بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضی گسسته

ویژه دانش آموزان ممتاز

سرشناسه :	یکتا ، مسعود ، ۱۳۵۳
عنوان و پدید آور :	ریاضی گسسته / مولف : مسعود یکتا
مشخصات نشر :	مشهد : قلم و ذهن
مشخصات ظاهری :	۹۲ صفحه : مصور ، ۲۰ * ۲۹ س م
شابک :	۹۷۸-۶۰۰-۹۶۰۴۳-۶-۴
وضعیت فهرست نویسی :	فیپا
موضوع :	ریاضیات-- آزمون ها و تمرین ها(متوسطه)
موضوع :	ریاضیات-- راهنمای آموزشی (متوسطه)
قیمت :	۲۰,۰۰۰ تومان

نام کتاب : صفر تا صد احتمال
ناشر : مشهد : قلم و ذهن ، ۱۳۹۷
طرح جلد : هـومن بنــائـی
صفحه آرا : امیرحسین صباغی
تیراژ : ۱۰۰۰ جلد
نوبت چاپ : سوم ۱۳۹۷ ، خانه معلم
مشهد ، نبش معلم ۲۶

مقدمه چاپ اول

شکر خدا این جزوه احتمال هم تموم شد بعد حدود ۱/۵ ماه تلاش . این جزوه نوشته شده برای اونایی که با عشق درس می خونن و می خوان آینده زیبایی داشته باشند.

امروز ۹۳/۶/۱۶ مصادف شده با تولد ولی نعمتمان حضرت امام رضا(ع) که اتفاق خیلی خیلی مبارکی است. این اثر ناچیز رو تقدیم می کنم به پیشگاه مقدس امام رضا (ع) . تا چه در نظر آید.

مقدمه ویرایش دهم

در کنکور سراسری ۹۶ رشته ی تجربی سوالات بخش احتمال دقیقا از این کتاب طرح شد (اینجانب طراح کنکور نبودم!)

و این نیست جز به برکت نام مقدس امام رضا بر پیشانی این کتاب.

البته با پوشش کاملی که مجموعه حاضر در مبحث احتمال دارد انشالله در سالهای آینده نیز شاهد این اتفاق بی نظیر باشیم.

در ویرایش نهم (چاپ دوم قلم ذهن) کاریکاتورهایی به کتاب اضافه شد ه است که بر زیبایی مجموعه افزوده است.

همچنین DVD های تدریس هم اضافه شده است که برای مرور و تثبیت مطالب بسیار مفید است. همچنین در ویرایش دهم، این مجموعه برای رشته ریاضی جهت انطباق صددرصدی مطالب با نظام جدید آموزشی و کتاب یازدهم بازنویسی شده است

برای استفاده بهتر از این مجموعه به موارد زیر توجه کنید:

۱- برای استفاده از این جزوه کافیه همشو بخونید و همه تست ها شو حل کنید (؟!)

اگه این کارو بکنید تو هر آزمونی مسائل احتمال براتون خیلی ساده می شه و به جایی می رسید که به جز خدا نبینید ... ای وای رفتم تو ادبیات

۲ – حتما ترکیبات رو مطالعه‌کنیدو همه تست هاشو بزنین اگه وقت نداشتید زوج ها یا فردها رو انتخاب کنید.

۳ – بعضی تست های احتمال دارای حل نیستند. می‌تونین حل اینها رو تو سایت ببینین.

۴ – در آخر هم تست های احتمالی آزمونهای سراسری و گزینه ۲ و سنجش رو هم‌براتون گذاشتیم تاخودتون‌رو خوب محک بزنین و تو آزمونها بترکونین.

امیدوارم با مطالعه این جزوه ذهنیتی جدید در احتمال براتون ایجاد شه

در خـاتمه لازم است از مدیریت انتشارات خانه معلم جناب آقای صباغی و تیم همراهشان که آماده سازی مجـموعه حـاضر بدون زحماتشان انجام پذیر نبود تشکر و قدردانی کنم.

تا بعد ......

مسعود کریمی

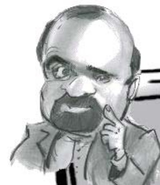
۹۷/۴/۲ - مشهد مقدس

فهرست

ایده هات رو اینجا بنویس

شمارش

می‌خواهیم بدون عمل شمردن تعداد حالات انجام کاری را بدانیم. در واقع ترکیبیات شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن روش‌هایی برای بدست آوردن تعداد حالات ممکن برای انجام یک عمل بدون شمارش معرفی می‌کند برای این منظور باید قوانینی را به کار ببریم تا به مقصودمان برسیم.



درسنامه

فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد تعریف می کنیم $n!=n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 1$

نتیجه : $n! = n\,(n-1)! = n\,(n-1)\,(n-2)! = \ldots$

قرارداد : $0! = 1$

می توانیم عبارتی شامل فاکتوریل را ساده کنیم به عنوان مثال

$$\frac{13!}{9!\,4!} = \frac{13\times12\times11\times10\times\cancel{9!}}{\cancel{9!}\times4\times3\times2\times1} = 13\times11\times5 = 715$$

درسنامه

اصل جمع: اگر عملی به n_1 حالت و عمل دیگری به n_2 حالت قابل انجام باشد و انجام همزمان این دو عمل نیز غیرممکن باشد، تعداد حالات وقوع عمل اول یا عمل دوم برابر است با

$n_1 + n_2$

مثال ۱: اگر از مشهد به تهران به ۶ روش و از مشهد به بیرجند به ۴ روش بتوان مسافرت کرد برای رفتن از مشهد به بیرجند یا تهران چند روش موجود است؟

پاسخ : $6+4=10$

زندگی یک بازی تمرینی نیست ، خود خود مسابقه است حاضرم جانم را بدهم اما بازی را نیمه کاره رها نکنم

درسنامه

اصل ضرب: برای انجام چند کار با یکدیگر تعداد حالات انجام هر کدام در هم ضرب می‌شود. به طور کلی اگر کار اول به n_1 حالت و کار دوم به n_2 حالت و ... کار m ام به n_m حالت انجام شود برای انجام همه کارها با یکدیگر تعداد حالات برابر است با

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

<u>مثال ۲:</u> اگر از مشهد به تهران به ۴ روش و از تهران به کرج به ۳ روش بتوان مسافرت کرد

الف: از مشهد به کرج به چند روش می توان مسافرت کرد؟

پاسخ : هر دو کار با هم انجام می‌شود بنابراین باید تعداد حالات را با یکدیگر ضرب کرد ۱۲ = ۳×۴.

ب: از مشهد به کرج به چند روش می‌توان رفت و برگشت انجام داد؟

پاسخ: تهران به مشهد ← ۴ × ۳ × ۳ × ۴

کرج به تهران   تهران به کرج   مشهد به تهران

ج: از مشهد به کرج به چند روش می‌توان رفت و برگشت انجام داد به طوری که تکه مسیر تکراری طی نکرده باشیم؟

پاسخ : ۳ × ۲ × ۳ × ۴

د: از مشهد به کرج به چند طریق می‌توان رفت و برگشت کرد به طوری که حداقل یک بار از تکه مسیر تکراری استفاده کرد؟

پاسخ: ۷۲ - ۱۴۴

<u>مثال ۳:</u> با ارقام ۵ و۴ و۳ و۲ و۱ و ۰ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟(تکرار مجاز نیست)

پاسخ:

می‌دانیم برای ساخت یک عدد سه رقمی سه جایگاه داریم:

یکان	دهگان	صدگان
۴	۵	۵

صدگان نمی‌تواند صفر قرار گیرد بنابراین ۵ حالت دارد

حال یکی از اعداد برای صدگان حذف شده است ۵ عدد دیگر می‌ماند

برای یکان فقط ۴ حالت دیگر داریم

برای کل حالات ۱۰۰=۴ × ۵ × ۵ حالت داریم.

<u>مثال ۴:</u> با ارقام ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و۰ چند عدد زوج سه رقمی می توان ساخت؟

پاسخ : چون ارقام <u>مختوم به صفر زوج می‌باشند</u> و از طرفی <u>هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود</u>

۲ حالت در نظر می گیریم.

الف) عدد مختوم به صفر   ۳۰ = ۱ × ۵ × ۶

فقط ۰

۱	۵	۶

ب) عدد مختوم به ۲ یا ۴ یا ۶   ۷۵ = ۳ × ۵ × ۵

۶ یا ۴ یا ۲

۳	۵	۵

۱۰۵ = ۳۰ + ۷۵ ← کل حالات = الف یا ب

یک راند دیگر مبارزه کن ، وقتی پاهایت چنان خسته‌اند که بزور راه می‌روی ، یک راند دیگر مبارزه کن ، وقتی بازوهایت چنان خسته‌اند که قدرت گارد گرفتن نداری ، یک راند دیگر مبارزه کن ، وقتی که خون از دماغت جاری است و چشمانت سیاهی می‌رود و چنان خسته‌ای که آرزو می‌کنی حریف با مشتی محکم به دهانت کار را تمام می‌کند ، یک راند دیگر مبارزه کن . و بهیاد داشته باش! فردی که یک راند دیگر مبارزه می‌کند ، هرگز شکست نمی‌خورد.
جیمز کوربت

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

جایگشت n شی متمایز : حالات مختلف قرار گرفتن n شی متمایز در کنار یکدیگر را جایگشت (جای+گردیدن) آن n شی می نامند.
تعداد جایگشت های n شی متمایز که در یک ردیف قرار گرفته باشند برابر است با $n!$

مثال۵: به چند طریق می توان ۱۰ کتاب را در یک قفسه کنار هم چید؟

پاسخ : !۱۰

مثال ۶ : ۴ کتاب فیزیک و ۵ کتاب ریاضی و ۶ کتاب زیست شناسی مختلف را به چند طریق می‌توان به صورت های زیر کنار یکدیگر قرار داد؟

الف) هیچ محدودیتی نباشد.

پاسخ: ! ۱۵ = !(۶ + ۵ + ۴)

ب) کتاب‌های فیزیک کنار هم باشد.

پاسخ: ابتدا کتاب‌های فیزیک را کنار هم می‌چینیم تا یک دسته درست شود !۴ .

سپس یک دسته فیزیک و ۵ کتاب ریاضی و ۶ کتاب زیست یعنی ۱۲ = (۶+۵+۱) شی را کنار یکدیگرمی‌چینیم !۱۲

حال این دو کار را با هم انجام می دهیم   !۴ × !۱۲

ج) کتاب‌های ریاضی کنار هم و فیزیک کنار هم باشد.

پاسخ : !۵ × !۴ × !۸

(یک بسته فیزیک + یک بسته ریاضی+ ۶ زیست)   کتاب‌های فیزیک   کتاب‌های ریاضی

د) کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند.

پاسخ : !۴ × !۵ × !۶ × !۳

سه دسته بزرگ   کتاب های فیزیک   کتاب های ریاضی   کتاب های زیست

ه) کتاب‌های ریاضی و فیزیک یک در میان باشند.

پاسخ : ابتدا فیزیک و ریاضی را یک در میان می‌چینیم. چون تعداد کتاب ریاضی بیشتر از فیزیک است شروع با ریاضی است .

□ ○ □ ○ □ ○ □ ○ □
ر ف ر ف ر ف ر ف ر

!۵ × !۴ →

۴ جای خالی باید با ۴ کتاب پر شود   ۵ جای خالی باید با ۵ کتاب پر شود

حال یک بسته بزرگ یک در میان فیزیک و ریاضی داریم. و ۶ کتاب زیست شناسی بنابراین در کل ۷= ۶ + ۱ زیست داریم که باید کنار هم چیده شود همه این کارها باید با هم انجام شود یعنی   !۷ × !۴ × !۵

ایده هات رو اینجا بنویس

نکته

تعداد حالات یک در میان، اگر تعداد دو شی برابر باشند عبارتست از $2\times n!\times n!$

اگر یک شی یکی بیشتر باشد عبارتست از $(n+1)!\times n!$

مثال ۷: ۵ نوع کتاب مختلف و ۵ نوع دفتر مختلف را به چند طریق می‌توان یک در میان چید؟

پاسخ : $2\times 5!\times 5!$

درسنامه

جایگشت با تکرار: هرگاه بخواهیم n شی را کنار هم قرار دهیم به طوریکه n_1 شی از نوع اول n_2 شی از نوع دوم و ... باشد تعداد حالات عبارتست از :

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\dots}$$

مثال ۸ : با حروف کلمه «آرارات» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

پاسخ:

$$\frac{6!}{3!\times 2!}$$

تعداد کل حروف ← $6!$

تعداد (ر) ها ← $2!$ ، تعداد (الف) ها ← $3!$

مثال ۹ : با ارقام ۰ و ۰ و ۰ و ۴ و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ و ۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان ساخت؟

پاسخ : فرض کنید ارقام متمایز باشند مثلا ۰ و ۰ و۰و۴و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ و ۵

در پایان وقتی اعداد ۹ رقمی نوشته شد، جایگشت اشیاء تکراری را حذف می‌کنیم

$$\frac{6\times 8!}{3!\times 3!\times 3!}$$

برای سمت چپ نمی‌توانیم از صفر استفاده کنیم ← 6

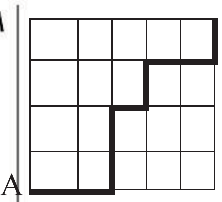
مثال ۱۰: با ارقام ۰ و ۰ و ۰ و ۰ و ۴ و ۴ و ۴ و۴ چند عدد ۸ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

پاسخ: فرض کنید ارقام متمایز باشند. تعداد جایگشت‌ها بدون در نظر گرفتن تکرار برابر است با

$$\frac{4\times 7!}{4!\times 4!}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

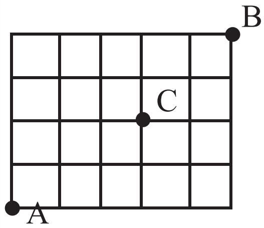
مثال ۱۱: **در شبکه مستطیلی شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه A به نقطه B حرکت کرد به طوری که کوتاهترین مسیر پیموده شود؟**



پاسخ: برای آن که با کوتاهترین مسیر از A به B برویم باید حداقل ۹ حرکت انجام دهیم.

مثلا دنباله rruururru نشان دهنده مسیر مقابل است. باید ۵ حرکت به راست و ۴ حرکت به بالا انجام دهیم یعنی یک دنباله متشکل از ۴ تا u و ۵ تا r که این کار به $\frac{9!}{5!4!}$ حالت امکان پذیر است.

مثال ۱۲: **در مسئله فوق اگر بخواهیم تعداد مسیرهایی را به دست آوریم که حتما از نقطه C بگذرند، به چند طریق ممکن است؟**



پاسخ: ابتدا از A به C می‌رویم سپس از C به B می‌رویم

$$\frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}$$

درسنامه

جایگشت های دوری: تعداد حالات قرار گرفتن n شی در اطراف یک دایره برابر $(n-1)!$ است و تعداد این جایگشت‌ها وقتی که جهت دور اهمیت نداشته باشد (دسته کلید- گردنبند) برابر $\frac{(n-1)!}{2}$ است.

مثال ۱۳: **رئیس، منشی و ۴ کارمند دور یک میز دایره‌ای می‌نشینند.**

الف: این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

پاسخ $(6-1)! = 5!$

ب: در چند حالت منشی مقابل رئیس می‌نشینند؟

پاسخ: $\underbrace{\text{رئیس و منشی}}_{\text{یک نفر}}$ + ۴ کارمند = ۵ نفر

$(5-1)! = 4!$ جایگشت دایره‌ای

ج: در چند حالت منشی کنار رئیس می‌نشینند؟

پاسخ: جایگشت رئیس و منشی

$2! \times 4!$

د: در چند حالت منشی سمت چپ رئیس می‌نشینند؟

پاسخ: $4! \times 1 \leftarrow$ رئیس/منشی جایگاه ثابت است

ایده هاتو اینجا بنویس

مثال ۱۴: با حروف f و e و d و c و b و a چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت به طوریکه حتما b و a کنار هم باشند و d و c کنار هم نباشند؟

پاسخ: $\boxed{ab}$ و c و d و e و f ← تعداد حالاتی که b و a کنار هم هستند = !۵ × !۲

$\boxed{ab}$ و $\boxed{cd}$ و e و f ← تعداد اعدادی که b و a کنار هم هستند و d و c کنار هم هستند = !۴ × !۲ × !۲

تعداد اعدادی که a و b کنار هم هستند و c و d کنار هم نیستند = !۵ × !۲ − !۴ × !۲ × !۲

مثال ۱۵: ۵ نفر a و b و c و d و e می‌خواهند سخنرانی کنند. به چند طریق بین فرد a و b فقط یک نفر سخنرانی می‌کند؟

پاسخ:

$$36 = 3 \times 2 \times 3!$$

افرادی که بین a و b صحبت می‌کنند ، جابجا شدن a و b ، جایگشت ۳ شی

درسنامه

مسئله انتخاب

یکی از مهمترین مسائل در ترکیبیات مسئله انتخاب r شی از n شی مختلف است که از دو حالت می توان به این مسئله نگریست:

الف: در انتخاب ترتیب مهم باشد (تبدیل) $\quad P(n\,,r) = \frac{n!}{(n-1)!}$

ب: در انتخاب ترتیب مهم نباشد (ترکیب) $\quad C(n\,,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-1)!}$

مثال ۱۶: به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر یک رئیس و معاون و منشی انتخاب کرد؟

پاسخ: از آنجا که ترتیب انتخاب مهم می باشد داریم :

$$P(10\,,3) = \frac{10\,!}{7\,!} = 10 \times 9 \times 8$$

مثال ۱۷: تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $A = \{a\,, b\,, c\,, d\,, e\,, f\,, g\}$ که دارای عضو a باشند ولی دارای عضو g نباشد چندتا است؟

پاسخ: ابتدا یک مجموعه ۳ عضوی در نظر می‌گیریم که دارای a باشد $\{a, \bigcirc, \bigcirc\}$

بنابراین دو جای خالی داریم که باید با دو عضو از ۵ عضو $\{b, c, d, e, f\}$ پر شود یعنی تعداد حالات برابر است با :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

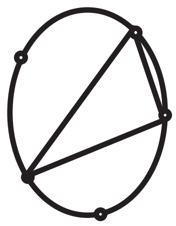
ما با آرزوهامون زنده ایم ، قشنگترین دلیل ادامه دادن، رسیدن و ساختن کمک کردن به مردمه ، نذار چهارتا اشتباه بچه گانه ای که در گذشته کردی ، آرزوت رو محو کنه ما تا آخر عمر اشتباه می کنیم، سرزنش کردن چیزیو درست نمی کنه! این حرفها تکراریه ولی شنیدنیه؛ آدم های موفق بیشتر از همه اشتباه کردن، چون بیشتر از بقیه تصمیم گرفتن، فقط کافیه ۳۰٪ تصمیماتمون درست باشه، فقط همین. حق نداری به خاطر چهارتا عدد توی کارنامه ات ، خودتو نادیده بگیری! تو خالق اعدادی ، نه خادم اونها! می دونم تیزن مخصوصا وقتی به زبون آدمها ساییده می شن اما نذار رو صورت آرزوهات خط بکشن!! جا خالی بده... عددی نیستن این عددها...

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

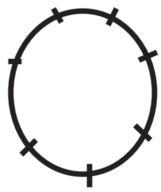
مثال ۱۸: با پنج نقطه روی یک دایره چند مثلث می توان ساخت؟

پاسخ: پنج نقطه روی یک دایره داریم. برای ساخت مثلث سه راس لازم داریم یعنی از پنج نقطه باید سه نقطه انتخاب کنیم.



$$\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!۲!}$$

مثال ۱۹: یک n ضلعی چند قطر دارد؟



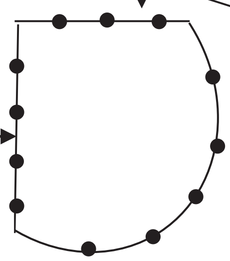
پاسخ: هر خط با دو نقطه قابل رسم می باشد . هر n ضلع دارای n نقطه است

پس تعداد خط هایی که قابل رسم می باشد برابر است با : $\binom{n}{۲}$

حال تعداد اضلاع را از مقدار فوق حذف می‌کنیم تا تعداد قطرها بدست آید

$$\binom{n}{۲} - n = \frac{n!}{۲!\,(n-۲)!} - n = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲!\,(n-۲)!} - n = \frac{n^{۲} - n - ۲n}{۲} = \frac{n(n-۳)}{۲}$$

مثال ۲۰: با نقاط مشخص شده در شکل مقابل چند مثلث می توان ساخت؟



پاسخ :

$$\underbrace{\binom{۱۲}{۳}}_{\text{کل حالات}} - \binom{۳}{۳} - \binom{۴}{۳}$$

توجه کنید با نقاطی که روی یک خط راست واقع می باشند نمی توان یک مثلث ساخت.

مثال ۲۱: ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۶ کتاب فیزیک مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید به طوریکه هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؟

پاسخ: ابتدا ۶ کتاب فیزیک را به گونه‌ای می‌چینیم که بین آنها فضای خالی باشد = !۶

○ ف ○ ف ○ ف ○ ف ○ ف ○ ف ○ ⟵

حال از فضاهای خالی ۴ جای خالی انتخاب می‌کنیم = $\binom{۷}{۴}$

سپس ۴ کتاب را در آنجا قرار می‌دهیم = !۴

همه این کارها را با هم انجام می‌دهیم = $۴! \times \binom{۷}{۴} \times ۶!$

ریاضی مشهد دپارتمان
Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال ۲۲ : سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای سومین بار رو بیاید. تعداد حالاتی که در ۱۰ بار پرتاب یک سکه به این نتیجه برسیم را بیابید.

پاسخ: سومین رو باید در پرتاب دهم باشد و باید از ۹ تای دیگر ۲ تا رو بیاید یعنی

$$\binom{۹}{۲} = \frac{۹!}{۲!\,۷!}$$ رو × × × × × × × × ×

مثال ۲۳ : از رابطه C(n, n-۲) = ۱۲۰ ، n کدام است؟

پاسخ:

$$\frac{n!}{۲!(n-۲)!} = ۱۲۰ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲\times(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)}{۲} = ۱۲۰ \Rightarrow n^۲ - n = ۲۴۰$$

$$\Rightarrow n^۲ - n - ۲۴۰ = ۰ \Rightarrow (n-۱۶)(n+۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۱۶ \\ n = -۱۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

مثال ۲۴ : اگر $\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)} = ۲۶$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{۴!\,(n-۵)!}} = \frac{\frac{n\times(n-۱)!}{(n-۴)(n-۵)!}}{\frac{(n-۱)!}{۴!\,(n-۵)!}} = ۲۶ \Rightarrow n = ۵۲$$

مثال ۲۵ : اگر $(n+۱)! = ۱۳۲۰\,(n-۲)!$ باشد حاصل $\binom{n}{n-۴}$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۷۵ ۳) ۳۱۲ ۴) ۳۳۰

پاسخ: گزینه ۴

$$(n+۱)n(n-۱)(n-۲)! = ۱۲\times۱۱\times۱۰\times(n-۲)! \Rightarrow n = ۱۱$$

$$\binom{۱۱}{۷} = \frac{۱۱!}{۴!\,۷!} = ۳۳۰$$

به همین سادگی

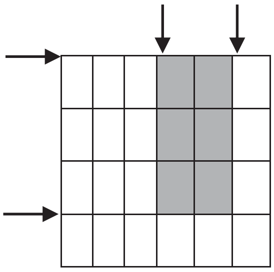
ایده‌هات رو اینجا بنویس

مثال ۲۶: دریک امتحان دانش‌آموزی باید به ۸ سوال از میان ۱۰ سوال پاسخ دهد. اگرپاسخ به ۴ سئوال از ۵ سئوال اول اجباری باشد. او به چند طریق می‌تواند به سئوالات پاسخ دهد.

پاسخ: دو حالت امکان پذیر است که نهایتا با هم جمع می شود:

$$\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۳}=۵\times۵+۱۰=۳۵$$

مثال ۲۷: در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟



پاسخ: باید دو خط از بین خط‌های افـــقی و ۲ خط از بین خطهای عمودی انتـــخاب کنیم. $\binom{۷}{۲}\times\binom{۵}{۲}$

درسنامه

در حالت کلی در یک شبکه $m\times n$ تعداد مستطیل‌های موجود برابر است با :

$$\binom{m+۱}{۲}\binom{n+۱}{۲}$$

مثال ۲۸: از ۱۰ جفت کفش چگونه می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که حتما یک جفت در میان آنها باشد؟

پاسخ: ابتدا ۲ جفت انتخاب می‌کنیم. سپس یکی از جفت‌ها را بر می‌داریم. سپس از جفت باقی مانده یک لنگه انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۱۰}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۱۸۰$$

انتخاب دو جفت ⟵

مثال ۲۹: ۱۲ نفر متشکل از ۶ زوج زن و شوهر مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر از بین آنها انتخاب کرد به شرطی که در بین آنها هیچ زن و شوهری یافت نشود؟

پاسخ: ابتدا ۴ زوج انتخاب می‌کنیم سپس از بین این ۴ زوج از هر کدام یک نفر را انتخاب می‌کنیم، در این حالت حتما هیچ زن و شوهری با هم انتخاب نشده‌اند

$$\binom{۶}{۴}\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}$$

انتخاب ۴ زوج

اگر در حین انجام کارهایتان مرتب دچار تخیل کردن میشوید و این قضیه آزارتان می دهد، بدانید خیال بافی وقتی شروع میشه که شما مشغول کاری هستین که به توجه کاملتون احتیاج نداره پس اگه کارپیش رو جدی تر نشون بدین و جدی تر بگیرین، میزان خیال بافی کمتر میشه. مثلا اگه در حال مطالعه کردن هستین، خودتون رو در چهارچوب زمانی دقیق تری قرار بدین یا به یکی از اعضای خانواده تون بگین تا یه ساعت بعد به کجا میرسین، به جای جنگیدن با تخیلات، کارتان را مهم تر کنید!

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

الگوهای پر کاربرد در مسایل آنالیز ترکیبی

درسنامه

کنار هم چیدن اشیائی که بعضی از آن‌ها نباید کنار هم قرار گیرند

ابتدا اشیائی را که مانعی ندارد کنار هم باشند را می‌چینیم، سپس در فواصل بین و بیرون آن‌ها اشیائی که نمی‌خواهیم کنار هم قرار گیرند را قرار می‌دهیم.

مثال ۳۰: چند دنباله ۱۲ تایی متشکل از هفت حرف b و پنج حرف a می‌توان ساخت به طوری که هیچ دو a کنار هم نباشد؟

پاسخ: ابتدا b ها را می‌چینیم، سپس در فواصل به وجود آمده، a ها را جایگزین می‌کنیم:

$$\text{-b-b-b-b-b-b-b-} \Rightarrow \binom{۸}{۵}$$ حالت

مثال ۳۱ : با ارقام ۱و ۲و ۳و ۴و ۵ و ۶ و ۷ چند عدد هفت رقمی می‌توان نوشت به طوری که در هیچ یک از آنها دو رقم متوالی زوج نباشند؟

پاسخ: ابتدا ارقام فرد را می‌چینیم و در بین آن‌ها زوج‌ها را جا می‌دهیم:

-ف-ف-ف-ف-

جایگاه رقم زوج

$$\binom{۵}{۳} \times ۳! \times ۴!$$

جایگشت زوج ها با هم — جایگشت فردها با هم

مثال ۳۲: حروف EEEFFFDD را به چند طریق می‌توان کنار هم چید به شرطی که هیچ یک از Eها کنار هم نباشند؟

پاسخ:

-F-F-F-D-D-

$$\binom{۶}{۳} \times \frac{۵!}{۳! \times ۲!}$$

محل قرار گرفتن E ها — جایگشت F ها و D ها با هم

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

چینش اشیائی که عده ای از آن‌ها ترتیبشان از قبل معلوم است.

ابتدا مکان اشیائی که ترتیبشان از قبل معین است را انتخاب کرده و اشیاء را طبق ترتیب از قبل معین شده می‌چینیم، سپس بقیه اشیاء را در فواصل خالی باقی مانده می‌چینیم.

مثال ۳۳ : **هفت نفر متمایز به چند طریق می‌توانند در هفت طبقه از یک آپارتمان هفت طبقه‌ای ساکن شوند به شرطی که از بین آنان سعید پایین‌تر از کریم و کریم پایین‌تر از احمد باشد؟**

پاسخ: ابتدا به $\binom{۷}{۳}$ حالت، طبقه ساکن شدن این سه نفر را انتخاب و طبق ترتیب گفته شده آن‌ها را می‌چینیم. سپس جایگشت بقیه افراد را در ۴ طبقه لحاظ می‌کنیم : $\binom{۷}{۳}\times ۴!$

مثال ۳۴: **چند عدد سه رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگ‌تر باشد؟**

پاسخ: ابتدا ۳ رقم را به $\binom{۱۰}{۳}$ حالت انتخاب و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم.

مثال ۳۵: **با حروف کلمه‌ی NOSHABEH چند کلمه هشت حرفی می‌توان نوشت به طوری که در هر یک از آنها A بعد از O و نیز E بعد از A باشد؟**

پاسخ: ابتدا مکان A و E و O را انتخاب کرده و سپس بقیه حروف را می‌چینیم. (توجه کنید که ۲ تا H داریم):

$$\binom{۸}{۳}\times \underbrace{\frac{۵!}{۲!}}_{\text{جایگشت H ها با هم}}$$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

تبدیل r تایی n شیء که شامل اشیاء تکراری باشند.

در صورتی که اشیاء ما تکراری باشند با تقسیم بندی مساله به حالتهای مختلف، تعداد تبدیلات r تایی n شیء را بدست می آوریم.

مثال ۳۶: با ارقام ۲ و ۲ و ۴ و ۴ و ۶ و ۶ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

پاسخ :

جایگشت ارقام ۶ = !۳ حالت ← اعداد بدون تکرار {۶ و ۴ و ۲}

$۱۸ = \frac{۳!}{۲!} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۳}{۱}$ اعداد با یک تکرار {× - -}

رقم غیر تکراری   رقم تکرار شونده

۲۴= ۶+ ۱۸ = کل اعداد

مثال ۳۷ : با حروف کلمه ALIABAD چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ:

حداکثر یک A : $\binom{۵}{۴} \times ۴! = ۱۲۰$

دوبار A بیاید: AA $\binom{۴}{۲} \times \frac{۴!}{۲} = ۷۲$

انتخاب ۲ حرف دیگر   جایگشت حروف

سه بار A بیاید: AAA $\binom{۴}{۱} \times \frac{۴!}{۳!}$

انتخاب ۱ حرف دیگر   جایگشت حروف

= ۲۰۸ = ۱۶+۷۲+۱۲۰

درسنامه

خواص ترکیب:

الف) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow$ اگر $\binom{n}{x} = \binom{n}{y} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = n \end{cases}$

یعنی تعداد حالات انتخاب r شی ء از بین n شی ء با تعداد حالات عدم انتخاب بقیه اشیاء برابر است. یا تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی با تعداد زیر مجموعه‌های n-r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است.

ب) $\binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۱}{r} = \binom{n}{r}$ **قاعده پاسکال**

این قضیه به این معناست که در انتخاب r عضو معین یا حضور دارد یا ندارد.

ج) $\binom{n}{۰} = ۱$ د) $\binom{n}{n} = ۱$ ه) $\binom{n}{۱} = n$

ایده هات رو اینجا بنویس

«تست آنالیز ترکیبی»

فاکتوریل و اصل ضرب:

۱. حاصل $\frac{(n+2)!+n^2(n-1)!}{n^2+4n+2}$ کدام است؟

۱) $(n+1)!$ ۲) $(n-1)!$ ۳) $n!$ ۴) $\frac{n!}{(n-2)!}$

۲. مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ با کدام عدد برابر است؟

۱) $n(n+1)$ ۲) $n(n-1)$ ۳) $\frac{n+1}{n-1}$ ۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۳. جهت انجام سفر از شهر A به شهرهای D, C, B به ترتیب ۳ و ۵ و ۴ جاده‌ی مختلف وجود دارد. یک مسافر به چند طریق می‌تواند از شهر A فقط به یکی از ۳ شهر B یا C یا D سفر کند؟

۱) ۱۲ ۲) ۶۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

۴. مدیر یک مدرسه می‌خواهد ۴ درس متمایز را در روز شنبه برنامه‌ریزی کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۵. یک ساختمان ۸ طبقه و ۵ رنگ متفاوت داریم. به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد، به طوری که هیچ دو طبقه مجاور هم رنگ نباشند؟

۱) 5^8 ۲) $4^7 \times 5$ ۳) $5 \times 4 \times 3^6$ ۴) 5×3^7

۶. یک اتوبوس دارای ۸ مسافر است و در ۵ ایستگاه متوقف می‌شود. مسافرین این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در ایستگاه ها پیاده شوند؟

۱) ۴۰ ۲) 8^5 ۳) 5^8 ۴) $\frac{8!}{5!}$

۷. ۲ نفر برای ریاست اداره‌ای نامزد شده‌اند. به چند طریق ۱۵ نفر از کارمندان می‌توانند به آنها رای دهند به طوری که هر فرد حداکثر به یک نفر رای دهد؟

۱) 2^{15} ۲) 15^2 ۳) 3^{15} ۴) 15^3

۸. چند ماتریس ۳×۳ با درایه‌های ۰ و ۱ و ۲ می‌توان ساخت به طوری که درایه‌های قطر اصلی ناصفر باشند؟

۱) $2^3 \times 3^6$ ۲) $2^6 \times 3^3$ ۳) 3^9 ۴) 2×3^6

۹. ۵ اتومبیل وارد یک چهارراه می‌شوند، تعداد تمام حالات مختلف که این ۵ اتومبیل می‌توانند از چهارراه خارج شوند، کدام است؟ (به شرط آنکه هیچ اتومبیلی دور نزند، ترتیب ورود اتومبیل‌ها به چهارراه از نظر زمانی اهمیت ندارد.)

۱) ۶۲۵ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۴۳

ایده هاتو اینجا بنویس

۱۰. با جایگشت حروف کلمه «جمهوری» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آنها نقطه دار نباشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۸۰

۱۱. با حروف کلمه «آبادان» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۹۶ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۱۲. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۵

۱۳. با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۸ و ۹ چندعدد سه‌رقمی بدون تکرار و کوچکتر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۱۴. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و۶ چند عدد ۴ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۲۰

۱۵. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و۶ چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۳۴۰ ۴) ۴۱۰

۱۶. با ارقام ۲ و ۰ و ۵ چند عدد ۵ رقمی مضرب ۲۵ می توان ساخت؟(تکرار ارقام مجاز!)

۱) ۱۶۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۵۴ ۴) ۴۸

۱۷. شماره‌گذاری اتومبیل در یک شهر با حروف الفبای فارسی و اعداد ۲ رقمی بدون صفر می‌باشد. اگر شماره‌گذاری از الف-۱۱ و بطور صعودی باشد، شماره هزارمین اتومبیلی که شماره‌گذاری می‌شود، کدام است؟

۱) د-۴۱ ۲) ر-۳۹ ۳) ز-۴۱ ۴) ز-۳۹

۱۸. می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت چپ آنها یکی از حروف d, c, b, a و در سمت راست آنها نیز عدد ۳ رقمی فرد باشد چند کارت می توان ساخت؟

۱) ۱۲۱۰ ۲) ۱۵۴۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۲۱۰۰

۱۹. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد شش رقمی مضرب ۵ دربازه (۴۰۰۰۰۰ و ۲۰۰۰۰۰) با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟

۱) ۴۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۳۶ ۴) ۲۱۰

۲۰. با ارقام ۲ و ۳ و ۶ و ۹ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که در هر کدام حداقل یک رقم تکراری وجود داشته باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۲۸ ۳) ۶۰ ۴) ۴۶

۲۱. بین اعداد 10^4 و 10^5 چند عدد طبیعی وجود دارد که ارقامی بجز ۰ یا ۴ یا ۷ نداشته باشد؟

۱) ۸۱ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۶۲ ۴) ۲۴۳

ایده هات رو اینجا بنویس

۲۲. چند عدد ۵ رقمی فاقد ارقام تکراری و مضربی ۵ وجود دارد که دو رقم اول سمت چپ آن مضرب ۳۱ باشد؟

۱) ۲۵۲ ۲) ۲۱۶ ۳) ۳۲۴ ۴) ۲۳۴

۲۳. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی کوچکتر از ۵۳۰۰ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۶۰ ۲) ۱۳۷۴ ۳) ۱۴۲۶ ۴) ۱۵۱۹

۲۴. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی‌کوچکتر از ۵۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۵۰

۲۵. چند عدد ۵ رقمی مضرب ۵ می توان ساخت که اولین رقم سمت چپ آن مضرب ۳ و هیچ کدام از ارقام آن تکراری نباشد؟

۱) ۱۰۰۸ ۲) ۱۳۶۲ ۳) ۱۴۴۸ ۴) ۲۰۱۶

۲۶. چند عددچهار رقمی‌وجود داردکه مجموع‌رقم‌اول وآخرآن ۱۲ و مجموع دورقم وسط‌آن۹ باشد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۷۰ ۴) ۴۰

۲۷. یک قفل‌رمزی دارای یک رمز ۳ رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... و ۹ می‌باشد. اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان‌کردن هررمز۲ دقیقه طول بکشد، حداکثرچندساعت‌طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۳/۵

۲۸. با ارقام ۲ و ۲ و ۲ و ۰ و ۰ و ۱ و ۴ و ۳ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) $8!$ ۲) $\frac{7!}{2!}$ ۳) $\frac{8!}{3!2!}$ ۴) $\frac{7!}{2!3!}$

۲۹. با اعداد ۶ و ۶ و۴ و ۴ و۲و ۲ چند عدد ۳ رقمی می توان ساخت؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۴ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۰. به چندطریق‌می‌توان‌ازمیان۸ کتاب علمی ۳کتاب را برگزید و در یک ردیف کتابخانه‌جای داد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۱۰ ۳) ۳۳۶ ۴) ۵۰۴

۳۱. تعداد تمام حالاتی که ۷ نفر می توانند بر روی یک نیمکت چهار نفره بنشینند و عکسهای یادگاری چهار نفره بگیرند کدام است؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۶۸۰ ۴) ۸۴۰

۳۲. پانزده کتاب در ۳ ردیف و در هر ردیف ۵ کتاب قرار داده ایم به چند طریق می توان ۳ کتاب برداشت به طوری که از هر ردیف یک کتاب برداشته باشیم؟ (ترتیب برداشتن کتاب ها مهم است.)

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۵۰ ۳) ۶۵۰ ۴) ۷۵۰

۳۳. ۳ مهره‌سیاه یکسان و ۵ مهره سفیدیکسان را به چند طریق می‌توان در یک صف کنار هم قرار داد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۵ ۴) ۵۶

ریاضی مشهد دپارتمان
Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۳۴. به چند طریق می‌توان ۸ کتاب متمایز را در کنار یکدیگر در قفسه‌ای جدید به طوری که دو کتاب مخصوص کنار هم باشند؟

۱) ۸! ۲!   ۲) ۷! × ۲!   ۳) ۶!۲!   ۴) $\frac{۷!}{۲!}$

۳۵. ۵ نفر می خواهند به ترتیب وارد اتاقی شوند، به چند طریق می توانند این کار را انجام دهند اگر قرار باشد A قبل از B وارد شود؟

۱) ۵!   ۲) ۴! × ۲!   ۳) $\frac{۵!}{۲}$ ۴) $\frac{۴!}{۲}$

۳۶. ۵ نفر می خواهند به ترتیب وارد اتاقی شوند، به چند طریق می توانند این کار را انجام دهند اگر قرار باشد A و B پشت سر هم وارد شوند؟

۱) ۵   ۲) ۴! × ۲!   ۳) $\frac{۵!}{۲}$ ۴) $\frac{۴!}{۲}$

۳۷. ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه را به چند طریق می توان در یک ردیف چید، به طوری که مهره های سیاه کنار هم باشند؟

۱) ۴   ۲) ۴!   ۳) ۵! × ۴!   ۴) ۳! × ۴!

۳۸. به چند طریق می توان ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۶ کتاب فیزیک متمایز را در یک ردیف کتابخانه جای داد به طوری که کتب هر درس، کنار هم باشند؟

۱) ۱۱!   ۲) ۵!۷!   ۳) ۵!۶!   ۴) ۲! ۵! ۶!

۳۹. به چند طریق می توان ۵ دختر و ۶ پسر را در یک ردیف یک در میان قرار داد؟

۱) ۵! ۶!   ۲) ۴! ۵!   ۳) ۱۱!   ۴) ۱۰!

۴۰. حروف AAAbcd را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد به طوری که حروف کوچک و بزرگ یک در میان باشند؟

۱) ۴۸   ۲) ۲۴   ۳) ۷۲   ۴) ۱۲

۴۱. تعداد تمام حالتهایی که می توان ۷ توپ سفید یکسان را کنار هم قرار داد، کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۷   ۳) $\frac{۷!}{۲!}$ ۴) ۷!

۴۲. به چند طریق می توان از میان ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۶ کتاب متمایز فیزیک، ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب فیزیک را انتخاب نمود و در یک ردیف کتابخانه جای داد؟

۱) ۵!   ۲) ۳۰ × ۵!   ۳) ۹۰ × ۵!   ۴) ۱۵۰ × ۵!

۴۳. به چند طریق می توان ۴ دختر و ۴ پسر را می توان یک در میان دور یک میز نشاند؟

۱) ۳!۴!   ۲) ۴!۴!   ۳) ۳!۳!   ۴) ۲!۳!۲!

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۴۴. به چند طریق می توان از میان ۱۰ نفر، ۵ نفر را انتخاب و حول میز گرد نشاند؟

۱) $5! \times p(10, 5)$ ۲) $4! \times p(10, 5)$ ۳) $5!\binom{10}{5}$ ۴) $4!\binom{10}{5}$

۴۵. ۳ مرد و ۳ زن به چند طریق می‌توانند دور یک میز ۶ نفره بنشینند به طوری که مردها کنار هم و زن‌ها کنار هم باشند؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۴۶. به چند طریق می توان ۶ نفر به نام های F,E,D,C,B,A را دور یک میز گرد قرار داد به طوری که افراد A و B کنار هم نباشند؟

۱) ۸۴ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

۴۷. به چند طریق ۵ معلم و ۳ دانش آموز می توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که هیچ ۲ دانش آموزی در کنار هم نباشند؟

۱) ۱۸۶۰ ۲) ۱۴۴۰ ۳) ۱۲۲۰ ۴) ۸۸۰

۴۸. ۴ نفر روی ۶ صندلی به چند طریق می توانند قرار گیرند اگر روی هر صندلی حداکثر یک نفر بتواند بنشیند؟

۱) $4!$ ۲) $\frac{6!}{2!}$ ۳) $5!$ ۴) $\binom{6}{4}$

۴۹. اگر $\binom{n}{9} = \binom{n}{7}$ باشد، n کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۵۰. به چند طریق می توان ۶ مهره متمایز را درون ۱۰ جعبه متمایز قرار داد، طوری که در هر جعبه حداکثر یک مهره قرار گیرد؟

۱) $6!$ ۲) $10!$ ۳) $\frac{10!}{4!}$ ۴) $\frac{10!}{4!6!}$

۵۱. حاصل $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p}$ کدام است؟

۱) $\binom{n}{k+p}$ ۲) $\binom{n}{p}\binom{n-p-k}{k}$ ۳) $\binom{n}{p}\binom{n-p}{k}$ ۴) $\binom{n}{p}\binom{n-k}{k}$

۵۲. با ارقام ۱ و ۲ و ۳و ۴و ۵ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که در هر یک از آنها ۲ قبل از ۴ و ۳ قبل از ۱(نه لزوما بلافاصله) قرار داشته باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۸

۵۳. از میان ۸ نفر دانش آموزان یک کلاس به چند طریق می توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که شخص به خصوصی حتما در میان آنها باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵

۵۴. به چند طریق می توان از بین ۷ کتاب متمایز ۳ کتاب انتخاب کرد و در قفسه ای چید؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۳۵ ۴) ۲۱۰

ایده هات رو اینجا بنویس

۵۵. به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه ای چید؟

۱) $4!3!\binom{11}{7}$ ۲) $4!3!2!\binom{11}{7}$ ۳) $4!3!\binom{6}{4}\binom{5}{3}$ ۴) $4!3!2!\binom{6}{4}\binom{5}{3}$

۵۶. از میان ۶ دانش آموز سال چهارم و ۳ دانش آموز سال دوم به چند طریق می توان یک تیم ۴ نفره درست کرد که رئیس تیم از میان سال چهارمی ها باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۳۶ ۳) ۱۶۵ ۴) ۴۸۰

۵۷. می خواهیم از میان ۴ نفر دانش آموز سال اول، ۵ نفر دانش آموز سال دوم و ۳ نفر دانش آموز سال سوم، ۲ نفر انتخاب نماییم، این کار به چند طریق انجام پذیر است، اگر بخواهیم که این ۲ نفر هم کلاسی نباشند؟

۱) ۴۷ ۲) ۴۸ ۳) ۴۹ ۴) ۵۰

۵۸. به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد به‌طوری که در هر کمیته ۲ دانش‌آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشند؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۵۹. به چندطریق می‌توان ازبین۵مردو۴ زن،۶ نفرراانتخاب کردبه طوری که اقلا سه زن انتخاب شوند؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۶۰. با حروف کلمه "computer" چند کلمه ۵ حرفی با معنی و بی‌معنی می‌توان ساخت که در همه آنها حروف r و u بکار رفته باشد؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۱۲۰۰ ۴) ۲۴۰۰

۶۱. از میان ۴ جفت کفش متمایز به چند طریق می‌توان ۳ لنگه انتخاب کرد که هیچ جفتی در میان آنها نباشد؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۶۲. در یک میهمانی ۹ نفره، ۲ زوج حضور دارند به چند طریق می‌توان ۵ نفر از این جمع انتخاب کرد به طوری که از هر کدام از زوج‌ها دقیقا یک نفر انتخاب شود؟

۱) ۸۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

۶۳. به چند طریق می‌توان ۳ مهندس و ۴ پزشک را دور یک میز نشاند به طوری که هیچ ۲ مهندسی پیش هم نباشند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۹۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۱۲

۶۴. با ارقام ۱ و ۲ و ۳و ۴و ۵ چند عدد ۳ رقمی بدون رقم تکراری می‌توان نوشت که حداقل ۲ رقم آن فرد باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۵۴

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هاتو اینجا بنویس

۶۵. به چند طریق می‌توان از اعداد مجموعه $\{۱,۲,...,۲۰\}$ سه عدد متمایز انتخاب کرد که تشکیل تصاعد عددی دهند؟

۱) ۱۹۰　　۲) ۹۰　　۳) ۸۰　　۴) ۱۰۰

۶۶. در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. ۴ مهره از این کیسه بیرون می‌آوریم در چه تعداد از این انتخاب‌ها، حداقل یک مهره سفید وجود دارد؟

۱) ۵۰　　۲) ۶۰　　۳) ۶۵　　۴) ۷۰

۶۷. چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که در هر یک از آنها رقم صدگان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم یکان بزرگتر باشد؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۷۲　　۳) ۸۴　　۴) ۹۶

۶۸. به چند طریق می‌توان ۷ نفر را به یک دسته ۳ نفره و دو دسته ۲ نفره تقسیم کرد؟

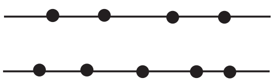
۱) ۹۴　　۲) ۱۰۵　　۳) ۱۴۲　　۴) ۲۱۰

مسائل هندسی شمارش:

۶۹. ۸ نقطه روی محیط دایره‌ای قرار دارند. چه تعداد مثلث با این ۸ نقطه می‌توان ساخت؟

۱) ۸　　۲) ۲۸　　۳) ۵۶　　۴) ۳۵

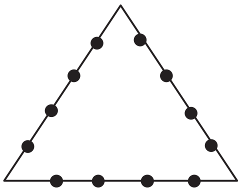
۷۰. با نقاط مشخص شده در شکل مقابل چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۱۰۰　　۲) ۶۰

۳) ۷۰　　۴) ۸۰

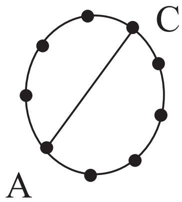
۷۱. دوازده نقطه روی اضلاع مثلثی مطابق شکل مقابل قرار دارد؛ با این دوازده نقطه چند چهار ضلعی می‌توان ساخت به طوری که این نقاط رئوس آن چهار ضلعی باشند؟



۱) ۷۹۲　　۲) ۵۲۱

۳) ۴۹۵　　۴) ۳۹۶

۷۲. در شکل‌مقابل چندچهارضلعی با نقاط‌داده شده‌می‌توان رسم کرد که AC قطر چهارضلعی باشد؟



۱) $\binom{۸}{۲}$　　۲) $\binom{۱۰}{۴}$

۳) $\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}$　　۴) $\binom{۷}{۱}\binom{۸}{۱}$

۷۳. در صفحه شطرنجی معمولی (۸×۸) چند مربع وجود دارد؟

۱) ۱۹۸　　۲) ۲۰۸　　۳) ۲۱۰　　۴) ۲۰۴

یه سری از بچه ها یه روز تصمیم می گیرن با یه روش جدید ریاضی بخونن تا موقعی که یکی از دوستاش می گه: « این کارو نکن » از فردا دیگه از اون روش استفاده نمیکنه. من می گم هر تصمیمی که می گیری ، حتی اگر مشکلی هم داشت ، بهش پایبند باش ، فقط به این فکر کن که باید این کار رو انجام بدی ، چون انتخاب خودت بوده و با این کار به خودت احترام می ذاری.

به همین سادگی

ایده‌هات رو اینجا بنویس

پاسخ نامه آنالیز ترکیبی

۱ **گزینه ۳**

راه حل (۱)

$$\text{حاصل} = \frac{(n+۲)(n+۱)(n)(n-۱)! + n^{۲}\,(n-۱)!}{n^{۲}+۴n+۲}$$

$$= \frac{n(n-۱)!\,[(n+۲)(n+۱)+n]}{n^{۲}+۴n+۲} = n(n-۱)! = n!$$

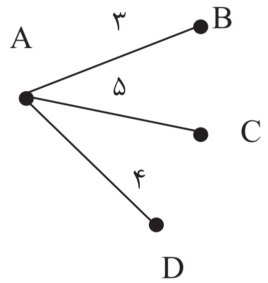
راه حل (۲)

$$\text{عدد گذاری} \Longrightarrow \; n=۱\,,n=۲ \Longrightarrow \text{حاصل} = n!$$

۲ **گزینه ۱**

$$(n+۱)! = n\,(n+۱)\,(n-۱)! \Longrightarrow \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = n(n+۱)$$

۳ **گزینه ۱**



۳ + ۴ +۵ =۱۲

۴ **گزینه ۴**

$$\underset{\text{زنگ اول}}{\underline{۴}} \times \underset{\text{زنگ دوم}}{\underline{۳}} \times \underset{\text{سوم}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{چهارم}}{\underline{۱}} = ۴! = ۲۴$$

۵ **گزینه ۲**

طبقه اول ساختمان به ۵ طریق رنگ می‌شود، اما چون رنگ هر طبقه نباید با رنگ طبقه قبلی یکی باشد لذا هر طبقه دیگر ۴ حالت خواهد داشت. دقت کن! مثلا طبقه اول اگر سبز باشد، طبقه دوم می‌تواند آبی باشد اما در طبقه سوم باز هم می‌توان از همان رنگ سبز استفاده کرد.

$$۵ \times \underbrace{۴ \times \ldots \times ۴}_{\text{۷ طبقه}} = ۵ \times ۴^{۷}$$

۶ **گزینه ۳**

هر مسافر در هر یک از ۵ ایستگاه می‌تواند پیاده شود پس هر مسافر ۵ انتخاب دارد.

$$۵ \times ۵ \times \ldots \times ۵ = ۵^{۸}$$

۷ **گزینه ۳**

هر نفر از کارمندان ۳ انتخاب دارد یعنی یا به نفر اول رای می‌دهد یا به نفر دوم و یا به هیچ کدام. پس تعداد حالات برابر :

$$\underbrace{۳ \times \ldots \times ۳}_{\text{۱۵ بار}} = ۳^{۱۵}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

۸ گزینه ۱

۲ حالت ⟸ ۲ یا ۱ = قطر اصلی

۳ حالت ⟸ ۲ یا ۱ یا ۰ = خارج قطر اصلی

$$3 \times 3 \Longrightarrow 2^3 \times 3^6$$

چون یک ماتریس ۳×۳ دارای ۳ درایه بر روی قطر اصلی و ۶ درایه به جز قطر اصلی می باشد پس تعداد حالات $3^6 \times 2^3$ است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۹ گزینه ۴

هر اتومبیل به هنگام عبور از چهارراه ۳ حق انتخاب دارد، بنابراین:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$

۱۰ گزینه۴

$$80 = 4 \times 5 \times 4$$

⟵ حرف اول نقطه ندارد م/ هـ / و / ر

حرف دوم — حرف سوم

۱۱ گزینه ۴

تعداد حروف = ۶ و تعداد حروف تکراری = ۳ ⟹ $\frac{6!}{3!} = 120$

۱۲ گزینه۲

$$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{3} = 48$$

به جز صفر — به جز دو عدد درج شده در رقم اول — به جز دو رقم اول

۱۳ گزینه ۳

عدد کوچکتر از ۴۰۰ ⟸ رقم صدگان ۲ یا ۳

$$\underline{2} \times \underline{5} \times \underline{4} = 40$$

۱۴ گزینه ۴

$$\underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{1} + \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 120 + 300 = 420$$

زوج که یکان آن صفر باشد — زوج که یکان آن ۲ و ۴ و ۶ باشد

۱۵ گزینه ۲

$$\underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{1} + \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{1} = 220$$

مضرب ۵ با یکان صفر — مضرب ۵ که یکان آن ۵ باشد

۱۶ گزینه ۳

$$\begin{array}{c}2\\ \hline 5\\ 2\end{array} \times \begin{array}{c}3\\ \hline 0\\ 5\\ 2\end{array} \times \begin{array}{c}3\\ \hline 0\\ 5\\ 2\end{array} \times (\_ \times \_) = 54$$

دو رقم سمت راست ۰۰ یا ۲۵ یا ۵۰ ⟸ مضرب ۲۵

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۱۷ **گزینه ۳**

ابتدا تعداد اعداد دو رقمی بدون صفر را پیدا می کنیم: ۸۱ = ۹×۹ پس باید ببینیم در عدد ۱۰۰۰ چند بار ۸۱ تکرار شده است. ۲۸+ ۱۲×۸۱ = ۱۰۰۰ بنابراین۱۲ حرف از الفبای فارسی را پشت سر می‌گذاریم و به حرف سیزدهم می‌رسیم که (ز) می باشد.

حالا از عدد دو رقمی ۱۱ باید ۲۸ واحد به جلو برویم که اولی خود ۱۱ است. یعنی ۲۷ واحد باید به ۱۱ اضافه کنیم که ۳۸ = ۲۷ +۱۱ می‌شود. در این میان اعداد ۲۰ و ۳۰ صفردار هستند و کنار می‌روند و در واقع ۲۸ امین عدد بدون صفر بعد از۱۰ (یعنی خود ۱۰ حساب نیست و بعد از آن یعنی ۱۱) عبارتست از: ۴۰ اما این عدد هم که به صفر ختم می‌شود و جواب آخر «ز-۴۱» است.

۱۸ **گزینه ۳**

$$\frac{4}{\substack{a\\b\\c\\d}} \times \underbrace{\left[\frac{9}{\;} \times \frac{10}{\;} \times \frac{5}{\;}\right]}_{\text{عدد سه رقمی فرد}} = 1800$$

۱۹ **گزینه ۲**

$$\frac{2}{\substack{2\\3}} \times \frac{4}{\;} \times \frac{3}{\;} \times \frac{2}{\;} \times \frac{1}{\;} \times \frac{2}{\substack{0\\5}} = 96$$

در بازه داده شده رقم اول ۲ یا ۳ است.

مضرب ۵ یکان ۰ یا ۵

۲۰ **گزینه ۱**

اعداد ۳ رقمی فاقد تکرار - کل اعداد ۳ رقمی = جواب

$$= \left(\frac{4}{\;} \times \frac{4}{\;} \times \frac{4}{\;}\right) - \left(\frac{4}{\;} \times \frac{3}{\;} \times \frac{2}{\;}\right) = 40$$

۲۱ **گزینه ۳**

بازه داده شده شامل اعداد ۵ رقمی است.

$$\frac{2}{\substack{4\\7}} \times \frac{3}{\substack{0\\4\\7}} \times \frac{3}{\substack{0\\4\\7}} \times \frac{3}{\substack{0\\4\\7}} \times \frac{3}{\substack{0\\4\\7}} = 162$$

۲۲ **گزینه ۱**

مضرب ۳۱ یعنی دو رقم سمت چپ ۳۱ یا ۶۲ یا ۹۳ است.

$$\underbrace{\frac{\;}{\;} \times \frac{\;}{\;}}_{\text{۳ حالت}} \times \frac{7}{\;} \times \frac{6}{\;} \times \frac{2}{\substack{0\\5}} = 252$$

۲۳ **گزینه ۴**

از ۵۰۰۰ تا ۵۳۰۰ + کوچکتر از ۵۰۰۰ = کوچکتر از ۵۳۰۰

$$= \left(\frac{4}{\substack{4\\3\\2}} \times \frac{7}{\;} \times \frac{7}{\;} \times \frac{7}{\;}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{3}{\substack{0\\1\\2}} \times \frac{7}{\;} \times \frac{7}{\;}\right) = 1519$$

به همین سادگی

ایده‌هات رو اینجا بنویس

۲۴ **گزینه ۱**

تکرار مجاز نیست!   از ۵۰۰۰ تا ۵۳۰۰ + کوچکتر از ۵۰۰۰ = کوچکتر از ۵۳۰۰

$$=(\frac{۴}{\begin{matrix}۱\\۲\\۳\\۴\end{matrix}}\times\frac{۶}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۴}{})+(\frac{۱}{۵}\times\frac{۳}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۴}{})=۵۴۰$$

۲۵ **گزینه ۴**

$$(\frac{۳}{\begin{matrix}۳\\۶\\۹\end{matrix}}\times\frac{۸}{}\times\frac{۷}{}\times\frac{۶}{}\times\frac{۲}{\begin{matrix}۰\\۵\end{matrix}})=۲۰۱۶$$

۲۶ **گزینه ۳**

$a+d=۱۲$

a	۳	۴	…	۹
d	۹	۸	…	۳

$\Rightarrow$ تعداد حالات $=۷$

$b+c=۹$

b	۰	۱	…	۹
c	۹	۸	…	۰

$\Rightarrow$ تعداد حالات $=۱۰$

$$\Longrightarrow \frac{۷}{}\times\frac{۱۰}{}=۷۰$$

۲۷ **گزینه ۴**

$$\frac{۹}{}\times\frac{۹}{}\times\frac{۵}{\begin{matrix}۱\\۳\\۵\\۷\\۹\end{matrix}}=۴۰۵\Longrightarrow\frac{۴۰۵\times۲}{۶۰}=۱۳/۵\,h$$

تعداد اعداد سه رقمی فرد

۲۸ **گزینه ۲**

در این شرایط و در چنین مسائلی تمام ارقام را متمایز و تکرار را غیر مجاز فرض می‌کنیم.

$$(\frac{۶}{}\times\frac{۷}{}\times\frac{۶}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{})\Rightarrow \text{جواب}=\frac{۶\times۷!}{۲!\,۳!}$$

۲۹ **گزینه ۲**

جایگشت ارقام $۶=۳!\Rightarrow\{۲,۴,۶\}$:اعداد بدون تکرار

$$\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}=۱۸$$

۲۴=۶+۱۸:تعداد حالات کل

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۳۰ گزینه ۳

$$\binom{8}{3}3! = 336$$

انتخاب ۳ شی از بین ۸ شی — جایگشت ۳ شی انتخابی

۳۱ گزینه ۴

$$\binom{7}{4}4! = 840$$

انتخاب ۴ نفر از ۷ نفر — جایگشت ۴ نفر

۳۲ گزینه ۴

$$\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}\times 3! = 750$$

ردیف اول دوم سوم جایگشت ۳ کتاب انتخاب شده

۳۳ گزینه ۴

$$\frac{8!}{5!3!} = 56$$

جایگشت مهره ها

تکرار مهره های سفید — تکرار مهره های سیاه

۳۴ گزینه ۲

دو کتاب مخصوص را به هم می بندیم و یک کتاب فرض می کنیم:

$$\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,(\square\,\square) \Rightarrow 7!\,2!$$

جایگشت دو کتاب مخصوص

$(6+1)!$

۳۵ گزینه ۳

این ۵ نفر به !۵ طریق می‌توانند در یک صف قرار گیرند اما در نصف این حالات A قبل از B وارد می‌شود و در نصف حالات بعد از B پس جواب $\frac{5!}{2}$ است.

۳۶ گزینه ۲

در این حالت A ,B یک بسته در نظر گرفته

$$\boxed{A\,,B}\,,\underbrace{C\,,D\,,E} \Rightarrow 2!\times 4!$$

جایگشت C , D , E و بسته B , A — جابجایی B , A

۳۷ گزینه ۳

۵ مهره سیاه را یک بسته در نظر می گیریم

$$\boxed{-----}\,---$$

$$5!\times 4!$$

جایگشت مهره های قرمز + یک بسته مهره سیاه — جایگشت مهره های سیاه

۳۸ گزینه ۴

$$\underline{5!}\times\underline{6!}\times 2!$$

جایگشت بسته ریاضی و فیزیک — جایگشت کتب فیزیک — جایگشت کتب ریاضی

۳۹ گزینه ۱

$$6!\times 5!$$

جایگشت دخترها — جایگشت پسرها

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۴۰ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} A\,b\,A\,c\,A\,d \Rightarrow ۳! \times ۱ \\ b\,A\,c\,A\,d\,A \Rightarrow ۳! \times ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲ \times ۳!$$

۴۱ گزینه ۱

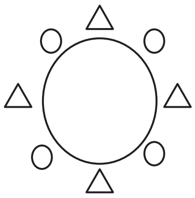
تغییر جایگاه توپ ها در حالات تأثیری نمی‌گذارد.

۴۲ گزینه ۴

$$\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۲}۵! = ۱۵۰ \times ۵!$$

جایگشت ۵ کتاب انتخاب شده   انتخاب ۲ کتاب فیزیک از ۶ کتاب   انتخاب ۳ کتاب از ۵ کتاب ریاضی

۴۳ گزینه ۱



ابتدا فرض می‌کنیم دخترها دور میز می‌نشینند $(۴-۱)!$

حال بدون در نظر گرفتن میز پسرها می‌توانند به $۴!$ حالت

بین دخترها قرار گیرند و در نتیجه طبق اصل ضرب $\Rightarrow ۳!۴!$

۴۴ گزینه ۴

$$\binom{۱۰}{۵}(۵-۱)!$$

انتخاب ۵ نفر از ۱۰ نفر   جایگشت دوار

۴۵ گزینه ۳

مردها را یک بسته و زنها را یک بسته در نظر می‌گیریم.

$$(۲-۱)! \times ۳! \times ۳!$$

جایگشت مردها   جایگشت زنها   جایگشت دوار ۲ بسته

۴۶ گزینه ۴

$(۶-۱)!$: تعداد کل حالات

$(۵-۱)!\ ۲!$: تعداد حالاتی که B , A کنار هم هستند

$۵! - ۲ \times ۴! = ۷۲$: جواب مسئله

۴۷ گزینه ۲

۵ فضای خالی بین معلم ها وجود دارد $\Leftarrow (۵-۱)! =$ جایگشت دوار معلم ها

$$\Rightarrow ۴! \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۱۴۴۰$$

دانش آموز اول   دوم   سوم

۴۸ گزینه ۲

برای نفر اول ۶ حالت، نفر دوم ۵ صندلی (۵ حالت) و ... $\Leftarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۶۰$

۴۹ گزینه ۲

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k'} \Rightarrow k + k' = n \Rightarrow ۹ + ۷ = ۱۶$$

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۵۰ — **گزینه ۳**

تذکر! چون جعبه‌ها متمایز بوده بنابراین ترتیب انتخاب جعبه ها اهمیت دارد.

$$\binom{10}{6} \times 6! = \frac{10!}{4!}$$

۵۱ — **گزینه ۳**

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{p!\,(n-k-p)!} = \frac{n!}{k!\,p!\,(n-k-p)!}$$

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{k} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \times \frac{(n-p)!}{k!\,(n-p-k)!} = \frac{n!}{p!\,k!\,(n-k-p)!}$$

۵۲ — **گزینه ۱**

این ۵ رقم به !۵ طریق کلی می توانند کنار هم چیده شوند اما در نصف این تعداد رقم ۲ قبل از ۴ است و در همین نصف نیز، نصفشان ۳ هم قبل از ۱ است؛ پس:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 5! = 30$$

۵۳ — **گزینه ۲**

شخص بخصوص یعنی یک انتخاب ثابت داریم. بنابراین اکنون باید از بین ۷ نفر باقی مانده ۲ نفر را انتخاب کنیم.

$$\binom{8-1}{3-1} = 21$$

۵۴ — **گزینه ۴**

$$\binom{7}{3} \times 3! = 210$$

انتخاب ۳ کتاب از ۷ کتاب موجود — جایگشت ۳ کتاب انتخابی

۵۵ — **گزینه ۳**

$$\binom{5}{3}\binom{6}{4} \times 4! \times 3!$$

جایگشت ۳ کتاب دوم — جایگشت ۳ کتاب اول

۵۶ — **گزینه ۲**

$$\binom{6}{1}\binom{8}{3} = 6 \times 56 = 336$$

انتخاب کاپیتان — از ۸ نفر باقی مانده ۳ نفر را انتخاب می کنیم

۵۷ — **گزینه ۱**

$\binom{12}{2} =$ تعداد حالات که می توان از بین ۱۲ نفر ۲ نفر را انتخاب کرد (۱

$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} =$ تعداد حالاتی که این ۲ نفر همکلاسی هستند (۲

$$\binom{12}{2} - \binom{4}{2} - \binom{5}{2} - \binom{3}{2} = 47$$

ایده هات رو اینجا بنویس

۵۸ گزینه ۴

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۳}=۴۰$$

۵۹ گزینه ۴

۴ زن یا ۳ زن = اقلا ۳ زن

$$\Rightarrow \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۴}\binom{۵}{۲}=۵۰$$

۶۰ گزینه۴

ابتدا حروف r و u را کنار می‌گذاریم:

$$\binom{۶}{۳}\times ۵!=۲۴۰۰$$

جایگشت ۵ حرف — انتخاب ۳ حرف از حروف باقیمانده

۶۱ گزینه ۲

ابتدا از ۴ جفت کفش ، ۳ جفت کفش را انتخاب کرده و سپس یک لنگ از ۲ لنگ هر جفت را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۳}=۳۲$$

۶۲ گزینه ۴

فرض کنید نام دو زوج (A,B) و (x,y) باشد. حالا چون قرار است از هر زوج دقیقا یک نفر انتخاب شود پس این کار به ۲×۲ طریق امکان پذیر است، یعنی Ax و Ay و Bx و By و حال از میان ۵ میهمان باقی مانده ۳ نفر را انتخاب می کنیم.

$$\binom{۵}{۳}\times ۴=۴۰$$

۶۳ گزینه ۱

جایگشت ۳ مهندس $\Rightarrow ۳!\times\binom{۴}{۳}\times ۳!=۱۴۴$

۶۴ گزینه ۳

$$\binom{۳}{۲}\times\binom{۲}{۱}\times ۳!+\binom{۳}{۳}\times ۳!=۴۲$$

جایگشت ۳ رقم — انتخاب ۳ رقم فرد — جایگشت ۳ رقم — انتخاب یک رقم زوج — انتخاب ۲ رقم فرد

نکته! حداقل ۲ رقم فرد داشته باشد یعنی یا هر ۳ رقم فرد و یا ۲ رقم فرد باشد.

۶۵ گزینه ۲

شرط تشکیل تصاعد عددی ۳ عدد $c\,,b\,,a$ $\Rightarrow \underbrace{a+c}_{\text{زوج}}=\underbrace{۲b}_{\text{زوج}}$

$$a+c=\text{زوج}\Rightarrow\begin{cases}c\,,a\ \text{زوج}\\ c\,,a\ \text{فرد}\end{cases}\Rightarrow \text{جواب}=\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۲}=۹۰$$

به همین سادگی

ریاضی مشهد دپارتمان
Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۶۶	**گزینه ۴** با توجه به اینکه در کیسه فقط ۳ مهره سیاه وجود دارد بنابراین وقتی ۴ انتخاب می‌کنیم حداقل یک مهره سفید نصیبمان می‌شود $\binom{۸}{۴} = ۷۰$
۶۷	**گزینه ۱** هر ۳ رقم را از {۹و ... و ۲و ۱ و ۰} اختیار کنیم، یک عدد با شرایط مورد نظر می‌توان ساخت: $\underbrace{\binom{۱۰}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ رقم}} \times \underbrace{۱}_{\text{تعداد اعدادی که به فرم گفته شده می توان ساخت}} = ۱۲۰$
۶۸	**گزینه ۲** ابتدا از بین ۷ نفر یک دسته ۳ تایی انتخاب کرده از چهار نفر باقی مانده یک دسته ۲ تایی و از ۲ نفر باقی مانده یک دسته ۲تایی دیگر جدا کرده و چون ۲ دسته هم عدد داریم (ترکیب با تکرار) به !۲ تقسیم می‌کنیم. $\frac{\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!} = ۱۰۵$
۶۹	**گزینه ۳** بدیهی است که هیچ ۳ نقطه از نقاطی که روی محیط دایره قرار می گیرند روی یک خط راست نیست و هر ۳ تا از آنها را که انتخاب کنیم یک مثلث تشکیل می‌شود. $\binom{۸}{۳} = ۵۶$
۷۰	**گزینه ۳** ۳ راس مثلث را به ۲ شکل می‌توان انتخاب کرد، یا این که دو راس از بالا و یکی از پایین یا یکی از بالا و دوتا از پایین و تعداد مثلث‌ها برابر است با: $\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} = ۷۰$
۷۱	**گزینه ۴** (یک نقطه از بقیه نقاط) و (۳ نقطه روی یک ضلع) – (هر چهار نقطه روی یک ضلع) – (کل انتخاب ۴ نقطه)= تعداد چهار ضلعی های محدب $= \binom{۱۲}{۴} - \binom{۳}{۱}\binom{۴}{۴} - \binom{۳}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۸}{۱} = ۳۹۶$
۷۲	**گزینه ۳** برای اینکه AC قطر چهار ضلعی باشد باید یک راس از نقاط سمت چپ AC و یک راس از نقاط سمت راست انتخاب شود. $\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}$
۷۳	**گزینه ۴** ابتدا تعداد مربع‌های یک در یک برابر است با : ۶۴= ۸×۸ بعد مربع های دو در دو : ۷×۷ و همین طور: $۸^۲ + ۷^۲ + ۶^۲ + \cdots + ۱^۲ = \frac{۸ \times ۹ \times ۱۷}{۶} = ۲۰۴$ نکته! $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{(n)(n+۱)(۲n+۱)}{۶} = ۲۰۴$

به همین سادگی

Mathematics Department

ریاضی مشهد دبیرستان

ایده هات رو اینجا بنویس

بخش دوم : احتمال

درسنامه

در مطالعه حوادث ممکن اســت اتفاق‌های مختلفی مشــاهده کنیم. ما می‌خواهیم قبل از آنکه روند حادثه‌ای کامل شــود نتیجه آن را پیش بینی کنیم. این پیش بینی توســط علم احتمال سنجیده می‌شود.

در جامعه پدیده‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف: پدیده قطعی: به پدیده‌ای گفته می‌شود که نتیجه آن کاملا مشخص است.

ب: پدیده تصادفی: پدیده‌ای که نتیجه آن از قبل معلوم نیست.

به عنوان مثال سکه ای که به هوا پرتاب می‌شود. برگشت آن به سطح زمین یک پدیده قطعی است. اما اینکه به کدام طرف می نشیند یک پدیده تصادفی است. باید دقت شود ما در بحث احتمال می خواهیم نتیجه پدیده تصــادفی را پیش بینی کنیم. برای این کار به تعاریف زیر احتیاج داریم.

آزمایش تصادفی: آزمایشــی که نتیجه آن را نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم ولی نتایج ممکن آن از قبل قابل پیش بینی است.

فضای نمونه: به همه نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه می‌گوییم و آن را با S نشان می‌دهیم.

برآمد: هر نتیجه ممکن یعنی هر عضــو S را یک برآمد می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضــوهای این مجموعه رخ خواهد داد. وقتی تعداد برآمدهای فضــای نمونه‌ای متناهی یا شمارشی باشد آن را فضای نمونه ی گسسته می نامیم.

پیشــامد: هر پیشــامد زیر مجموعه ای از فضای نمونه است. هرگاه می‌گوییم پیشامدی رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمد های آن رخ خواهد داد.

خداوند دوبار تکرار کرده که ته دلمون قرص باشه..

با هر سختی آسانی است

انشراح آیه ۵ و ۶

مثال ۱: سکه ای را آنقدر پرتاب میکنیم تا رو ظاهر شود.فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید

$s = \{R, PR, PPR, \dots\}$

توجه کنید به این فضا، فضای نامتنهای شمارا گفته میشود.

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال ۲: در کیسه‌ای ۷ توپ متمایز وجود دارد یک توپ به تصادف از آن خارج کرده و بدون مشاهده آن را کنار می‌گذاریم. سپس توپ دیگری را خارج کرده و آن را مشاهده می‌کنیم . فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) $\binom{7}{2}$ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۲

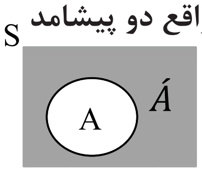
چون اطلاعاتی از خروج مهره اول در دست نیست، پس توقع ما در مورد خروج مهره دوم تغییر نکرده است. یعنی ما هم چنان توقع خروج هر ۷ مهره را داریم و نمی‌توانیم بگوییم مهره معینی شانس خروج ندارد. سپس فضای نمونه ۷ عضوی است.

درسنامه

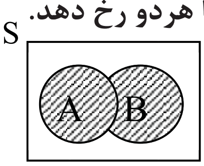
عملیات بر روی پیشامدها:

می‌توان بین پیشامدهای یک آزمایش و عبارات مجموعه‌ای یک تناظر ایجاد کرد. در واقع چون پیشامد، خود از جنس مجموعه است می‌توان پیشامدهای جدیدی با استفاده از تلفیق پیشامدهای قبلی ایجاد کرد. از نمودار ون می‌توان به راحتی برای انجام عملیات پیشامدها استفاده کرد.

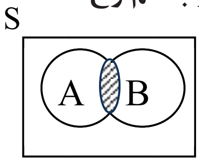
الف: متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضای نمونه‌ای باشد. متمم پیشامد A را با A' نمایش می‌دهند که پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. و در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه ای S را تشکیل می‌دهند.



ب) اجتماع دو پیشامد: $(A\cup B)$ زمانی رخ می‌دهد که A یا B یا هردو رخ دهد.

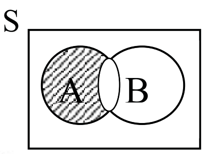


اشتراک دو پیشامد: $(A\cap B)$ زمانی رخ می‌دهد که A و B هر دو با هم رخ می‌دهد.



تفاضل دو پیشامد: $(A-B)$ زمانی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

(A رخ دهد و B' رخ دهد).



پیشگویی: در ادامه، بعد از معرفی و تعریف احتمال و با استفاده از احتمال متمم خواهیم داشت:

$P(\acute{A} \cap \acute{B}) = 1 - P(A \cup B)$

و

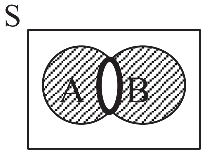
$P(\acute{A} \cup \acute{B}) = 1 - P(A \cap B)$

به همین سادگی

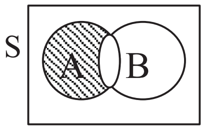
مثال۳: اگر S فضای نمونه‌ای و A و B دو پیشامد از آن باشند با استفاده از نمودار ون هر یک از پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) فقط یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

پاسخ:

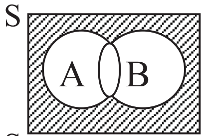


$$(A-B)+(B-A)$$
$$(A\cup B)-(B\cap A)$$



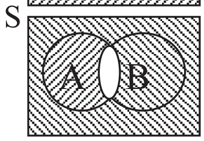
ب) پیشامد A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

$$(A-B)=\left(A\cap \acute{B}\right)$$



ج) پیشامد آن که نه A رخ دهد و نه B

$$\acute{A}\cap\acute{B}=(A\cup B)\acute{}$$



د) پیشامد آن که از A و B حداکثر یک کدام رخ دهد.

$$\acute{A}\cup\acute{B}=(A\cap B)\acute{}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

یه سری از آدما روابط دوستانه ای دارن که هیچ وقت به دردشون نمی خوره ترس ما از تنهایی در بیشتر اوقات باعث میشه روابطی رو نگه داریم که به هیچ کارمون نمی یاد و تازه به ما ضرر هم می رسونه. خدا همیشه در کنار توست و نمیذاره که احساس تنهایی کنی

مثال ۴: ارقام ۹، ۰، ۳، ۵ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.

ب) پیشامدA آن که اعداد دو رقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامدB آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.　　　　د) پیشامد $\mathbf{A\cap \acute{B}}$

پاسخ:

الف) S={۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵}

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می‌شوند مضرب ۵ هستند.

$$A=\{۳۰,۳۵,۵۰,۹۰,۹۵\}$$

ج)

$$B=\{۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$$

د) ابتدا $\acute{B}$ را مشخص می کنیم.

$$\acute{B}=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰\}$$
$$A\cap\acute{B}=\{۳۰,۳۵,۵۰\}$$

مثال ۵: در انتخاب سه نفر از بین ۷ نفر پیشامد آن که از بین دو نفر a و b حداقل یکی موجود باشد چند عضو دارد؟

۱) ۲۵　　۲) ۲۰　　۳) ۱۵　　۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\binom{۷}{۳}-\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{حالتی که هیچ کدام موجود نباشد.}}=۳۵-۱۰=۲۵$$

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

دوره سریع مطالب

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱ – مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آن می‌نامیم.

درست ☐ نادرست ☐

۲ - فضای نمونه ای برای ترکیب جنسیت یک خانواده ۳ فرزندی، ۶ عضو دارد.

درست ☐ نادرست ☐

۳ - پیشامد آن که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد را به صورت $A-B$ نشان می دهیم.

درست ☐ نادرست ☐

۴ - در پرتاب یک تاس دو پیشامد عدد رو شده زوج و عدد رو شده اول دو پیشامد ناسازگارند.

درست ☐ نادرست ☐

جاهای خالی را با کلمات و عبارات مناسب پر کنید.

قوانین دمورگان

$(A \cup B)' = \acute{A} \cap \acute{B}$

$(A \cap B)' = \acute{A} \cup \acute{B}$

۶ - پیشامد $(A \cup B)'$ وقتی رخ می‌دهد که A اتفاق نیفتد و ....

۷ - پیشامد.............. وقتی رخ می‌دهد که فقط A یا فقط B رخ دهد.

۸ - تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده بر ۵ بخش پذیر باشد تعداد .... عضو دارد.

۹ - در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سفید و ۵ مهره سبز است باید حداقل.............. مهره برداریم تا مطمئن شویم از هر سه رنگ برداشته‌ایم.

۱۰ - در دو پرتاب یک تاس سالم پیشامد آن که عدد رو شده اول کمتر از عدد رو شده دوم باشد تعداد .... عضو دارد.

آزمون چهار گزینه ای

۱- اگر $S=\{۱،۲،a, b, ج\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد کدام مجموعه‌ی زیر یک پیشامد از این فضای نمونه‌ای است؟

۱) $\{۱, b ,۳\}$ ۲) $\{۱،۲, c\}$ ۳) $\{a, b,۲\}$ ۴) $\{ج,۳, a\}$

۴- در پرتاب دو بار یک تاس سالم، پیشامد آن که عدد بار دوم از بار اول بزرگتر باشد چند عضو دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۵- اگر A پیشامد انتخاب حداقل ۲ از بین ۵ نفر باشد، مجموعه A چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۶ ۳) ۳۲ ۴) ۵۱

۶- دو تاس به تصادف پرتاب می شوند. اگر A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۴ و غیر مساوی باشند. $n(A)$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۶ ۴) ۲۴

۷- شخصی سه بار به هدفی تیراندازی می‌کند. پیشامد آن که فقط یک تیر به هدف بخورد چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- در خانواده‌های سه فرزندی پیشامد آن که هر سه فرزند پسر یا هر سه دختر نباشند چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

به همین سادگی

Mathematics Department

ریاضی مشهد دپارتمان

ایده هاتو اینجا بنویس

یک بازرگان در بازار، تخم مرغ میفروخت. یک روز یک مشتری نزدیک آمد و گفت: من نصف همه تخم مرغ های شما را به علاوه نصف یک تخم مرغ از شما میخرم. بازرگان خوشحال شد. چند دقیقه بعد مشتری دومی آمد و گفت: میخواهم نصف همه تخم مرغ هایت به علاوه نصف یک تخم مرغ را بخرم. بازرگان باز هم خوشحال شد. مشتری سوم هم گفت: میخواهم نصف همه تخم مرغ هایت به علاوه نصف یک تخم مرغت را بخرم. بازرگان خوشحال شده و به او میدهد و میگوید من میخواهم نصف همه تخم مرغ هایت به علاوه نصف یک تخم مرغت را بخرم. بازرگان میگوید خدا را شکر تخم مرغ هایم تمام شد و آخرین مشتری ام راضی از اینجا رفت. به نظر شما چند تا تخم مرغ در آغاز وجود داشته است؟؟؟

تابع احتمال:

برای توصیف یک آزمایش تصادفی، علاوه بر شناخت فضای نمونه‌ای لازم است بدانیم که شانس وقوع هر پیشامد از آن چقدر است. بنابراین به هر پیشامد مانند A عدد حقیقی P(A) از بازه $[0,1]$ را به عنوان شانس یا احتمال رخ دادن A نسبت می‌دهیم. به P، تابع احتمال گفته می‌شود، به شرطی که در دو اصل زیر صدق کند:

۱) $P(S) = 1$

۲) برای هر دو پیشامد ناسازگار مانند A و B، $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

اگر P یک تابع احتمال باشد، فضای نمونه‌ای S به همراه P یک فضای احتمال نامیده می‌شود.

از جمله مهم‌ترین فضاهای احتمال، که در گذشته با آن آشنا شده‌اید، فضاهای هم‌شانس هستند.

در واقع اگر فضای نمونه‌ای S متناهی باشد و برای هر پیشامد مانند A، $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)}$، در این صورت P یک تابع احتمال است، زیرا:

۱) $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

۲) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه $A \cap B = \emptyset$، در نتیجه:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(\emptyset)}{n(S)}$$
$$= P(A) + P(B) + 0 = P(A) + P(B)$$

علت این که این گونه فضاهای احتمال فضاهای هم‌شانس نامیده می‌شوند، این است که شانس وقوع پیشامدهای تک عضوی همگی با هم برابرند.در واقع اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$، آن‌گاه به ازای هر $1 \le i \le n$،

$$P(\{s_i\}) = \frac{n(\{s_i\})}{n(S)} = \frac{1}{n}$$

یعنی احتمال وقوع هر پیشامد تک عضوی برابر $\frac{1}{n}$ است. در درس بعدی با فضاهای احتمالی آشنا می‌شویم که هم‌شانس نیستند.

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

توجه کنید مسائل مربوط به احتمال معمولا به دسته‌های زیر تقسیم می‌شوند که البته اکثر آنها ارتباط مستقیم با ترکیبات دارند.

۱ – مسائل مربوط به پرتاب تاس (یک تاس دوتاس)

۲ – مسائل مربوط به پرتاب سکه و فرزندان دختر و پسر

۳ – مسائل تاس و سکه با هم

۴ – مسائل مربوط به انتخاب مانند مهره ها و مسائل جفت بودن

۵ – جایگشت ها مانند کلمه سازی یا عدد سازی

۶ – قانون جمع احتمالات

۷ – مسائل مربوط به استفاده از قوانین مجموعه ها

۸ – احتمال شرطی و قانون بیز

۹ – توزیع دو جمله‌ای

البته هرکدام از مواردبالا داری زیر شاخه‌هایی هستند و همچنین‌می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند.

در مسائل مربوط یک تاس فضای نمونه ۶ عنصر دارد. حال اگر دو تاس را با هم پرتاب کنیم فضای نمونه $۶^۲$ عضو دارد و به همین صورت برای k تاس، فضای نمونه ۶^k عضو خواهند داشت.

مثال۶: سه تاس را پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه مجموع اعداد ۱۷ باشد را بیابید.

پاسخ:

$$n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶ = ۶^۳$$

$$A = \{(۵,۶,۶)(۶,۵,۶)(۶,۶,۵)\} \longrightarrow n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶^۳}$$

مثال۷: یک تاس را پرتاب می کنیم به چه احتمالی مقسوم علیه ۶ می‌آید.

پاسخ:

$$S = \{۱\,,۲,۳,۴,۵\,,۶\} \rightarrow n(S) = ۶$$

$$A = \{۱\,,۲,۳,۶\} \qquad \rightarrow n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

به همین سادگی

مثال۸: دو تاس را پرتاب می‌کنیم احتمال‌های زیر را بیابید.

الف) هر دو تاس ۶ باشد.

پاسخ :

$$n(s) = ۶^۲ = ۳۶$$

$$A = \{(۶,۶)\} \to n(A) = ۱$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۳۶}$$

ب)یکی ۲ و دیگری ۳ باشد.

پاسخ:

$$A = \{(۲,۳)(۳,۲)\} \to n(A) = ۲$$

$$P(A) = \frac{۲}{۳۶}$$

ج) مجموع هر دو ۶ باشد.

پاسخ: برای این حالت از تابع تاس استفاده می‌کنید. البته می‌توان از روش جدول نیز استفاده کرد.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱					×	
۲				×		
۳			×			
۴		×				
۵	×					
۶						

$$A = \{(۱,۵)(۲,۴)(۳,۳)(۴,۲)(۵,۱)\} \to n(A) = ۵$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۳۶}$$

د) مجموع هر دو بیشتر از ۶ باشد.

پاسخ:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						×
۲					×	×
۳				×	×	×
۴			×	×	×	×
۵		×	×	×	×	×
۶	×	×	×	×	×	×

$$n(A) = ۲۱$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۱}{۳۶}$$

ه) مجموع هر دو کمتر از ۶ باشد.

پاسخ:

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$n(A) = ۱۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۳۶}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

مثلا اگه بدونین گوشی موبایلتون رو سر کوچه روی یه ماشین جا گذاشتین ، (هنگامی که این موضوع رو فهمیدین توی خونه هستین) فورا لباساتونو می پوشین و مثل یک دونده حرفه ای به سمتش میدوین . چون میدونین اگه دیر برسین برش میدارن . تو مکث نکردی ، چون میدونستی ممکنه هر لحظه گوشیتو از دست بدی به این میگن انگیزه ، یعنی بی خیال خواب و غذا و ... شدی تا گوشیتو ازت نگیرن

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۹: دو تاس‌قرمز و سفید پرتاب می‌شوند، احتمال آنکه عددتاس سفیدبزرگتر باشد چقدراست؟

پاسخ:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	.	×	×	×	×	×
۲	.	.	×	×	×	×
۳	.	.	.	×	×	×
۴	.	.	.	.	×	×
۵	.	.	.	.	.	×
۶	.	.	.	.	.	.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

مثال ۱۰: دو تاس سفید و یک تاس قرمز را می‌ریزیم. احتمال آنکه عدد تاس قرمز کوچکتر از تاس‌های سفید باشد چقدر است؟

پاسخ:

تاس‌قرمز	تاس‌سفید	
۱	۵×۵	می‌توانند از ۲ تا ۶ باشند
۲	۴×۴	می‌توانند از ۳ تا ۶ باشند
۳	۳×۳	می‌توانند از ۴ تا ۶ باشند
۴	۲×۲	می‌توانند از ۵ تا ۶ باشند
۵	۱×۱	فقط می توانند ۶ باشند

$$P(A)=\frac{۲۵+۱۶+۹+۴+۱}{۶^{۳}}=\frac{۵۵}{۲۱۶}$$

مثال جالب: با کدام احتمال در تجربه پرتاب یک تاس، در سه بار متوالی مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷۲}$ ۳) $\frac{۷}{۷۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا تمامی حالت هایی که مجموع سه عدد از اعداد ۱ الی ۶ برابر ۸ می شود را می نویسیم مجموع تعداد جایگشت های آن ها برابر تعداد عضو هایی پیشامد تصادفی است

$$\left.\begin{array}{l}(۱و۱و۶)\rightarrow\frac{۳!}{۲!}=۳\\(۱و۲و۵)\rightarrow ۳!=۶\\(۱و۳و۴)\rightarrow ۳!=۶\\(۲و۲و۴)\rightarrow\frac{۳!}{۲!}=۳\\(۲و۳و۳)\rightarrow\frac{۳!}{۲!}=۳\end{array}\right\}\Rightarrow n(A)=۲۱\Rightarrow P(A)=\frac{۲۱}{۲۱۶}=\frac{۷}{۷۲}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

در پرتاب سکه و مسائل تولد دختر و پسر تعداد حالات هر آزمایش ۲ حالت است. همچنین در پرتاب n سکه احتمال اینکه k رو بیاید عبارتست از: $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

مثال۱۱: سه سکه را که پرتاب کنیم احتمال های زیر را حساب کنید.

الف) ۲ سکه رو بیاید.

پاسخ: $\frac{\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{3}{8}$

ب) حداقل ۲ رو بیاید.

پاسخ: وقتی می گوییم حداقل، یعنی دو تا رو یا سه تا رو بیاید. $\frac{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ج: حداکثر ۲ رو بیاید.

پاسخ: یعنی هیچ رو یا ۱ رو یا ۲ رو بیاید. $\frac{\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{7}{8}$

درسنامه

در مسائلی که انتخاب چند شئ مورد نظر است باید از $\binom{n}{k}$ استفاده شود توجه به تفاوت «و» , «یا» بسیار مهم می باشد.

مثال ۱۲: در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. دو مهره به تصادف از بین آنها انتخاب می‌کنیم احتمال های زیر را بیابید.

الف) هردو مهره قرمز باشند.

پاسخ: در این کیسه ۷ مهره موجود است و می‌خواهیم دو مهره انتخاب کنیم پس $n(s)=\binom{7}{2}$ است.

حالات مطلوب این است که از بین ۳ مهره قرمز ۲ تا انتخاب کنیم. $n(A)=\binom{3}{2}$ است بنابراین داریم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}$$

ب) هر دو همرنگ باشند.

پاسخ:

$$P(A)=\frac{\overset{\text{هر دو قرمز}}{\binom{3}{2}}+\overset{\text{یا}}{}\overset{\text{هر دو آبی}}{\binom{4}{2}}}{\binom{7}{2}}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

ج) هر دو مهره همرنگ نباشند.

پاسخ یکی قرمز و دیگری آبی باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۲}}$$

مثال۱۳: در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده، متفاوت است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۲}$ ۴) $\frac{۴}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{۵ \times ۴ \times ۳}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲}{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰} = \frac{۳}{۱۱}$$

مثال۱۴: در کیسه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره آبی وجود دارد ۶ مهره به تصادف بیرون می آوریم احتمال اینکه حداقل در کیسه یک مهره سفید مانده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۳}{۲۸}$

پاسخ: گزینه ۲ برای اینکه حداقل در کیسه یک مهره سفید بماند باید برداشت‌ها به صورت ۲ سفید و ۴ آبی یا ۱ سفید و ۵ آبی باشند. بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱} \times \binom{۵}{۵} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۵}{۴}}{\binom{۸}{۶}} = \frac{۹}{۱۴}$$

مثال۱۵: از کیسه‌ای حاوی مهره‌های با شماره ۱ و۲ و۳ و۴ و۵ و۶ سه مهره انتخاب می‌کنیم با کدام احتمال جمع شماره‌های سه مهره انتخاب شده زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۹}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲۰}$

پاسخ: گزینه ۳ زمانی جمع سه عدد زوج است که هر سه عدد زوج و یا دو تا فرد و یکی زوج باشند. بنابراین.

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۲} \times \binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۳}} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{۱}{۲}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال ۱۶: از ده جفت کفش سه لنگه برمی داریم احتمال اینکه یک جفت کفش بین سه لنگه موجود باشد را بیابید.

پاسخ: ده جفت کفش یعنی بیست لنگه پس:

$$n(S) = \binom{۲۰}{۳}$$

حال یک جفت از ۱۰ جفت انتخاب می‌کنیم و یک لنگه از ۱۸ لنگه باقی مانده.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۱۰}{۱}\times\binom{۱۸}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

مثال ۱۷: احتمال اینکه از ۵ جفت کفش متمایز ۲ لنگه کفش انتخاب کنیم و این دو لنگه تشکیل یک جفت کفش بدهند را بیابید.

پاسخ:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

مثال ۱۸: با ارقام ۰و۱ و۲ و۳ و۴ و۵ و۶ یک عدد سه رقمی بدون رقم تکراری می سازیم به چه احتمالی این عدد زوج است؟

پاسخ: می‌خواهیم یک عدد سه رقمی بدون رقم تکراری بسازیم .

بنابراین داریم :

صدگان	دهگان	یکان
۶	۶	۵

$n(S)=۶\times۶\times۵$

حال این رقم می خواهد زوج باشد دو حالت در نظر می گیریم:

۶	۵	۱

$۶ \times ۵ = ۳۰$

$۱۰۵ = ۷۵ + ۳۰$ کل حالات

		۶و۴و۲
۵	۵	۳

$۵\times۵\times۳ = ۷۵$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰۵}{۱۸۰}$$

مثال ۱۹: با حروف‌کلمه «آرارات» یک کلمه ۶ حرفی می‌سازیم با چه احتمالی «الف» یک درمیان است؟

پاسخ: چون ۳ تا «الف» و ۲ تا «ر» داریم.

$$n(S) = \frac{۶!}{۳! \times ۲!}$$

حال «الف» ها می‌خواهد یک درمیان باشد کلمه یا با الف شروع می شود یا غیر الف. بنابراین دو حالت داریم:

الف □ الف □ الف □ $\quad \frac{۳!}{۲!} = ۳$

□ الف □ الف □ الف $\quad \frac{۳!}{۲!} = ۳$

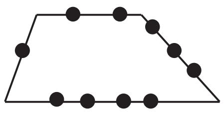
$$n(A) = ۳ + ۳ = ۶$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۶۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

ایده‌هات رو اینجا بنویس

مثال ۲۰: از بین نقاط زیر ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه با این ۴ نقطه بتوان یک چهار ضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهار ضلعی قرار داشته باشد کدام است.

۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$



پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}} = \frac{۴}{۳۵}$$

مثال۲۱: ۱۰ کارت که بر روی هرکدام از آنها یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است در درون ظرفی قرار دارند. اگر کارت‌های موجود در ظرف را به تصادف و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم احتمال آن که ۴ قبل از ۶ و ۶ قبل از ۲ بیرون بیاید کدام است؟

پاسخ: راه حل یکتا: این سه رقم در هر جایگاهی که قرار بگیرند نسبت به هم !۳ حالت جایگشت دارند که حالت ۴۶۲ مطلوب است لذا همواره یکی از ۶ حالت مطلوبست

$$P(A)=\frac{۱}{۶}$$

راه حل دوم: ابتدا مکان این سه رقم را تعیین کرده و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم. بقیه ۷ رقم به صورت دلخواه چیده می‌شود.

$$P(A) = \frac{\binom{۱۰}{۳} \times ۷!}{۱۰!} = \frac{\frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳!}}{۱۰ \times ۹ \times ۸} = \frac{۱}{۶}$$

مثال ۲۲: n نفر را در نظر می‌گیریم احتمال آن که روز تولد هیچ دو نفری از آنها در یک روز یکسان از سال ۳۶۵ روزی نباشد چقدر است؟

پاسخ: نفر اول ۳۶۵ روز برای انتخاب دارد نفر دوم ۳۶۴ و ...

$$P(A) = \frac{۳۶۵\times۳۶۴\times\ldots\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

تمرین: ۵ نفر به چه احتمالی در یک روز خاص از هفته به دنیا می‌آیند

تمرین: ۵ نفر به چه احتمالی در یک روز از هفته به دنیا می‌آیند

تمرین: به چه احتمالی در بین ۵ نفر هیچ دو نفری در یک روز از هفته به دنیا نمی آیند

جزوات هدیه ای از محمد الصادق

قالَ الصّادقُ (ع)
اَلبِرّ حُسنُ الخُلقِ یَعمُران الدّیارَ و یَزیدانِ فی الاَعمارِ
نیکی و اخلاق خوب سرزمین ها را آباد و عمر ها را طولانی میکند

به همین سادگی

ریاضی مشهد
دبیرستان
Mathematics Department

ایده‌هات رو اینجا بنویس

دوره سریع یا صحیح غلط و جای خالی

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱- در کیسه‌ای ۶ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سفید است. احتمال آن که یک مهره سفید از کیسه خارج شود، $\frac{۱}{۲}$ است.

درست ☐ نادرست ☐

۲- در پرتاب یک تاس و یک سکه با هم، احتمال آنکه سکه شیر و تاس زوج بیاید، $\frac{۱}{۴}$ است.

درست ☐ نادرست ☐

۳- احتمال یک پیشامد از یک تجربه‌ی تصادفی خارج قسمت تعداد حالات ممکن به تعداد حالات مطلوب است.

درست ☐ نادرست ☐

۴- احتمال آنکه یک سکه سالم در یکصدمین پرتاب، شیر بیاید، $\frac{۱}{۲}$ است.

درست ☐ نادرست ☐

۵- در خانواده‌ای با سه فرزند، احتمال آن که هر سه فرزند هم جنس باشند، $\frac{۱}{۴}$ است.

درست ☐ نادرست ☐

جاهای خالی را با کلمات و عبارات مناسب پر کنید.

۶- در پرتاب سه تاس احتمال آن که همه‌ی اعداد رو شده برابر باشند، .... است.

۷- در خانواده‌ای ۳ فرزندی احتمال آن که حداقل یک فرزند پسر باشد، برابر .... است.

۸- در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سبز است. مهره‌ای از کیسه خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مهره، سفید نیست، احتمال سبز بودن آن برابر .... است.

۹- احتمال تولد یک نفر در یک روز خاص از هفته برابر .... است.

۱۰- در پرتاب دو تاس احتمال آن که حداقل یکی از دو تاس ۶ بیاید، برابر .... است.

ایده‌هات‌رو اینجا بنویس

*** آزمون چهار گزینه‌ای**

۱- چهار رقم ۳ و ۲و ۱ و ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی تشکیل شود با کدام احتمال، یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۲- A و B به همراه ۴ نفر دیگر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بنشینند. به کدام احتمال A و B کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳- در پرتاب دو تاس احتمال آنکه هر دو تاس بین ۲ و ۵ ظاهر شوند چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۴- در یک خانواده ۶ فرزندی، احتمال آنکه تعداد دخترها بیشتر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳۲}$

۵- در یک خانواده ۴ فرزندی، با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶- رئیس و منشی و ۴ کارمند دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال منشی مقابل رئیس قرار می‌گیرد.

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۷- در جعبه‌ای n مهره وجود دارد که ۵ تای آنها سفید است . ۳ مهره به تصادف از آنها خارج می‌کنیم اگر احتمال سفید بودن هر ۳ مهره $\frac{۱}{۲۲}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۸- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سبز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال وقوع کدام پیشامد از سایرین بیشتر است؟

۱) هر سه سبز باشند ۲) حداکثر ۲ مهره سبز ۳) فقط ۲ مهره آبی ۴) حداقل یک مهره آبی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

پیشامد متمم: فرض کنید A یک پیشامد باشد . متمم آن را با $\acute{A}$ نشان می‌دهیم و داریم :

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

معمولا در تست‌هایی که شمردن اعضای پیشامد مطلوب وقت‌گیر باشد از احتمال متمم استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۳: اگر احتمال بارش باران به نباریدنش $\frac{۵}{۷}$ باشد، احتمال باریدن باران چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

پاسخ : گزینه ۲

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{۵}{۷} \Rightarrow ۷P(A) = ۵P(A)' = ۵(۱ - P(A)) = ۵ - ۵P(A)$$

$$\Rightarrow ۱۲P(A) = ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۲}$$

مثال ۲۴: در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنها به تصادف انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

۲) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

پاسخ : گزینه ۳

$$P\,(\text{حداقل یک موش آزمون دیده}) = ۱ - P\left(\text{هر دو موش آزمون ندیده}\right) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۵}{۷}$$

مثال ۲۵: در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع اعداد از ۱۱ کوچکتر باشد را بیابید.

پاسخ: متمم احتمال را محاسبه می‌کنیم یعنی احتمال اینکه مجموع اعداد ۱۱ یا ۱۲ باشد.

$$A' = \{(۶,۶)(۶,۵)(۵,۶)\}$$

$$P(A') = \frac{۳}{۳۶} \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۳}{۳۶} = \frac{۳۳}{۳۶}$$

Mathematics Department

ریاضی مشهد دیار پرتمان

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۲۶: عددی سه رقمی به تصادف انتخاب شده است. احتمال این که این عدد رقم تکراری داشته باشد چقدر است؟

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۲۱ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲۸

پاسخ: فضای نمونه‌ای S برابر مجموعه اعداد سه رقمی است، بنابراین $n(S) = ۹ \times ۱۰ \times ۱۰$. فرض کنید A پیشامد آن باشد که عدد انتخاب شده رقم تکراری داشته باشد. در این صورت A' پیشامد آن است که ارقام عدد انتخابی همگی متمایز باشند. بنابراین:

$$n(A') = ۹ \times ۹ \times ۸$$

در نتیجه:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۹\times۹\times۸}{۹\times۱۰\times۱۰} = ۰/۷۲$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - ۰/۷۲ = ۰/۲۸$$

مثال۲۷: سه عدد به تصادف از مجموعه $\{۱,۲,...,۱۱\}$ انتخاب شده است. احتمال این‌که حاصل‌ضرب این سه عدد بر ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای S برابر مجموعه همه زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{۱,۲,...,۱۱\}$ است، پس $n(S) = \binom{۱۱}{۳}$. فرض کنید A پیشامد آن باشد که حاصل‌ضرب سه عدد انتخاب شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد. در این صورت A پیشامد آن است که در بین سه عدد انتخابی دست کم یکی از ۵ یا ۱۰ وجود داشته باشد. در نتیجه A' پیشامد آن است که در بین سه عدد انتخابی هیچ یک از ۵ و ۱۰ وجود نداشته باشد، پس $n(A') = \binom{۹}{۳}$. بنابراین:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}} = \frac{\frac{۹!}{۳!۶!}}{\frac{۱۱!}{۳!۸!}} = \frac{۹!\times۸!}{۱۱!\times۶!} = \frac{۸\times۷}{۱۱\times۱۰} = \frac{۲۸}{۵۵}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۲۸}{۵۵} = \frac{۲۷}{۵۵}$$

به همین سادگی

ریاضی مشهد دپارتمان
Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۲۸: **عددی به تصادف از مجموعه $\{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$ انتخاب شده است. احتمال این که این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۲ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟**

پاسخ: فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۳ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخاب شده بر ۲ باشد. در این صورت باید $P(A-B)$ را بیابیم. می دانیم:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

همچنین $A\cap B$ پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۶ است. چون در مجموعه $\{۱,۲,\dots,۱۰۰\}$، ۱۶۶ عدد بر ۶ بخش‌پذیرند، پس $P(A\cap B)=\frac{۱۶}{۱۰۰}$، در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۳۳-۰/۱۶=۰/۱۷$$

مثال۲۹: **در یک مدرسه ۴۸ معلم تدریس می‌کنند که ۱۷ تا از آن‌ها معلم ریاضی هستند. ۳۴ تا از معلمین که ۱۱ نفر آن‌ها معلم ریاضی هستند وسیله نقلیه دارند. یکی از معلمین این مدرسه به تصادف انتخاب شده است. احتمال این‌که این شخص نه معلم ریاضی باشد و نه وسیله نقلیه داشته باشد چقدر است؟**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: فرض کنید A پیشامد این باشد که شخص انتخاب شده معلم ریاضی باشد و B پیشامد این باشد که شخص انتخاب شده وسیله نقلیه داشته باشد. در این صورت باید $P(A'\cap B')$ را بیابیم. چون $A'\cap B'$ متمم $A\cup B$ است پس:

$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=۱-\frac{۱۷}{۴۸}-\frac{۳۴}{۴۸}+\frac{۱۱}{۴۸}=\frac{۸}{۴۸}=\frac{۱}{۶}$$

مثال۳۰: **از بین ۲۵۰ دانشجوی دانشکده فنی، ۲۶ نفر اهل گیلان، ۱۸ نفر اهل مازندران و ۱۴ نفر اهل استان گلستان هستند. احتمال این‌که یکی از دانشجویان این دانشکده که به تصادف انتخاب شده است اهل یکی از این سه استان شمالی کشور باشد، چقدر است؟**

پاسخ: راه حل: فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامد این باشند که دانشجوی انتخاب شده اهل استان گیلان، مازندران و گلستان باشد. باید $P(A\cup B\cup C)$ را بیابیم. چون A، B و C دو به‌دو ناسازگارند، پس:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۲۷}{۲۵۰}+\frac{۱۸}{۲۵۰}+\frac{۱۴}{۲۵۰}=\frac{۵۹}{۲۵۰}$$

مثال۳۱: **دریک بیمارستان ۵ نوزاد متولدمی‌شوند. با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنها دختر می‌باشند.**

پاسخ: لااقل دو نفر یعنی ۲ نفر یا ۳ نفر یا ۴ نفر یا ۵ نفر می بینیم محاسبه طولانی است. پس متمم را حساب می کنیم یعنی (۱ نفر یا هیچ نفر)

$$P(\acute{A})=\frac{\binom{۵}{۰}+\binom{۵}{۱}}{۲^۵}\Rightarrow P(A)=۱-P(\acute{A})=۱-\frac{۱+۵}{۳۲}=۱-\frac{۶}{۳۲}$$

به همین سادگی

ایده هاتو اینجا بنویس

مثال۳۲: یک سکه را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا احتمال اینکه لااقل یک بار رو ظاهر شود بیشتر از ۹۵ درصد باشد.

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

پاسخ : گزینه ۲

$$1-\frac{\binom{n}{0}}{2^n}>\frac{95}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n}<\frac{5}{100} \Rightarrow 2^n>20 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

درسنامه

احتمالات و مجموعه ها : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای باشد، داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

با تقسیم طرفین بر n(S) داریم.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثال۳۳: احتمال آنکه دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود ۵۵ درصد و احتمال آنکه در درس شیمی قبول شود ۶۰ درصد است. اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود ۷۵درصد باشد با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟

۱) ۰/۳۵　　۲) ۰/۴　　۳) ۰/۴۵　　۴) ۰/۵

پاسخ : گزینه ۲

$$P(A)=0/55 \qquad P(B)=0/6 \qquad P(A\cup B)=0/75$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0/75=0/6+0/55-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=0/6+0/55-0/75=0/4$$

درسنامه

تفاضل دو پیشامد می توان از رابطه زیر کمک گرفت.

$$P(A-B)=P(A\cap \acute{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

مثال۳۴: احتمال آنکه محمد تیری را به هدف بزند $\frac{1}{4}$ و احتمال آنکه محمد و حسین بتوانند به هدف بزنند $\frac{1}{5}$ احتمال آنکه محمد به هدف بزند ولی حسین به هدف نزند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{10}$　　۲) $\frac{1}{20}$　　۳) $\frac{1}{30}$　　۴) $\frac{1}{40}$

پاسخ : گزینه ۲

$$P(A\cap \acute{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۳۵: احتمال آنکه محمد بتواند مسئله‌ای را حل کند $\frac{۱}{۴}$ و احتمال آنکه علی بتواند این مسئله را حل کند $\frac{۱}{۵}$. اگر احتمال آنکه هر دوی آن ها بتوانند این مسئله را حل کنند $\frac{۱}{۲۰}$ باشد احتمال آنکه حداقل یکی از دو نفر بتواند مسئله را حل کند کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۶۰}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

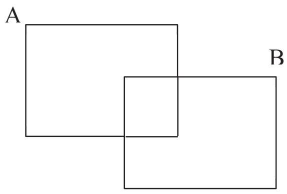
پاسخ: گزینه ۴

$$P(A)=\frac{۱}{۴}\qquad P(B)=\frac{۱}{۵}\qquad P(A\cap B)=\frac{۱}{۲۰}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۵+۴-۱}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}$$

مثال ۳۶: شخصی به سمت یک هدف مطابق شکل زیر شلیک می کند. احتمال زدن حداقل یکی از دو ناحیه A یا B برابر ۰/۸ و احتمال زدن ناحیه مشترک برابر ۰/۵ است مطلوبست احتمال های زیر:

الف)حداکثر یکی از دو ناحیه A یا B



پاسخ:

$$۱-P(A\cap B)=۱-۰/۵=۰/۵$$

ب) دقیقا یکی از دو ناحیه را بزند.

پاسخ:

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=۰/۸-۰/۵=۰/۳$$

ج) نه A را بزند و نه B را.

پاسخ:

$$۱-P(A\cup B)=۱-۰/۸=۰/۲$$

مثال ۳۶: اگر $۲P(B)=P(A)=۳P(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ: از تساوی $۲P(B)=P(A)=۳P(A\cap B)$، داریم:

$$P(B)=\frac{۳}{۲}P(A\cap B)\ ,\ P(A)=۳P(A\cap B)$$

از طرفی

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۳P(A\cap B)-P(A\cap B)=۲P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۳P(A\cap B)+\frac{۳}{۲}P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{۷}{۲}P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}=\frac{۲P(A\cap B)}{\frac{۷}{۲}P(A\cap B)}=\frac{\frac{۲}{۱}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

نکته: اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه:

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

نکته: تعداد اعداد صحیح مجموعهٔ $\{۱,۲, \dots, N\}$ که بر عدد طبیعی k بخش‌پذیر می‌باشند، برابر $\left[\frac{N}{k}\right]$ است.

مثال ۳۶: از مجموعهٔ اعداد $\{۱,۲,۳, \dots, ۱۰۰۰\}$، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که عدد انتخابی ....

آ) بر ۵ بخش‌پذیر باشد.
ب) بر ۴ یا ۷ یا بر هر دو بخش‌پذیر باشد.
پ) بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۶ بخش‌پذیر نباشد.
ت) نه بر ۴ و نه بر ۶ بخش‌پذیر باشد.
ث) بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر ولی بر هر دو بخش‌پذیر نباشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای مجموعهٔ $S = \{۱,۲,۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ می‌باشد. لذا: $n(S) = ۱۰۰۰$

آ) اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد، آن‌گاه:

$$n(A) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right] = ۲۰۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(A)} = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۲$$

ب) اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۴ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۷ باشد، آن‌گاه:

$$n(A) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۴}\right] = ۲۵۰ \,, n(B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۷}\right] = ۱۴۲ \,, n(A \cap B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۴ \times ۷}\right] = ۳۵$$

باید $P(A \cup B)$ را به دست بیاوریم. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۲۵۰}{۱۰۰۰} + \frac{۱۴۲}{۱۰۰۰} - \frac{۳۵}{۱۰۰۰} = ۰/۳۵۷$$

پ) اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۶ باشد، احتمال مطلوب، $P(A - B)$ است. با توجه به رابطهٔ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$، داریم:

$$n(A) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right] = ۲۰۰ \,, n(A \cap B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۳۰}\right] = ۳۳ \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} - \frac{۳۳}{۱۰۰۰} = ۰/۱۶۷$$

ت) اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۴ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۶ باشد، احتمال مطلوب، $P(A' \cap B')$ است. داریم:

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۴}\right] = ۲۵۰ \,, n(B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۶}\right] = ۱۶۶ \,, n(A \cap B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۱۲}\right] = ۸۳$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = ۱ - \frac{۲۵۰}{۱۰۰۰} - \frac{۱۶۶}{۱۰۰۰} + \frac{۸۳}{۱۰۰۰} = ۱ - ۰/۳۳۳ = ۰/۶۶۷$$

(عددی که هم بر ۴ و هم بر ۶ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۲ بخش‌پذیر است.)

ث) اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد،

ایده هات رو اینجا بنویس

پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$، پیشامد مطلوب است. و چون این دو ناسازگارند داریم

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=\big(P(A)-P(A\cap B)\big)+\big(P(B)-P(B\cap A)\big)=$$
$$P(A)+P(A)-۲P(A\cap B)$$

$$n(A)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]=۳۳۳\,,n(B)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right]=۲۰۰\,,n(A\cap B)=\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]=۶۶$$

$$\Rightarrow P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}+\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}-۲\times\frac{۶۶}{۱۰۰۰}=۰/۴۰۱$$

مثال ۳۶: عددی به تصادف از مجموعهٔ $\{۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,\dots,۶۰۰\}$ انتخاب می‌شود، احتمال آن‌که عدد انتخاب شده بر ۵ یا ۶ بخش‌پذیر باشد، ولی بر هر دو بخش‌پذیر نباشد، کدام است؟

۱) ۰/۲۹۸ ‏ ۲) ۰/۳ ‏ ۳) ۰/۳۲۴ ‏ ۴) ۰/۳۴۵

پاسخ:

$$S=\{۱۰۱,۱۰۲,\dots,۶۰۰\}\Rightarrow n(S)=(۶۰۰-۱۰۱)+۱=۵۰۰$$

اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۶ باشد،

احتمال مطلوب، $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)$ است. داریم:

$$P((A-B)\cup(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$n(A)=\left[\frac{۶۰۰}{۵}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۵}\right]=۱۲۰-۲۰=۱۰۰\,,n(B)=\left[\frac{۶۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۰۰-۱۶=۸۴$$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{۶۰۰}{۳۰}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]=۲۰-۳=۱۷$$

توجه کنید در هر حالت تعداد اعداد مضرب k از ۱ تا ۶۰۰ را به دست آورده‌ایم و تعداد اعداد مضرب k از ۱ تا ۱۰۰ را از آن کم کرده‌ایم.

$$\Rightarrow P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=\frac{۱۰۰}{۵۰۰}+\frac{۸۴}{۵۰۰}-۲\times\frac{۱۷}{۵۰۰}=\frac{۱۵۰}{۵۰۰}=۰/۳\Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال ۳۶: برای هر سه پیشامد دلخواه A، B و C ثابت کنید:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

پاسخ: تمرین به عهده ی دانش آموز

به همین سادگی

ایده‌هات رو اینجا بنویس

مثال ۳۶: **فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامهٔ «آ»، ۲۵٪ روزنامهٔ «ب»، ۱۳٪ روزنامهٔ «پ»، ۱۰٪ روزنامه‌های «آ» و «ب»، ۸٪ روزنامه‌های «آ» و «پ»، ۵٪ روزنامه‌های «ب» و «پ»، و بالاخره ۴٪ هر سه روزنامه را می‌خوانند. احتمال این‌که شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچکدام از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟**

پاسخ: فرض کنیم A، B و C به ترتیب پیشامدهای خواندن روزنامه‌های «آ»، «ب» و «پ» باشند. پیشامدی که در آن فرد انتخاب شده هیچ یک از این روزنامه‌ها را نخواند، $A' \cap B' \cap C'$ است. طبق فرض داریم:

بنابراین قانون دمورگان و فرمول مثال قبل، داریم:

$$P(A' \cap B' \cap C') = P((A \cup B \cup C)') = ۱ - P(A \cup B \cup C)$$
$$= ۱ - \big(P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\big)$$
$$= ۱ - (۰/۲ + ۰/۲۵ + ۰/۱۳ - ۰/۱ - ۰/۰۸ - ۰/۰۵ + ۰/۰۴) = ۰/۶۱$$

مثال ۳۶: **عددی به تصادف از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که:**

آ) عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد.

ب) عدد انتخابی حداقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۵ یا ۷ بخش‌پذیر باشد.

پ) عدد انتخابی بر ۴ و ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشد.

پاسخ: فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۴، B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ و C پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۷ باشند.

آ) احتمال مطلوب، $P(A \cap B' \cap C')$ است. داریم:

$$P(A \cap B' \cap C') = P(A \cap (B \cup C)') = P\big(A - (B \cup C)\big) = P(A) - P\big(A \cap (B \cup C)\big) \quad (۱)$$

بنابر قانون پخشی (توزیع‌پذیری) در مجموعه‌ها داریم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow P\big(A \cap (B \cup C)\big) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P\big((A \cap B) \cap (A \cap C)\big) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \quad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow P(A \cap B' \cap C') = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

داریم:

$$n(A) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۴}\right] = ۲۵۰\ , n(A \cap B) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۳۰}\right] = ۵۰\ , n(A \cap C) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۲۸}\right] = ۳۵\ , n(A \cap B \cap C) = \left[\frac{۱۰۰۰}{۱۴۰}\right] = ۷$$
$$\Rightarrow P(A \cap B' \cap C') = \frac{۲۵۰}{۱۰۰۰} - \frac{۵۰}{۱۰۰۰} - \frac{۳۵}{۱۰۰۰} + \frac{۷}{۱۰۰۰} = ۰/۱۷۲$$

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده‌هات رو اینجا بنویس

ب) احتمال مطلوب، $P(A\cup B\cup C)$ است و داریم:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۴}\right]}{۱۰۰۰}+\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right]}{۱۰۰۰}+\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۷}\right]}{۱۰۰۰}-\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۲۰}\right]}{۱۰۰۰}-\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۲۸}\right]}{۱۰۰۰}-\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۳۵}\right]}{۱۰۰۰}+\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۴۰}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۲۵۰+۲۰۰+۱۴۲-۵۰-۳۵-۲۸+۷}{۱۰۰۰}=۰/۴۸۶$$

پ) احتمال مطلوب، $P(A\cap B\cap C')$ است. داریم:

$$P(A\cap B\cap C')=P\big((A\cap B)-C\big)=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۲۰}\right]}{۱۰۰۰}-\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۴۰}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۵۰-۷}{۱۰۰۰}=۰/۰۴۳$$

<u>مثال ۳۶:</u> درون کیسه‌ای ۲ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه وجود دارد. از این کیسه، مهره‌ها را یکی یکی و با جایگذاری خارج می‌کنیم تا اولین مهرهٔ سفید خارج شود. احتمال آن‌که سه مهره از کیسه خارج کرده باشیم، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۲۷}$

پاسخ: ممکن است مهرهٔ اول خارج شده سفید باشد، ممکن است اولین مهرهٔ خارج شده سیاه و دومین مهرهٔ خارج شده سفید باشد، ممکن است دو مهرهٔ اول خارج شده سیاه و مهرهٔ سوم خارج شده سفید باشد و ... . اگر A پیشامد مطلوب و سفید بودن مهرهٔ خارج شده را با w و سیاه بودن مهرهٔ خارج شده را با b نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$A=\{(b,b,w),(b,b,b,w),\dots\}\Rightarrow A'=\{w,(b,w)\}$$

توجه کنید احتمال خارج شدن مهرهٔ سفید $\frac{۲}{۳}$ و احتمال خارج شدن مهرهٔ سیاه $\frac{۱}{۳}$ است.

$P(A)=۱-P(A')=۱-\Big(P(w)+P\big((b,w)\big)\Big)=۱-\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}\right)=۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد را ناسازگار گوییم هرگاه با هم نتوانند رخ دهند به عبارت دیگر وقوع یکی به معنی عدم وقوع دیگری باشد در دو پیشامد ناسازگار $P(A \cap B) = 0$ است.

بنابراین هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار باشند داریم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نکته: اگر A وB دو پیشامد ناسازگار باشند A و $\acute{B}$ سازگارند همچنین B و $\acute{A}$ نیز سازگارند همچنین اگر A , B متمم یکدیگر نباشند$\acute{B}$ و $\acute{A}$ نیز سازگار هستند.

مثال ۳۷: اگر $P(A) = \frac{۲}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و A و B ناسازگار باشند آنگاه احتمال وقوع پیشامد A یا B چیست؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

پاسخ: گزینه ۳ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$

مثال۳۸: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای باشند کدام رابطه بین احتمال پیشامدها درست است.

۱) $P(A)P(B) = ۱ - P(\acute{A} \cup \acute{B})$

۲) $P(A)P(B) = ۱ - P(\acute{A})P(\acute{B})$

۳) $P(A) + P(B) + P(\acute{A} \cup \acute{B}) = ۱$

۴) $P(A) + P(B) + P(\acute{A} \cap \acute{B}) = ۱$

پاسخ: گزینه ۴ دو پیشامدA و B ناسازگارند پس $P(A \cap B) = ۰$ بنابراین $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ دقت کنید که:

$$P(A) + P(B) + P(\acute{A} \cap \acute{B}) = ۱ \Rightarrow P(A) + P(B) = ۱ - P(\acute{A} \cap \acute{B}) = ۱ - P(A \cup B)' = P(A \cup B)$$

یعنی گزینه ۴ درست است.

قالَ الصادقُ (ع)

اِنّ المُداعَبَهَ مِن حُسنِ الخُلقِ، و اِنّکَ لَتُدخِلُ بِهَا السّرورَ علیَ اخیکَ

شوخی و مزاح ، از خوش اخلاقی است و تو با این کار ، برادر مسلمانت را خوشحال می کنی

به همین سادگی

درسنامه

ایده هات رو اینجا بنویس

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد را مستقل گوییم هرگاه وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. اگر دو پیشامد **A** و **B** مستقل باشند داریم

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

بنابراین داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

وقتی دو پیشامد مستقل باشند با دانستن نتیجه یکی از آنها نمی‌توان نتیجه دیگری را پیش‌بینی کرد یعنی احتمال ها ربطی به هم ندارند.

مثلا وقتی منتظر ورود دو نفر هستیم احتمال اینکه یکی پسر و دیگری دختر باشد $\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ است.

نکته ۱: اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای **A** و $\acute{B}$ نیز مستقل هستند و همچنین **B** و $\acute{A}$ نیز مستقل هستند و $\acute{B}$ و $\acute{A}$ نیز دو پیشامد مستقل هستند.

نکته ۲: اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل باشند احتمال آنکه فقط پیشامد **A** رخ دهد از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$P(A - B) = P(A \cap \acute{B}) = P(A) \times P(\acute{B})$$

و احتمال اینکه فقط پیشامد **B** رخ دهد از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$P(B - A) = P(B \cap \acute{A}) = P(B) \times P(\acute{A})$$

مثال ۳۹: در پرتاب دو تاس احتمال اینکه هر دو عدد اول باشند چقدر است؟

پاسخ: چون پرتاب دو تاس در نتیجه یکدیگر تأثیری ندارد حاصل برابر است با :

اعداد اول $\{۲،۳،۵\}$ $\qquad P(A)=\frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۴}$

مثال۴۰: اگر $B\ ,A\ ,P(A \cap B) = \frac{۱}{۵۰}\ ,n\ (B) = ۲\ ,n\ (A) = ۱$ مستقل باشند فضای نمونه چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

پاسخ : گزینه ۱

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۵۰} = \frac{n(A)}{n(S)} \times \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow \frac{۱}{۵۰} = \frac{۲}{(n(S))^{۲}} \Rightarrow n(S) = ۱۰$$

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۴۱: در گروه زنان ساکن روستا ۶۰ درصد تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد مهارت قالی بافی دارند اگر یک فرد از این گروه انتخاب شوند با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟

۱) ٪۷۰ ۲) ٪۷۵ ۳) ٪۸ ۴) ٪۸۵

پاسخ: گزینه ۱ چون تحصیلات ابتدایی و مهارت قالی بافی از یک دیگر مستقل هستند خواهیم داشت.

$$P(A) = \%۶۰$$

$$P(B) = \%۲۵$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۲۵ - ۰/۶ \times ۰/۲۵ = ۰/۷$$

مثال۴۲: اگر $P(A) = ۰/۴$ $P(B) = ۰/۷$, $P(A \cup B) = ۰/۸۲$ آنگاه دو پیشامد A و B چگونه‌اند؟

۱) متمم ۲) مستقل ۳) ناسازگار ۴) یکی زیر مجموعه دیگری

پاسخ: گزینه ۲ چون در این رابطه صادق است پس مستقل می باشد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۸۲ = ۰/۷ + ۰/۴ - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲۸ = P(A) \times P(B)$$

مثال۴۳: احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{۱}{۴}$ است. چقدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم جنس باشند؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

و یا   و

$$\frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

اولی دختر   دومی دختر   اولی پسر   دومی پسر

اگر ٪۴۰ ژن های تعیین کننده عامل RH خون منفی باشد. به مثال های زیر پاسخ دهید.

مثال۴۴: خانواده‌ای دارای سه فرزند است اگر پیشامد از هر دو جنس بودن فرزندان این خانواده را با A و پیشامد دارا بودن حداکثر یک پسر را با B نمایش دهیم پیشامدهای A , B چگونه‌اند.

۱) وابسته ۲) ناسازگار ۳) جدا از هم ۴) مستقل

پاسخ:

A = {(د و پ و پ) (پ و د و پ) (پ و پ و د) (د و د و پ) (د و پ و د) (پ و د و د)}

B = {(د و د و د) (پ و د و د) (د و پ و د) (د و د و پ)}

$A \cap B =$ {(پ و د و د) (د و پ و د) (د و د و پ)}

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

پیشامدها مستقل هستند

$$\frac{۳}{۸} = \frac{۶}{۸} \times \frac{۴}{۸}$$

به همین سادگی

Mathematics Department

۱۲ سکه دارید که یکی از آنها سنگین یا سبک تر است. چگونه با ۳ بار وزن کردن آنها در یک ترازو (که وزن را نشان نمی دهد)، آن سکه را می توانید بیابید ؟

دوره سریع مطالب

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

۱- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن گاه $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

درست ☐ نادرست ☐

۲- اگر احتمال قبولی به عدم قبولی یک نفر در آزمون سراسری $\frac{۱}{۳}$ باشد، احتمال قبولی او $\frac{۱}{۳}$ است.

درست ☐ نادرست ☐

۳- اگر $P(A) + P(B) = \frac{۵}{۴}$ باشد، حتما A و B دو پیشامد ناسازگارند.

درست ☐ نادرست ☐

۴- اگر احتمال قبولی حسن در امتحانات پایان سال ۷۰ درصد باشد، احتمال عدم قبولی او ۳۰ درصد است.

درست ☐ نادرست ☐

۵- در پرتاب دو تاس سالم احتمال آن که اعداد رو شده بزرگ تر از ۳ باشند، برابر با حالتی است که کم تر از ۳ باشند.

درست ☐ نادرست ☐

جاهای خالی را با کلمات یا عبارات مناسب پر کنید.

۶- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و $P(A') + P(B') = \frac{۱}{۴}$ باشد، در این صورت $P(A \cup B)$ برابر .... است.

۷- از بین اعداد طبیعی کم تر از ۵۱، یک عدد انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخابی زوج یا مضرب ۳ باشد، برابر .... است.

۸- احتمال آن که در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ۵ بیاید، .... برابر حالتی است که مجموع ۲ یا ۳ بیاید.

۹- اگر $۴P(A \cap B) = ۳P(A) = ۲P(B) = \frac{۱}{۴}$ باشد، آن گاه $P(A \cup B)$ برابر .... است.

به همین سادگی

ایده‌هات رو اینجا بنویس

آزمون چهار گزینه ای

۱- اگر $P(A' \cap B') = \frac{۱}{۸}$ و $P(A') = \frac{۵}{۸}$ و $P(A \cap B) = \frac{۱}{۴}$، $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند حاصل $۱-P(A') - P(A \cap B)$ کدام است؟

۱) $P(B)$ ۲) $P(B')$ ۳) $P(A \cap B')$ ۴) $P(A' \cap B)$

۳- اگر A و B مستقل باشند و $P(B) = ۰/۳$ و $P(A) = ۰/۲$، $P(B-A)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۱

۴- اگر A و B مستقل باشند و $P(A \cup B) = ۰/۸$ و $P(A) = ۰/۵$، آن گاه $P(B')$ کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۱

۵- احتمال آن که نفرات A و B و C در کنکور قبول شوند به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ و ۰/۹ است احتمال آنکه دست کم یکی از آنها در کنکور قبول شود، کدام است؟

۱) ۰/۵۰۱ ۲) ۰/۵۰۴ ۳) ۰/۹۹۱ ۴) ۰/۹۹۴

۶- اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر ۰/۶ و پسر ۰/۴ باشد، احتمال آن که هر سه فرزند این خانواده پسر باشد کدام است؟

۱) ۰/۰۶۴ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۰۸ ۴) ۰/۰۰۸

۷- احتمال تولد پسر در یک خانواده $\frac{۱}{۴}$ است. چقدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم جنس باشند.

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۸- احتمال آنکه در یک خانواده ۴ فرزندی، ۲ فرزند بزرگتر، هم جنس باشند و دو فرزند کوچکتر، جنسیت مخالف داشته باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

احتمال غیرهم‌شانس

نتایج بسیاری از آزمایش‌ها قبل از وقوع مشخص نیست ولی می‌توان شانس وقوع آن‌ها را از قبل مشخص کرد. در برخی از آزمایش‌ها شانس وقوع نتایج آزمایش با یکدیگر برابرند؛ مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شانس وقوع هر یک از عددهای ۱ تا ۶ برابر $\frac{۱}{۶}$ است، ولی در برخی از آزمایش‌ها نیز این گونه نیست.

به هر مجموعهٔ تک عضوی از فضای نمونه‌ای، یک پیشامد ساده می گوییم.

اگر $\{a\}$ یک پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای S باشد، معمولاً به جای $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{S_۱, S_۲, \dots, S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می گوییم.

مثال۴۵: آزمایش انتخاب یک مهره از کیسه‌ای حاوی ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی را در نظر بگیرید. فضای نمونه‌ای این آزمایش را می‌توانیم به صورت {مهرهٔ آبی، مهرهٔ قرمز}=S در نظر بگیریم. چون در کیسه ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد، لذا داریم:

$$P\left(\text{مهرهٔ قرمز}\right) = \frac{۳}{۷} \quad \text{و} \quad P\left(\text{مهرهٔ آبی}\right) = \frac{۳}{۷}$$

همان طور که می‌بینیم احتمال‌های پیشامدهای سادهٔ این آزمایش با هم برابر نیستند، پس فضای نمونه‌ای این آزمایش غیرهم‌شانس است.

نکته: در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{S_۱, S_۲, \dots, S_n\}$ فضای نمونه‌ای آنگاه:

۱) به ازای هر $۱ \le k \le n$ داریم: $۰ \le P(S_k) \le ۱$.

۲) احتمال یک پیشامد A را برابر مجموع احتمال‌های تخصیص یافته به اعضای A تعریف می‌کنیم. مثلاً اگر $A = \{S_۲, S_۴\}$، آنگاه $P(A) = P(S_۲) + P(S_۴)$.

۳) $P(S) = P(S_۱) + P(S_۲) + \cdots + P(S_n) = ۱$

مثال۴۶: در یک آزمایش تصادفی $S=\{x,y,z,t\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{y,z\})=\frac{۳}{۵}$، $P(x)=\frac{۱}{۵}$ و $P(t)=\frac{۱}{۲}P(y)$، در این صورت احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای $\{z\}$ و $\{x,t\}$ را بیابید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)+P(y)+P(z)+P(t)=۱ \\ P(\{y,z\})=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P(y)+P(z)=\frac{۳}{۵} \\ P(x)=\frac{۱}{۵} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵}+P(t)=۱\Rightarrow P(t)=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow P(t)=\frac{۱}{۲}P(y)\Rightarrow P(y)=\frac{۲}{۵}\xrightarrow{P(y)+P(z)=\frac{۳}{۵}}P(z)=\frac{۳}{۵}-\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$P(\{x,t\})=P(x)+P(t)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

مثال۴۷: یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال رو شدن هر عدد با عکس آن عدد متناسب است. احتمال اینکه در پرتاب این تاس عددی کوچک‌تر از ۳ بیاید را به دست آورید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این آزمایش $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است اگر $P(۱)=x$ در نظر بگیریم، آنگاه طبق فرض مسئله داریم:

$$P(۲)=\frac{x}{۲}\ ,P(۳)=\frac{x}{۳},P(۴)=\frac{x}{۴}\ ,P(۵)=\frac{x}{۵},P(۶)=\frac{x}{۶}$$

با توجه به اینکه $P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$، آنگاه نتیجه می گیریم:

$$x+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}+\frac{x}{۵}+\frac{x}{۶}=۱\Rightarrow\frac{۶۰x+۳۰x+۲۰x+۱۵x+۱۲x+۱۰x}{۶۰}=۱\Rightarrow ۱۴۷x=۶۰\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۴۷}=\frac{۲۰}{۴۹}$$

پس احتمال اینکه عددی کوچکتر از ۳ بیاید برابر است با:

$$P(\{۱,۲\})=P(۱)+P(۲)=x+\frac{x}{۲}=\frac{۳x}{۲}=\frac{۳\left(\frac{۲۰}{۴۹}\right)}{۲}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

ایده‌هات رو اینجا بنویس

مثال ۴۸: در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای $S=\{x,y,z\}$ است. اگر $P(X)$، $P(y)$ و $P(z)$ جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ باشند، احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را بیابید.

پاسخ: با توجه به فرض مسئله،

$$P(y)=\frac{۳}{۲}P(x)$$
$$P(z)=\frac{۳}{۲}P(y)=\frac{۹}{۴}P(x)$$

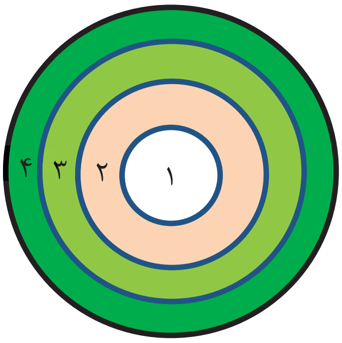
اکنون از این‌که $P(x)+P(y)+P(z)=۱$ نتیجه می گیریم:

$$P(x)+\frac{۳}{۲}P(x)+\frac{۹}{۴}P(x)=۱\Rightarrow\frac{۱۹}{۴}P(x)=۱\Rightarrow P(x)=\frac{۴}{۱۹}$$

همچنین:

$$P(y)=\frac{۳}{۲}P(x)=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۱۹}=\frac{۶}{۱۹}$$
$$P(z)=\frac{۹}{۴}P(x)=\frac{۹}{۴}\times\frac{۴}{۱۹}=\frac{۹}{۱۹}$$

مثال ۴۹: یک صفحه دایره‌ای شکل به ۴ ناحیه تقسیم شده است. در پرتاب یک دارت به این صفحه، احتمال اصابت دارت به ناحیه kاُم برابر $(۳k-۲)r$ است، $k=۱,۲,۳,۴$. احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.



راه حل: فضای نمونه‌ای آزمایش برابر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ است. طبق فرض:

$$P(۱)=(۳\times۱-۲)r=r\quad,\quad P(۲)=(۳\times۲-۲)r=۴r$$
$$P(۳)=(۳\times۳-۲)r=۷r\quad,\quad P(۴)=(۳\times۴-۲)r=۱۰r$$

اکنون از این‌که $P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱$ نتیجه می گیریم:

$$r+۴r+۷r+۱۰r=۱\Rightarrow ۲۲r=۱\Rightarrow r=\frac{۱}{۲۲}$$

پس:

$$P(۱)=\frac{۱}{۲۲}\,,P(۲)=\frac{۴}{۲۲},P(۳)=\frac{۷}{۲۲}\,,P(۴)=\frac{۱۰}{۲۲}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

آزمون چهار گزینه ای

۱- روی k وجه از یک مکعب عدد k حک شده است، $k=1,2,3$. در پرتاب این مکعب احتمال رو آمدن یک عدد اول چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۲- قرار است یکی از سه نفر A، B و C به عنوان مدیر یک شرکت انتخاب شود. احتمال پیروزی A، ۰/۸ احتمال پیروزی B و احتمال B، ۱/۲ احتمال پیروزی C است. احتمال این‌که B مدیر این شرکت شود چقدر است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{30}{79}$ ۴) $\frac{25}{79}$

۳- یک سکه به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن «رو» یک‌ونیم برابر احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال آمدن «پشت» چقدر است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن عدد ۶ سه برابر احتمال آمدن هر یک از ۵ عدد دیگر است. در پرتاب این تاس، احتمال ظاهر شدن عدد ۶ چند است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۵- در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای برابر $S=\{a,b,c,d\}$ است. اگر $P(\{a,b\})=P(c)$ و $P(\{a,b,d\})=0/7$، احتمال وقوع پیشامد $\{c,d\}$ چقدر است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۸

۶- در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای برابر $S=\{1,2,3,4\}$ است و $P(k)=2^k r\ ,\ k=1,2,3,4$ احتمال وقوع پیشامد $\{2,4\}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{7}{10}$

۷- در یک جعبه گوی‌هایی به رنگ‌های قرمز، سفید و سبز وجود دارد. تعداد گوی‌های قرمز دو برابر تعداد گوی‌های سبز و تعداد گوی‌های سبز سه برابر تعداد گوی‌های سفید است. یک گوی از این جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال سبز بودن این گوی چقدر است؟

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{2}{7}$

۸- روی چهار وجه یک چهاروجهی اعداد ۲، ۳، ۸ و ۱۲ حک شده است. در پرتاب این چهاروجهی، احتمال نشستن چهاروجهی روی عدد k با $\sqrt{k}$ متناسب است، $k=2,3,8,12$. احتمال نشستن چهاروجهی روی عدد ۲ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}-2}{3}$

۹- روی چهار وجه یک چهاروجهی اعداد ۲، ۳، ۸ و ۱۲ حک شده است. در پرتاب این چهاروجهی، احتمال نشستن چهاروجهی روی عدد k با $\sqrt{k}$ متناسب است، $k=2,3,8,12$. احتمال نشستن چهاروجهی روی عدد ۲ یا ۳ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{9}$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

احتمال شرطی:

گاهی اوقات دو پیشامد به یکدیگر وابسته‌اند و نتیجه یکی وابسته به نتیجه دیگری است.
در این صورت با احتمال شرطی سر و کار داریم. به یک مثال خودمونی توجه کنید؛
اگر فرض کنیم من یک تاس رو یه بار بندازم و از تو بخوام قبل از انداختن عدد رو پیش گویی کنی و تو بگی تاس پنج میاد، احتمال برنده شدنت برابر $\frac{۱}{۶}$ می شه. حالا اگه تاس رو بندازم و چشم تو رو ببندم، بعد خودم عدد تاس رو ببینم و راهنماییت کنم که تاس رو شده عددش زوجه، وقتی ازت بخوام پیش گویی کنی و اگه تو بگی تاس ۶ اومده به این دلیل که فضای نمونه رو برات از شش حالت به سه حالت کاهش دادم، احتمال بردنت برابر $\frac{۱}{۳}$ می شه! که اصطلاحا به این روش، کاهش فضای نمونه می‌گیم. اگه پیش فرض یا اطلاعاتی که بهت دادم، حالت مشخصی داشت، این یعنی احتمال شرطی. در احتمال شرطی، پیش فرضی را از فضای نمونه ذکر می کنن که معمولا در صورت سئوال با بیان های «اگر بدانیم یا می دانیم یا اگر پیشامد B روی دهد آنگاه احتمال وقوع A یا احتمال وقوع A به شرطی که B روی داده باشد» مطرح می شوند که دستور ریاضی بیان این احتمالات به صورت $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ می باشد.
توصیه من به تو اینه که مسائل احتمال شرطی رو از فرمولش حل نکن. فقط از روش کاهش فضای نمونه حل کن. مگر در تست‌های فرمولی

مثال ۱: تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد برآمده بزرگتر از ۳ باشد احتمال آنکه فرد باشد را بیابید.

پاسخ: چون در صورت سوال گفته عدد بزرگتر از ۳ است یعنی $S=\{۶, ۵, ۴\}$ و $A=\{۵\}$
(دقت کنید $A\subseteq S$) یعنی $P(A)=\frac{۱}{۳}$

قالَ رَسول الله (ص)

اِنّ اَشبَهُکُم بی اَحسَنُکُم خُلُقاً

شبیه‌ترین شما به من کسی است که خوش اخلاق‌تر باشد.

مثال۲: در پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل ضرب دو تاس زوج است با کدام احتمال هر دو تاس زوج می باشد.

پاسخ: از روش کاهش فضای نمونه عمل می‌کنیم.
یعنی فضای نمونه جدید برابر حالت‌هایی از دو تاس است که ضرب آن‌ها زوج است که با علامت (✓) در جدول مشخص شده است و پیشامد تصادفی حالت‌هایی از فضای نمونه جدید است که اعداد هر دو تاس زوج باشند، با علامت (☑) در جدول مشخص شده است.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		✓		✓		✓
۲	✓	☑	✓	☑	✓	☑
۳		✓		✓		✓
۴	✓	☑	✓	☑	✓	☑
۵		✓		✓		✓
۶	✓	☑		☑	✓	☑

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با

$$P(A)=\frac{۳\times ۳}{۳\times ۳+۶\times ۳}=\frac{۱}{۳}$$

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۵۱: در یک خانواده دو فرزندی می‌دانیم یکی از فرزندان دختر است به چه احتمالی فرزند دیگر پسر می‌باشد.

پاسخ: چون یکی از فرزندان دختر است فضای نمونه حالت (پسر و پسر) را ندارد یعنی

S ={(د و د) (د و پ) (پ و د)} → n(s) = ۳

A = {(پ و د) (د و پ)}

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۳}$$

مثال۵۲: از کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه دو مهره متوالیا خارج می کنیم اگر مهره اول سیاه باشد با کدام احتمال مهره دوم قرمز است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ: با توجه به اینکه رنگ مهره اول مشخص شده بنا به روش کاهش فضای نمونه می‌توان کیسه‌ی جدیدی با یک مهره سیاه کمتر از کیسه اولیه در نظر گرفت و احتمال قرمز بودن مهره دوم با شرط جدید برابر است با

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۸}{۱}} = \frac{۱}{۲}$$

مثال۵۳: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند به طوریکه P (A)=۰/۲ و P (B) =۰/۲۲ و P (B|A) = ۰/۷ آنگاه P (B′|A′) کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۰/۸۴ ۲) ۰/۹۰ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۹۶

پاسخ : گزینه ۲

$$\left.\begin{aligned} P(B|A) &= ۰/۷ = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ P(A) &= ۰/۲, P(B) = ۰/۲۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A\cap B) = ۰/۱۴$$

$$P(\acute{B}/\acute{A}) = \frac{P(\acute{A}\cap \acute{B})}{P(\acute{A})} = \frac{۱ - P(A\cup B)}{۱ - P(A)} = \frac{۱ - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)]}{۱ - ۰/۲}$$

$$= \frac{۱ - (۰/۲ + ۰/۲۲ - ۰/۱۴)}{۰/۸} \Rightarrow P(\acute{B}|\acute{A}) = \frac{۰/۷۲}{۰/۸} = \frac{۹}{۱۰} = ۰/۹$$

مثال۵۴: فرض کنید A و B دو پیشامد از یک فضای احتمال باشند، $P(A) = \frac{۲}{۳}$ و $P(A-B) = \frac{۱}{۲}$.

حاصل $P(B|A)$ را بیابید.

پاسخ : می دانیم $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$. در نتیجه:

$$P(A\cap B) = P(A) - P(A-B) = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

بنابراین:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۴}$$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۵۵: فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی برابر $S=\{a,b,c,d\}$ است.

اگر $P(a)=P(b)=۲P(c)=۳P(d)$ حاصل $P(\{a,b,c\}|\{b,c,d\})$ را بیابید.

پاسخ : می دانیم $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$، پس اگر $P(a)=x$، آن‌گاه:

$$x+x+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}=۱\Rightarrow\frac{۶x+۶x+۳x+۲x}{۶}=۱\Rightarrow\frac{۱۷x}{۶}=۱\Rightarrow x=\frac{۶}{۱۷}$$

پس:

$$P(a)=P(b)=\frac{۶}{۱۷}\,,P(c)=\frac{۳}{۱۷}\,,P(d)=\frac{۲}{۱۷}$$

$$P(\{a,b,c\}|\{b,c,d\}=\frac{P(\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\})}{P(\{b,c,d\})}=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{b,c,d\})}$$

$$=\frac{P(b)+P(c)}{P(b)+P(c)+P(d)}=\frac{\frac{۶}{۱۷}+\frac{۳}{۱۷}}{\frac{۶}{۱۷}+\frac{۳}{۱۷}+\frac{۲}{۱۷}}=\frac{۹}{۱۱}$$

مثال۵۶: احتمال این‌که یک لامپ بیش از یک سال کار کند ۰/۸، احتمال این‌که بیش از دو سال کار کند ۰/۷ و احتمال این‌که بیش از سه سال کار کند ۰/۲ است.

الف) اگر یک لامپ بیش از یک سال کار کند، احتمال این‌که حداکثر ۳ سال کار کند چقدر است؟

ب) اگر یک لامپ بیش از یک سال کار کند، احتمال این‌که کارکرد آن بیش از ۲ و حداکثر ۳ سال باشد چقدر است؟

پاسخ : فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامد کارکرد لامپ انتخابی بیش از ۱، ۲ و ۳ سال باشند. توجه کنید که $C\subset B\subset A$، زیرا اگر لامپ بیش از دو سال کار کند خودبه‌خود بیش از یک سال کار کرده است، یعنی اگر B رخ دهد، A نیز رخ داده است. به طور مشابه اگر C رخ دهد، آن‌گاه B نیز رخ داده است.

الف) پیشامد این که لامپ حداکثر ۳ سال عمر کند برابر C' است. باید $P(C'|A)$ را حساب کنیم.

$$P(C'|A)=\frac{P(A\cap C')}{P(A)}=\frac{P(A-C)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap C)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(A)-P(C)}{P(A)}=\frac{۰/۸-۰/۲}{۰/۸}=\frac{۰/۶}{۰/۸}=\frac{۳}{٤}$$

توجه کنید که چون $C\subset A$، پس $A\cap C=C$.

ب) پیشامد این که لامپ بیش از ۲ و حداکثر ۳ سال کار کند برابر $B-C$ است (یعنی B باید رخ دهد ولی C نباید رخ دهد). باید $P(B-C|A)$ را حساب کنیم:

$$P(B-C|A)=\frac{P\big((B-C)\cap A\big)}{P(A)}$$

می‌دانیم $B-C\subset B$ و چون $B\subset A$، پس $B-C\subset A$، در نتیجه $(B-C)\cap A=B-C$. بنابراین:

$$P(B-C|A)=\frac{P(B-C)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(B\cap C)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(C)}{P(A)}=\frac{۰/۷-۰/۲}{۰/۸}=\frac{۰/۵}{۰/۸}=\frac{۵}{۸}$$

توجه کنید که چون $C\subset B$، پس $B\cap C=C$.

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

احتمال کل : گاهی فضای نمونه به مجموعه‌های کوچکتری مانند E_1، E_2، ... E_n تقسیم می‌شوند که هیچ کدام با هم اشتراکی ندارند و حتما یکی از آنها رخ می‌دهد. برای پیدا کردن وقوع پیشامد کل از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$P(E) = P(E_1)P(E|E_1) + P(E_2)P(E|E_2) \dots + P(E_n)P(E|E_n)$$

مثال۵۷: احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

پاسخ: فرزندی که به دنیا می‌آید دختر است و این بیماری را ندارد یا پسر است و این بیماری را ندارد، یعنی

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{پسر}} \times \underbrace{\frac{90}{100}}_{\text{بیمار نیست و}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{یا دختر}} \times \underbrace{\frac{94}{100}}_{\text{بیمار نیست و}} = \frac{90+94}{200} = \frac{184}{200}$$

مثال۵۸: در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان، دفترچه سلامت داشته باشند با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آنها، دفترچه سلامت دارد؟

پاسخ:

$$\overset{\text{مرد}}{\frac{54}{100}} \times \overset{\text{دفترچه دارد}}{\frac{60}{100}} + \overset{\text{زن}}{\frac{46}{100}} \times \overset{\text{دفترچه دارد}}{\frac{75}{100}}$$

مثال ۵۹: در کیسه اولی شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و دومی ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی داریم یک مهره به تصادف از اولی داخل دومی می‌اندازیم و از دومی یک مهره بیرون می‌آوریم احتمال اینکه این مهره آبی باشد را بیابید.

پاسخ : مهره انتخابی از کیسه اول یا قرمز است و یا آبی که به مهره های کیسه دوم اضافه می شود.

$\frac{3}{8} =$ احتمال آبی بودن مهره از کیسه اول

$\frac{6}{10} =$ احتمال آبی بودن مهره از کیسه اول پس از اضافه شدن یک مهره آبی

$\frac{5}{8} =$احتمال قرمز بودن مهره از کیسه اولی

$\frac{5}{10} =$ احتمال آبی بودن مهره از کیسه اول پس از اضافه شدن یک مهره قرمز

$$\Rightarrow P\left(\text{آبی بودن مهره از کیسه دوم}\right) = \frac{3}{8} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{10} = \frac{43}{80}$$

ریاضی مشهد دپارتمان
Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

قانون ضرب احتمالات: این قاعده توسط توماس بیز که کشیش انگلیسی بود ارائه شد و از ترکیب دستور احتمال شرطی برای دو پیشامد **A** و **B** بدست می آید:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Longrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$$

$$\Longrightarrow P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}\times P(B|A)$$

توجه کنید که تنها حفظ کردن این فرمول کافی نیست! بلکه باید اول روش تشخیص مسائل مربوط به این قاعده رو یاد بگیرید.

مثال۶۰: ۲ مهره متوالیا و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل۴ مهره سفید و۶ مهره سیاه است خارج می کنیم. مطلوبست احتمال آنکه مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد.

پاسخ: وقتی مهره اول سفید باشه از کل مهره ها یکی کم شده است.

مهره اول سفید ⟵ $\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}$ ⟶ دوم مهره

نکته: قانون ضرب احتمال برای n پیشامد عبارت است از:

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3\cap\dots\cap B_n)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1\cap B_2)\dots P(B_n|B_1\cap B_2\cap..B_{n-1})$$

مثال۶۱: در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه وجود دارد ۳ مهره به تصادف و بدون جایگذاری و به طور متوالی از این جعبه خارج می‌کنیم احتمال آن را بیابید که اولی و دومی سفید و سومی سیاه باشد؟

پاسخ: فرض کنید:

$B_1=$ پیشامد اولی سفید , $B_2=$ پیشامد دومی سفید , $B_3=$ پیشامد سومی سیاه

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_2\cap B_1)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

آزمون چهار گزینه ای

۱- اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cup B)=\frac{۵}{۱۲}$ حاصل $\mathbf{P(A|B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲- اگر $P(A)=\frac{۱}{۲}$ و $P(\acute{B})=\frac{۲}{۳}$ و $P(A|B)=\frac{۲}{۵}$ حاصل $\mathbf{P(A\cup B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳- اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $\mathbf{P(A-B)}=۰/۴$ و $\mathbf{P(A|B)}=۰/۵$، $\mathbf{P(A)}$ کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۴

۴- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به طور تصادفی با یکی از کارگران ملاقات کند. با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

۵- اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل و $P(A)=\frac{۱}{۳}$ آنگاه $\mathbf{P}\left(\acute{A}|\mathbf{B}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۶- عددی طبیعی و نابیشتر از ۱۰۰ را انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مضرب ۴ نباشد اگر بدانیم مضرب ۶ می‌باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۷- اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین کننده **RH** خون منفی باشند، احتمال آنکه در خانواده‌ای اولین فرزند با **RH** منفی، فرزند سوم خانواده باشد تقریبا چقدر است؟

۱) ٪۶۴ ۲) ۰/۱۱۳ ۳) ٪۲۵ ۴) ٪۰۴

۸- دو ظرف داریم اولی شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. مهره‌ای از ظرف اول به تصادف انتخاب کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. سپس از ظرف دوم مهره‌ای برمی‌داریم. احتمال آنکه مهره‌ای که از ظرف دوم برمی‌داریم سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۷}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۷}$

۹ – خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. اگر این خانواده حداقل یک دختر داشته باشد، احتمال آنکه دقیقا یک فرزند دختر داشته باشد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۰ – در پرتاب دو تاس سفید و سیاه ، اگر عدد تاس سفید ۳ باشد، احتمال آنکه عدد روی هر دو تاس عددی اول باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

ایده‌هات رو اینجا بنویس

قانون بیز:

در علم احتمال به مسئله‌هایی برخورد می‌کنیم که در آن‌ها وقوع یک پیشامد موجب تغییر نگرش ما به احتمال وقوع پیشامدهای دیگر می‌شود. قانون بیز که یکی از مهم‌ترین فرمول‌ها در علم احتمال است، در حل چنین مسئله‌هایی کارایی دارد. این فرمول مشخص می‌کند که احتمال پیش از مشاهده چگونه به احتمال‌های پس از مشاهده تبدیل می‌شوند.

قانون بیز: فرض کنید $B_۱, B_۲, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

مثال: در سه ظرف همانند $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$، مهره‌هایی به صورت مقابل وجود دارند. اگر به تصادف مهره‌ای انتخاب کرده و مشاهده کنیم که سبز است، در این صورت احتمال اینکه مهره از ظرف $B_۲$ باشد چقدر است؟

پاسخ: اگر پیشامد سبز بودن مهره را A در نظر بگیریم، در واقع $P(B_۳|A)$ را می‌خواهیم و طبق قانون بیز باید ابتدا $P(B_۲)$، $P(A|B_۲)$ و $P(A)$ را محاسبه کرده و در فرمول قرار دهیم. پس:

چون سه ظرف همانند داریم احتمال انتخاب هر ظرف $\frac{۱}{۳}$ است، یعنی:

$$P(B_۲) = \frac{۱}{۳}$$

چون در ظرف $B_۲$، ۳ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ قرمز وجود دارد، پس:

$$P(A|B_۲) = \frac{۳}{۸}$$

طبق قانون احتمال کل، احتمال سبز بودن، یعنی $P(A)$، برابر است با:

$$P(A) = P(B_۱).P(A|B_۱) + P(B_۲).P(A|B_۲) + P(B_۳).P(A|B_۳) = \frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۸} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۸} = \frac{۱۳}{۲۴}$$

پس طبق قانون بیز داریم:

$$P(B_۲|A) = \frac{P(B_۲).P(A|B_۲)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۱۳}{۲۴}} = \frac{\frac{۳}{۲۴}}{\frac{۱۳}{۲۴}} = \frac{۳}{۱۳}$$

تذکر: با توجه به اینکه در قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_k)$ها و $P(A|B_k)$ها هستند (مانند مثال فوق)، گاهی اوقات قانون بیز را به صورت زیر می نویسند. $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=۱}^{n} P(B_k)P(A|B_k)}$

در واقع مخرج این کسر طبق قانون احتمال کل برابر $P(A)$ است.

تذکر: ساده‌ترین حالت قانون بیز وقتی است که $n = ۲$ باشد، در این صورت $B_۱$ و $B_۲$ دو پیشامد متمم هستند. به بیان دیگر: اگر B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است، برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۶۲: **انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۲ درصد و به فرزند دختر ۸ درصد است. احتمال دختر بودن فرزندی که به دنیا بیاید و این بیماری را نداشته باشد، چقدر است؟**

پاسخ: اگر پیشامد اینکه فرزند بیماری نداشته باشد را A و پیشامد دختر بودن را B فرض کنیم، در واقع $P(B|A)$ را می‌خواهیم که طبق قانون بیز باید $P(B)$ و $P(A|B)$ و $P(A)$ را محاسبه کنیم. پس:

احتمال تولد فرزند پسر و دختر با هم برابرند و برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس:

$$P(B)=\frac{۱}{۲}$$

چون احتمال انتقال بیماری به فرزند دختر برابر ۸ درصد است، پس احتمال اینکه فرزند دختر بیماری نداشته باشد، ۹۲ درصد است. یعنی:

$$P(A|B)=\frac{۹۲}{۱۰۰}$$

طبق قانون احتمال کل، احتمال اینکه فرزند بیماری نداشته باشد برابر است با:

$$P(A)=\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{P(B)}\times\frac{۹۲}{۱۰۰}+\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{P(B')}\times\frac{۸۸}{۱۰۰}=\frac{۹۰}{۱۰۰}$$

پس طبق قانون بیز داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۲}{۱۰۰}}{\frac{۹۰}{۱۰۰}}=\frac{\frac{۴۶}{۱۰۰}}{\frac{۹۰}{۱۰۰}}=\frac{۴۶}{۹۰}=\frac{۲۳}{۴۵}$$

مثال۶۳: **کیسه A شامل ۳ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه است و کیسه B ۲ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز دارد. کیسه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر مهره انتخابی قرمز باشد با کدام احتمال این مهره از کیسه A خارج شده است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به اینکه این دو عمل تصادفی متوالیا انجام شده. عمل اول انتخاب کیسه و عمل دوم انتخاب مهره است و نوع عمل دوم یعنی رنگ مهره مشخص شده و احتمال عمل اول پرسش شده، باید توجه کنید که عمل دوم در شانس وقوع عمل اول تاثیرگذار است، بنابراین مسئله مربوط به قاعده بیز است و احتمال شرطی آن به صورت زیر است

$$P\left(\text{کیسه}A\,\middle|\,\text{مهره قرمز باشه}\right)=\frac{P(\text{کیسه}A\cap\text{مهره قرمز})}{P(\text{مهره قرمز})}=\frac{P(\text{کیسه}A)}{P(\text{مهره قرمز})}\times P\left(\text{مهره قرمز}\,\middle|\,\text{کیسه}A\right)\ (I)$$

$$P\left(\text{مهره قرمز باشد}\right)\begin{cases}\text{کیسه }A & \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۴}=\\ \text{کیسه }B & \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۱}{۳}\end{cases}\ (II)$$

$$I,II\Rightarrow P\left(\text{کیسه}A\cap\text{مهره قرمز}\right)=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}}$$

Mathematics Department

ریاضی مشهد دپارتمان

ایده هات رو اینجا بنویس

آزمون چهار گزینه ای

۱- اگر $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ افرازی از فضای نمونه‌ای S باشند، با توجه به اطلاعات زیر، مقدار $P(B_۲|A)$ کدام است؟

$P(B_۱) = ۰/۲ , P(A|B_۱) = ۰/۰۱ , P(B_۲) = ۰/۳ , P(A|B_۲) = ۰/۰۲ , P(B_۳) = ۰/۵ , P(A|B_۳) = ۰/۰۵$

۱) $\frac{۲}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲- سه جعبه سیب همانند داریم. اولی شامل ۲ سیب سالم و ۱۳ سیب لکه دار، دومی شامل ۳ سیب سالم و ۷ سیب لکه‌دار و سومی تنها شامل سیب‌های سالم است. با چشم بسته یکی از سه جعبه را انتخاب و از آن سیبی خارج می‌کنیم. اگر بدانیم سیب خارج شده سالم است، با کدام احتمال از جعبهٔ سوم خارج شده است؟

۱) $\frac{۱۹}{۴۳}$ ۲) $\frac{۳۰}{۴۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸۶}$ ۴) $\frac{۴۷}{۸۶}$

۳- در یک کتابخانه، ۴۰ درصد کتاب‌ها به زبان فارسی و بقیه به زبان لاتین هستند. در میان کتاب‌های فارسی ۳۰ درصد و در میان کتاب‌های لاتین ۴۰ درصد جلد مقوایی دارند. اگر کتابی را به تصادف انتخاب و مشاهده کنیم که جلد مقوایی دارد، احتمال آن‌که به زبان لاتین باشد، کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۲۴ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴- درون کیسه‌ای سه سکه وجود دارد. سکهٔ اول همگن، دو طرف سکهٔ دوم «پشت» و در سکهٔ سوم، احتمال آمدن «رو» دو برابر احتمال آمدن «پشت» است. یکی از سکه‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم، سپس آن را پرتاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم «پشت» است، با چه احتمالی سکهٔ خارج شده همگن است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۱}$ ۳) $\frac{۸}{۱۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۱}$

۵- در یک جامعهٔ روستایی، ۶۰ درصد جمعیت آن را مردان و ۴۰ درصد آن را زنان تشکیل می‌دهند. می دانیم ۸۰ درصد مردان و ۳۰ درصد زنان به کار کشاورزی مشغول می‌باشند. اگر یک نفر از این جامعه به تصادف انتخاب کنیم و مشغول کار کشاورزی باشد، با کدام احتمال زن می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶- در ظرف اول ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه موجود است. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر ۵ یا ۶ بیاید مجاز هستیم که از ظرف اول سه مهره و در غیر این صورت از ظرف دوم سه مهره بیرون آوریم. اگر از مهره‌های خارج شده دقیقاً ۲ مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده‌اند؟

۱) $\frac{۴۲}{۷۱}$ ۲) $\frac{۳۵}{۶۷}$ ۳) $\frac{۳۹}{۷۱}$ ۴) $\frac{۳۲}{۶۷}$

۷- ۶۰ درصد تلفن‌های شرکتی توسط تلفنچی A و مابقی توسط تلفنچی B وصل می‌شود. شخص A از هر ۵۰ تلفن یکی و شخص B از هر ۲۰ تلفن یکی را اشتباه وصل می‌کنند. شکایتی در خصوص اشتباه وصل شدن تلفن رسیده است. احتمال این که شخص A آن را وصل کرده باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۰۰۲ ۲) ۰/۰۱۲ ۳) ۰/۳۷۵ ۴) ۰/۶۲۵

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۸- در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

۹- فرض کنید از بین ۳ کارت با شماره‌های ۲ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر یک بار «رو» بیاید، احتمال این‌که شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۰- در یک آزمون از دو کلاس A و B، ۴۰ درصد دانش‌آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش‌آموزان کلاس B قبول شده‌اند. اگر تعداد داوطلبان در کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود. با کدام احتمال این فرد از کلاس A است؟

۱) ۰/۴۳ ۲) ۰/۵۷ ۳) ۰/۶۱ ۴) ۰/۶۳

۱۱- ۶۰ درصد واجدین شرایط در شهر A، ۷۰ درصد واجدین شرایط در شهر B و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر C در انتخابات ریاست جمهوری شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A، دو برابر تعداد واجدین شرایط شهر B و سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر C باشند و فردی به تصادف از بین رأی دهندگان این سه شهر انتخاب شود، با کدام احتمال از شهر B است؟

۱) $\frac{۳۱}{۷۳}$ ۲) $\frac{۲۷}{۷۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۷۳}$ ۴) $\frac{۲۱}{۷۳}$

۱۲- جعبه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ آبی است. دو مهره را به تصادف خارج کرده و آن‌ها را بدون توجه به رنگشان کنار می‌گذاریم و سپس مهرهٔ سومی را خارج می‌کنیم. اگر سومین مهرهٔ خارج شده سفید باشد، با کدام احتمال دو مهرهٔ اول خارج شده آبی هستند؟

۱) $\frac{۹}{۱۴}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۵}{۲۸}$ ۴) $\frac{۹}{۲۸}$

۱۳- کتابی توسط سه ویراستار A، B و C، ویرایش شده است که سهم ویراستاری آن‌ها به ترتیب ۴۰، ۳۵ و ۲۵ درصد است. احتمال آن‌که این سه نفر ویراستاری بدون غلط داشته باشند به ترتیب ۰/۹۸، ۰/۹۶ و ۰/۹ می‌باشد. اگر صفحه‌ای ویراستاری شده باشد ولی غلط نداشته باشد، آن‌گاه احتمال آن‌که مسئول ویراستاری آن صفحه، ویراستار A باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۳۵۲}{۹۵۳}$ ۲) $\frac{۳۶۱}{۹۵۳}$ ۳) $\frac{۳۶۸}{۹۵۳}$ ۴) $\frac{۳۹۲}{۹۵۳}$

۱۴- دانش آموزی در یک آزمون تستی چهارگزینه‌ای، گزینهٔ ۴۰ درصد سؤالات را به تصادف انتخاب کرده است. اگر بدانیم این دانش آموز، تستی را درست پاسخ داده است، با کدام احتمال این تست را به تصادف پاسخ داده است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

به همین سادگی

ایده هاتو اینجا بنویس

درسنامه

متغیر تصادفی: به تابعی از فضای نمونه ای به مجموعه اعداد حقیقی به صورت

$$X : S \to \mathbb{R}$$

متغیر تصادفی گفته می شود. به عبارت دیگر دامنه تعریف آن اعضای فضای نمونه ای و برد آن زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است.

به بیان دیگر اگر در آزمایشی، عددی منحصر به فرد به هر نتیجه آزمایش نسبت دهیم، این اعداد را متغیر تصادفی می نامیم و آنرا با حرف X نشان می دهیم.

مثال۶۲: در پرتاب دو سکه اگر متغیر X را تعداد حالاتی که پشت سکه ظاهر شده بنامیم. متغیر تصادفی چه اعدادی را قبول می کند و احتمال متناظر با آن ها را محاسبه کنید.

پاسخ: می تواند اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ را قبول کند.

$(X = 0)$ هیچ پشت بیاید $\Rightarrow P(X=0) = \dfrac{\binom{2}{0}}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

$(X = 1)$ یک بار پشت بیاید $\Rightarrow P(X=1) = \dfrac{\binom{2}{1}}{2^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$(X = 2)$ دو بار پشت بیاید $\Rightarrow P(X=2) = \dfrac{\binom{2}{2}}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

مثال۶۳: درون کیسه‌ای ۳ کارت یکسان با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ قرار دارد. کارت‌ها را یکی یکی و با جایگذاری خارج می‌دهیم اگر متغیر تصادفی X تعداد دفعات خارج کردن کارت‌ها باشد تا اولین کارت با شماره زوج خارج شود مقدار P(X=3) کدام است؟

۱) $\frac{2}{27}$ ۲) $\frac{4}{27}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{8}{27}$

پاسخ: گزینه ۲ در سه بار انجام آزمایش بار اول فرد و بار دوم فرد و بار سوم باید زوج باشد یعنی :

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

اگر متغیر تصادفی X مقادیر $x_۱$، $x_۲$، و ... x_n را با احتمال های $P_۱$، $P_۲$، و ... P_n قبول کند، آنرا به صورت مقابل می توان نشان داد:

X	$x_۱$	$x_۲$	...	x_n
P(X)	$P_۱$	$P_۲$	...	P_n

که به آن جدول توزیع احتمال گفته می شود.

توجه کنید که در جدول توزیع احتمال داریم :

$$\sum_{i=۱}^{n} P_i=۱ \quad \text{یا} \quad P_۱+P_۲+...+P_n=۱$$

مثال۶۴: در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. سه مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم و متغیر تصادفی x را تعداد مهره‌های سیاه می‌نامیم. جدول توزیع متغیر تصادفی x را بیابید.

پاسخ:

x	۰	۱	۲	۳
P(x)	$\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}}$	$\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۳}}$	$\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۳}}$	$\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۷}{۳}}$

مثال۶۵: در خانواده‌ای با ۵ فرزند، متغیر تصادفی x را برابر با تعداد پسرها تعریف می‌کنیم حاصل $P(x\geq ۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۳۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

پاسخ: گزینه ۲

$$P(x\geq ۴)=P(x=۴)+P(x=۵)=\frac{\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}}{۲^۵}=\frac{۶}{۳۲}$$

مثال۶۶: اگر جدول توزیع احتمال متغیر x به صورت مقابل باشد حاصل $P(x\geq ۲)$ کدام است؟

x	۱	۲	۳
P	$۴a^۲$	a	$۲a$

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۴

$$۴a^۲+a+۲a=۱\Rightarrow ۴a^۲+۳a-۱=۰$$

$$a=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(x\geq ۴)=P(x\geq ۲)+P(x=۲)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

$a=-۱$ غ ق ق

چند گروه از کارگران ، لباس کار خود را از انبار گرفتند ؛ هر نفر دو دست . هر گروه روی هم ۲۰ دست لباس بیشتر از تعداد گروه ها گرفت . اگر تعداد گروه ها ۴ واحد بیشتر بود و هر گروه ۱۲ دست لباس می گرفت ، به همه لباس نمیرسید. چند دست لباس در انبار وجود دارد ؟

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

درسنامه

توزیع احتمال دوجمله ای: اگر متغیر تصادفی x دو حالت داشته باشد (شکست و پیروزی) و این آزمایش را n بار انجام دهیم و بخواهیم k بار موفقیت داشته باشیم به آن توزیع دوجمله‌ای گفته می شود

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k(۱-P)^{n-k}$$

که در آن P احتمال پیروزی و n تعداد کل آزمایش و k تعداد پیروزی ها است

مثال۶۷: از نوعی بذر که ۸۰ درصد آن جوانه می زند، ۵ عدد کاشته می شود با کدام احتمال حداقل ۱ عدد آن جوانه می زند؟

پاسخ : از متمم استفاده می‌کنیم .

$$۱-\left[\binom{۵}{۰}\left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right)^{۰}\left(\frac{۲۰}{۱۰۰}\right)^{۵}\right]$$

مثال۶۸: تیراندازی نصف تیرهایش به هدف می‌خورد. احتمال اینکه ۱ یا ۲ تیر از ۳ تیر او به هدف بخورد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ : گزینه ۳

$$\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\binom{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}=\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}=\frac{۶}{۸}$$

مثال۶۹: تاس سالمی را ۸ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه ۴ بار عددی فرد آمده باشد را بیابید.

پاسخ:

$$\binom{۸}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}=\frac{\binom{۸}{۴}}{۲^{۸}}$$

مثال۷۰: آزمایشی فقط دو نتیجه شکست و پیروزی دارد و احتمال پیروزی $\frac{۳}{۴}$ است و x تعداد پیروزی‌ها در ۱۶ بار انجام آزمایش است $(۰\le x\le ۱۶)$ ρ کدام است؟

۱) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۶}$ ۲) $۱-\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۶}$ ۳) $۲۱\binom{۱۶}{۸}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۸}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴ صحیح است زیرا مجموع تمام حالات برابر یک است.

یادآوری : اگر احتمال پیروزی در آزمایش $\frac{۱}{۲}$ باشد رابطه بالا به صورت زیر در می آید

$$P(X=k)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^{n}}$$

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

مثال۷۱: دانش آموزی به ۱۰ سوال چهارگزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد اگر وی به تمام سوالات پاسخ داده باشند احتمال آنکه به ۴ سوال پاسخ صحیح داده باشد، چند برابر آن است که دهمین سوال، چهارمین پاسخ صحیح وی باشد.

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\binom{۱۰}{۴}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۴}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۶}}{\binom{۹}{۳}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۶}\left(\frac{۱}{۴}\right)}=\frac{۵}{۲}$$

مثال ۷۲: دانش آموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه ای به تصادف پاسخ می دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۱۳۵}{۵۱۲}$ ۳) $\frac{۴۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۲۷}{۵۱۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\binom{۶}{۳}(۱/۴)^{۳}(۳/۴)^{۳}=\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

دوره سریع مطالب

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

۱- اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آن گاه دو پیشامد حتما ناسازگارند.

درست ☐ نادرست ☐

۲- اگر دو پیشامد، مستقل باشند، متمم های آن دو نیز مستقل هستند.

درست ☐ نادرست ☐

۳- اگر A و B مستقل و $P(A \cap B) = \frac{۲}{۳} P(B)$ و $P(B)' = \frac{۱}{۳}$، آن گاه $P(A \cup B) = \frac{۸}{۹}$.

درست ☐ نادرست ☐

۴- در پرتاب دو سکه ی سالم، اگر A پیشامد آنکه سکه اول رو و B پیشامدآن که سکه ی دوم رو باشد، آن گاه A و B مستقل اند.

درست ☐ نادرست ☐

۵- خانواده ای دارای ۶ فرزند، دست کم یک فرزند پسر با احتمال $\frac{۶۳}{۶۴}$ دارد.

درست ☐ نادرست ☐

جاهای خالی را با کلمات یا عبارات مناسب پر کنید.

۶- احتمال قبولی دو نفر در یک آزمون به ترتیب ۰/۵ و ۰/۶ است. احتمال آن که هر دو نفر قبول شوند، برابر .... است.

۷- اگر احتمال خطای هر تیر یک شکارچی ۰/۲ باشد، احتمال آن که در دو پرتاب، تیر به هدف بخورد، برابر .... است.

۸- سکه‌ی سالمی ۱۰ بار پرتاب می‌شود. احتمال آن که در هر بار پرتاب، شیر بیاید، برابر .... است.

۹- خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. احتمال آن که حداقل یکی پسر باشد، برابر .... است.

۱۰- احتمال آن که در یک جمع ۷ نفری همگی در یک روز هفته به دنیا آمده باشند، برابر .... است.

ایده هات رو اینجا بنویس

آزمون چهار گزینه ای

۱- در پرتاب ۶ سکه سالم، احتمال آن که همه سکه‌ها یکسان ظاهر شوند، چند برابر آن است که نصف سکه‌ها رو و نصف سکه‌های دیگر پشت ظاهر شوند؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

۲- درآزمایشگاهی۶موش سیاه و۴ موش سفید موجوداست. به طور تصادفی ۲ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳- دو تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود.

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

۴- در یک خانواده ۴ فرزندی، با کدام احتمال، ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵- از بین ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، سه مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد هر سه مهره هم رنگ باشند؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۱۲}$ ۳) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶۸}$

۶- در یک کارخانه ۶۰درصد کارگران بومی‌اند، اگر ۴ نفر انتخاب شوند با کدام احتمال دقیقا ۳ نفر بومی‌اند؟

۱) ۰/۱۵۳۶ ۲) ۰/۲۹۸۶ ۳) ۰/۳۲۷۶ ۴) ۰/۳۴۵۶

۷ – در یک جامعه ۷۵ درصد افراد RH خون منفی دارند. اگر ۴ نفر از این جامعه به تصادف انتخاب شوند، احتمال آنکه دقیقا ۳ نفر دارای RH خون منفی باشند کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۸۱}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۲۷}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶۴}$

۸ – در ظرف A ، ۲ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف B ، ۳ مهره سفید و ۱ مهره زرد قرار دارد. از ظرف A مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم و آن را درون ظرفB قرار می‌دهیم سپس دو مهره از ظرف جدید خارج می‌کنیم. احتمال آنکه هر دو مهره سفید باشند کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

به همین سادگی

Mathematics Department

ایده هاتو اینجا بنویس

احتمال در آزمون های سراسری

۱- در جعبه ای ۳ مهره سفید ، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟ (سراسری – ۹۴)

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

۲-در پرتاب یک تاس ،اگر زوج ظاهر شود، یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند، در غیر اینصورت ۳ تیر رها می کند. می دانیم احتمال موفقیت در هر تیر رها شده $\frac{۲}{۳}$ است. با کدام احتمال، فقط ۲ بار موفقیت حاصل می شود؟ (سراسری- ۹۴)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۷}$

۳-در جعبه ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است . به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می آوریم . با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟(سراسری خارج-۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

۴-در پرتاب یک سکه، اگر" رو" بیاید یک تیر انداز مجاز است ۵ تیر رها کند، اگر " پشت " بیاید، ۳ تیر رها می کند. می دانیم احتمال اصابت هر تیر رها شده $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر اصابت می کند؟ (سراسری خارج-۹۴)

۱) $\frac{۹۶}{۶۲۵}$ ۲) $\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$ ۳) $\frac{۱۲۲}{۶۲۵}$ ٤) $\frac{۱۲۸}{۶۲۵}$

۵- ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال ۲ مهره از مهره‌های خارج شده سفید است. (سراسری- ۹۳)

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۶- احتمال انتقال نوعی بیماری مسری به افراد مستعد برابر ۰/۲ است. اگر ۵ نفر مستعد با فردی که حامل این بیماری است ملاقات کنند با کدام احتمال ۳ نفر از آنان مبتلا می‌شوند. (سراسری-۹۳)

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۱۰۲۴ ۴) ۰/۲۰۴۸

۷- دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟ (سراسری ریاضی-۹۳)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۸- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است به تصادف از هر ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده همرنگ می‌باشند. (سراسری ریاضی-۹۳)

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲۴

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۹- از هر یک از مدارس A و B و C و D و E ۴ نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟ (سراسری-۹۲)

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۱۰- دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟ (سراسری-۹۲)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۱۱- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیا خارج نمی‌شود؟ (سراسری-۹۲)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۱۲- در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره‌ی سیاه موجود است. دو مهره متوالیا و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟ (سراسری-۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۳- دانش‌آموزی به ۵ پرسش ۵ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال فقط به ۳ پرسش پاسخ صحیح داده است؟ (سراسری-۹۲)

۱) ۰/۰۲۵۶ ۲) ۰/۰۵۱۲ ۳) ۰/۰۶۲۵ ۴) ۰/۰۷۶۸

۱۴- به چند طریق می‌توان ۹ کتاب یکسان را در ۵ قفسه متمایز جای داد به طوری که در هر قفسه، لااقل یکی از آن‌ها قرار داده شود؟ (سراسری-۹۲)

۱) ۳۵ ۲) ۴۲ ۳) ۵۶ ۴) ۷۰

۱۵- پنج مهره‌ی سفید با شماره‌های ۱ تا ۵ و هم چنین پنج مهره‌ی سیاه با شماره‌های ۱ تا ۵ یکسان را در ظرفی قرار می‌دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می‌آوریم، اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال، هر دو مهره هم رنگ هستند؟ (سراسری ریاضی-۹۲)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۶- از هر یک از ۶ منطقه‌ی کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آنها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟ (سراسری ریاضی-۹۲)

۱) ۵۷۶۰۰ ۲) ۶۷۵۰۰ ۳) ۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

۱۷- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ (سراسری-۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

ایده هات رو اینجا بنویس

۱۸- در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟ (سراسری-۹۱)

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

۱۹- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری-۹۱)

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۹}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۶۴}$

۲۰- در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی بافی دارند، اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالب بافی دارد؟ (سراسری- ۹۰)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

۲۱- در یک خانواده ۴ فرزندی با کدام احتمال ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر است؟ (سراسری-۹۰)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

احتمال در آزمون های گزینه ۲

۲۲- به تصادف سه حرف از کلمه‌ی PASARGAD انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداکثر ۲ تا از حروف انتخابی A باشد کدام است ؟

۱) $\frac{۵۵}{۵۶}$ ۲) $\frac{۵۳}{۵۶}$ ۳) $\frac{۵۱}{۵۶}$ ۴) $\frac{۲۷}{۲۸}$

۲۳- هشت نفر دور یک میز گرد می‌نشینند، با کدام احتمال دو فرد مورد نظر رو به روی هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۴- در پرتاب دو تاس با هم مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است. با کدام احتمال هر دو عدد اول هستند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۵- ۲۰٪ دانش‌آموزان یک کلاس در المپیاد فیزیک و ۵۰٪ در المپیاد ریاضی و ۱۰٪ در هر دو درس شرکت کرده‌اند. اگر دانش‌آموزی انتخاب گردد که در المپیاد فیزیک شرکت کرده باشد با کدام احتمال او در المپیاد ریاضی نیز شرکت کرده است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

ایده هات رو اینجا بنویس

۲۶- اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین کننده‌ی عامل RH خون منفی باشد، احتمال اینکه از بین ۴ نفر دقیقا ۲ نفر دارای خونی با RH منفی باشند چقدر است؟

۱) $6\left(\frac{42}{125}\right)^2$ ۲) $\left(\frac{21}{25}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^4 6$ ۳) $\left(\frac{21}{25}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^2 6$ ۴) $\left(\frac{6}{25}\right)^2 6$

۲۷- در خانواده‌ای با ۳ فرزند چقدر احتمال دارد حداکثر یک فرزند دختر باشد؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۸- در یک فضای نمونه‌ای ۷ عضوی، پیشامدهای A و B دارای ۴ و ۵ عضو و $A\cap B$ دارای سه عضو است. مقدار $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{9}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{7}$

۲۹- در بین دانش‌آموزان یک کلاس درصد متولدین فصل‌های بهار و تابستان و پاییز به ترتیب ۳۶، ۲۴ و ۲۰ درصد است. چقدر احتمال دارد یک دانش‌آموز متولد پاییز یا زمستان باشد؟

۱) ۴۰٪ ۲) ۵۰٪ ۳) ۶۰٪ ۴) ۷۶٪

۳۰- اگر $\frac{2}{3}$ ژن‌های تعیین کننده ی عامل RH خون مثبت باشند، احتمال این که RH فردی مثبت باشد چقدر است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۱- اگر $P(A\cup B)=0/7$ و $P(A)=0/5$ و $P(B)=0/4$، مقدار $P(B|A)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۳۲- از جعبه‌ای حاوی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، متوالیا و بدون جایگذاری ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌ی اول و سوم هم رنگ‌اند؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{12}{49}$

۳۳- ۵۲٪ جمعیت کشوری مرد هستند. ۹۴٪ مردان و ۹۱٪ زنان ژن بیماری خاصی را دارند. یک نفر از این کشور با کدام احتمال این ژن را دارد؟

۱) ۰/۹۳۵۲ ۲) ۰/۹۲۵۶ ۳) ۰/۹۶۵۶ ۴) ۰/۹۲۵۴

۳۴- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه در محفظه داریم. دو موش به تصادف برمی‌داریم و X تعدا موش‌های سفید خارج شده است. $P(X=2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{5}{14}$ ۴) $\frac{2}{7}$

۳۵- نوعی بیماری مسری با احتمال ۶۰٪ از فرد بیمار به سالم منتقل می‌شود. شخص بیمار با ۴ نفر سالم ملاقات می‌کند. با کدام احتمال فقط به یک نفر منتقل می‌شود؟

۱) ۰/۱۵۳۲ ۲) ۰/۱۵۸۲ ۳) ۰/۱۵۳۴ ۴) ۰/۱۵۳۶

ایده هات رو اینجا بنویس

۳۶- شانس موفقیت در کنکور سراسری $\frac{۲}{۳}$ است. شخصی آنقدر کنکور می‌دهد تا قبول شود! چقدر احتمال دارد دقیقا سه بار کنکور دهد؟

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۶}{۲۷}$ ۳) $\frac{۴}{۲۷}$ ۴) $\frac{۲}{۲۷}$

احتمال در آزمون‌های سنجش

۳۷- در جعبه‌ای ۲ مهره سفید و ۴ مهره آبی و ۳ مهره سیاه است، اگر ۳ مهره از جعبه به تصادف بیرون آوریم با کدام احتمال هر سه مهره خارج شده دارای رنگ‌های متفاوتی‌اند؟

۱) $\frac{۴}{۲۱}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۳۸- دو تاس همگن را می‌ریزیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۳۹- در آزمایشی، یک سکه را پرتاب می‌کنیم. در صورتی که رو بیاید، دو تاس را پرتاب می‌کنیم و در صورتی که پشت بیاید ۳ سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۱) ۴۸ ۲) ۸۴ ۳) ۵۴ ۴) $۲^۳ \times ۶^۳$

۴۰- اگر پدر حسن دو فرزند داشته باشد، احتمال اینکه حداقل یکی دختر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۱- از میان ۶ کارت که روی آن ها اعداد ۱ تا ۶ درج شده، دو کارت را پشت سر هم و بدون جایگذاری بر می‌داریم. احتمال این که هر دو زوج باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۲- هرگاه $P(A \cup B) = ۵P(A)$ و $۶P(A) = P(B)$ و A و B دو پیشامد مستقل باشند، **P(A)** کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۳- اگر وقوع یا عدم وقوع **A** ربطی به وقوع یا عدم وقوع **B** نداشته باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $P(A-B) = P(A) \times P(B')$ ۲) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

۳) $P(A \cap B) = \emptyset$ ۴) $P(A \cup B) = ۱$

۴۴- اگر سه فرزند خانواده‌ای پسر باشد، با کدام احتمال فرزند چهارم آن‌ها پسر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۵- تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. احتمال آنکه در پرتاب پنجم، اولین بار ۶ بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۶۲۵}{۶^۵}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۶^۴}$ ۳) $\frac{۶۲۵}{۶^۴}$ ۴) $\frac{۵^۵}{۶^۵}$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۴۶- دو کیسه داریم. در اولی همه مهره‌ها سفید می‌باشند و در دومی ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد. یک کیسه را به تصادف برداشته و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. احتمال آن که مهره سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۴۷- در پرتاب دو تاس احتمال آمدن مجموع دو عدد رو شده بزرگ تر از ۹ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۴۸- احتمال وقوع دو پیشامد به ترتیب $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۱}{۳}$است. اگر احتمال وقوع لااقل یکی از این دو پیشامد $\frac{۳}{۵}$ باشد، این دو پیشامد چگونه‌اند؟

۱) متمم ۲) ناسازگار ۳) غیر مستقل ۴) مستقل

۴۹- در یک آزمایش دو حالته احتمال پیروزی $\frac{۲}{۳}$است. با کدام احتمال در ۵ آزمایش ۲ پیروزی حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۴۰}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۸۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۴۰}{۸۱}$ ۴) $\frac{۲۰}{۸۱}$

۵۰- در پرتاب سه عدد تاس با کدام احتمال لااقل یکی از اعداد رو شده مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۸}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$

۵۱- در پرتاب دو سکه و یک تاس با کدام احتمال هر دو سکه رو و عدد تاس زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۵۲- ارقام ۹ ، ... ۳، ۲، ۱ بر روی ۹ کارت نوشته شده است. اگر دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال مجموع شماره‌های آن دو، برابر ۵ می‌باشد؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۵۳- در پرتاب سه سکه با هم با کدام احتمال دو سکه «رو» و یک سکه «پشت» می‌آید؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۵۴- اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)' = \frac{۳}{۴}$ و $P(B)=\frac{۲}{۵}$ آن گاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵۵ ۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۷۵

۵۵- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۲ موش سیاه نگهداری می‌شوند، اگر به تصادف ۳ بار یک موش از آن‌ها جدا و مورد آزمایش قرار گیرد و به جای خود برگردانده شود، با کدام احتمال ۲ بار از این موش‌ها سفید بوده است؟

۱) ۰/۱۲۳۴ ۲) ۰/۳۲۴ ۳) ۰/۳۴۲ ۴) ۰/۴۳۲

ایده هات رو اینجا بنویس

۵۶- می‌دانیم ۴۰ درصد ژن‌های تعیین کننده **RH** خون منفی است. با کدام احتمال **RH** خون دومین فرزند خانواده ای برای اولین بار منفی است؟

۱) ۰/۱۲۳۴ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۱۳۴۴ ۴) ۰/۱۶

۵۷- در پرتاب دو سکه و یک تاس با کدام احتمال لااقل یکی از سکه‌ها رو و عدد تاس کم‌تر از ۵ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۵۸- حروف کلمه‌ی **ADDITION** را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار داد به طوری که همواره حروف یکسان در کنار هم باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۵۹- در پرتاب دو تاس با هم احتمال این که مجموع دو عدد رو شده ۷ یا ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{7}{18}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{11}{36}$

۶۰- اگر $P(\acute{A})=0/7$ و $P(\acute{B})=0/8$ و $P(A|B)=0/6$ باشد، $P(B|A)$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۷۵

۶۱- اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، آن گاه کدام رابطه نادرست است؟

۱) $(A \cap B)$ و $(B \cap \acute{B})$ ناسازگار ۲) A و $\acute{B}$ مستقل

۳) A و $\acute{B}$ ناسازگار ۴) $\acute{A}$ و $\acute{B}$ مستقل

پاسخنامه

Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۱ – گزینه ۲

روش اول : برای این که دو مهره همرنگ نباشد باید حالت های زیر رخ دهد: یا یکی قرمز یا یکی سفید یا یکی سیاه و یکی سفید = هر دو غیر همرنگ یکی قرمز و یکی سیاه

$$\Rightarrow P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}+\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}+\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۶}{۴۵}+\frac{۱۵}{۴۵}+\frac{۱۰}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

دقت کنید که فضای نمونه ای برابر تعدا حالات انتخاب دو مهره از دوه مهره است یعنی $\binom{۱۰}{۲}$:

روش دوم : از متمم آن استفاده می کنیم:

$$\Rightarrow P(A)=۱-P\left(\text{هر دو همرنگ باشند}\right)=۱-\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$=۱-\frac{۳+۱+۱۰}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

۲ – گزینه ۲

احتمال این که در پرتاب تاس، عدد زوج ظاهر شود $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ و احتمال این که عدد زوج ظاهر شود هم $\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی اگر تاس زوج بیاید، تیرانداز ۴ تیر به هدف می زند که احتمال ۲ بار به هدف زدن تیر طبق دستور توزیع دو جمله ای برابر است با: (احتمال زدن به هدف $\frac{۲}{۳}$ است.)

$$\binom{۴}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=۶\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۲۷}$$

همچنین اگر تاس فرد بیاید، تیرانداز ۳ تیر به هدف می زند که احتمال ۲ بار به هدف زدن وی برابر است با :

تاس زوج بیاید $\rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)\xrightarrow[\text{از ۴ بار پرتاب}]{\text{۲ بار به هدف بزند}}\left(\frac{۸}{۲۷}\right)$

تاس فرد بیاید $\rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)\xrightarrow[\text{از ۳ بار پرتاب}]{\text{۲ بار به هدف بزند}}\left(\frac{۴}{۹}\right)$

$$\Rightarrow P=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۲۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۴}{۲۷}+\frac{۲}{۹}\Rightarrow P=\frac{۴+۶}{۲۷}=\frac{۱۰}{۲۷}$$

۳ – گزینه ۳

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳}}{\binom{۷+۵+۲}{۴}}=\frac{۲\times ۲۱\times ۵+۲\times ۳۵}{\frac{۱۴!}{۴!\times ۱۰!}}$$

$$=\frac{۲۸۰}{۷\times ۱۳\times ۱۱}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

۴ – گزینه ۲

$$\frac{۱}{۲}\binom{۵}{۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۱}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴}+\frac{۱}{۲}\binom{۳}{۱}\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۱}\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲}=\frac{۱۱۴}{۶۲۵}$$

به همین سادگی

دپارتمان ریاضی مشهد
Mathematics Department

ایده هات رو اینجا بنویس

۵– گزینه ۱	باید یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و سپس احتمال سفید بودن را به دست آوریم. $P(A) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۲}} + ۲ \times \frac{\binom{۶}{۲}\times\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}\right) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۶\times ۱۰}{\binom{۹}{۴}} + ۲ \times \frac{۱۵\times ۳}{\binom{۹}{۲}}\right) = \frac{۲۵}{۶۳}$
۶-گزینه ۲	$P(x=۳) = \binom{۵}{۳}(۰/۲^{۳})(۰/۸^{۲}) = ۱۰ \times \frac{۸}{۱۰۰۰} \times \frac{۶۴}{۱۰۰} = \frac{۵۱۲}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۵۱۲$
۷- گزینه ۱	باید جمع دو عدد رو شده ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ باشد $P(x=\text{عدد اول}) = \frac{۶-\|۷-۲\|+۶-\|۷-۳\|+۶-\|۷-۵\|+۶-\|۷-۷\|+۶-\|۷-۱۱\|}{۳۶}$ $P(x=\text{عدد اول}) = \frac{۱+۲+۴+۶+۲}{۳۶} = \frac{۱۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۲}$ نکته: در پرتاب دو تاس، تعداد حالتهایی که جمع دو عدد رو شده k شود برابر است با $n(k) = ۶-\|۷-k\|$
۸- گزینه ۲	یا دو مهره انتخابی از ظرف اول و دو مهره انتخابی از ظرف دوم سفید، و یا دو مهره انتخابی از ظرف اول و دو مهره انتخابی از ظرف دوم سیاه هستند. سیاه دو هر $P_{\text{هم رنگ}} = P_{\text{هر دو سفید}} + P_{\text{هر دو سیاه}} = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}} \times \frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}} \times \frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}$ $= \frac{۱۰ \times ۶}{۲۸ \times ۱۵} + \frac{۳ \times ۱}{۲۸ \times ۱۵} = \frac{۶۳}{۲۸ \times ۱۵} = \frac{۳}{۲۰} = ۰/۱۵$
۹- گزینه ۴	ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب می کنیم و سپس از هر کدام از این ۳ مدرسه یکی را انتخاب می کنیم. $\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱} = ۱۰ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴۰$
۱۰- گزینه ۳	$n(s) = ۳۶$ $A = \{(۱,۳)(۲,۲)(۲,۶)(۳,۱)(۳,۵)(۴,۴)(۵,۳)(۶,۲)(۶,۶)\}; P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$
۱۱- گزینه ۱	$n(S) = ۵! = ۱۲۰; A = \{(f_۳, z_۲, f_۲, z_۱, f_۱)\} \rightarrow n(A) = ۱۲$ $P(A) = \frac{۱۲}{۱۲۰} = ۰/۱$
۱۲- گزینه ۳	(دومی سفید، اولی سیاه) یا (دومی سفید، اولی سفید) $\frac{۶}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۴} + \frac{۹}{۱۵} \times \frac{۶}{۱۴} = \frac{۳۰ + ۵۴}{۱۵ \times ۱۴} = \frac{۸۴}{۱۵ \times ۱۴} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$
۱۳- گزینه ۲	۰/۲ = احتمال درست زدن یک پرسش $P(x=۳) = \binom{۵}{۳}(۰/۲)^{۳}(۰/۸)^{۲} = ۱۰ \times \frac{۸}{۱۰۰۰} \times \frac{۶۴}{۱۰۰} = ۰/۵۱۲$

به همین سادگی

۱۴- گزینه ۴

تعداد جواب های طبیعی:

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۹\xrightarrow{x_i\geq ۱}\binom{n-۱}{k-۱}=\binom{۹-۱}{۵-۱}=\binom{۸}{۴}$$
$$=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}=۷۰$$

۱۵- گزینه ۲

شماره های سفید را حروفی و شماره های سیاه را عددی می نویسیم: مجموع ۶ باشد

$$S=\Big\{\{۲,۴\},\{۱,۵\},\{۴,\text{دو}\},\{۵,\text{یک}\},\{۱,\text{پنج}\},\{\text{دو},۴\},\{۳,\text{سه}\},\{\text{چهار},\text{دو}\},\{\text{پنج},\text{یک}\}\Big\}$$

$$\text{هر دو همرنگ}\quad A=\Big\{\{۲,۴\},\{۱,۵\},\{\text{چهار},\text{دو}\},\{\text{پنج},\text{یک}\}\Big\}$$

$$P(A)=\frac{۴}{۹}$$

۱۶- گزینه ۲

ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب می کنیم و سپس از هر منطقه انتخاب شده یک دانش آموز را انتخاب می کنیم.

$$\binom{۶}{۳}\times ۱۵\times ۱۵\times ۱۵=۶۷۵۰۰$$

۱۷- گزینه ۳

راه حل اول:

$$P(\text{دو کارت هم رنگ})=P(\text{هر دو سفید})+P(\text{هر دو سبز})=\left(\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}\right)+\left(\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}\right)=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

راه حل دوم:

$$P(\text{دو کارت هم رنگ})=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}=\frac{۳}{۲۱}+\frac{۶}{۲۱}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

راه حل سوم:

$$۱-\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۲}}=۱-\frac{۱۲}{۲۱}=۱-\frac{۴}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

۱۸- گزینه ۳

اگر X موش های سفید انتخاب شده باشد آن گاه حالت های زیر رخ می دهد.

$$P(x=۰)=\frac{۱}{۳},\quad P(x=۱)=\frac{۸}{۱۵},\quad P(x=۲)=\frac{۲}{۱۵}$$

ملاحظه می شود که $P(x=۱)$ بیش ترین است.

۱۹- گزینه ۴

$$P=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

۲۰- گزینه ۱

قالی بافی:A و تحصیلات:B

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P=\frac{۶۰+۲۵}{۱۰۰}-\frac{۶۰\times ۲۵}{۱۰۰\times ۱۰۰}=\frac{۸۵}{۱۰۰}-\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۷۰}{۱۰۰}=۷۰\%$$

۲۱- گزینه ۳

$$P=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}+\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}=\frac{۶+۴}{۱۶}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

ایده هات رو اینجا بنویس

۲۲- گزینه ۱	$n(A) = (\text{کل حالات}) - (\text{هر سه حرف انتخابی A باشد}) = \binom{۸}{۳} - ۱ = ۵۵ \Longrightarrow$ $P(A) = \frac{۵۵}{۵۶}$
۲۳- گزینه ۲	اگر دو فرد مورد نظر را A و B بنامیم، A هرجا که قرار گیرد، ۷ مکان دیگر برای B باقی می ماند که فقط در یکی از آنها B روبه روی A قرار می گیرد، پس احتمال برابر است با: $\frac{۱}{۷}$
۲۴- گزینه ۱	$\begin{cases} S = \{(۱,۶),(۶,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۲,۵),(۵,۲)\} \ \text{فضای نمونه ای} \\ A = \{(۲,۵),(۵,۲)\} \ \text{پیشامد هر دو عدد اول} \end{cases}$ $\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$
۲۵- گزینه ۴	$\begin{cases} A: \text{پیشامد شرکت در المپیاد فیزیک} \Rightarrow P(A) = \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۲}{۱۰} \\ B: \text{پیشامد شرکت در المپیاد ریاضی} \Rightarrow P(B) = \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$ $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲}{۱۰}} = \frac{۱}{۲}$ جواب فوق را به صورت مفهومی نیز بدون فرمول می توان گفت که در فضای نمونه ای جدید که شرکت کنندگان فیزیک هستند، جامعه‌ی مطلوب کسانی هستند که هم ریاضی و هم فیزیک شرکت می کنند: $P = \frac{\frac{۱۰}{۱۰۰}}{\frac{۲۰}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۲}$
۲۶- گزینه ۲	اولا برای‌اینکه فردی دارای‌خونی با RH منفی‌باشد باید دو ژن منفی داشته باشدیعنی: $P(\text{منفی}RH) = ۰/۴۰ \times ۰/۴۰ = ۰/۱۶$ ثانیا طبق توزیع دو جمله ای احتمال داریم: $P(x=۲) = \binom{۴}{۲}\left(\frac{۱۶}{۱۰۰}\right)^{۲}\left(\frac{۸۴}{۱۰۰}\right)^{۲} = ۶ \times \left(\frac{۴}{۲۵}\right)^{۲}\left(\frac{۲۱}{۲۵}\right)^{۲} = ۶ \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴}\left(\frac{۲۱}{۲۵}\right)^{۲}$ ۲ نفر از ۴ نفر دارای خونی با RH منفی تذکر: $P(\text{وقوع دقیقا k بار رخ داد پیشامد A در n آزمایش}) = \binom{n}{k}(P(A))^{k}(۱-P(A))^{n-k}$

به همین سادگی

ایده‌هات رو اینجا بنویس

۲۷- گزینه ۴

فضای نمونه ای ۸ عضو دارد:

روش اول: $n(s) = ۸ \quad (\text{۳ تایی مرتب})$

$$A = \{(\text{پ،پ،د}) (\text{پ،د،پ}) (\text{د،پ،پ}) ، (\text{پ،پ،پ})\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم: احتمال این که در یک خانواده ی n فرزندی k دختر باشد، برابر است با :

$$\frac{\binom{n}{k}}{۲^n} \Rightarrow \begin{cases} n = ۳ \\ n = ۰/۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{\binom{۳}{۰}}{۲^۳} + \frac{\binom{۳}{۱}}{۲^۳} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸- گزینه ۲

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۴}{۷} + \frac{۵}{۷} - \frac{۳}{۷} = \frac{۶}{۷}$$

۲۹- گزینه ۱

می‌دانیم:

$$P(\text{بهار}) + P(\text{تابستان}) + P(\text{پاییز}) + P(\text{زمستان}) = ۱$$

$$\Rightarrow ۰/۳۶ + ۰/۲۴ + ۰/۲۰ + X = ۱ \Rightarrow X = ۰/۲$$

$$\Rightarrow P(\text{پاییز}) + P(\text{زمستان}) = ۰/۲۰ + ۰/۲۰ = ۰/۴$$

۳۰- گزینه ۳

احتمال RH منفی برابر است با: $\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۹}$ (باید هر دو RH پدر و مادر منفی باشد)

و احتمال RH مثبت برابر است با : $۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹}$

۳۱- گزینه ۳

اول $P(A \cap B)$ را پیدا کنیم:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = ۰/۵ + ۰/۴ - ۰/۷ = ۰/۲$$

حال طبق فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{۰/۲}{۰/۴} = ۰/۵$$

۳۲- گزینه ۱

باید اولی و سومی سیاه یا اولی و سومی سفید باشند. توجه کنید که چون نمی‌دانیم مهره‌ی دوم چه شرطی دارد، به همین دلیل مانند آن عمل می‌کنیم که رخ نداده است.

$$P(\text{سفید})\ P(\text{سومی سفید}) + P(\text{اولی سیاه}) \times P(\text{سومی سیاه})$$

$$= \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۱۲ + ۶}{۴۲} = \frac{۱۸}{۴۲} = \frac{۳}{۷}$$

۳۳- گزینه ۲

به نمودار درختی توجه کنید:

احتمال داشتن ژن $\frac{۵۲ \times ۹۴ + ۴۸ \times ۹۱}{۱۰۰۰۰}$ است.

رقم یکان ۹۴×۵۲ برابر ۸ و رقم یکان ۹۱×۴۸ هم ۸ است، پس یکان جواب مجموع، ۶ خواهد بود. دقت کنید که جواب بین ۰/۹۱ و ۰/۹۴ است و گزینه ۳ نمی‌تواند درست باشد.

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۳۴- گزینه ۳	$P(X=۲) = P(\text{هر دو سفید}) = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{۱۰}{۲۸} = \frac{۵}{۱۴}$
۳۵- گزینه ۴	$\begin{array}{l} n=۴ \\ k=۱ \\ p=۰/۶ \end{array} \Rightarrow \binom{۴}{۱}\,۰/۶^{۱} \times ۰/۴^{۳} = ۴ \times ۰/۶ \times ۰/۰۶۴ = ۴ \times \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶۴}{۱۰۰۰}$ $= \frac{۲۴ \times ۶۴}{۱۰۰۰۰} = ۰/۱۵۳۶$ باز هم رقم یکان حاصل ضرب $۱۶ = ۴ \times ۴$ است و فقط گزینه ی ۴ تطابق دارد. توجه: هرگاه در n بار انجام عملی بخواهیم k بار موفق شویم، احتمال موفقیت برابر است با: $\binom{n}{k} \times P^{k} \times (۱-P)^{n-k}$
۳۶- گزینه ۴	بار اول و دوم رد شده است: $\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}$ و بار سوم قبول شده است : $\frac{۲}{۳}$، پس احتمال برابر است با : $\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۲۷}$
۳۷- گزینه ۴	سه مهره خارج شده به رنگ سفید و سیاه و آبی پیشامد مورد نظر است. تعداد فضای نمونه ای انتخاب ۳ مهره از ۹ مهره داخل جعبه است. $P = \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}} = \frac{۲ \times ۳ \times ۴}{\frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۶}} = \frac{۲۴}{۸۴} = \frac{۲}{۷}$
۳۸- گزینه ۱	در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت موجود است که فضای پیشامد آن مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد به صورت زیر است: $A = \{(۱,۶), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲), (۶,۱)\}$ در نتیجه: $P = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$
۳۹- گزینه ۲	تاس سکه سوم سکه دوم سکه اول پشت $\Rightarrow ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۶ = ۴۸$ حالت ر: $\left\{ \begin{array}{l} (۱ \text{ و } ۱) \\ (۲ \text{ و } ۱) \\ \vdots \\ (۶ \text{ و } ۶) \end{array} \right. \Rightarrow ۳۶$ حالت
۴۰- گزینه ۱	اگر پدر حسن دو فرزند داشته باشد: S= { (پسر،حسن) (دختر،حسن) (حسن،پسر) (حسن،دختر) } A = { (دختر،حسن) (حسن،دختر) } : $P(A) = \frac{۱}{۲}$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۴۱- گزینه ۳	$A = \text{احتمال اولی زوج} = \frac{۳}{۶}$ $B = \text{احتمال دومی زوج} = \frac{۲}{۵}$ $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B\|A) = \frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۱}{۵}$
۴۲- گزینه ۴	هرگاه A,B دو پیشامد مستقل باشند: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ $۵P(A) = P(A) + ۶P(A) - P(A) \times ۶P(A)$ $P(A) \times ۶P(A) = ۲P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۳}$
۴۳- گزینه ۱	A,B دو پیشامدمستقل بودهو به‌همین ترتیب $A\ ,\ \acute{B}$ نیز دو پیشامد مستقل هستند. $P(A - B) = P\left(A \cap \acute{B}\right) = P(A) \times P(\acute{B})$
۴۴- گزینه ۳	به طور کلی پسر یا دختر بودن هر فرزند برابر $\frac{۱}{۲}$ است.
۴۵- گزینه ۱	$\overbrace{\frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶}} \times \overbrace{\frac{۱}{۶}} = \frac{۵^۴}{۶^۵} = \frac{۶۲۵}{۶^۵}$
۴۶- گزینه ۱	می بایست از احتمال کل حل شود. $P(B_۱) = P(B_۲) = \frac{۱}{۲}$ $P(A\|B_۱) = ۱ \quad \text{و} \quad P(A\|B_۲) = \frac{۴}{۱۰}$ $\Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲} \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۷}{۱۰}$
۴۷- گزینه ۱	$n\ (S) = ۶^۲$ $P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$
۴۸- گزینه ۴	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۳} - (\frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۳})$ حداقل یکی رخ دهد پیداست که $P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)$ در نتیجه دو پیشامد مستقل از هم‌اند.
۴۹- گزینه ۱	بنابر قانون احتمال در دو جمله ای داریم: $P = \binom{۵}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^۳ = ۱۰ \times \frac{۴}{۲۴۳} = \frac{۴۰}{۲۴۳}$ توجه: اگر در n بار انجام عملی بخواهیم k بار موفق شویم، احتمال موفقیت برابر است با: $\binom{n}{k} \times P^k \times (۱ - P)^{n-k}$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۵۰- گزینه ۴

روش اول:

در پرتاب هر تاس احتمال آمدن ۳ برابر $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ است. چون پرتاب سه تاس مستقل از هم اند، احتمال این که هیچ یک از سه تاس مضرب ۳ نباشد برابر $\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۲۷}$ لذا احتمال لااقل یکی از اعداد رو شده مضرب ۳ باشد.

$$۱-\frac{۸}{۲۷}=\frac{۱۹}{۲۷}$$

روش دوم:

$$n(S)=۶^۳ : P(A)=\frac{۴^۳}{۶^۳}=\frac{۸}{۲۷}\xrightarrow{\text{مضرب ۳ باشد}}۱-\frac{۸}{۲۷}=\frac{۱۹}{۲۷}$$

۵۱- گزینه ۳

پیشامد وقوع دو سکه رو و عدد تاس زوج مستقل از هم اند طبق قانون احتمال $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ احتمال ظاهر شدن هر دو «رو» $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و احتمال ظاهر شدن عدد زوج $P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ پس احتمال مطلوب $\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$

۵۲- گزینه ۳

فضای نمونه $۳۶=\binom{۹}{۲}$ عضو دارد فضای مساعد به صورت های $\{\{۲,۳\}$ و $\{۱,۴\}\}$ می‌باشد. پس احتمال مطلوب $\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$

۵۳- گزینه ۲

فضای نمونه‌ای $۸=۲\times۲\times۲$ عضو دارد فضای مساعد به صورت‌های $\{(ر،ر،پ)\ (ر،پ،ر)\ (پ،ر،ر)\}$ است لذا احتمال مطلوب $P=\frac{۳}{۸}$.

۵۴- گزینه ۲

بنا به فرض داریم:

$$P(A')=\frac{۳}{۴}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

چون A و B مستقل از هم اند:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}=۰/۱$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۲۵+۰/۴-۰/۱=۰/۵۵$$

۵۵- گزینه ۴

احتمال سفید بودن موش در هر بار برابر $\frac{۳}{۵}$ است. بنا بر احتمال دو جمله ای:

$$P(X=۲)=\binom{۳}{۲}\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right)=۳\times\frac{۱۸}{۱۲۵}=\frac{۵۴}{۱۲۵}=\frac{۵۴\times۸}{۱۲۵\times۸}=\frac{۴۳۲}{۱۰۰۰}$$

پس احتمال مطلوب ۰/۴۳۲ است

۵۶- گزینه ۳

احتمال اینکه RH فرزند منفی باشد $۰/۴\times۰/۴=۰/۱۶$ است. صورت پرسش به این مفهوم است که خون اولین فرزند منفی نبوده و دومین فرزند منفی باشد. پس

$$P=(۱-۰/۱۶)(۰/۱۶)=۰/۱۳۴۴$$

به همین سادگی

ایده هات رو اینجا بنویس

۵۷- گزینه ۱	فضـــای نمونه‌ای در پرتاب دو سکه و یـــک تـــاس۲۴= ۶ × ۴عضو دارد. پیشامد لااقل یکی از سکه هـــا«رو» و عدد تاس کم تر از ۵ باشد ۱۲=۴×۳ عضو دارد. پس احتمال مطلوب $P(A)=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$
۵۸- گزینه ۴	حروف یکسان را بهم می چسبانیم سپس ۶ شکل حاصل را جا به جا می کنیم. A, DD, II, T, O, N ۶!= ۶×۵×۴×۳×۲×۱= ۷۲۰
۵۹- گزینه ۴	در پرتاب دو تاس فضای نمونه ای ۳۶ عضو دارد. پیشامد مطلوب به صورت مجموع دو عدد رو شده ۷ یا ۸ باشد چنین است: $\{(۱,۶)(۲,۶)(۲,۵)(۳,۵)(۳,۴)(۴,۴)(۴,۳)(۵,۳)(۵,۲)(۶,۲)(۶,۱)\}$ پس $P=\frac{۱۱}{۳۶}$
۶۰- گزینه ۳	بنا بر قانون احتمالات: $P(A)=۱-P(\acute{A})=۰/۳$ و $P(B)=۱-P(\acute{B})=۰/۲$ $P(A\cap B)=P(A\|B).P(B)=۰/۶\times ۰/۲=۰/۱۲$ $P(B\|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۱۲}{۰/۳}=۰/۴$
۶۱ -گزینه ۳	اگر A وB مستقل باشند و هم چنین A و $\acute{B}$ مستقل اند، اما ممکن است A و$\acute{B}$ سازگار باشند.