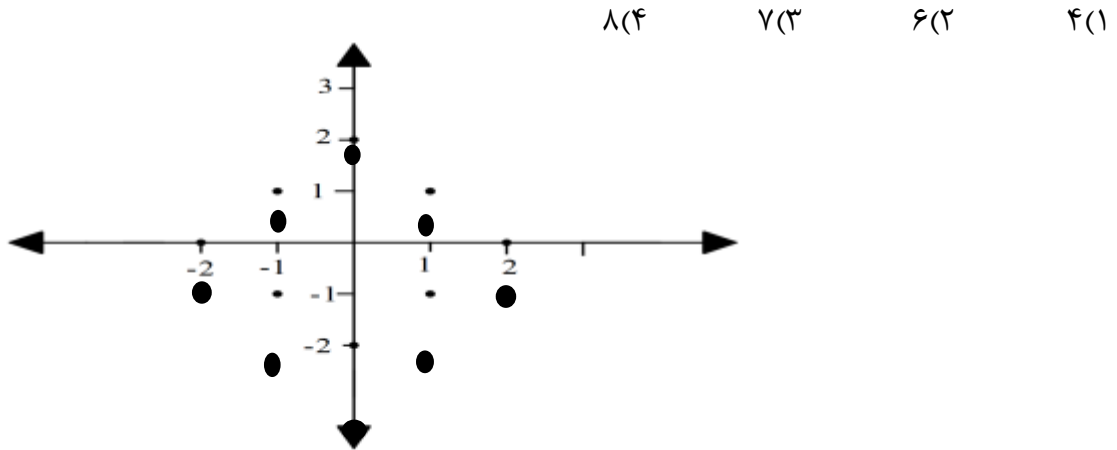
هرچه دارم از اوست.

## فهرست

- مدل اول: شمارش تعداد زوج مرتب های یک رابطه..... ۱
- مدل دوم: بررسی تابع بودن از روی نمودار..... ۲
- مدل سوم: بررسی تابع بودن از روی ضابطه..... ۳
- مدل چهارم: بررسی تابع بودن از روی زوج مرتب..... ۵
- مدل پنجم: تابع ثابت..... ۶
- مدل ششم: پیدا کردن مقدار تابع..... ۷
- مدل هفتم: پیدا کردن  $f(x)$  از روی  $f(u)$ ..... ۱۱
- مدل هشتم: نوشتن ضابطه ی تابع بر حسب یک متغیر..... ۱۲
- مدل نهم: تابع خطی..... ۱۳
- مدل دهم: دامنه توابع رادیکالی..... ۱۳
- مدل یازدهم: دامنه توابع کسری , لگاریتمی , جزصحیح , مثلثاتی..... ۱۷
- مدل دوازدهم: تعیین دامنه و برد  $y=f(u)$  از روی  $y=f(x)$ ..... ۲۱
- مدل سیزدهم: تعیین برد تابع..... ۲۲
- مدل چهاردهم: سوالاتی از جنس انتقال نمودار..... ۲۸
- مدل پانزدهم: مقدار یابی - معادلات - نامعادلات - و تعیین ضابطه ی توابع ترکیبی..... ۳۰
- مدل شانزدهم: تعیین  $f \pm g, f \times g, \frac{f}{g}, f \cdot g$  از روی توابعی که به صورت زوج مرتب داده شده اند ..... ۳۸
- مدل هفدهم: از بین  $g, f$  یکی را به همراه  $f \circ g$  یا  $g \circ f$  می دهند و دیگری را می خواهند..... ۴۱
- مدل هجدهم: دامنه  $f \circ g$  و  $g \circ f$ ..... ۴۵
- مدل نوزدهم: تابع به عنوان ماشین..... ۴۸

## مدل اول: شمارش تعداد زوج مرتب های یک رابطه

مثال ۱) رابطه ی  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$  چند عضو زوج مرتب دارد؟

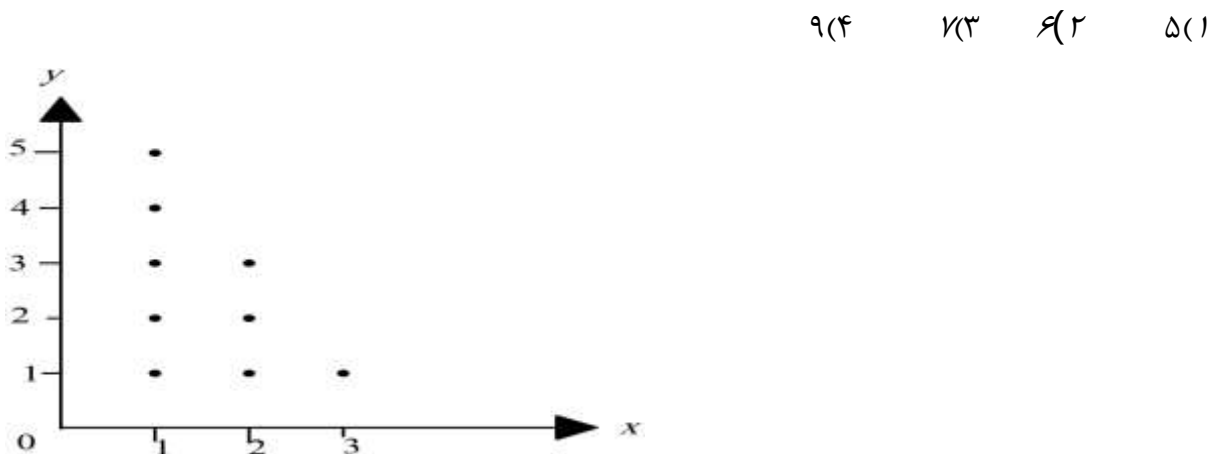


زوج مرتب هایی می خواهیم که  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $y \in \mathbb{Z}$  و حاصل جمع قدر مطلق  $x$  و قدر مطلق  $y$  برابر ۲ باشد کافی است محورهای مختصات را رسم کنیم.

$$R = \{(0, 2), (2, 0), (0, -2), (-2, 0), (1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)\}$$

بنابراین ۸ زوج مرتب دارد.

مثال ۲) رابطه ی  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$  دارای چند زوج مرتب است؟



چون سوال گفته  $x \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{N}$  پس فقط با ناحیه اول سروکار داریم

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس ۹ زوج مرتب دارد.



سوال) آیا این نوع سوالات را غیر از روش ترسیم محورهای مختصات نمی توانیم به روش دیگری حل کنیم؟

به سوال اول دقت کنید:

$$x, y \in \mathbb{Z}, \quad |x| + |y| = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow |0| + |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2)(0, -2)$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow (1, 1)(1, -1)$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 + |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow (-1, 1)(-1, -1)$$

$$x = 2 \Rightarrow 2 + |y| = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (2, 0)$$

$$x = -2 \Rightarrow 2 + |y| = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (-2, 0)$$

باز همان ۸ زوج مرتب بدست آمد.

یا در سوال دوم:

$$x, y \in \mathbb{N}, \quad 2x + y \leq 7$$

$$x = 1 \Rightarrow y \leq 5 \Rightarrow y = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow (1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)$$

$$x = 2 \Rightarrow 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1)(2, 2)(2, 3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (3, 1)$$

باز همان ۹ زوج مرتب بدست آمد.

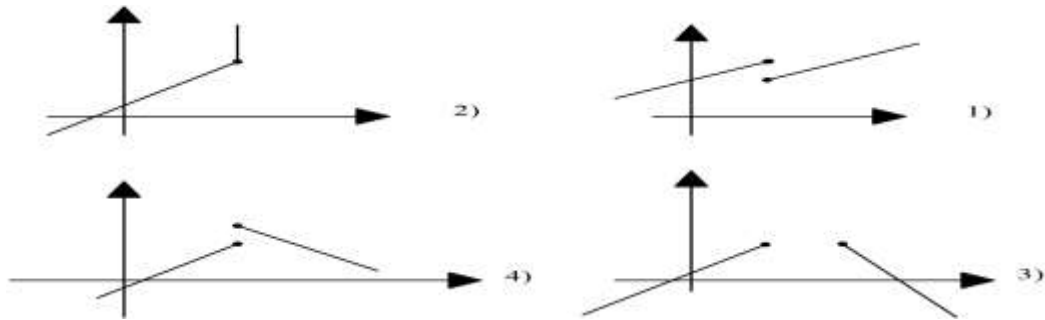
### جمع بندی

پس می توانیم با مقدار دادن به  $X$  و معین کردن مقادیر قابل قبول برای  $Y$  که در شرایط گفته شده صدق کنند زوج مرتب ها را پیدا کنیم.

### مدل دوم: بررسی تابع بودن از روی نمودار

اگر خطی موازی محور  $Y$ ها وجود داشته باشد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند آن نمودار تابع نیست بدیهی است اگر نمودار دارای بخشی باشد که موازی محور  $Y$  باشد تابع نیست.

مثال ۱) کدام شکل نمودار یک تابع است؟



گزینه ۳ تابع است زیرا در گزینه ۲ که بخشی از نمودار موازی محور  $y$  هاست و در گزینه ۱ و ۳ نیز خطی موازی محور  $y$  ها وجود دارد که نمودار را در ۲ نقطه قطع می کند.

### مدل سوم: بررسی تابع بودن از روی ضابطه

اگر به ازای یک مقدار  $x$  برای  $y$  بیش از یک مقدار بدست آید رابطه تابع نیست.

مثال ۱) در کدام گزینه  $y$  تابع  $x$  است؟

$$x = y^2 - 4y + 1 \quad (2) \quad x + \sqrt{y+2} = y \quad (1)$$

$$x = y^2 + y + |y| \quad (4) \quad x = |2y + 1| + y \quad (3)$$

گزینه ۲: تابع نیست

$$x = 1 \Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0, y = 4$$

گزینه ۳) تابع نیست

$$x = 0 \Rightarrow |2y + 1| = -y \xRightarrow{\text{توان } 2} 4y^2 + 4y + 1 = y^2$$

$$\Rightarrow 3y^2 + 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1, y = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۱) تابع نیست

$$x = -2 \Rightarrow -2 + \sqrt{y+2} = y \Rightarrow y+2 = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = -1, -2$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲) کدام مورد تابع است؟

$$y^3 + y = x^3 + 1 \quad (۲) \quad y^3 - 3y^2 + x = 0 \quad (۱)$$

$$xy^2 - x = 1 \quad (۴) \quad |y-1| + x = 0 \quad (۳)$$

گزینه ۱) تابع نیست

$$x = 0 \Rightarrow y^3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-3) = 0 \Rightarrow y = 0, y = 3$$

گزینه ۳) تابع نیست

$$x = -1 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 0, y = 2$$

گزینه ۴) تابع نیست

$$x = 1 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۳) در کدام یک از روابط زیر  $y$  تابعی از  $x$  است؟

$$y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0 \quad (۱)$$

$$y^2 + 2y = x - 1 \quad (۲)$$

$$|x| + |y-1| = 1 \quad (۳)$$

$$|y|\sqrt[3]{x} = 1 \quad (۴)$$

گزینه ۳) تابع نیست

$$x = 0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 0, 2$$

گزینه ۲) تابع نیست

$$x = 1 \Rightarrow y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0, y = -2$$

گزینه ۴) تابع نیست

$$x = 1 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است

مثال ۴) در کدام یک از رابطه های زیر  $\mathcal{Y}$  تابعی از  $X$  نمی باشد؟ (آزمون های قلم چی)

$$y^3 - y = x(2) \quad |x| + (y - 1)^2 = 0(1)$$

$$x^2 + y^3 = 4(4) \quad 2^{x-1} = 3^{y+2}(3)$$

گزینه ۲ تابع نیست:

$$x = 0 \Rightarrow y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 1$$

### مدل چهارم: بررسی تابع بودن از روی زوج مرتب

اگر در یک رابطه ۲ زوج مرتب دارای  $X$  های برابر و  $\mathcal{Y}$  های نابرابر باشند آن رابطه تابع نیست.مثال ۱) رابطه ی  $\{(3, m^2)(2, 1)(-2, m)(3, m+2)(m, 4)\}$  به ازای کدام مقدار  $m$  یک تابع است؟

$$-2(1) \quad -1(2) \quad 2(3) \quad 4(4) \text{ هیچ مقدار } m$$

$$(3, m^2)(3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, 2$$

$$m = -1 \Rightarrow \{(3, 1)(2, 1)(-2, -1)(3, 1)(-1, 4)\} \text{ تابع است}$$

$$m = 2 \Rightarrow \{(3, 4)(2, 1)(-2, 2)(3, 4)(2, 4)\} \text{ تابع نیست}$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲) اگر مجموعه زوج مرتب های  $f = \{(x, 3x-1)(2x+1, y)(x, 4x-3)(x+3, -2)\}$ بیانگر یک تابع باشد  $\mathcal{Y}$  کدام است؟ (آزمون های قلم چی)

$$2(1) \quad -1(2) \quad -2(3) \quad 4(4) \text{ صفر}$$

$$(x, 3x - 1)(x, 4x - 3) \Rightarrow 4x - 3 = 3x - 1 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow \{(2, 5)(5, y)(2, 5)(5, -2)\} \Rightarrow (5, y)(5, -2) \Rightarrow y = -2$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳) اگر  $f = \{(2, a+1)(3, -1)(2, ab)(3, b+1)\}$  یک تابع باشد  $9a^2 + b^2 - 5$  کدام است؟ (آزمون های قلم چی)

$$1) 2 \quad 2) 1 \quad 3) \text{ صفر} \quad 4) 5$$

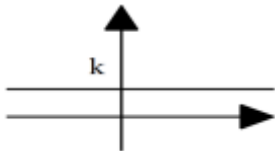
$$(3, -1)(3, b+1) \Rightarrow b+1 = -1 \Rightarrow b = -2$$

$$(2, a+1)(2, ab) \Rightarrow ab = a+1 \Rightarrow -2a = a+1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$9a^2 + b^2 - 5 \Rightarrow 9\left(-\frac{1}{9}\right) + 4 - 5 = 0$$

گزینه ۳ صحیح است.

## مدل پنجم: تابع ثابت



هر تابع به فرم  $y=k$  که  $k \in \mathbb{R}$  است را تابع ثابت می گوئیم و نمودار آن به صورت یک خط راست موازی محور  $X$  ها می باشد. پس در تابع ثابت تمام  $Y$  ها با هم برابرند.

مثال ۱) اگر  $f = \{(a, 1)(1, a-1)(-1, a+b)\}$  یک تابع ثابت باشد آنگاه حاصل  $|2b-a|$  کدام است؟ (آزمون های قلم چی)

$$1) \text{ صفر} \quad 2) 1 \quad 3) 2 \quad 4) 4$$

$$a-1 = a+b = 1 \Rightarrow a = 2, b = -1 \Rightarrow |2b-a| = |-2-2| = 4$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲) تابع با ضابطه  $f(x) = |2x-6| + 2|x+1|$  در کدام بازه ثابت است؟ (آزمون های سنجش)

$$1) (-1, \infty) \quad 2) (-\infty, -1) \quad 3) (3, \infty) \quad 4) (-1, 3)$$

کافی است داخل قدر مطلق ها را مساوی صفر قرار دهیم و تعیین علامت کنیم.

|        | $-\infty$ | $-1$    | $3$     | $+\infty$ |
|--------|-----------|---------|---------|-----------|
| $2x-6$ | $-$       | $-$     | $\circ$ | $+$       |
| $x+1$  | $-$       | $\circ$ | $+$     | $+$       |

$$x < -1 \Rightarrow -2x + 6 - 2x - 2 \Rightarrow y = -4x + 4$$

$$-1 < x < 3 \Rightarrow -2x + 6 + 2x + 2 \Rightarrow y = 4$$

$$x > 3 \Rightarrow 2x - 6 + 2x + 2 \Rightarrow y = 4x - 4$$

در معادله ی تابع ثابت X نداریم بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

مثال (۳) اگر  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  تابع  $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$  چگونه است؟

(۱) ثابت (۲) همانی (۳) فرد (۴) یک به یک

$$(f(\sqrt{x}))^2 = ((\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2$$

پس تابع ثابت است.

## مدل ششم: پیدا کردن مقدار تابع

مثال (۱) اگر  $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$  آنگاه  $f(8)$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۸

$$x = 8 \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{16} = 7$$

گزینه ۳ صحیح است

مثال (۲) اگر  $f(x) = [x]$  مجموعه مقادیر  $f(x-f(x))$  کدام است؟

(۱)  $\{0\}$  (۲)  $\{1\}$  (۳)  $\{0, 1\}$  (۴)  $\{0, -1, 1\}$

$$f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]]$$

می دانیم  $0 \leq x - [x] < 1$  و عددی که بین صفر و یک باشد جزء صحیح آن برابر است با

$$[x - [x]] = 0$$

مثال ۳) اگر  $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$  آنگاه  $f(2)$  کدام است؟

$$1) - \quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) 4$$

کافی است بجای  $x$  یکبار عدد ۲ و یکبار عدد  $(-2)$  قرار دهیم دستگاه تشکیل داده و حل کنیم.

$$x = 2 \Rightarrow f(2) + 2f(-2) = 5$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) - 2f(2) = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ -2f(2) + f(-2) = 5 \end{cases} \Rightarrow 5f(2) = -5 \Rightarrow f(2) = -1$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴) اگر  $f(x+y, x-y) = 2(xy + y^2)$  ,  $f(2,1)$  چقدر است؟

$$1) -2 \quad 2) -4 \quad 3) 2 \quad 4) 2$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{جایگزینی}} f(x+y, x-y) = 2(xy + y^2)$$

$$f(2,1) = 2\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$f(2,1) = 2\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$f(2,1) = 2 \quad \text{گزینه ۴ صحیح است}$$

مثال ۵) اگر  $f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}$  باشد حاصل  $f(2) + f(1)$  کدام است؟

$$1) 6 \quad 2) 8 \quad 3) 4 \quad 4) 2$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$x = 4 \Rightarrow f(2) = 4 + \sqrt{4} = 6$$

گزینه ۲ صحیح است  $\Rightarrow f(1) + f(2) = 8$

مثال ۶) اگر  $x > 0$  مقدار  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$  مقدار  $f(-f(x))$  کدام است؟

۱)  $x+1$       ۲)  $x+1$       ۳)  $x^2+1$       ۴)  $(x^2+1)^2+1$

$F(x)$  همواره برای  $(x^2+1)$  یا (۱) است که هر دو مثبت اند بنابراین در  $f(-f(x))$  باید مقدار  $f$  را برای  $-f(x)$  که یک عبارت منفی است پیدا کنیم. و همواره برابر ۱ است.

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۷) اگر  $f(x) = \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+7}$  باشد مقدار  $f(\sqrt{3}-2)$  کدام است؟

۱)  $\frac{5}{7}$       ۲)  $\frac{3}{5}$       ۳)  $\frac{2}{3}$       ۴)  $\frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4 + 1}{x^2 + 4x + 4 + 3} = \frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2 + 3}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}-2) = \frac{(\sqrt{3}-2+2)^2 + 1}{(\sqrt{3}-2+2)^2 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۸) اگر  $f(x) = x^2(2-x)^2$  باشد حاصل  $f(1+x)-f(1-x)$  کدام است؟

۱) صفر      ۲)  $4x$       ۳)  $2x^2$       ۴)  $4x^2$

$$(1+x)^2(2-(1+x))^2 - (1-x)^2(2-(1-x))^2$$

$$(1+x)^2(1-x)^2 - (1-x)^2(1+x)^2 = 0$$

مثال ۹) اگر  $f(x) = 6f(x-2) + f(x-1)$  و  $f(1)=1$  و  $f(2)=2$  باشد  $f(4)$  کدام است؟

۱) ۱۰      ۲) ۲۰      ۳) ۸      ۴) ۱۶

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 6f(2) + f(3)$$

می بینیم که نیاز به  $f(3)$  داریم



$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 6f(1) + f(2) \\ f(3) = 6(1) + 2 \Rightarrow f(3) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(4) = 6(2) + 8 = 20.$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۰) اگر  $f(x) = 3^x$  مقدار  $f(x+2) - 2f(x+1)$  کدام است؟

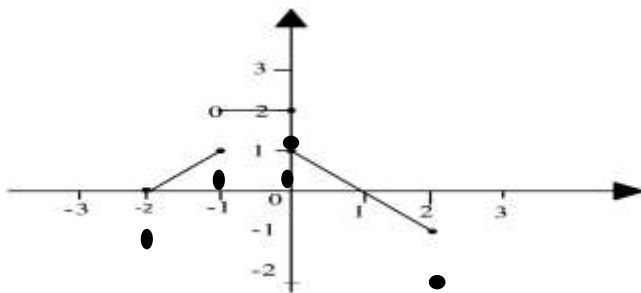
$$(1) \text{ صفر} \quad (2) f(x) \quad (3) 2f(x) \quad (4) 3f(x)$$

$$3^{x+2} - 2 \times 3^{x+1} = 3^x \times 3^2 - 2 \times 3^x \times 3^1 = 9 \times 3^x - 6 \times 3^x$$

$$= 3 \times 3^x = 3f(x) \quad \text{گزینه ۴ صحیح است}$$

مثال ۱۱) با توجه به نمودار تابع  $f$  مقدار  $f(f(f(f(2))))$  کدام است؟ (آزمونهای گزینه ۲)

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) -1 \quad (3) 1 \quad (4) 2$$



$$f(2) = -1 \Rightarrow f(f(2)) = f(-1) = 1$$

$$\Rightarrow f(f(f(2))) = f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(f(f(f(2)))) = f(0) = 1$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۲) اگر  $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$  باشد و داشته باشیم  $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$  در آن صورت:

$$(1) 0 < x < 1 \quad (2) x \leq 0 \quad (3) x > 0 \quad (4) -1 < x < 0$$

$$\frac{|x|}{|x|+1} = x \times \frac{\frac{1}{|x|}}{\frac{1}{|x|}+1} = x \cdot \frac{\frac{1}{|x|}}{\frac{1+|x|}{|x|}} = \frac{x}{1+|x|}$$

بدیهی است  $x \neq 0$  است زیرا مخرج کسر نباید صفر باشد

$$\Rightarrow \frac{|x|}{|x|+1} = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x > 0$$

## مدل هفتم: پیدا کردن $f(x)$ از روی $f(u)$

اگر  $u$  عبارتی بر حسب  $x$  باشد و بخواهیم از روی آن  $f(x)$  را حساب کنیم داخل پرانتز را  $u$  گرفته و از آنجا  $x$  را بر حسب  $u$  بدست آورده و در رابطه ی اصلی قرار می دهیم.

مثال ۱) اگر  $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$  آنگاه  $f(1-x)$  کدام است؟

$$x^2 - 4x + 5 \quad x^2 + 6x + 5 \quad x^2 + 3 \quad x^2 + 1$$

$$x - 3 = u \Rightarrow x = u + 3$$

$$\Rightarrow f(u) = (u+3)^2 - 4(u+3) + 5$$

$$f(u) = u^2 + 6u + 9 - 4u - 12 + 5 \Rightarrow f(u) = u^2 + 2u + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2$$

$$= 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{گزینه ۴ صحیح است.}$$

مثال ۲) اگر  $f\left(\frac{2x+3}{x+3}\right) = \frac{x^2+1}{x-3}$  آنگاه  $f(-1)$  کدام است؟ (آزمونهای گزینه ۲)

$$1 \text{ صفر} \quad -1 \quad 1 \quad -2$$

$$\frac{2x+3}{x+3} = -1 \Rightarrow 2x+3 = -x-3 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(-1) = \frac{4+1}{-2-3} = -1 \quad \text{گزینه ۲ صحیح است}$$

## مدل هشتم: نوشتن ضابطه ی تابع بر حسب یک متغیر

گاهی لازم است تا ضابطه ی تابع را بر حسب یک متغیر بیان کنیم اگر ضابطه ی تابع به ۲ متغیر وابسته باشد ابتدا با نوشتن رابطه ای بین آن ۲ متغیر باید یکی را بر حسب دیگری بدست آوریم و سپس در تابع اصلی قرار می دهیم.

مثال (۱) در یک مستطیل طول از عرض ۳ واحد بیشتر است تابعی که مساحت مستطیل (S) را بر حسب محیط آن (X) بیان می کنیم کدام است؟ (آزمونهای گزینه ۲)

$$s(x) = \frac{x^2 - 36}{16} \quad (1) \quad s(x) = x^2 + 36 \quad (2)$$

$$s(x) = \frac{x^2 + 36}{16} \quad (4) \quad s(x) = \frac{x^2 - 36}{4} \quad (3)$$

فرض کنید محیط را با p و مساحت را S نشان دهیم:

$$p = 2(x + y)$$

$$s = xy$$

$$x = y + 3 \quad \text{می دانیم}$$

$$\Rightarrow p = 2(y + 3 + y) \Rightarrow p = 2(2y) + 2(3) = 4y + 6$$

$$\Rightarrow y = \frac{p - 6}{4} \quad x = y + 3 = \frac{p - 6}{4} + 3 = \frac{p - 6 + 12}{4} = \frac{p + 6}{4}$$

$$\Rightarrow s = x \cdot y = \frac{p + 6}{4} \cdot \frac{p - 6}{4} = \frac{p^2 - 36}{16}$$

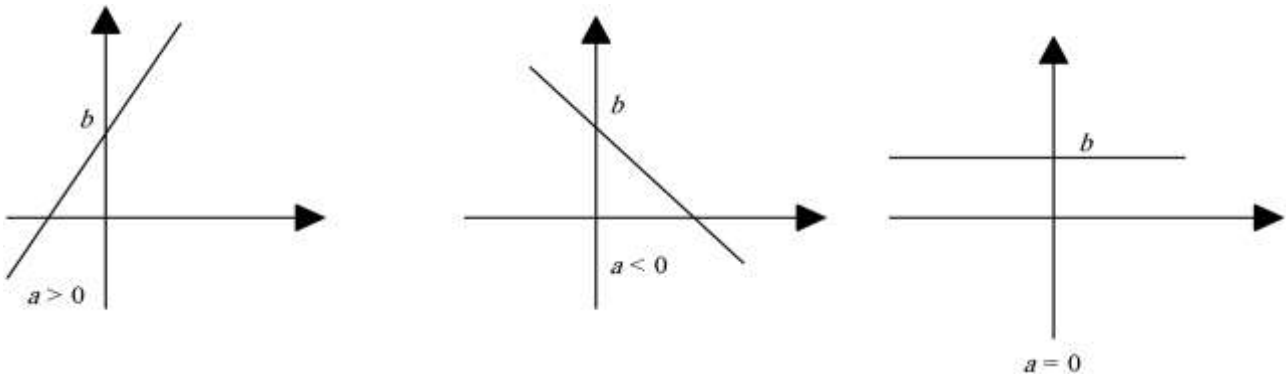
بنابراین اگر محیط p و مساحت S باشد

$$s(p) = \frac{p^2 - 36}{16}$$

گزینه ۱ صحیح است.

## مدل نهم: تابع خطی

هر تابع خط به صورت  $f(x)=ax+b$  می باشد و اگر دامنه ی این تابع را  $R$  فرض کنیم نمودار آن به شکل های زیر خواهد بود :



توجه کنید اگر  $a=0$  باشد تابع خطی به تابع ثابت تبدیل می شود و اگر  $b=0$  و  $a=1$  باشد تابع خطی به همان تابع همانی تبدیل می شود .

مثال ۱) اگر تابع  $y = (a - b)x^2 + (a + 3b)x + 2$  یک تابع خطی باشد و از نقطه ی  $(-1, -2)$  عبور کند مقدار  $a+b$  کدام است ؟ (آزمونهای گزینه ۲)

$$۱(۱) \quad ۲(۲) \quad ۳(۳) \quad ۴(۴)$$

باید ضریب  $x^2$  برابر صفر باشد

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow y = (a + 3b)x + 2 \Rightarrow y = 4bx + 2$$

$$A(-1, -2) \Rightarrow -2 = -4b + 2 \Rightarrow -4 = -4b \Rightarrow b = 1, \quad a = 1, \quad a + b = 2$$

گزینه ۲ صحیح است.

## مدل دهم: دامنه توابع رادیکالی

زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.

مثال ۱) دامنه ی تابع  $f = \{(x, y): y = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}\}$  کدام مجموعه است؟

$$R \quad (1) \quad x \leq 1 \quad (2) \quad x \geq 1 \quad (3) \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1-|x|}{1+|x|} \geq 0 \xrightarrow{\text{مخرج همواره بزرگتر از صفر است}} 1-|x| \geq 0 \Rightarrow -|x| \geq -1$$

پس گزینه ۴ صحیح است.  $\Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

مثال ۲) دامنه ی تابع با ضابطه ی  $y = \sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}}$  کدام است؟

$$(1) [-1, \infty) \quad (2) [-3, \infty) \quad (3) [-3, -1] \quad (4) \emptyset$$

میدانیم  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} > \sqrt{x+1}$  پس همواره زیر رادیکال منفی است و دامنه  $\emptyset$  است.

گزینه ۴ صحیح است

مثال ۳) دامنه ی تابع ضابطه ی  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$  کدام فاصله است؟

$$(1) (0, 1] \quad (2) (0, 3) \quad (3) [1, 2] \quad (4) (2, 3)$$

یکی از روش های تعیین دامنه آن است که اعدادی را انتخاب کنیم و در تابع قرار دهیم اگر این عدد زیر رادیکال با فرجه ی زوج را منفی نکند یا مخرج کسر را صفر نکند هر گزینه ای که آن عدد را قبول نکرده حذف است و اگر این گونه نباشد هر گزینه ای که آن عدد را قبول کرده حذف است.

$$x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{-1}} + \sqrt{\frac{0}{2}} \Rightarrow \text{گزینه ۳, ۲ حذف است} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{0}{-2}} + \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{0} + 1 \Rightarrow \text{گزینه ۴ حذف است} \Rightarrow \text{ق ق ق}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴) دامنه تابع  $y = \sqrt{3 - \sqrt{1 - 4x}}$  شامل چند عدد صحیح است؟

$$(1) ۲ \quad (2) ۲ \quad (3) ۳ \quad (4) ۴$$

$$1 - 4x \geq 0 \Rightarrow -4x \geq -1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$$

$$3 - \sqrt{1 - 4x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1 - 4x} \leq 3 \Rightarrow 1 - 4x \leq 9 \Rightarrow -4x \leq 8 \Rightarrow x \geq -2$$

$$\text{اشتراک ۲ بازه} \Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \{-2, -1, 0\}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۵) دامنه تابع با ضابطه  $y = \sqrt{\frac{x}{6} + 4 - |x|}$  چند عدد صحیح می باشد ؟

$$۱(۴ \quad ۶(۳ \quad ۷(۲ \quad ۹(۱$$

$$\frac{x}{6} + 4 - |x| \geq 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{6} + 4 - x \geq 0 \Rightarrow \frac{-5x}{6} \geq -4 \Rightarrow -5x \geq -24 \Rightarrow x \leq \frac{24}{5} \Rightarrow 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{x}{6} + 4 + x \geq 0 \Rightarrow \frac{7x}{6} \geq -4 \Rightarrow 7x \geq -24 \Rightarrow x \geq \frac{-24}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{-24}{7} \leq x < 0 \Rightarrow -3, -2, -1$$

پس شامل ۸ عدد صحیح می باشد.

مثال ۶) دامنه ی تابع  $y = \sqrt{-x^2(x^2 - 4)^2}$  چند عضو دارد؟

$$۱(۲ \quad ۳(۳ \quad ۴(۴ \quad \text{بی شمار}$$

$$-x^2(x^2 - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4)^2 \leq 0$$

$x^2$  و  $(x^2 - 4)^2$  هر ۲ دارای توان زوج اند و هرگز منفی نمی شوند و فقط می توانند صفر باشند تا در نامعادله صدق کنند .

عضو ۳ دارد  $x = 0, \pm 2$

مثال ۷) دامنه ی تابع با ضابطه  $y = \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{\sqrt{|x| + x}}$  کدام است؟

$$۱(۱ \quad ۲(-\infty, 1) \quad ۳(-\infty, 1] \quad ۴(1, \infty)$$

$$x(x^2 - 1) \geq 0$$

$$x + |x| > 0 \Rightarrow$$

سعی می کنیم اعدادی را انتخاب کنیم و در سوال قرار دهیم

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{2}} \quad \text{گزینه ۱ و ۲ حذف است} \Rightarrow \text{ق ق}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} \quad \text{گزینه ۳ حذف است} \Rightarrow \text{ق ق}$$

پس گزینه ۴ صحیح است

اگر به روش تشریحی حل می کردیم :

$$x(x^2 - 1) \geq 0, |x| + x > 0 \Rightarrow$$

مثال ۸) تمام دامنه ی تابع با ضابطه ی  $y = \sqrt{|x+1| + |x-3|} - 6$  کدام است؟

$$(1) \quad R - (-2, 4) \quad (2) \quad R - [-2, 4] \quad (3) \quad [-2, 4] \quad (4) \quad (-2, 4)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{3+1-6} = \sqrt{2} \quad \text{گزینه ۳ و ۴ حذف است} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = \sqrt{1+5-6} = \sqrt{0} \quad \text{گزینه ۲ حذف است} \Rightarrow \text{ق ق}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۹) اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  دامنه تابع  $f(3-x)$  کدام است؟

$$(1) \quad [0, 2] \quad (2) \quad [0, 3] \quad (3) \quad [1, 2] \quad (4) \quad [1, 3]$$

$$f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} = \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} =$$

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} [1, 3] \quad \text{گزینه ۴ صحیح است}$$

مثال ۱۰) دامنه تابع  $f(x) = \sqrt[3]{2x^5 - x^6 - x^4}$  شامل چند عدد طبیعی است؟ (آزمونهای قلم چی)

$$(1) \quad \text{صفر} \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 4$$

$$2x^5 - x^6 - x^7 \geq 0 \Rightarrow -x^7(x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow -x^7(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^7(x-1)^2 \leq 0$$

هر دو عبارت دارای توان زوج هستند و فقط وقتی این نامعادله برقرار است که پرانتزها صفر شوند

فقط یک جواب دارد  $\Rightarrow$  چون عدد طبیعی گفته  $\Rightarrow x=0, x=1$

## مدل یازدهم: دامنه توابع کسری، جزء صحیح، مثلثاتی

مثال ۱) دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$  به کدام صورت است؟

$$(1,2] (1) \quad [2,10] (2) \quad [1,1) (3) \quad (4) \quad (1,11]$$

در  $\log_b^a$  لازم است  $a > 0$  و  $b > 0$  و  $b \neq 1$  باشد.

$$\Rightarrow \log^{(x-1)} \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

در نامعادلات لگاریتم:

$$\log_b^a \geq k \Rightarrow \begin{cases} b > 1 \Rightarrow a \geq b^k \\ 0 < b < 1 \Rightarrow a \leq b^k \end{cases}$$

در واقع اگر مبنا بین صفر و یک باشد جهت نامساوی عوض می شود.

$$1 - \log^{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow -\log^{(x-1)} \geq -1 \Rightarrow \log^{(x-1)} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 10^1 \Rightarrow$$

گزینه ۴ صحیح است  $\Rightarrow 1 < x \leq 11$  اشتراک  $\Rightarrow x \leq 11$

مثال ۲) دامنه ی تابع  $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{2})(3 - [x])}$  کدام است؟

$$[1,3] (1) \quad [1,3] (2) \quad [2,4] (3) \quad [1,3] (4)$$

$$x=1 \Rightarrow y = \sqrt{(1 - \sqrt{2})(3 - 1)} = \sqrt{-0.8} \quad \text{گزینه ۲ و ۴ حذف است} \Rightarrow \text{غ ق}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{([\sqrt{2}] - \sqrt{2})(3 - [\sqrt{2}])} = \sqrt{(-0.4)(2)} \quad \text{غ ق}$$

$\Rightarrow$  گزینه ۳ صحیح است  $\Rightarrow$  گزینه ۱ حذف است



روش تشریحی :

$$([x] - \sqrt{2}) - (3 - [x]) \geq 0$$

$$\implies \text{الف) } [x] - \sqrt{2} \geq 0, 3 - [x] \geq 0$$

$$[x] \geq \sqrt{2} \Rightarrow x \geq 2 \implies 2 \leq x < 4$$

$$[x] \leq 3 \Rightarrow x < 4$$

$$\Rightarrow \text{ب) } [x] - \sqrt{2} \leq 0, 3 - [x] \leq 0$$

$$[x] \leq \sqrt{2} \Rightarrow x < 2 \implies \emptyset$$

$$[x] \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\Rightarrow \text{اجتماع} \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

مثال ۳) دامنه ی تابع با ضابطه ی  $y = \log_x^{(x^2-4)}$  کدام است؟

$$x > 0 \text{ (۴) } \quad |x| < 2 \text{ (۳) } \quad |x| > 2 \text{ (۲) } \quad x > 2 \text{ (۱)}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اشتراک} \Rightarrow x > 2$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴) دامنه تابع با ضابطه ی  $y = \frac{x-1}{[x]+[-x]}$  برابر کدام مجموعه است؟

$$R-Z \text{ (۴) } \quad Z \text{ (۳) } \quad R \text{ (۲) } \quad \emptyset \text{ (۱)}$$

$$[x] + [-x] = 0 \implies \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

$$[x] + [-x] = 0 \Rightarrow x \in Z \Rightarrow R - Z$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۵) دامنه تابع  $f(x) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟

$$\{x \in R \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4}\} \text{ (۲) } \quad R \text{ (۱)}$$

$$\{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}\} \text{ (۴) } \quad \{x \in R \mid x \neq k\pi\} \text{ (۳)}$$

دامنه توابع مثلثاتی :

$$\text{اگر } f(x) = \tan u \implies D_f = \left\{ u \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{اگر } f(x) = \cot u \implies D_f = \{ u \neq k\pi \}$$

همان دامنه  $u$  است  $f(x) = \sin u$  یا  $f(x) = \cos u \implies D_f$

$$\implies x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \implies x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مثال ۶) دامنه ی تابع  $f(x) = \sqrt{2x - x^2} \times \log^{(x-1)}$  کدام است؟ (آزمونهای قلم چی)

$$(1) [2, \infty) \quad (2) (1, \infty) \quad (3) [1, 2] \quad (4) (1, 2]$$

گزینه ۲ و ۳ حذف است  $\implies$  غ ق ق  $\implies \sqrt{1} \log \cdot \implies x = 1$

$$\log_b^a \implies a > 0, b > 0, b \neq 1 \quad \text{میدانیم}$$

گزینه ۱ حذف است  $\implies$  غ ق ق  $\implies \sqrt{-15} \log^4 \implies x = 5$

پس گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۷) اگر  $f(x) = 3 - 2x$  باشد دامنه ی تعریف  $y = \sqrt{f^{-1}(2x^2 + 3) - x}$  در کدام گزینه آمده است؟ (آزمونهای گزینه ۲)

$$(1) [0, 1] \quad (2) [-1, 0] \quad (3) [-1, 1] \quad (4) [-2, 1]$$

یعنی  $2x^2 + 3$  برای  $f^{-1}$  طول است  $\implies f^{-1}(2x^2 + 3)$

پس برای  $f$  عرض است  $\Leftarrow$  یعنی به جای  $x$  چه مقداری قرار دهیم تا  $f(x)$  برابر  $2x^2 + 3$  شود

$\Leftarrow$  باید  $(-x^2)$  قرار دهیم

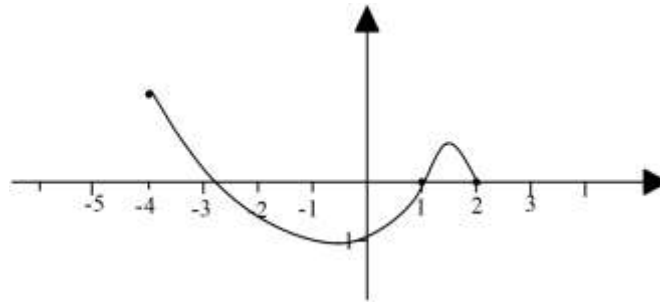
$$\implies y = \sqrt{-x^2 - x}$$

$$-x^2 - x \geq 0 \implies x(-x - 1) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x \leq 0$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۸) شکل زیر نمودار تابع  $y=f(x)$  است دامنه ی تابع  $\sqrt{xf(x)}$  کدام است؟

$$(۱) [-۳, ۲] \quad (۲) [-۴, -۳] \cup [۱, ۲] \quad (۳) [۰, ۲] \quad (۴) [-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$$



$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow \text{ناحیه ۱} \Rightarrow [۱, ۲] \\ x \leq 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow \text{ناحیه ۳} \Rightarrow [-۳, ۰] \end{cases}$$

می دانیم  $f(x)$  همان  $y$  است .

پس جواب نهایی  $[۱, ۲] \cup [-۳, ۰]$

پس گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۹) به ازای چه مقادیری از  $m$  دامنه ی تابع  $f(x) = \frac{x+1}{(m-1)x^2 + (2m-1)x - 1}$  همواره  $R$  است؟  
(ازمونهای قلمچی)

$$(۱) -۱ \leq m \leq ۱ \quad (۲) -\frac{\sqrt{3}}{۲} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{۲} \quad (۳) -\frac{\sqrt{3}}{۲} < m < \frac{\sqrt{3}}{۲} \quad (۴) -۱ < m < ۱$$

شرط آنکه دامنه  $R$  باشد آن است که مخرج نباید ریشه داشته باشد

$$\Delta < 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4(m-1)(-1) < 0$$

$$4m^2 - 4m + 1 + 4m - 4 < 0$$

$$4m^2 < 3 \Rightarrow m^2 < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{۲} < m < \frac{\sqrt{3}}{۲}$$

گزینه ۲ صحیح است.

## مدل دوازدهم: تعیین دامنه و برد $y=f(u)$ از روی $y=f(x)$

گاهی دامنه و برد  $f(x)$  را می دهند و دامنه و برد تابع  $y=Af(u)+B$  را می خواهند.

مثال ۱) اگر برد تابع  $f$  برابر  $R_f = [-\sqrt{3}, 2]$  باشد برد تابع  $\sqrt{2}f(x-1) + 1$  شامل چند عدد صحیح می باشد؟

$$۵(۱) \quad ۲(۲) \quad ۳(۳) \quad ۴(۴)$$

$$-\sqrt{3} \leq f(x-1) \leq 2$$

$$\times \sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) \leq 2\sqrt{2}$$

$$+1 \rightarrow -\sqrt{6} + 1 \leq \sqrt{2}f(x-1) + 1 \leq 2\sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow [-\sqrt{6} + 1, 2\sqrt{2} + 1]$$

اعداد صحیح این فاصله عبارتند از:  $-1, 0, 1, 2, 3$

پس گزینه ۱ صحیح می باشد.

مثال ۲) اگر دامنه تابع  $f$  برابر  $D_f = [-2, 6]$  باشد دامنه ی نمودار  $f(2x+1)$  شامل چند عدد صحیح می باشد؟

$$۴(۱) \quad ۱۱(۲) \quad ۹(۳) \quad ۲۵(۴)$$

$$-2 \leq 2x+1 \leq 6$$

$$\rightarrow -3 \leq 2x \leq 5$$

$$\div 2 \rightarrow -1.5 \leq x \leq 2.5 \implies \{-1, 0, 1, 2\}$$

دامنه شامل ۴ عدد صحیح است. گزینه ۱ صحیح است.

## درسنامه:

پس وقتی دامنه و برد تابع  $f$  را داریم و می خواهیم دامنه و برد  $Af(B)+C$  را حساب کنیم.

الف: برای دامنه  $B$  را در فاصله ی دامنه ی  $f$  قرار می دهیم و از آن حدود  $X$  را پیدا می کنیم.

ب: برای برد ابتدا  $f(B)$  را در فاصله ی برد  $f$  قرار می دهیم و سپس طرفین را در  $A$  ضرب کرده و سپس طرفین رابطه را بدست آورده را با  $B$  جمع می کنیم تا به برد تابع جدید برسیم.

مثال ۳) اگر دامنه ی تابع  $y=f(x)$  بازه ی  $[-1, 5]$  باشد دامنه ی تابع  $y=6f(-3x+1)$  کدام است؟

(آزمونهای گاج)

$$(1) \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right] \quad (2) [-14, 4] \quad (3) [-8, 4] \quad (4) [-84, 24]$$

$$-1 \leq -3x + 1 \leq 5$$

$$\xrightarrow{-1} -2 \leq -3x \leq 4$$

$$\xrightarrow{\div(-3)} \frac{2}{3} \geq x \geq -\frac{4}{3}$$

گزینه ۱ صحیح است.

### مدل سیزدهم: تعیین برد تابع

منظور از برد همان محدوده ی تغییرات  $y$  به ازای  $x$  های مربوط به دامنه است.

مثال ۱) برد تابع  $y=4\sin 7x+1$  کدام است؟

$$(1) [-5, 3] \quad (2) [-7, 3] \quad (3) [-3, 5] \quad (4) [3, 5]$$

$$-1 \leq \sin 7x \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -4 \leq 4\sin 7x \leq 4 \xrightarrow{+1} -3 \leq 4\sin 7x + 1 \leq 5 \Rightarrow$$

$$-3 \leq y \leq 5$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲) برد تابع  $y = 2\cos^2 3x - 4$  کدام است؟

$$(1) [-1, 3] \quad (2) [-4, 2] \quad (3) [-4, -2] \quad (4) [-3, 1]$$

$$-1 \leq \cos^2 3x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2\cos^2 3x \leq 2 \xrightarrow{-4} -4 \leq 2\cos^2 3x - 4 \leq -2$$

$$\Rightarrow -4 \leq y \leq -2 \quad \text{گزینه ۳ صحیح است}$$

مثال ۳) برد تابع  $y = 2x - 2[x] + 11$  کدام است؟

$$(1) [11, 13) \quad (2) (11, 15] \quad (3) (11, 17) \quad (4) [11, 13)$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2x - 2[x] < 2$$

$$\xrightarrow{+11} 11 \leq 2x - 2[x] + 11 < 13 \Rightarrow 11 \leq y < 13$$

گزینه ۴ صحیح است.

### نکته:

برد تابع به صورت  $y = ax - a[x] + b$  به صورت  $[b, a+b)$  است. توجه کنید که برد توابع بصورت  $y = x -$

$$a \left[ \frac{x}{a} \right] + b$$
 نیز به همین صورت محاسبه می شود.

مثال ۴) برد تابع  $y = x - 4 \left[ \frac{x}{4} \right] + 9$  کدام است؟

$$(1) [4, 9) \quad (2) [9, 13) \quad (3) [9, 36) \quad (4) [9, 13)$$

$$0 \leq \frac{x}{4} - \left[ \frac{x}{4} \right] < 1 \xrightarrow{\times 4} 0 \leq x - 4 \left[ \frac{x}{4} \right] < 4 \xrightarrow{+9} 9 \leq x - 4 \left[ \frac{x}{4} \right] + 9 < 13$$

$$\Rightarrow 9 \leq y < 13 \quad \text{گزینه ۴ صحیح است}$$

مثال ۵) برد تابع  $y = -3(x-1)^2 + 4$  کدام است؟

$$(1) (-\infty, 4] \quad (2) [4, +\infty) \quad (3) (-\infty, 4) \quad (4) (4, +\infty)$$

$$(x-1)^2 \geq 0 \xrightarrow{\times(-3)} -3(x-1)^2 \leq 0 \xrightarrow{+4} -3(x-1)^2 + 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۶) برد تابع  $y = 3|x+4| + 7$  کدام است ؟

$$(1) [3, +\infty) \quad (2) [7, +\infty) \quad (3) [4, +\infty) \quad (4) [11, +\infty)$$

$$|x+4| \geq 0 \xrightarrow{\times 3} 3|x+4| \geq 0 \xrightarrow{+7} 3|x+4| + 7 \geq 7 \Rightarrow y \geq 7$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۷) برد تابع  $y = |x-1| + |x+2|$  کدام است؟

$$(1, +\infty) \quad (2, +\infty) \quad (3, +\infty) \quad (4, +\infty)$$

برد تابع گلدانی به صورت  $y = |x-a| + |x-b|$  برابر است با:  $[|a-b|, +\infty)$

$$\begin{aligned} \implies x - 1 = 0 &\Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 &\Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

گزینه ۲ صحیح است  $\Rightarrow [|1 - (-2)|, +\infty) = [3, +\infty)$

مثال ۸) برد تابع  $y = |x-2| - |x+4|$  کدام است؟

$$(1, -2] \quad (2, -4] \quad (3, -8] \quad (4, -6]$$

برد توابع به صورت  $y = |x-a| - |x-b|$  برابر است با:  $[-|a-b|, |a-b|]$

گزینه ۴ صحیح است  $\Rightarrow a = 2, b = -4 \Rightarrow R_f = [-6, 6]$

مثال ۹) برد تابع  $y = 2\cos^2 x - 3\sin^2 x + 4$  کدام است؟

$$(1, -4] \quad (2, 2] \quad (3, -3] \quad (4, -1]$$

$$\Rightarrow y = 2\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) + 4$$

$$\Rightarrow y = 2\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x + 4 \Rightarrow y = 5\cos^2 x + 1$$

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 5} -5 \leq 5\cos^2 x \leq 5 \xrightarrow{+1} -4 \leq 5\cos^2 x + 1 \leq 6 \Rightarrow$$

$$-4 \leq y \leq 6 \quad \text{گزینه ۱ صحیح است}$$

مثال ۱۰) برد تابع  $y = -2x^2 + 4x + 1$  کدام است؟

$$(1, 3] \quad (2, -3] \quad (3, -\infty) \quad (4, -\infty, -3]$$

## درسنامه:

در تعیین برد توابع به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  ابتدا  $x = -\frac{b}{2a}$  را حساب کنید و بجای  $x$  مقدارش را در

تابع قرار دهید و  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  را بدست آورید:

برد  $\left[ f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty \right)$  اگر  $a > 0$  (الف)

برد  $\left( -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$  اگر  $a < 0$  (ب)

$$x = -\left(\frac{4}{2 \times (-2)}\right) = 1 \Rightarrow y = -2 + 4 + 1 \Rightarrow y = 3$$

گزینه ۳ صحیح است  $a < 0 \Rightarrow (-\infty, 3]$

مثال (۱۱) برد تابع  $y = [x] + [-x] + 3$  کدام است؟

$$\{ -2, -1 \} (4) \quad \{ -2, 3 \} (3) \quad \{ 2, 3 \} (2) \quad \{ -3, 2 \} (1)$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 0 + 3 = 3$$

گزینه ۲ صحیح است  $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y = -1 + 3 = 2$

مثال (۱۲) برد تابع  $y = x + \frac{4}{x}$  کدام است؟

$$y \geq 12 (4) \quad y \geq 8 (3) \quad y \geq 4 (2) \quad y \leq 2 (1)$$

می دانیم دنباله ی حسابی دو عدد  $a$  و  $b$  برابر  $\frac{a+b}{2}$  و واسطه ی هندسی بین آنها  $\sqrt{ab}$  است

می دانیم:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  می باشد.

فرض کنید  $a=x$  و  $b = \frac{4}{x}$  باشد  $\Leftarrow$

$$\frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{4}{x}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{4} \Rightarrow y \geq 4 \quad \text{گزینه ۲ صحیح است}$$

مثال (۱۳) برد تابع  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + 3$  چند عضو دارد؟

$$(1) \text{ عضوی ندارد} \quad (2) \text{ بی شمار} \quad (3) \quad (4) \quad (1)$$



$$\sqrt{x-1} \Rightarrow x \geq 1 \quad \sqrt{1-x} \Rightarrow x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_f = \{1\}$$

پس دامنه تابع فقط یک عضو دارد و آن هم  $x=1$  است که به ازای آن  $y$  فقط برابر ۳ می شود و برد یک عضو دارد.

گزینه ۴ صحیح است.

مثال (۱۴) برد تابع  $y = \frac{|x|}{|x|+1}$  کدام است؟

$$y \geq 1 \quad (1) \quad 0 \leq y < 1 \quad (2) \quad 1 \leq y < 2 \quad (3) \quad 0 \leq y < 2 \quad (4)$$

$$y = \frac{|x|}{|x|+1} \Rightarrow y|x| + y = |x| \Rightarrow y = |x| - y|x|$$

$$\Rightarrow y = |x|(1-y) \Rightarrow |x| = \frac{y}{1-y}$$

$$\frac{y}{1-y} \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0 \quad \text{می دانیم}$$

$$\text{با تعیین علامت } \frac{y}{1-y} \text{ داریم } 0 \leq y < 1$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال (۱۵) برد تابع  $y = \frac{x^2+1}{x^2-2}$  کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \quad (1) \quad y \leq -\frac{1}{2} \cup y > 1 \quad (2)$$

$$y \geq 2 \quad (3) \quad y \leq -\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$x^2 y - 2y = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x^2 y - x^2 = 2y + 1 \Rightarrow x^2(y-1) = 2y+1 \Rightarrow x^2 = \frac{2y+1}{y-1}$$

$$\frac{2y+1}{y-1} \geq 0 \quad \text{می دانیم } x^2 \geq 0 \text{ است پس}$$

$$\text{با تعیین علامت داریم } y \leq -\frac{1}{2} \cup y > 1$$

پس گزینه ۲ صحیح است

مثال ۱۶) برد تابع  $y = \sin x \cos x + 1$  کدام است؟

$$(1) \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \quad (2) [1, 2] \quad (3) \left[\frac{1}{2}, 2\right] \quad (4) [1, 3]$$

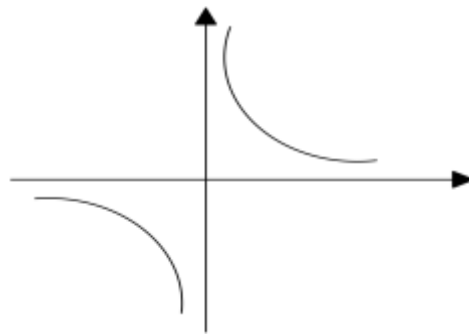
میدانیم  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x + 1 \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۱ صحیح است}$$

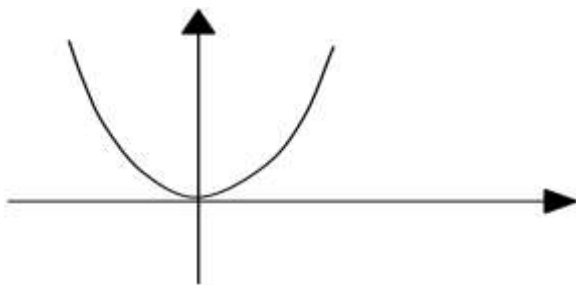
مثال ۱۷) برد تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > \frac{1}{2} \\ x^2 & -2 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$  شامل چند عدد صحیح است؟ (آزمونهای قلم چی)



$$\Longleftarrow y = \frac{1}{x} \text{ نمودار}$$

$\Leftarrow x > \frac{1}{2}$  چون سوال عنوان کرده

$$x > \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس کنید}} \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow y < 2$$

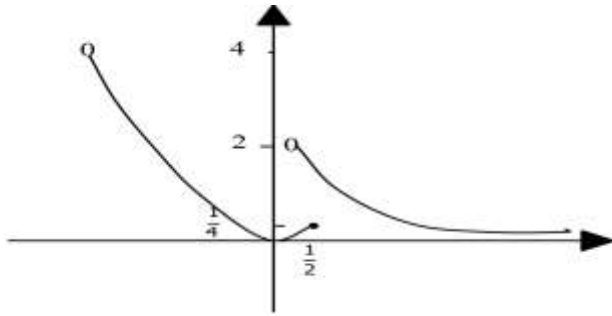


$$\Leftarrow y = x^2 \text{ نمودار}$$

$$-2 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq y < 4$$

$$\Rightarrow y = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{اعداد صحیح}$$

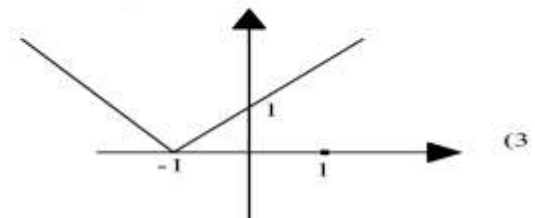
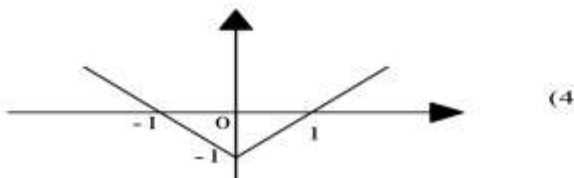
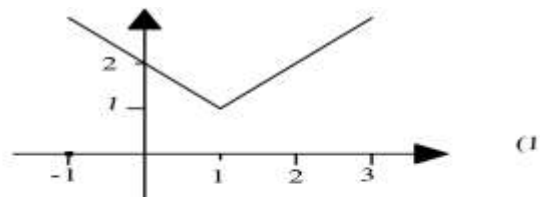
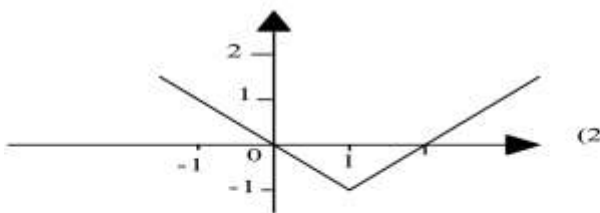
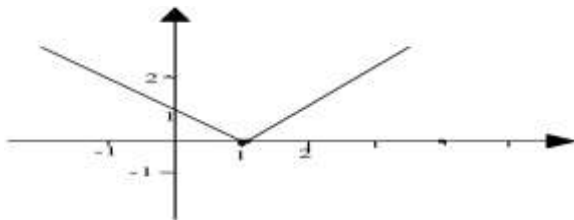
اگر ۲ نمودار را در یک دستگاه رسم کنیم :



### مدل چهاردهم: سوالاتی از جنس انتقال نمودار

مثال ۱) اگر نمایش هندسی تابع با ضابطه ی  $y=f(x)$  به صورت زیر باشد آنگاه نمایش هندسی تابع

$g(x)=f(x+1)-1$  کدام است؟



ابتدا به نمودار داده شده دقت کنید  $f(0)=1, f(1)=0$

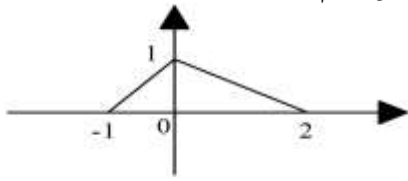
حالا به  $y=f(x+1)-1$  توجه کنید

اگر  $x=0 \Rightarrow y=f(1)-1=0-1$

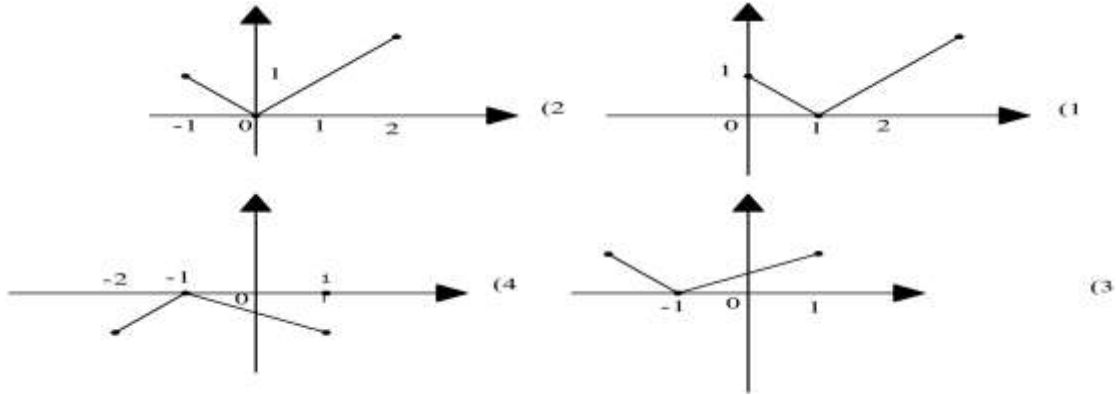
پس باید  $A$  عضو نمودار باشند که فقط گزینه ۴ صحیح است.

البته در  $y=f(x+1)-1$  نیز واضح است که نمودار یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال یافته است.

مثال ۲) اگر نمودار  $y=f(x)$  مطابق شکل زیر باشد نمودار  $y=1-f(x+1)$  کدام است.



(آزمونهای گزینه ۲)



به نمودار دقت کنید  $f(0)=1$ ,  $f(-1)=0$ ,  $f(2)=0$

حالا به  $y=1-f(x+1)$  توجه کنید

گزینه ۱، ۲، ۴ حذف می شود  $A \setminus \{1\} \in f$   $x=1 \Rightarrow y=1-f(2) \Rightarrow y=1$

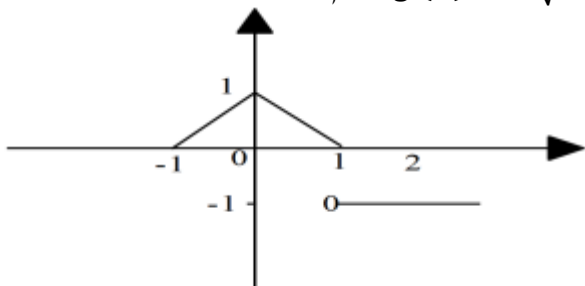
در حالت کلی نیز مشخص است ابتدا یک واحد به چپ  $y=f(x+1)$  سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه میکنیم  $y=-f(x+1)$

و سپس یک واحد به بالا منتقل می کنیم  $y=-f(x+1)+1$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳) با توجه به نمودار تابع  $y=f(x)$  برد تابع  $g(x)=2\sqrt{-f(x)}+5$  کدام است؟

(آزمونهای گزینه ۲)



(۱)  $\{5, 7\}$  (۲)  $\{7\}$  (۳)  $\{5\}$  (۴)  $[5, 7]$

توجه کنید باید  $-f(x) \geq 0$  باشد بنابراین باید  $f(x) \leq 0$  باشد.

یعنی  $y \leq 0$  باشد حال اگر به نمودار  $f(x)$  نگاه کنید فقط به ازای  $-1$  می تواند کوچکتر مساوی صفر باشد

$f(x)=0$ ,  $f(x)=-1$   $\Leftarrow$

$$\Rightarrow g(x) = 2\sqrt{0} + 5 = 5$$

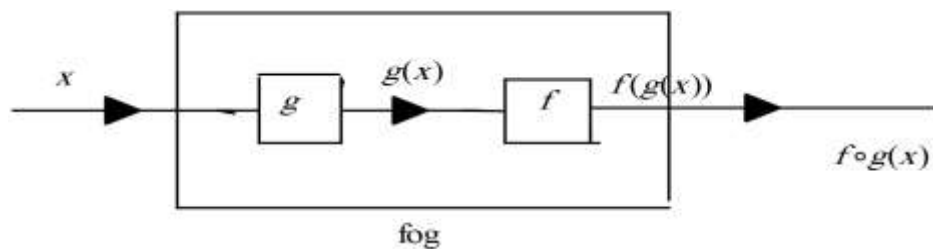
$$g(x) = 2\sqrt{-(-1)} + 5 = 7$$

$\Rightarrow$  گزینه ۱ صحیح است  $g(x) = \{5, 7\}$  برد

## مدل پانزدهم: مقدار یابی-معادلات-نامعادلات و تعیین ضابطه توابع

### ترکیبی

ترکیب توابع  $f \circ g$  تابعی مثل  $f \circ g$  است که به ورودی  $x$  و خروجی  $f(g(x))$  را نسبت می دهد.



بنابراین ورودی های تابع  $f \circ g$  (اولا) باید عضو دامنه ی  $g$  باشند (ثانیا) خروجی  $g$  به ازای آنها یعنی  $g(x)$  در دامنه ی  $f$  قرار داشته باشند به عبارتی

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

مثال ۱) اگر  $f(x) = x^2 + 3x$  و  $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$  آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع  $g \circ f$  که در بالای محور  $x$  ها قرار می گیرند برابر کدام بازه است ؟

$$(1) \quad (-4, 1) \quad (2) \quad (-3, 2) \quad (3) \quad (-2, 1) \quad (4) \quad (-1, 4)$$

$$g(f(x)) = g(x^2 + 3x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 > 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 3x + 4 > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} (-4, 1)$$

مثال ۲) در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

$$(1) \quad 6 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 8 \quad (4) \quad 9$$

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 2$$

$$f(5) = 2 \Rightarrow f(f(5)) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$$

$$\Rightarrow f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۳) اگر  $f(x) = 2 - 2|x - 2|$  ضابطه ی تابع  $f(f(x))$  برابر کدام است؟

$$x(1) \quad 4-x(2) \quad f(x)(3) \quad 2-f(x)(4)$$

فرض کنید برای  $x$  مقدار دلخواهی در نظر بگیریم مثلاً  $x=5$

$$\Rightarrow f(f(x)) = f(f(5)) = f(-1) = -1$$

پس وقتی  $x=5$  باشد در آن صورت  $f(f(x))$  برابر  $-1$  است.

بنابراین گزینه ی درست گزینه ای است که وقتی به  $x$  عدد ۵ بدهیم حاصل  $-1$  بشود

$$x \xrightarrow{x=5} 5 \text{ (گزینه ۱)}$$

$$4 - x \xrightarrow{x=5} -1 \text{ (گزینه ۲)}$$

$$2 - |x - 2| \xrightarrow{x=5} -1 \text{ (گزینه ۳)}$$

$$2 - (2 - |x - 2|) \xrightarrow{x=5} 3 \text{ (گزینه ۴)}$$

دوتا گزینه برابر  $(-1)$  شد حالا عدد دیگری را امتحان می کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(f(0)) = f(2) = 0 \text{ پس وقتی } x=0 \text{ باشد } f(f(x)) \text{ برابر است}$$

$$4 - x = 4 - 0 = 4 \text{ (گزینه ۲)}$$

$$f(x) = 2 - |0 - 2| = 0 \text{ (گزینه ۳)}$$

گزینه ۳ صحیح است.

روش اصلی:

$$f(x) = 2 - |x - 2|$$

$$f(f(x)) = f(2 - |x - 2|) = 2 - |2 - |x - 2| - 2| = 2 - \underbrace{|-|x - 2||}_{\text{منفی}} =$$

$$= 2 - |x - 2| = f(x)$$

مثال ۴) دو تابع  $g$  و  $f$  به صورت مجموعه ی زوج های مرتب بیان شده اند در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

$$f \circ g(1) \quad f \cap g(2) \quad f - g(3) \quad f \circ g(4)$$

$f \cup g$  ممکن است تابع نباشد مثلاً :

$$f = \underbrace{\{(1,2)\}}_{\text{تابع است}} \quad g = \underbrace{\{(1,3)\}}_{\text{تابع است}} \Rightarrow f \cup g = \underbrace{\{(1,2)(1,3)\}}_{\text{تابع نیست}}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۵) اگر  $f(x) = \sqrt{x+1}$  و  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$  مقدار  $(2f-g)(3)$  کدام است؟

$$-1(1) \quad 2(\text{صفر}) \quad 1(3) \quad 1(4)$$

$$2f(3) - g(3) = 2(\sqrt{3+1}) - \frac{3+1}{3-2} = 4 - 4 = 0 \quad \text{گزینه ۲ صحیح است}$$

مثال ۶) اگر  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = \frac{x}{1-x}$  آنگاه  $(f \circ g)(\sqrt{2})$  کدام است؟

$$-4(1) \quad -3(2) \quad -2(3) \quad -1(4)$$

$$f(g(\sqrt{2})) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1.4}{-0.4}\right) = f(-3.5) = [-3.5] = -4$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۷) اگر  $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$  مقدار  $f(f(-1))$  کدام است ؟

$$1(3) \quad 2(\text{صفر}) \quad \sqrt{2}(4) \quad \text{تعریف نشده}$$

$$f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{-\sqrt{2}} \quad \text{تعریف نشده}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۸) اگر  $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$  مقدار  $f(f(-144))$  کدام است؟

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

$$f(-144) = \sqrt{-144 + 2|-144|} = \sqrt{144} = 12$$

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{36} = 6$$

مثال ۹) در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{\sin \pi x - 1} + [x] + [-x]$  مقدار  $f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)$  کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) تعریف نشده

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \Rightarrow \sin \pi x = 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$-1 \leq \sin \pi x \leq 1 \quad \text{از طرفی}$$

$$[x] + [-x] = -1 \iff x \notin \mathbb{Z} \quad \text{پس } x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 - 1 = -1$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۰) دو تابع با ضابطه  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروضند اگر  $g(f(x)) = -2$  آنگاه مجموعه ی مقادیر  $x$  کدام است؟

۱)  $R - \mathbb{Z}$  ۲)  $\mathbb{Z}$  ۳)  $R$  ۴)  $\emptyset$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{میدانیم}$$

$$g(f(x)) = -2 \Rightarrow g(0 \text{ یا } -1) = -2$$

$$x \in \mathbb{Z} \implies g(0) = (0)^2 + 0 - 2 = -2 \implies x \in \mathbb{Z}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \implies g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2 \implies x \notin \mathbb{Z}$$

در نتیجه  $x \in R$  است.

گزینه ۳ صحیح است



مثال (۱۱) اگر  $f(x)=|x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  باشد حاصل  $(fog)_{(1-\sqrt{2})} - (gof)_{(1-\sqrt{2})}$  کدام است؟

$$4\sqrt{2}(4) \quad 4(3) \quad 4-(\sqrt{2}-1)(2) \quad 4-(1-\sqrt{2})(1)$$

$$f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2}))$$

$$g(x) = (x+1)^2 \Rightarrow g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 6 - 4\sqrt{2}$$

$$f(6 - 4\sqrt{2}) = \underbrace{|6 - 4\sqrt{2}|}_{\text{مثبت}} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g(f(1-\sqrt{2})) = g(|1-\sqrt{2}|) = g(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1+1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = (6 - 4\sqrt{2}) - (2) = 4 - 4\sqrt{2} =$$

$$4(1-\sqrt{2}) \quad \text{گزینه ۱ صحیح است}$$

مثال (۱۲) در تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2[x]$  مقدار  $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$  کدام است؟

$$2,75(4) \quad 2,5(3) \quad 2,25(2) \quad 1,75(1)$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2(1) = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left[-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{16} + 2 = 2,25$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال (۱۳) اگر  $f(x)=2x-2$  و  $g(x)=x^2-1$  جواب معادله  $(fog)(x)=0$  کدام است؟

$$\pm 3(4) \quad \pm \sqrt{3}(3) \quad \pm 2(2) \quad \pm \sqrt{2}(1)$$

$$f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۴) اگر  $f(x) = 3x + a$  و  $g(x) = 2 - x$  باشد و  $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x) = 6$  مقدار  $a$  کدام است؟

$$(۱) -۲ \quad (۲) -۱ \quad (۳) ۱ \quad (۴) ۲$$

$$f(g(x)) - g(f(x)) = 6$$

$$f(2 - x) - g(3x + a) = 6$$

$$(3(2 - x) + a) - (2 - (3x + a)) = 6$$

$$6 - 3x + a - 2 + 3x + a = 6$$

$$2a + 4 = 6 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۵) اگر  $y = f(x)$  یک تابع خطی گذرنده از نقاط  $(0, a)$  و  $(a, 0)$  باشند ضابطه  $(f \circ g)(x)$  کدام است؟

$$(۱) x \quad (۲) -x \quad (۳) \frac{x-1}{x+1} \quad (۴) \frac{2x}{x-1}$$

$$A \Big|_a^{\cdot} \quad B \Big|_{\cdot}^a \Rightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - a = \frac{\cdot - a}{a - \cdot} (x - \cdot) \Rightarrow y - a = -1(x)$$

$$\Rightarrow y = -x + a \Rightarrow f(x) = -x + a$$

$$f(f(x)) = f(-x + a) = -(-x + a) + a = x$$

گزینه ۱ صحیح است

مثال ۱۶) اگر  $x \neq 1$  و  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  ضابطه  $(f \circ g)(x)$  برابر کدام است؟

$$(۱) x \quad (۲) -x \quad (۳) \frac{x-1}{x+1} \quad (۴) \frac{2x}{x-1}$$

در تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  اگر  $a+d=0$  باشد آنگاه  $f(x) = f(x)^{-1}$  به عبارتی  $(f \circ f)(x) = x$  است. پس گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۷) اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  و  $g(x) = \tan x$  ضابطه  $(f \circ g)(x)$  در بازه  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  برابر کدام است؟

$$(۱) \sin x \quad (۲) \cos x \quad (۳) -\sin x \quad (۴) -\cos x$$

$$f(g(x)) = f(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\tan x}{|\cos x|}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ناحیه } ۳, ۲} \frac{\tan x}{- \cos x} = \tan x \cdot (-\cos x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \times \cos x = -\sin x$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال (۱۸) اگر  $f(x) = |x| - x$  ضابطه ی تابع  $(f \circ f)(x)$  کدام است؟

(۱)  $x$       (۲)  $|x|$       (۳)  $|x| + x$       (۴) صفر

$$f(f(x)) = f(|x| - x) = ||x| - x| - (|x| - x)$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow |x - x| - (x - x) = 0$$

$$x < 0 \Rightarrow |-x - x| - (-x - x) = |-2x| + 2x = -2x + 2x = 0$$

پس گزینه ۴ صحیح می باشد. توجه کنید که این سوال با عدد گذاری هم قابل حل هست.

مثال (۱۹) اگر  $f(x) = x^2 - 1$  نمودار  $y = (f \circ f)(x)$  با محور  $x$  ها کدام وضعیت را دارد؟

(۱) یک نقطه ی تلاقی-۲ نقطه ی تلاقی      (۲) ۲ نقطه تلاقی - یک نقطه تماس

(۲) ۳ نقطه تلاقی- فاقد نقطه ی تماس      (۳) فاقد نقطه ی تلاقی - ۲ نقطه تماس

$$f(f(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = 0$$

با توجه به اینکه  $x^2$  ریشه مضاعف دارد پس نقطه ی تماس است. (نمودار مماس است)

هم چنین  $x = \pm\sqrt{2}$  نقاط تماس اند.

پس گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{مثال (۲۰) تابع } f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases} \text{ مفروض است. } f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) \text{ کدام است؟}$$

(۱)  $\frac{3}{4}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{5}{4}$       (۴)  $\frac{9}{4}$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲۱) اگر  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$  و  $g(x) = 2\cos^2 x$  باشد مقدار  $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴) ۲

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(2\cos^2 \frac{\pi}{3}\right) = f\left(2 \times \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۲) اگر  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(x) = x - 4$  مقدار  $\frac{(f \circ g)(2)}{(g \circ f)(-1)}$  چقدر است؟

(۱)  $-\frac{5}{3}$  (۲)  $-\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴) ۲

$$\frac{f(g(2))}{g(f(-1))} = \frac{f(-2)}{g(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۳) اگر  $f(x) = 2x + 2a$  و  $g(x) = x^2 + bx + c$  و  $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x + 1$  انگاه  $a+b+c$  چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۳

$$f(g(x)) = f(x^2 + bx + c) = 2(x^2 + bx + c) + 2a = 2x^2 + 2bx + 2c + 2a$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 2x^2 + 2bx + 2c + 2a$$

$$\Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$2c + 2a = 1 \Rightarrow 2(a + c) = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال (۲۴) اگر  $f(x) = \sin x$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  باشد  $(g \circ f)(x)$  همواره کدام است؟ (ازمون های قلم چی)

$$\cos^2 x \quad \cos^2 x \quad \sin^2 x \quad -\cos^2 x$$

$$g(f(x)) = g(\sin x) = 2\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

مثال (۲۵) دو تابع  $f(x) = \sqrt{2x-3}$  و  $g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$  را در نظر می گیریم اگر  $(g \circ f)(k) = -1$  باشد آنگاه کدام مقدار برای  $k$  ممکن است؟ (آزمونهای قلم چی)

$$\frac{3}{2} \quad 2 \quad 4 \quad 3$$

$$g(f(k)) = -1 \Rightarrow g(\sqrt{2k-3}) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2k-3}-5}{3\sqrt{2k-3}+1} = -1 \Rightarrow \sqrt{2k-3}-5 = -3\sqrt{2k-3}-1$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2k-3} = 4 \Rightarrow \sqrt{2k-3} = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2k-3 = 1 \Rightarrow k = 2$$

**مدل شانزدهم: تعیین  $f \cdot g, \frac{f}{g}, f \times g, f \pm g$  از روی توابعی که به**

**صورت زوج مرتب بیان شده اند.**

در تعیین  $\frac{f}{g}, f \times g, f - g, f + g$  مولفه های اول را نوشته و مولفه های دوم را  $\pm \times$  می کنیم البته

توجه کنید که در  $\frac{f}{g}$  باید  $g \neq 0$  باشد. توجه کنید وقتی می گوئیم  $kf$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) مولفه های دوم را در  $k$  ضرب می کنیم.

مثال ۱) اگر  $f = \{(2,3)(3,5)(4,6)\}$  باشد تابع  $f \circ f$  کدام است؟ (آزمونهای قلم چی)

$$\{(2,5)\} (2) \quad \{(3,5)(2,5)\} (3) \quad \{(4,6)\} (4) \quad \{(3,2)\} (1)$$

|                                   |     |        |                 |
|-----------------------------------|-----|--------|-----------------|
|                                   | $x$ | $f(x)$ | $f(f(x))$       |
| $f \circ f(x) = f(f(x)) \implies$ | ۲   | ۳      | $f(3) = 5$      |
|                                   | ۳   | ۵      | $f(5) = \times$ |
|                                   | ۴   | ۶      | $f(6) = \times$ |

گزینه ۲ صحیح است.  $\{(2,5)\}$

مثال ۲) اگر  $f = \{(7,3)(3,5)(-3,-1)\}$  و  $g = \{(5,3)(3,2)(7,5)\}$  آنگاه  $(f+g) \circ (f-g)$  کدام است؟ (آزمونهای گزینه ۲)

$$\{(3,7)(-2,8)\} (4) \quad \{(-2,8)\} (3) \quad \{(3,7)\} (2) \quad \{3,-2\} (1)$$

$$f + g = \{(7,3+5)(3,5+2)\} = \{(7,8)(3,7)\}$$

$$f - g = \{(7,3-5)(3,5-2)\} = \{(7,-2)(3,3)\}$$

$$(f + g) \circ (f - g) = (f + g)(f - g)(x)$$

|     |         |                           |
|-----|---------|---------------------------|
| $x$ | $f - g$ | $(f + g(f - g))_x$        |
| ۷   | -۲      | $(f + g)_{(-2)} = \times$ |
| ۳   | ۳       | $(f + g)_3 = 7$           |

$$\implies \{(3,7)\} \quad \text{گزینه ۲ صحیح است}$$

مثال ۳) اگر  $f = \{(-1,1)(2,3)(1,3)\}$  و  $g = \{(1,-1)(2,1)(3,2)\}$  حاصل  $f \circ (f+g)$  کدام است؟

$$\{(3,2)\} (4) \quad \{(-1,4)\} (3) \quad \{(1,6)\} (2) \quad \{(2,4)\} (1)$$

$$2f = \{(-1,2)(2,6)(1,6)\}$$

$$f + g = \{(1,2)(2,4)\}$$

|                              |     |              |                       |
|------------------------------|-----|--------------|-----------------------|
|                              | $x$ | $(f + g)(x)$ | $2f(f + g)(x)$        |
| $(2f(f + g))_{(x)} \implies$ | ۱   | ۲            | $(2f)_{(2)} = 6$      |
|                              | ۲   | ۴            | $(2f)_{(4)} = \times$ |

$$\Rightarrow \{(1,6)\} \quad \text{گزینه ۲ صحیح است}$$

مثال ۴) اگر  $f = \{(2, 5), (-1, 3), (5, -1)\}$  و  $g = \{(3, 5), (7, 2), (1, 7)\}$  باشند آنگاه حاصل ترکیب

$(1 - g) \circ (2 + f)$  کدام است؟ (آزمون های گزینه ۲)

$$\{(2, -1), (5, -6)\} \quad \{(2, 7)\} \quad \{(7, 5)\} \quad \{ \} \quad (1)$$

$$-g = \{(3, -5), (7, -2), (1, -7)\} \Rightarrow -g + 1 = \{(3, -4), (7, -1), (1, -6)\}$$

$$f + 2 = \{(2, 7)\}(-1, 5), (5, 1)\}$$

$$(1 - g) \circ (f + 2)_{(x)}$$

| $x$ | $(f + 2)_{(x)}$ | $(1 - g)(f + 2)_{(x)}$ |
|-----|-----------------|------------------------|
| ۲   | ۷               | $(1 - g)(7) = -1$      |
| -۱  | ۵               | $(1 - g)(5) = \times$  |
| ۵   | ۱               | $(1 - g)(1) = -6$      |

$\Rightarrow \{(2, -1), (5, -6)\}$  گزینه ۴ صحیح است

مثال ۵) اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ,  $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ , و  $g(f(a)) = 5$  آنگاه عدد  $a$  کدام است؟

$$4(4) \quad 3(3) \quad 2(2) \quad 1(1)$$

$$f(a) = a + \sqrt{a} \Rightarrow g(a + \sqrt{a}) = 5$$

از طرفی در تابع  $g$  می بینیم که  $g(6) = 5$  است.

$$\Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\text{با امتحان کردن گزینه ها}} a = 4$$

گزینه ۴ صحیح است

مثال ۶) اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $f = \{(x - 2x - 1), x \in A\}$  تابع  $f(f(x))$  چند عضو دوتایی دارد؟

$$x \in A \Rightarrow (x, 2x - 1) \Rightarrow \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

| $x$ | $f(x)$ | $f(f(x))$  |
|-----|--------|------------|
| ۱   | ۱      | $f(1) = 1$ |
| ۲   | ۳      | $f(3) = 5$ |
| ۳   | ۵      | $f(5) = 9$ |
| ۴   | ۷      | $f(7) = x$ |
| ۵   | ۹      | $f(9) = x$ |

۳ عضو دوتایی دارد و گزینه ۲ صحیح است  $\implies \{(1,1)(2,5)(3,9)\}$

مثال ۷) تابع  $f = \{(2,1)(3,2)(4,5)(1,7)\}$  و  $g = \{(1,2)(3,1)(a,3)(b,1)\}$  مفروضند اگر  $(4,2) \in fog$

و  $(4,1) \in g \circ f$  باشند دوتایی  $(a,b)$  کدام است؟

$$(1) \quad (3,4) \quad (2,4) \quad (3,5) \quad (4,5)$$

$$(4,2) \in fog \implies (fog)(4) = 2 \implies f(g(4)) = 2, f(3) = 2 \implies g(4) = 3 \xrightarrow{g(a)=3}$$

$$a = 4$$

$$(4,1) \in g \circ f \implies (g \circ f)(4) = 1 \implies g(f(4)) = 1 \implies g(5) = 1, g(b) = 1 \implies b = 5$$

$$\implies (a,b) = (4,5)$$

گزینه ۳ صحیح است.

## مدل هفدهم: از بین آو و یکی را به همراه fog یا g of می دهند و دیگری

### را می خواهند

مثال ۱) اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  و  $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$  مقدار  $g(1)$  کدام است؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 5$$

$$f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \implies \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \implies 2g(1)-3 = 2g(1)+2 \implies g(1) = 5$$



مثال ۲) اگر  $f(x) = 2x^2 + 4$  و  $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$  مقدار  $g(-2)$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

$$f(g(x)) = 2g^2(x) + 4$$

$$\Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \xrightarrow{x=-2} 2(g(-2))^2 + 4 = 4(-2)^2 + 4 = 4(-2)^2 + 6(-2)$$

$$\Rightarrow 2g(-2)^2 + 4 = 16 - 12 \Rightarrow 2g(-2)^2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

مثال ۳) اگر  $(fog)_{(x)} = x^4$  و  $f(x) = (x+1)^2$  ضابطه  $g$  کدام است؟

(۱)  $x^2 - 1$  (۲)  $x^2 + 1$  (۳)  $x^4 + 1$  (۴)  $(x+1)^4$

$$f(g(x)) = (g(x) + 1)^2 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 = x^4 \Rightarrow |g(x) + 1| = x^2$$

$$\Rightarrow g(x) + 1 = \pm x^2 \Rightarrow g(x) = -1 \pm x^2 \Rightarrow -1 - x^2 \text{ یا } x^2 - 1$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴) اگر  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  و  $fog(x) = x^2 - 8x + 17$  باشد آنگاه  $g(7)$  کدام می تواند باشد؟ (آزمونهای قلم چی)

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) صفر

$$f(g(x)) = x^2 - 8x + 17 \Rightarrow g(x)^2 + 4g(x) + 5 = x^2 - 8x + 17$$

$$\Rightarrow g(x)^2 + 4g(x) + 4 + 1 = x^2 - 8x + 17$$

$$\Rightarrow (g(x) + 2)^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow (g(x) + 2)^2 = (x - 4)^2$$

$$g(x) + 2 = \pm(x - 4)$$

$$\text{الف) } g(x) + 2 = x - 4 \Rightarrow g(x) = x - 6 \Rightarrow g(7) = -1$$

$$\text{ب) } g(x) + 2 = -x + 4 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \Rightarrow g(7) = -5$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵) اگر  $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$  و  $f \circ g(x) = 3x + 1$  باشد مقدار  $g(1)$  کدام است؟ (آزمون های قلم چی)

$$\frac{7}{2}(1) \quad \frac{9}{5}(2) \quad \frac{5}{9}(3) \quad \frac{2}{5}(4)$$

$$f(g(x)) = 3x + 1 \Rightarrow \frac{g(x) - 1}{2 - g(x)} = 3x + 1$$

$$\xRightarrow{x=1} \frac{g(1) - 1}{2 - g(1)} = 4 \Rightarrow g(1) - 1 = 8 - 4g(1) \Rightarrow 5g(1) = 9 \Rightarrow g(1) = \frac{9}{5}$$

گزینه ۲ صحیح است

مثال ۶) اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $(f \circ g)(x) = 6x^2 + 5$  آنگاه  $g(x)$  کدام است؟ (آزمونهای قلم چی)

$$\frac{2}{x^2+1}(1) \quad 3x^2 + 3(2) \quad 3x^2 + 2(3) \quad \frac{2}{x^2-1}(4)$$

$$f(g(x)) = 6x^2 + 5 \Rightarrow 2g(x) - 1 = 6x^2 + 5$$

$$\Rightarrow 2g(x) = 6x^2 + 6 \Rightarrow g(x) = \frac{6(x^2 + 1)}{2} = 3x^2 + 3$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۷) اگر  $f(x) = x^2 - x - 2$  و  $(f \circ g)(x) = x^2 + x - 2$  آنگاه  $(f+g)(x)$  کدام گزینه میتواند باشد؟

$$x^2 - 1(1) \quad x^2 + 1(2) \quad x^2 - 2x(3) \quad x^2 + 2x(4)$$

$$f(g(x)) = x^2 + x - 2$$

$$g(x)^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2$$

$$g(x)^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\left(g(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$g(x) - \frac{1}{2} = \pm \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$g(x) - \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = x + 1 \Rightarrow (f + g)(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) - \frac{1}{x} = -x - \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = -x \Rightarrow (f + g)(x) = x^2 - 2x - 2$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۸) اگر  $f\left(\frac{x^2+2}{x}\right) = x^2 + \frac{4}{x^2}$  آنگاه  $f(x)$  کدام است؟

$$(1) x+4 \quad (2) x-2 \quad (3) x^2-2 \quad (4) x^2-4$$

$$\frac{x^2+2}{x} = k \Rightarrow x + \frac{2}{x} = k$$

دو طرف را بتوان دو برسانید

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = k^2 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = k^2 - 4$$

$$\Rightarrow f(k) = k^2 - 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4$$

گزینه ۴ صحیح است

مثال ۹) اگر  $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$  دامنه ی تابع با ضابطه ی  $f(x)$  کدام است؟

$$(1) [-1, 0) \quad (2) [0, 1) \quad (3) [-1, 1) \quad (4) [1, \infty)$$

$$\frac{x-1}{x} = u \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = u \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 - u \Rightarrow x = \frac{1}{1-u}$$

$$\Rightarrow f(u) = \sqrt{2\left(\frac{1}{1-u}\right) - 1} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1}$$

$$\frac{2}{1-x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2-1+x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x < 1$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۰) اگر  $f(x) = \frac{x}{2-x}$ ،  $(f \circ g)(x) = \frac{x}{2}$  ضابطه ی تابع  $g$  کدام است؟

$$(1) \frac{x}{x+1} \quad (2) \frac{x-1}{x} \quad (3) \frac{x}{x-1} \quad (4) \frac{x+1}{x}$$

$$g(f(x)) = \frac{x}{2} \Rightarrow g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2-x} = u \Rightarrow x = 2u - ux \Rightarrow x + ux = 2u \Rightarrow x(1+u) = 2u \Rightarrow x = \frac{2u}{1+u}$$

$$\Rightarrow g(u) = \frac{\frac{2u}{1+u}}{2} \Rightarrow g(u) = \frac{2u}{2(1+u)} = \frac{u}{1+u}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{1+x}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال (۱۱) اگر  $f(x) = 2x + 3$ ،  $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$  باشد ضابطه ی fog کدام است ؟  
(آزمونهای قلم چی)

$$2x^2 - 3x + 7(2)$$

$$2x^2 - 7x + 3(1)$$

$$4x^2 - 4x + 11(4)$$

$$4x^2 - 2x + 13(3)$$

$$g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow 2x+3 = u \Rightarrow x = \frac{u-3}{2}$$

$$\Rightarrow g(u) = 8 \times \frac{(u-3)^2}{4} + 22 \left( \frac{u-3}{2} \right) + 20 = 2u^2 - 12u + 18 + 11u - 33 + 20$$

$$g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$f(g(x)) = f(2x^2 - x + 5) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x + 13$$

گزینه ۳ صحیح است.

## مدل هجدهم : دامنه fog و gof

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad , \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال (۱) اگر  $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ ،  $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$  دامنه ی تابع gof کدام است؟

$$(0, +\infty)(4 \quad R - \{0\}(3 \quad R - \{0, 4\}(2 \quad (0, 4) \cup (4, +\infty)(1$$

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} \Rightarrow x+|x| \geq 0 \Rightarrow D_f = R$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow D_f = R - \{0, 4\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\Rightarrow \{x \in R \mid \sqrt{x + |x|} \neq 0, 4\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + |x|} \neq 0, \sqrt{x + |x|} \neq 4$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x} \neq 0, 4 \xRightarrow{\text{توان ۲}} 2x \neq 0, 16 \Rightarrow x \neq 0, 8$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x + |x|} \neq 0, 4 \Rightarrow x \geq 0$$

پس تمام  $x$  هایی که  $x < 0$  غیر قابل قبول است.

$$\Rightarrow (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

مثال ۲) اگر  $g(x) = \sqrt{1-x}, f(x) = \sqrt{x-1}$  دامنه تابع  $\text{fog}(x)$  کدام است؟

$$x \geq 0 \quad (1) \quad x \leq 0 \quad (2) \quad x \geq 1 \quad (3) \quad 0 \leq x < 1 \quad (4)$$

$$D_f: x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad D_g: 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow \{x \leq 1 \mid \sqrt{1-x} \in x \geq 1\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x} \geq 1 \Rightarrow 1-x \geq 1 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 1 \cap x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۳) اگر  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}, D_f = [3, \infty)$  باشد دامنه ی تابع  $(f \circ g)(x)$  کدام است؟ (آزمون های

قلم چی)

$$(1, 3] \quad (1) \quad [3, \infty) \quad (2) \quad (1, 2] \quad (3) \quad [2, \infty) \quad (4)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow \{x \in R - \{1\} \mid \frac{x+1}{x-1} \in [3, \infty)\}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 3 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1-3x+3}{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+4}{x-1} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x \leq 2$$

$$\Rightarrow (R - \{1\}) \cap (1 < x \leq 2) \Rightarrow (1, 2]$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۴) اگر داشته باشیم  $f = \{(1, 2)(3, 1)\}$  دامنه ی تابع  $f \circ f^{-1}$  کدام است؟ (آزمون های قلم چی)

$$\{1, 3\}(4) \quad \{1, 2\}(3) \quad \{2\}(2) \quad \{1, 2, 3\}(1)$$

|     |             |                |
|-----|-------------|----------------|
| $x$ | $f^{-1}(x)$ | $f(f^{-1}(x))$ |
| ۲   | ۱           | $f(1) = 2$     |
| ۱   | ۳           | $f(3) = 1$     |

$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = \{(2, 2)(1, 1)\} \Rightarrow D_{f \circ f^{-1}} = \{1, 2\}$$

$$f^{-1} = \{(2, 1)(1, 3)\} \quad \text{گزینه ۳ صحیح است.}$$

مثال ۵) اگر  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$  آنگاه دامنه تابع  $f \circ f$  شامل چند عدد صحیح است؟ (آزمونهای قلم چی)

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) \quad (3) \quad (4) \text{ بی شمار}$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow \{x \geq 0 \mid 1 - \sqrt{x} \in x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$(x \geq 0) \cap (0 \leq x \leq 1) = 0 \leq x \leq 1$$

مثال ۶) اگر  $g(x) = 3 - 2x$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$  باشد دامنه ی تابع  $(g \circ f) + (f \circ g)$  کدام است؟  
(آزمونهای قلم چی)

$$\{1\}(1) \quad \{1, 2\}(2) \quad [-1, 2](3) \quad [-1, 1](4)$$

$$D_g = R \quad D_f = 1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} \Rightarrow \{x \in R, 3 - 2x \in [-1, 1]\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} \Rightarrow \{x \in R, 3 - 2x \in [-1, 1]\}$$

$$-1 \leq 3 - 2x \leq 1 \xrightarrow{3} -4 \leq -2x \leq -2 \xrightarrow{\div(-2)} 2 \geq x \geq -1$$

$$\Rightarrow R \cap [-1, 2] = [-1, 2]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} \Rightarrow \{x \in [-1, 1], \sqrt{1 - |x|} \in R\}$$

$$\sqrt{1 - |x|} \in R \Rightarrow 1 - |x| \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{g \circ f} = [-1, 1]$$

چون ۲ تابع fog و gof جمع شده اند پس دامنه کل برابر اشتراک دامنه هاست.

$$\Rightarrow [-1, 2] \cap [-1, 1] = [-1, 1]$$

گزینه ۴ صحیح است.

## مدل نوزدهم: تابع به عنوان ماشین

همان طوری که می دانیم تابع به عنوان یک ماشین عمل می کند که ورودی آن مقادیر دامنه و خروجی آن مقادیر برد هستند. توجه کنید اگر خروجی یک ماشین را داشته باشیم و بخواهیم ورودی را پیدا کنیم ضابطه تابع را مساوی خروجی قرار می دهیم. و اگر ورودی را داشته باشیم با قرار دادن در ضابطه ی تابع خروجی بدست می آید. و البته اگر چند ماشین پشت سرهم باشند خروجی ماشین اول برای ماشین دوم ورودی است و خروجی ماشین دوم برای ماشین سوم ورودی است.

مثال ۱) اگر خروجی از ماشین شکل مقابل  $\frac{4}{3}$  باشد مقدار ورودی کدام است؟



$$1(4)$$

$$3(3)$$

$$\frac{7}{2}(2)$$

$$\frac{11}{9}(1)$$

$$\frac{x}{1 + \sqrt{x}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲) با توجه به ماشین زیر اگر  $f(x) = 2x - 1$  آنگاه  $g(\cdot)$  کدام است؟



۱) ۱      ۲) صفر      ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴) ۲

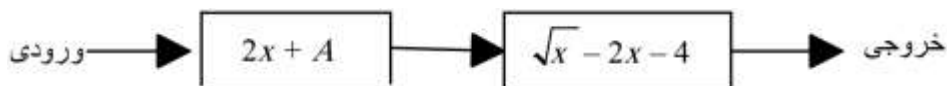
$$g(f(x)) = x \Rightarrow g(2x - 1) = x$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow g(\cdot) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳) اگر خروجی ماشین شکل مقابل برای ورودی ۲ برابر ۵- باشد،  $A$  کدام است؟



۱)  $-\frac{15}{4}$       ۲) -۳      ۳) ۳      ۴)  $\frac{15}{4}$

$$x = 2 \Rightarrow 4 + A \Rightarrow \sqrt{4 + A} - 2(+4 + A) - 4 = -5$$

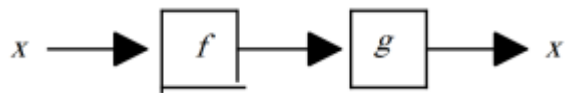
$$\sqrt{4 + A} = t \Rightarrow t - 2t^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 & \text{ق ق} \\ t = -\frac{1}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow \sqrt{4 + A} = 1 \Rightarrow A = -3$$

گزینه ۲ صحیح است.



مثال ۴) در ماشین زیر اگر  $f(x) = x^3 + 4x$  آنگاه  $g(-5)$  کدام است؟



۲(۴)

-۲(۳)

-۱(۲)

۱(۱)

$$g(f(x)) = x \Rightarrow g(x^3 + 4x) = x$$

$$x = -1 \Rightarrow g(-5) = -1$$

گزینه ۲ صحیح است.