



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

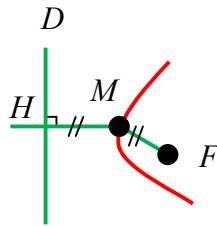
<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

سهمی

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از نقطه F و خط D با هم برابر است. نقطه F را کانون و خط D را هادی سهمی می نامند.

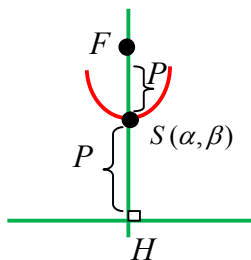


توجه: خطی که از کانون سهمی می گذرد و بر خط هادی آن عمود است محور تقارن سهمی می باشد. این خط سهمی را در $S(\alpha, \beta)$ قطع می کند که این نقطه رأس سهمی نام دارد. فاصله رأس تا کانون و رأس تا هادی را با p یا a نمایش می دهند و پارامتر سهمی نام دارد.

۱- معادله سهمی قائم: ($P > 0$ رو به بالا و $P < 0$ رو به پایین)

معادله سهمی قائم به رأس $S(\alpha, \beta)$ و پارامتر P به صورت زیر است:

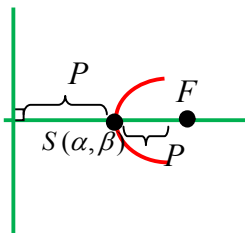
$$(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta)$$



۲- معادله سهمی افقی: ($P > 0$ رو به راست و $P < 0$ رو به چپ)

معادله سهمی افقی به رأس $S(\alpha, \beta)$ و پارامتر P به صورت زیر است:

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha)$$



۳- تعیین کانون و هادی:

تذکر: اگر در معادله سهمی x^2 وجود داشت سهمی قائم است و اگر در معادله سهمی y^2 وجود داشت سهمی افقی است.

برای تعیین کانون ابتدا رأس را از معادله پیدا می کنیم، سپس یکی از مؤلفه های آن را با p جمع می کنیم اما کدام مؤلفه؟! مؤلفه ای که در معادله درجه یک است. مثلاً در سهمی قائم عرض با p جمع می شود و در سهمی افقی طول و اما برای پیدا کردن خط هادی همان مؤلفه را از p کم می کنیم یعنی:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{کانون} \rightarrow F(\alpha, \beta + p) \\ \text{خط هادی} \rightarrow y = \beta - p \end{cases} \text{ سهمی قائم} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \text{کانون} \rightarrow F(\alpha + p, \beta) \\ \text{خط هادی} \rightarrow x = \alpha - p \end{cases} \text{ سهمی افقی}$$

۴- استاندارد کردن سهمی :

اگر سهمی گسترده باشد برای استاندارد کردن اولین کار این است که ضریب درجه ۲ را تبدیل به ۱ کنیم (با تقسیم). سپس طرف اول را به صورت مربع کامل در آورده (از اتحاد $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$) استفاده می کنیم) و $\frac{a^2}{4}$ را به طرف دوم اضافه می کنیم و سپس از ضریب درجه ۱ یک در طرف دوم فاکتور می گیریم.

سؤال ۱: در سهمی به معادله $3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0$ معادله خط هادی کدام است؟

$$(1) \quad y = -\frac{5}{3} \quad (2) \quad y = -\frac{4}{3} \quad (3) \quad y = -\frac{2}{3} \quad (4) \quad y = -\frac{1}{3}$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا معادله سهمی را استاندارد می کنیم سپس رأس سهمی را به دست می آوریم داریم:

$$3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = -\frac{4}{3}y - \frac{11}{3} \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{4}{3}y - \frac{11}{3} + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{4}{3}y - \frac{8}{3} \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{4}{3}(y+2) \Rightarrow \begin{cases} S(1, -2) \\ p = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y = -2 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

سؤال ۲: نوع هر یک از سهمی های زیر را معلوم کرده، سپس فاصله کانون تا خط هادی را در هر کدام معلوم کنید.

$$(الف) \quad (x-2)^2 = 4(y-3)$$

پاسخ: چون در سهمی متغیر x از درجه ۲ است. پس سهمی قائم است و چون $4p = 4$ و در نتیجه $p = 1$ بزرگتر از صفر است سهمی رو به بالا می باشد. همچنین فاصله کانون تا خط هادی برابر $|2p| = 2$ می باشد.

$$(ب) \quad (y-1)^2 = 2(x+1)$$

پاسخ: چون در سهمی متغیر y از درجه ۲ است. پس سهمی افقی است و چون $4p = 2$ و در نتیجه $p = \frac{1}{2}$ بزرگتر از صفر است سهمی به سمت راست می باشد. در ضمن داریم:

$$فاصله کانون تا خط هادی = |2p| = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$(ج) \quad y^2 + 4y + 8x = 4$$

پاسخ: چون در سهمی y^2 وجود دارد سهمی افقی است. اما برای پیدا کردن p لازم است سهمی را استاندارد کنیم:

$$y^2 + 4y + 8x = 4 \Rightarrow y^2 + 4y = -8x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = -8x + 4 + 4$$

$$\Rightarrow (y+2)^2 = -8(x-1)$$

بنابراین $4p = -8$ و در نتیجه $p = -2$ عددی کوچکتر از صفر است پس سهمی رو به سمت چپ می باشد و داریم:

$$فاصله کانون تا خط هادی = |2p| = 2 \times 2 = 4$$

سؤال ۳: در سهمی به معادله $3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0$ مختصات کانون و معادله خط هادی را بنویسید.

$$3x^2 - 6x = -4y - 11 \Rightarrow x^2 - 2x = -\frac{4}{3}y - \frac{11}{3} \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{4}{3}y - \frac{11}{3} + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{4}{3}(y+2) \Rightarrow \begin{cases} S(1, -2) \\ P = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(1, -2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(1, -\frac{7}{3}\right) \\ y = -2 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

سؤال ۴: در سهمی $x^2 + 6x + 8y = 7$ مختصات کانون کدام است؟

- (۱) $(-3, 0)$ (۲) $(-3, 4)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(-5, 2)$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا سهمی را استاندارد می‌کنیم تا رأس سهمی و p مشخص شود:

$$x^2 + 6x = -8y + 7 \Rightarrow (x+3)^2 = -8y + 7 + 9 \Rightarrow (x+3)^2 = -8(y-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(-3, 2) \\ p = -2 \end{cases} \Rightarrow F(-3, 2 + (-2)) = (-3, 0)$$

سؤال ۵: در سهمی به معادله $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$ خط هادی آن از نقطه ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

- (تجربی ۸۸)
(۱) $(1, -2)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(0, 3)$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$y^2 + 4y + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 - 4 = -2x - 1 \Rightarrow (y+2)^2 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} S\left(\frac{3}{2}, -2\right) \\ 4p = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه ای می‌گذرد که طول آن } x = 2 \text{ باشد} \Rightarrow x = \alpha - p = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

سؤال ۶: اگر $y = 2$ خط هادی سهمی $x^2 + 4x + 6y = a$ باشد مختصات کانون آن کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 3 (۳) 1 (۴) -1

پاسخ: گزینه ۴

$$x^2 + 4x + 6y = a \Rightarrow x^2 + 4x = -6y + a \Rightarrow (x+2)^2 = -6y + a + 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = -6\left(y - \frac{a+4}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(-2, \frac{a+4}{6}\right) \\ p = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{a+4}{6} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{a+4+9}{6} = \frac{a+13}{6}$$

$$a = -1 \text{ بنابراین } \frac{a+13}{6} = 2 \text{ و در نتیجه}$$

سؤال ۷: به ازای کدام مقدار a خط هادی سهمی به معادله $y^2 - 6y + 2x + a = 0$ از نقطه $(1, 2)$ می گذرد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

چون خط هادی سهمی از نقطه $(1, 2)$ می گذرد پس معادله آن $x = 1$ می باشد:

$$y^2 - 6y + 2x + a = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = -2x - a \Rightarrow (y - 3)^2 = 2x - a + 9$$

$$\Rightarrow (y - 3)^2 = -2\left(x + \frac{a-9}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} S\left(\frac{9-a}{2}, 3\right) \\ 4p = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{های: } x = \frac{9-a}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow a = 8$$

سؤال ۸: در سهمی معادله $y^2 + 4y + 6x = 2$ خط هادی کدام است؟

 $x = -\frac{3}{2}$ (۴) $x = \frac{5}{2}$ (۳) $x = -\frac{1}{2}$ (۲) $x = \frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا سهمی را استاندارد می کنیم:

$$y^2 + 4y + 6x = 2 \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = -6x + 2 + 4 \Rightarrow (y + 2)^2 = -6(x - 1)$$

$$\begin{cases} S(1, -2) \\ p = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{خط هادی: } x = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

سؤال ۹: به ازای کدام مقدار a در سهمی به معادله $y^2 = ay + 2x + 5$ خط هادی به صورت $x = -\frac{7}{2}$ است؟

±۴ (۴)

±۳ (۳)

±۲ (۲)

±۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$y^2 - ay = 2x + 5 \Rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2x + 5 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2x + \frac{20+a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{20+a^2}{8}\right) \Rightarrow x = -\frac{20+a^2}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{20+a^2}{8} = 3 \Rightarrow a = \pm 2$$

سؤال ۱۰: سهمی به کانون $F(1, 2)$ و خط هادی $x = -3$ محور x را با کدام طول قطع می کند؟

 $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هادی x دارد پس در کانون x دچار تغییر می کند اگر $S(\alpha, \beta)$ باشد داریم:

$$\begin{cases} F(\alpha + p = 1, \beta = 2) \\ x = \alpha - p = -3 \end{cases} \Rightarrow S = (-1, 2), p = 2 \Rightarrow (y - 2)^2 = 4(x + 1) \xrightarrow{y=0} x = -\frac{1}{2}$$

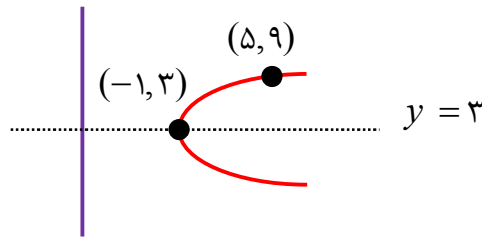
سؤال ۱۱: محور تقارن یک سهمی با رأس $(-1, 3)$ موازی محور x ها است. اگر این سهمی از نقطه $(5, 9)$ بگذرد.

فاصله کانون تا خط هادی کدام است؟ (داخل تجربی ۹۶)

- ۴ (۴) ۳/۵ (۳) ۳ (۲) ۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

معادله سهمی: $(y - 3)^2 = 4p(x + 1)$



از نقطه $(5, 9)$ می گذرد:

$$\Rightarrow (9 - 3)^2 = 4p(5 + 1) \Rightarrow 6^2 = 4p \times 6 \Rightarrow p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

فاصله کانونی تا خط هادی: $2p = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

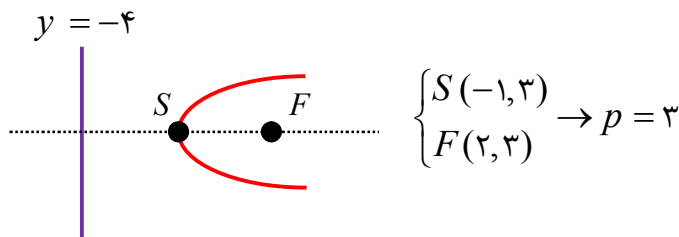
سؤال ۱۲: سهمی با کانون $F(2, 3)$ و خط هادی به معادله $x = -4$ محور x ها را با کدام طول قطع می کند.

- $-\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) (خارج از کشور تجربی ۹۶)

پاسخ: گزینه ۲

پون معادله خط هادی، $x = -4$ است پس سهمی افقی است. و چون کانون سهمی جلوتر از خط $x = -4$ است یعنی دهانه سهمی به سمت راست است.

$$S = \left(\frac{-4 + 2}{2}, 3 \right) = (-1, 3)$$



محل تلاقی با محور x ها $\xrightarrow{y=0} 9 = 12(x + 1)$

$$\Rightarrow \frac{9}{12} = x + 1 \Rightarrow \frac{3}{4} = x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

سؤال ۱۳: سهمی به کانون $F(3, 2)$ و خط هادی به معادله $x = -1$ محور x ها را در نقطه A قطع می کند. فاصله

نقطه A تا کانون سهمی کدام است؟

۳ (۴)

۲/۷۵ (۳)

۲/۵ (۲)

۲/۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

به کمک کانون و خط هادی مقلعات رأس و پارامتر سهمی را به دست می آوریم:

$$F(3, 2), x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ p = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(\alpha, \beta) = (1, 2) \\ p = 2 \end{cases} \Rightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 1)$$

$$\xrightarrow{y=0} 4 = 8(x - 1) \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, 0\right) \Rightarrow |FA| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

سؤال ۱۴: فاصله کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض های ۱ و

۵- قطع می کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

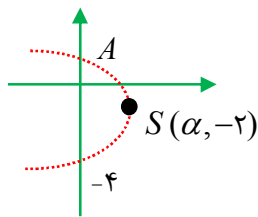
$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{9}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{5}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



سهمی محور y ها را در دو نقطه قطع می کند یعنی افقی است و عرض رأس سهمی برابر میانگین عرض این دو نقطه است بنابراین $S(\alpha, -2)$ می باشد. از طرفی فاصله کانون تا خط هادی برابر $2p$ می باشد پس: $p = 1$ با توجه به اینکه طول رأس با علامت مثبت فواسته شده پس سهمی رو به چپ است یعنی $p = -1$ حال معادله سهمی را می نویسیم:

$$(y + 2)^2 = -4(x - \alpha) \xrightarrow{A(0,1)} 9 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{9}{4}$$

سؤال ۱۵: خط به معادله $y = 1$ محور تقارن و خط $x = 2$ خط هادی سهمی هستند. اگر این سهمی از نقطه

$(3, 2)$ بگذرد فاصله کانون تا خط هادی کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

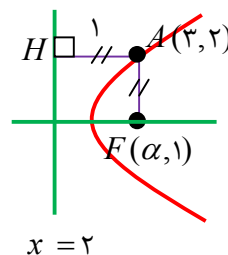
$\frac{5}{4}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$|AH| = |AF| \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 1^2} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow F(3, 1) \Rightarrow \text{فاصله کانون تا خط هادی} = 1$$



سؤال ۱۶: معادله خط هادی سهمی گذرا بر سه نقطه $C(0, -1), B(0, 1), A(-1, 0)$ کدام است؟

$$x = -2 \quad (۴)$$

$$x = -\frac{7}{4} \quad (۳)$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad (۲)$$

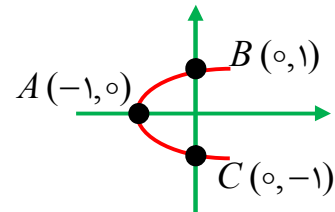
$$x = -\frac{5}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

مفتحات سه نقطه روی شکل به صورت مقابل است. معلوم است که رأس سهمی $S(-1, 0)$ است بنابراین معادله سهمی به شکل زیر می باشد:

$$(y-0)^2 = 4p(x+1) \xrightarrow{B(0,1)} 1 = 4p(0+1) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$$\text{هادی: } x = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$



سؤال ۱۷: به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $2y^2 + ay - 3x = 0$ بر روی محور y ها است؟

$$\pm 3 \quad (۴)$$

$$\pm 4 \quad (۳)$$

$$\pm 6 \quad (۲)$$

$$\pm 2 \quad (۱)$$

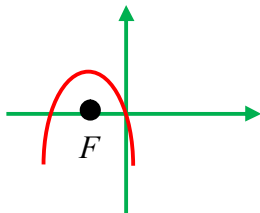
پاسخ: گزینه ۴

کانون روی محور y ها است یعنی طول کانون صفر است:

$$y^2 + \frac{a}{2}y = \frac{3}{2}x \Rightarrow \left(y + \frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}x + \frac{a^2}{16} \Rightarrow \left(y + \frac{a}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(x + \frac{a^2}{24}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\left(-\frac{a^2}{24}, -\frac{a}{4}\right) \\ p = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow F\left(-\frac{a^2}{24} + \frac{3}{8}, -\frac{a}{4}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{24} = \frac{3}{8} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

سؤال ۱۸: معادله سهمی نمودار مقابل به صورت $x^2 + 2x = ay$ است. a کدام است؟



$$-2 \quad (۱)$$

$$-1 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ۱

شکل به ما نشان می دهد عرض کانون صفر است و هم پنین چون سهمی رو به جهت منفی محور y است $p < 0$ است.

$$x^2 + 2x = ay \Rightarrow (x+1)^2 = ay + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = a\left(y + \frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\left(-1, -\frac{1}{a}\right) \\ p = \frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow F\left(-1, -\frac{1}{a} + \frac{a}{4}\right) \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

سؤال ۱۹: یک سهمی که محور تقارن آن موازی یکی از محورهای مختصات است محور y را در دو نقطه به عرض ۱ و ۵ قطع می کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیه اول است. فاصله کانون سهمی تا خط هادی کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{4}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

سهمی محور y را در دو نقطه قطع می کند یعنی افقی است و رأس آن روی نیمساز ربع اول است یعنی $S(\alpha, \alpha)$ می باشد بنابراین:

$$(y - \alpha)^2 = 4p(x - \alpha) \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{A(0,1)} (1 - \alpha)^2 = 4p(-\alpha) \\ \xrightarrow{B(0,5)} (5 - \alpha)^2 = 4p(-\alpha) \end{cases} \Rightarrow (1 - \alpha)^2 = (5 - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow p = -\frac{1}{3}$$

$$فاصله هادی تا کانون $|P| = \frac{2}{3}$$$

سؤال ۲۰: دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x - y) = 0$ رو به راست باز می شود و فاصله کانونی تا خط هادی برابر ۲ واحد است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟

$$(1) (-1, -2) \quad (2) (0, -2) \quad (3) (0, -1) \quad (4) (1, 2)$$

پاسخ: گزینه ۲

چون دهانه سهمی رو به راست باز می شود پس سهمی افقی و $p > 0$ است از طرفی می دانیم فاصله کانون تا خط هادی برابر

$$y^2 - ay = -ax \Rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = -ax + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = -a\left(x - \frac{a}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4p = -a \\ 2p = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \Rightarrow \begin{cases} S(-1, -2) \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow F(0, -2)$$

سؤال ۲۱: معادله دایره ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد کدام است؟

$$(1) x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \quad (2) x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$$

$$(3) x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0 \quad (4) x^2 + y^2 - 6x + 3y + 9 = 0$$

پاسخ: گزینه ۱

شعاع دایره ای که مرکز آن کانون سهمی باشد و بر هادی مماس شود برابر $2p$ سهمی است پس سهمی را استاندارد می کنیم:

$$x^2 - 6x = 2y - 4 \Rightarrow (x - 3)^2 = 2y - 4 + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = 2\left(y + \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\left(3, -\frac{5}{2}\right) \\ p = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow F\left(3, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, -2) \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$

سؤال ۲۲: دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x - y) = 0$ رو به راست باز می شود و فاصله کانون تا خط هادی آن

۲ واحد است. مختصات کانون این سهمی کدام است؟ (سراسری تجربی)

- (۱) $(-۱, -۲)$ (۲) $(۰, -۲)$ (۳) $(۰, -۱)$ (۴) $(۱, ۲)$

پاسخ: گزینه ۲

فاصله کانون تا فظ هادی برابر $۲p$ است: $۲p = ۲ \Rightarrow p = ۱$

در معادله گسترده اگر ضریب متغیر درجه ۲، یک باشد آنگاه ضریب متغیر درجه ۱ برابر $۴p$ است بنابراین:

$$۴p = -a \Rightarrow a = -۴ \Rightarrow y^2 + ۴y - ۴x = 0 \Rightarrow y^2 + ۴y + ۴ = ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow (y + ۲)^2 = ۴(x + ۱)$$

مرکز سهمی افقی نقطه $S(-۱, -۲)$ است و داریم:

$$F(\alpha + p, \beta) = (۰, -۲)$$

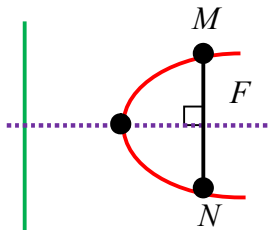
سؤال ۲۳: فاصله نزدیکترین نقاط روی سهمی به معادله $y^2 - ۲y - ۴x = -۱۳$ از خط به معادله $x = -۳$

کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

$$(y - 1)^2 = 4x - 13 + 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4(x - 3) \Rightarrow \begin{cases} S(3, 1) \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = 6$$



وتر کانون سهمی:

پاره خط MN را که در کانون بر محور تقارن سهمی عمود می باشد وتر کانونی سهمی نامیده که اندازه آن برابر $|p|$ است.

😊 فقط یک تمرین کتاب درسی به وتر کانون سهمی پرداخته است و عیناً از آن تمرین در کنکور سراسری تست مطرح شده‌ای به تمرینات این فصل توجه ویژه ای داشته باشید.

📌 نکته: اگر وتر کانونی سهمی قطر یک دایره باشد در این صورت:

- (۱) شعاع دایره برابر $|p|$ است.
- (۲) مرکز دایره همان نقطه کانون سهمی است.
- (۳) این دایره بر خط هادی سهمی مماس است.

سؤال ۲۴: وترى از سهمی به معادله $y^2 = 4(x + y)$ که از کانون بر محور آن عمود باشد قطری از یک دایره

است. معادله این دایره کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ (۲) $x^2 + y^2 + 4y = 0$
 (۳) $x^2 + y^2 - 2y = 2$ (۴) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

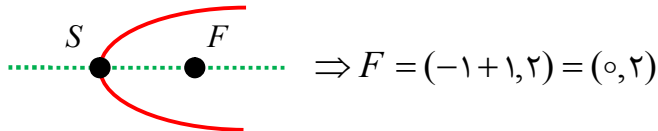
پاسخ: گزینه ۱

$$y^2 = 4(x + y)$$

$$y^2 - 4y = 4x \xrightarrow{+4} y^2 - 4y + 4 = 4x + 4$$

$$\Rightarrow (y - 2)^2 = 4(x + 1) \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$$

سهمی افقی است با رأس $(-1, 2)$ که به دهانه سهمی رو به راست است.



شعاع دایره $2|p| = 2$ است و مرکز دایره $(0, 2)$

$$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

سؤال ۲۵: عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده آن ۶۰ واحد است. فاصله کانون تا رأس آن کدام

است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۲)

۲۵ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۲۰ (۲)

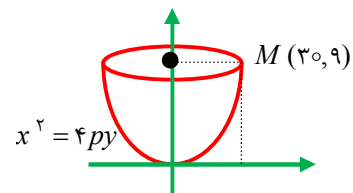
۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل مقابل داریم:

$$x^2 = 4py \xrightarrow{M \text{ روی سهمی قرار دارد}} 900 = 4p \times 9$$

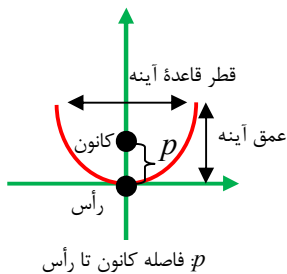
$$\Rightarrow p = 25$$



فاصله کانون تا رأس برابر $p = 25$ است.

آینه سهموی:

😊 دو سؤال از آینه های سهموی در کتاب درسی مطرح شده است. جالب ماجرا آن است که دو تست کنکور مستقیماً از همین تمرینات آمده اند. شما به کمک فرمول ویژه زیر می توانید به راحتی این تست ها را حل کنید:



$$(عمق آینه) = 4p \times (\text{نصف قطر قاعده آینه})^2$$

سؤال ۲۶: عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده آن ۶۰ واحد است. فاصله کانونی تا رأس آن کدام

است؟

۲۵ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$(نصف قطر قاعده آینه)^2 = 4p \times (عمق آینه) \xrightarrow[\text{عمق آینه}=9]{\text{قطر قاعده}=60} \left(\frac{60}{2}\right)^2 = 4p(9) \Rightarrow 900 = 9(4p) \Rightarrow p = \frac{100}{4} = 25$$

سؤال ۲۷: یک تلسکوپ دارای آینه سهموی است که فاصله رأس تا کانون آن ۷۲ سانتی متر و قطر قاعده آن ۱۶۸

سانتی متر است. عمق آینه در مرکز چند سانتی متر است؟

۲۶/۵ (۴)

۲۶ (۳)

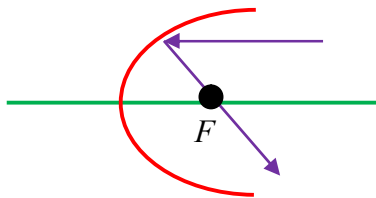
۲۴/۵ (۲)

۲۴ (۱)

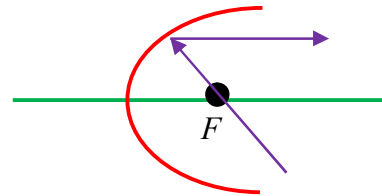
پاسخ: گزینه ۲

$$(نصف قطر قاعده آینه)^2 = 4p \times (عمق آینه) \xrightarrow[\text{قطر قاعده}=168]{p=72} \left(\frac{168}{2}\right)^2 = 4(72)(عمق آینه) \Rightarrow \text{عمق آینه} = \frac{144^2}{4 \times 72} = 24/5$$

ویژگی بازتابندگی سهمی ها:



ب) اگر پرتو موازی محور تقارن سهمی به سهمی برخورد کند پرتو بازتاب از کانون سهمی (F) عبور می کند.



الف) اگر پرتویی از کانون سهمی (F) عبور کرده و به سهمی برخورد کند پرتو بازتاب موازی محور تقارن سهمی است.

* هر وقت کلمه «اشعه» یا «پرتو» در تستی مربوط به سهمی ملاحظه کردید سریعاً یاد این ویژگی افتاده و با محاسبه p و رأس مختصات کانون سهمی را بیابید. به احتمال زیاد خواسته مسأله همان مختصات کانون سهمی است. ☺

سؤال ۲۸: دو اشعه به موازات محور x ها بر سهمی به معادله $y^2 - 2y + 4x = 11$ می تابند. پس از بازتاب در

کدام نقطه متقاطع اند؟

(۴, ۱) (۴)

(۳, ۱) (۳)

(۲, ۳) (۲)

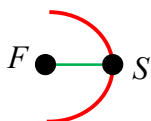
(۲, ۱) (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$y^2 - 2y + 4x = 11$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -4x + 11 + 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = -4x + 12 \Rightarrow (y - 1)^2 = -4(x - 3)$$

یک سهمی افقی است که رأس آن (۳, ۱) است و دهانه سهمی به سمت چپ است پس:



$$\Rightarrow F(3 - 1, 1) = (2, 1)$$

سؤال ۲۹: یک اشعه نورانی را در امتداد خط $x = 3$ و اشعه دیگر را در امتداد خط $x = -1$ از داخل سهمی به

معادله $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ بر آن می تابانیم مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو کدام است.

- (۱) (۱, ۳) (۲) (۱, ۴) (۳) (۲, ۲) (۴) (۲, ۳)

پاسخ: گزینه ۱

هر دو اشعه به موازات محور y ها (یعنی به موازات محور تقارن سهمی قائم $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$) بر آن تابیده شده است پس نقطه تلاقی دو پرتو کانون سهمی می باشد. پس در واقع تست به طور غیرمستقیم مفتضات کانون را فواسته است.

$$x^2 - 2x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 4y + 8 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 4y - 8 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4(y - 2)$$

پس یک سهمی قائم رو به بالا است که $p = 1$ است پس:

$$\Rightarrow F(1, 2 + 1) = (1, 3)$$

سؤال ۳۰: خط هادی یک سهمی به معادله $x = \frac{13}{4}$ است. هر پرتوی که از نقطه $(-\frac{5}{4}, -2)$ بر این سهمی بتابد

در امتداد محور x ها باز می تابد. این سهمی محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟ (سراسری تجربی ۹۴)

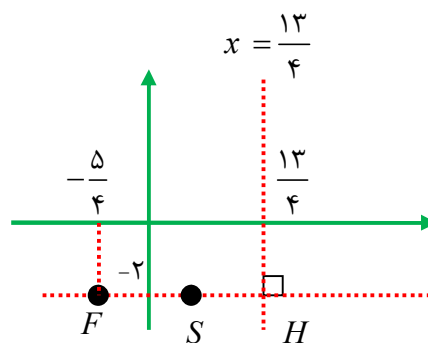
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به ویژگی بازتابندگی سهمی نقطه $(-\frac{5}{4}, -2)$ کانون سهمی است.

$$S = \frac{F + H}{2} = \left(\frac{-\frac{5}{4} + \frac{13}{4}}{2}, -2 \right) = (1, -2)$$

$$P = SF = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$



$$\text{معادله سهمی: } (y + 2)^2 = -4 \times \frac{9}{4}(x - 1) \xrightarrow{y=0} 4 = -9(x - 1) \Rightarrow x - 1 = -\frac{4}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

سؤال ۳۱: دو اشعه به موازات محور x ها بر سهمی $y^2 - 4y = 6x + 2$ می تابند. این دو اشعه پس از بازتاب در

کدام نقطه متقاطع هستند؟

- (۱) $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

پاسخ: گزینه ۲

بازتاب پرتوهایی که به موازات محور سهمی بر سهمی می تابند از کانون سهمی می گذرند. با توجه به اینکه سهمی افقی (متغیر y) از درجه ۲ است (لذا محور سهمی موازی محور x ها است و در نتیجه بازتاب دو اشعه در کانون متقاطع هستند. برای به دست آوردن کانون معادله را به صورت استاندارد می نویسم:

$$(y - 2)^2 = 6x + 6 = 6(x + 1)$$

نوع سهمی افقی و دهانه آن به سمت راست است.

$$S(-1, 2), 4p = 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2} \Rightarrow F(\alpha + p, \beta) = \left(-1 + \frac{3}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

سؤال ۳۲: یک پرتو از کانون سهمی به معادله $y^2 + 2y - 6x + 4 = 0$ تابیده و با محور x ها زاویه 45° می

سازد معادله بازتاب آن کدام است؟ (سراسری تجربی)

- (۱) $y = 2 + 3\sqrt{2}$ (۲) $y = 3 + \sqrt{2}$ (۳) $y = 2 + 2\sqrt{3}$ (۴) $y = 2 + \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۱

معادله استاندارد سهمی به صورت $(y + 1)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$ است نوع سهمی افقی و دهانه آن به سمت راست با رأس

$$F(\alpha + p, \beta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, -1\right) = (2, -1) \quad 4p = 6, S\left(\frac{1}{2}, -1\right) \text{ است لذا:}$$

پرتو از کانون گذشته و با محور x ها زاویه 45° ساخته است لذا:

$$m = \tan 45^\circ = 1, F(2, -1) \Rightarrow y + 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 3$$

پرتوها پس از برخورد به سهمی به موازات محور سهمی بازتاب می شوند. مثل تلاقی خط $y = x - 3$ و سهمی را مشخص می کنیم:

$$\begin{cases} (y + 1)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ y = x - 3 \Rightarrow x = y + 3 \end{cases} \Rightarrow (y + 1)^2 = 6\left(y + 3 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y^2 - 4y - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 72 \Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2 + 3\sqrt{2} \text{ یا } y = 2 - 3\sqrt{2}$$

سؤال ۱۳۱: نقطه $S(-1/6, -1)$ رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور x ها بر این سهمی بتابد به نقطه

$(0/9, -1)$ باز می تابد. این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)

- (۱) $-6, 4$ (۲) $-5, 3$ (۳) $-4, 2$ (۴) صفر و -2

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به ویژگی های بازتابندگی سهمی نقطه $(0/9, -1)$ کانون سهمی است.

$$S(-1/6, -1), F(0/9, -1) \Rightarrow p = SF = 0/9 - (-1/6) = 2/5$$

F, S روی خط $y = -1$ قرار دارند لذا سهمی افقی و با توجه به موقعیت نقطه های F, S دهانه آن به سمت راست است
لذا:

$$(y+1)^2 = 10(x+1/6) \xrightarrow{x=0} (y+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow (y+5)(y-3) = 0 \Rightarrow y = 3, y = -5$$

سؤال ۱۳۲: عرض از مبدأ خط گذرنده از کانون سهمی $4x^2 - 20x - 8y + 33 = 0$ و موازی خط $y = 2x - 1$

کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{7}{2}$ (۳) 1 (۴) $-\frac{9}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

اگر دو خط با هم موازی باشند آنگاه شیب آنها با هم برابرند شیب خط $y = 2x - 1$ برابر ۲ است. لذا شیب خط گذرنده از کانون برابر $m = 2$ است. معادلات کانون سهمی را با استاندارد کردن معادله آن به دست می آوریم:

$$4(x^2 - 5x) = 8y - 33 \Rightarrow 4\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) = 8y - 33 \Rightarrow 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 8y - 8 = 8(y - 1)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 2(y - 1)$$

سهمی قائم با رأس $S\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ و $4p = 2$ با دهانه رو به بالا است لذا:

$$p = \frac{1}{2}, F(\alpha, \beta + p) = \left(\frac{5}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), m = 2$$

$$\Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = 2x - \frac{7}{2}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط برابر $-\frac{7}{2}$ است.

سؤال ۳۵: محور l خط هادی سهمی ای است که کانون آن روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد. اگر سهمی از نقطه $M(2, 4)$ بگذرد و M رأس سهمی نباشد، فاصله کانونی سهمی کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

محور l خط هادی سهمی است لذا محور تقارن بر محور y ها عمود است و در نتیجه موازی محور x ها می باشد پس سهمی افقی است. کانون سهمی روی خط $y = x$ قرار دارد بنابراین مقدمات F به صورت $F(\beta, \beta)$ است. طبق تعریف سهمی فاصله $M(2, 4)$ از کانون و خط هادی ($x = 0$) یکسان است بنابراین:

$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(\beta - 2)^2 + (\beta - 4)^2} = 2 \Rightarrow (\beta - 2)^2 + (\beta - 4)^2 = 4$$

$$\Rightarrow (\beta^2 - 4\beta + 4) + (\beta^2 - 8\beta + 16) = 4 \Rightarrow \beta^2 - 6\beta + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (\beta - 2)(\beta - 4) = 0 \Rightarrow \beta = 2 \text{ یا } \beta = 4$$

نقطه $(2, 4)$ رأس سهمی نمی باشد لذا $\beta = 4$ غیر قابل قبول است و در نتیجه:

$$\beta = 2 \Rightarrow F(2, 2) \Rightarrow 2p = \text{فاصله } F \text{ تا خط هادی} = 2 \Rightarrow p = 1$$

سؤال ۳۶: در نمودار سهمی $3(y - 1)^2 = kx + 2$ فاصله کانون تا رأس برابر ۱ است. مقدار k کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۶) ۳ (۹) ۴ (۱۲) (سراسری تجربی)

پاسخ: گزینه ۴

معادله را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$3(y - 1)^2 = k \left(x + \frac{2}{k} \right) \Rightarrow (y - 1)^2 = \frac{k}{3} \left(x + \frac{2}{k} \right) \Rightarrow \left| \frac{k}{3} \right| = 4p \Rightarrow p = \frac{|k|}{12}$$

$$\text{فاصله کانونی تا رأس} = SF = p = 1 \Rightarrow \frac{|k|}{12} = 1 \Rightarrow |k| = 12 \Rightarrow k = \pm 12$$

سؤال ۳۷: معادله دایره ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله $y = \frac{1}{8}(4 + 4x - x^2)$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0 \quad (۲) \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 2 = 0 \quad (۴) \qquad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱

شعاع دایره ای که مرکز آن کانون سهمی باشد و بر خط هادی مماس باشد برابر $r = 2$

$$y = \frac{1}{8}(4 + 4x - x^2) \Rightarrow 8y = 4 + 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = -8y + 4$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = -8y + 8 = -8(y - 1)$$

نوع سهمی قائم و رو به پایین است لذا:

$$\lambda = 4p, S(2, 1) \Rightarrow F(\alpha, \beta - p) = (2, -1)$$

بنابراین معادله دایره به مرکز $O'(2, -1)$ و شعاع $r = 2p = 4$ به صورت زیر است:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

سؤال ۳۸: نقطه $S(2, 1)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور y هاست و از نقطه $A(0, 5)$ می گذرد معادله خط هادی آن کدام است؟

$$y = \frac{1}{4} \quad (1) \quad y = \frac{1}{2} \quad (2) \quad y = \frac{3}{4} \quad (3) \quad y = \frac{3}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

معادله سهمی قائم را می توان به صورت $(x-2)^2 = 4p(y-1)$ نوشت حال نقطه $A(0, 5)$ را در آن قرار می دهیم:

$$(0-2)^2 = 4p(5-1) \Rightarrow p = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

سؤال ۳۹: سهمی با کانون $F(1, 1)$ و خط هادی $x = 3$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می کند اندازه AB چقدر است؟

$$2\sqrt{2} \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 4\sqrt{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

هادی x دارد پس در کانون x چهار تغییر می شود داریم:

$$\begin{cases} F(\alpha + p = 1, \beta = 1) \\ x = \alpha - p = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(2, 1) \\ p = -1 \end{cases} \Rightarrow (y-1)^2 = -4(x-2)$$

$$\xrightarrow{x=0} (y-1)^2 = -4(0-2) \Rightarrow y_{A,B} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = (1+2\sqrt{2}) - (1-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

سؤال ۴۰: اگر $F(a, 1)$ کانون سهمی $x^2 - 2x + 4y = b$ باشد خط هادی آن کدام است؟

$$y = 2 \quad (1) \quad y = 1 \quad (2) \quad y = 3 \quad (3) \quad y = -1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

سهمی را استاندارد می کنیم:

$$x^2 - 2x + 4y = b \Rightarrow x^2 - 2x = -4y + b \Rightarrow (x-1)^2 = -4y + b + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -4\left(y - \frac{b+1}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} S\left(1, \frac{b+1}{4}\right) \\ P = -1 \end{cases} \Rightarrow F\left(1, \frac{b+1}{4} + (-1)\right) = (a, 1) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$\text{حل معادله خط هادی برابر است با: } y = \frac{b+1}{4} - (-1) = 3$$